

Les corrections géophysiques (déformations de la Terre Solide)

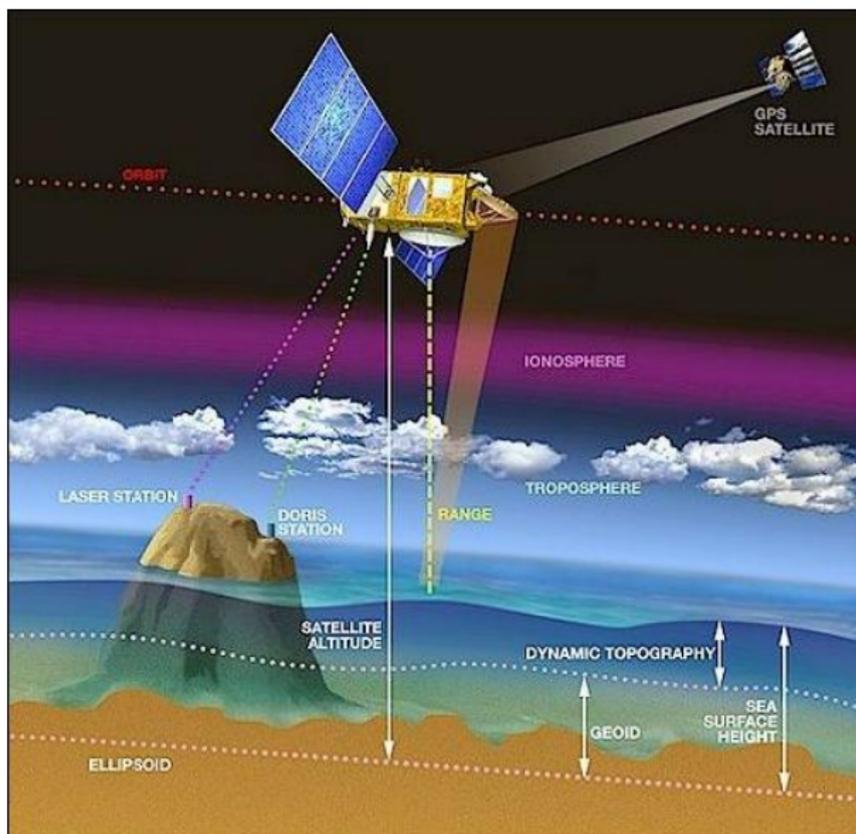
Jean-Paul Boy

EOST/IPGS, Strasbourg, France



- 1 Introduction
- 2 Gravito-(an)élasticité
 - Système des y_i
 - Nombres de Love
- 3 Déformations de la Terre Solide
 - Marées solides
 - Surcharges (marées océaniques, atmosphère, etc.)
 - Rebond post-glaciaire
- 4 Rotation terrestre
 - Mouvement propre Eulérien
 - Cas de la Terre déformable : mouvement propre Chandlérien
- 5 Conclusion

Principe de l'altimétrie



La Terre est un corps déformable

La Terre est un corps déformable (de rigidité voisine de celle du fer) :

- propagation d'ondes sismiques (comportement élastique),
- ellipticité due à la rotation (comportement quasi-fluide).
- ...

La gravito-(an)élasticité permet de modéliser les déformations d'un corps sphérique auto-gravitant, à symétrie sphérique, de comportement (an)élastique, isotrope et sans rotation.

Dans le cas de l'altimétrie, les déformations de la Terre solide interviennent de 2 façons :

- déplacements en surface, et notamment du fond des océans,
- variations du potentiel gravifique de la Terre, et donc influent sur l'orbite des satellites.

Les corrections géophysiques

- 1 Introduction
- 2 Gravito-(an)élasticité
 - Système des y_i
 - Nombres de Love
- 3 Déformations de la Terre Solide
 - Marées solides
 - Surcharges (marées océaniques, atmosphère, etc.)
 - Rebond post-glaciaire
- 4 Rotation terrestre
 - Mouvement propre Eulérien
 - Cas de la Terre déformable : mouvement propre Chandlérien
- 5 Conclusion

Perturbations Eulérienne et Lagrangienne

Soit une particule matérielle de position initiale \vec{r} , sa position à tout instant t est :

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t) \quad \text{où } \vec{u} \text{ est le déplacement de } \vec{r}$$

$\vec{x}(\vec{r}, t)$ est inversible, donc on peut trouver une relation $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}, t)$

Soit une quantité physique :

- $F(\vec{x}, t)$: description *eulérienne* (spatiale),
- $f(\vec{r}, t)$: description *lagrangienne* (matérielle).

On passe de l'une à l'autre par $F(\vec{x}, t) = f(\vec{r}(\vec{x}, t), t)$ et $f(\vec{r}, t) = F(\vec{x}(\vec{r}, t), t)$.

Si F et f évoluent au cours du temps :

$$F(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, 0) + \Delta F(\vec{x}, t)$$

$$f(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, 0) + \delta f(\vec{r}, t)$$

On a $\Delta F(\vec{x}, t) = \Delta f(\vec{r}(\vec{x}, t), t)$ variation *eulérienne* et $\delta f(\vec{r}, t) = \delta F(\vec{x}(\vec{r}, t), t)$ variation *lagrangienne*.

Si les déplacements et les variations sont faibles, on peut relier (linéarisation) les variations eulérienne et lagrangienne :

$$\delta f(\vec{r}, y) \approx \Delta f(\vec{r}, t) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}, 0)$$

Bases physiques de la dynamique

- ① Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- ② Conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} = \rho \vec{\nabla}(\Phi + V) + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}$$

avec Φ auto-gravitation et V potentiel externe exciteur (ex: marées). $\underline{\underline{\Sigma}}$ est le tenseur des contraintes.

- ③ Equation de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi G \rho$$

- ④ Loi rhéologique

Modèles rhéologiques linéaires

1 Élasticité (compressible)

$$\sigma_{kl} = 2\mu\epsilon_{kl} + \lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) \delta_{kl}$$

2 Fluide Newtonien visqueux incompressible

$$\sigma_{kl} = 2\eta\dot{\epsilon}_{kl}$$

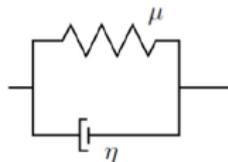
3 Maxwell (incompressible)

$$\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\mu}{\eta}\sigma_{kl} = 2\mu\dot{\epsilon}_{kl}$$



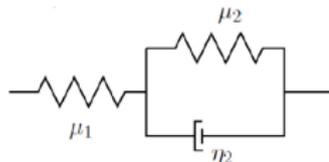
4 Kelvin-Voigt (incompressible)

$$\sigma_{kl} = 2\mu\epsilon_{kl} + 2\eta\dot{\epsilon}_{kl}$$



5 Standard linear solid (SLS)

$$\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\mu_2}{\eta_2}\sigma_{kl} = 2(\mu_1 + \mu_2)\dot{\epsilon}_{kl} + 2\frac{\mu_1\mu_2}{\eta_2}\epsilon_{kl}$$



Equations de la dynamique terrestre en paramètres lagrangiens

On pose :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \Delta \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho$$

avec

$$\Delta \underline{\underline{\Sigma}} = \delta \underline{\underline{\Sigma}} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \underline{\underline{\Sigma}}_0$$

$$\Delta \rho = \delta \rho - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho_0$$

Les fonctions à l'état de référence ($_0$) ne dépendent que de r d'où :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = -P_0 \underline{\underline{I}}$$

$$\vec{\nabla} \Phi_0 = -g_0 \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\nabla} \rho_0 = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

Et on remplace dans les 4 équations physiques de base, en négligeant les phénomènes inertiels ($\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0$)...

Développement en harmoniques sphériques

On définit les y_i comme les développements en harmoniques sphériques du déplacement \vec{u} , des tractions \vec{T} et du potentiel $\Phi + V$:

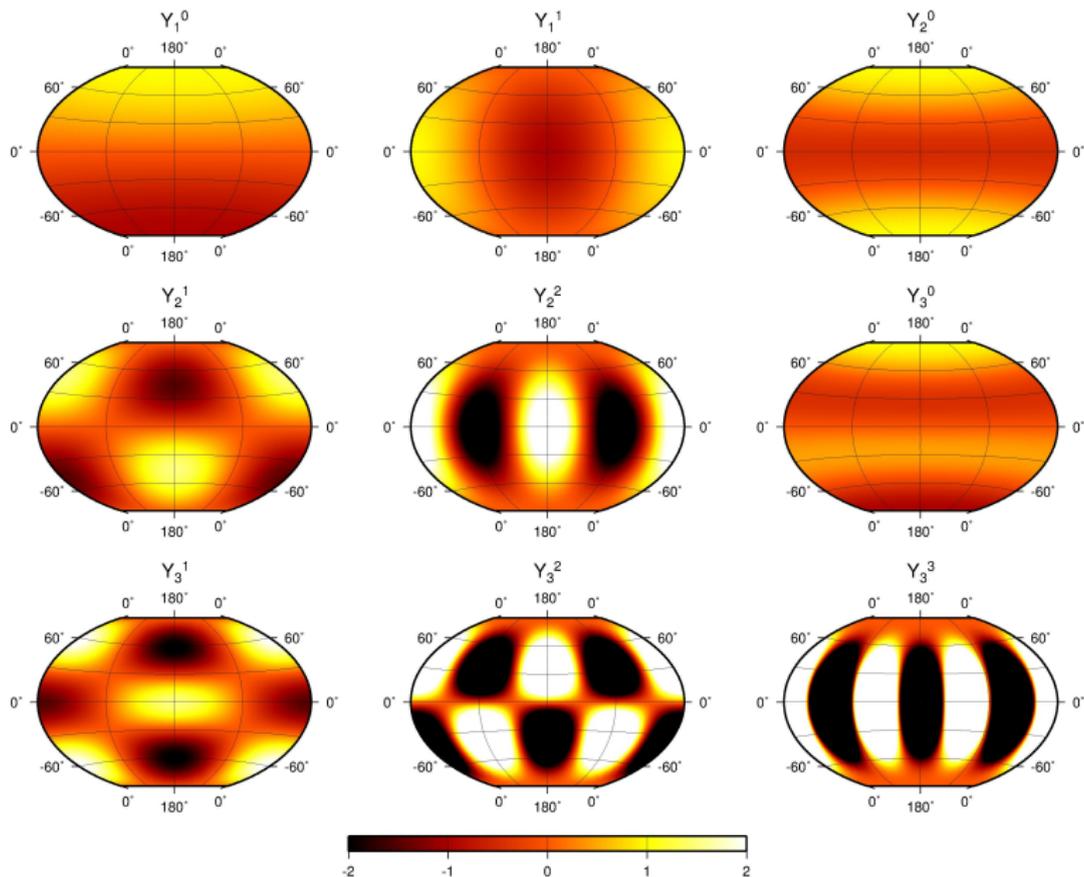
$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{1,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda) + r y_{3,n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) + y_{7,n}(r) \vec{\nabla} \wedge \vec{r} Y_n^m(\theta, \lambda)$$

$$\vec{T} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{2,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda) + r y_{4,n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) + y_{8,n}(r) \vec{\nabla} \wedge \vec{r} Y_n^m(\theta, \lambda)$$

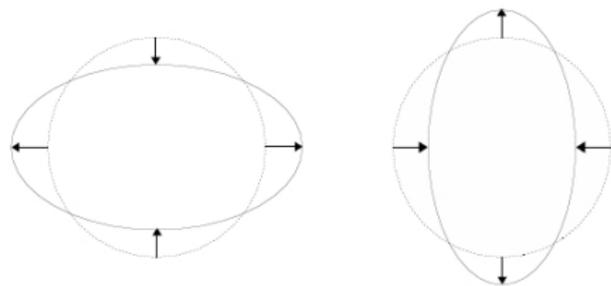
$$\Phi + V = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{5,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda)$$

$$y_{6,n}(r) = \frac{dy_{5,n}(r)}{dr} - 4\pi G \rho_0 y_{1,n}(r)$$

Harmoniques sphériques



Mouvements sphéroïdaux et toroidaux

déformation sphéroïdale ($n=2, m=0$)déformation toroidale ($n=2, m=0$)

Système des y_i

Pour les degrés n différents de 0 et 1, on obtient le système suivant:

$$\dot{y}_1 = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_1}{r} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} y_2 + \frac{\lambda n(n+1)}{\lambda + 2\mu} \frac{y_3}{r}$$

$$\dot{y}_2 = \left[-4\rho g + \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_1}{r} - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + n(n+1) \left[\rho g - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r} y_4 - \rho y_6$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\mu}$$

$$\dot{y}_4 = \left[\rho g - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_1}{r} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + \frac{2\mu \left[\lambda(2n^2 + 2n - 1) + 2\mu(n^2 + n - 1) \right]}{(\lambda + 2\mu)r} \frac{y_3}{r} - \frac{3}{r} y_4 - \frac{\rho}{r} y_5$$

$$\dot{y}_5 = 4\pi G\rho y_1 + y_6$$

$$\dot{y}_6 = -4\pi G\rho n(n+1) \frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r} \frac{y_5}{r} - \frac{2y_6}{r}$$

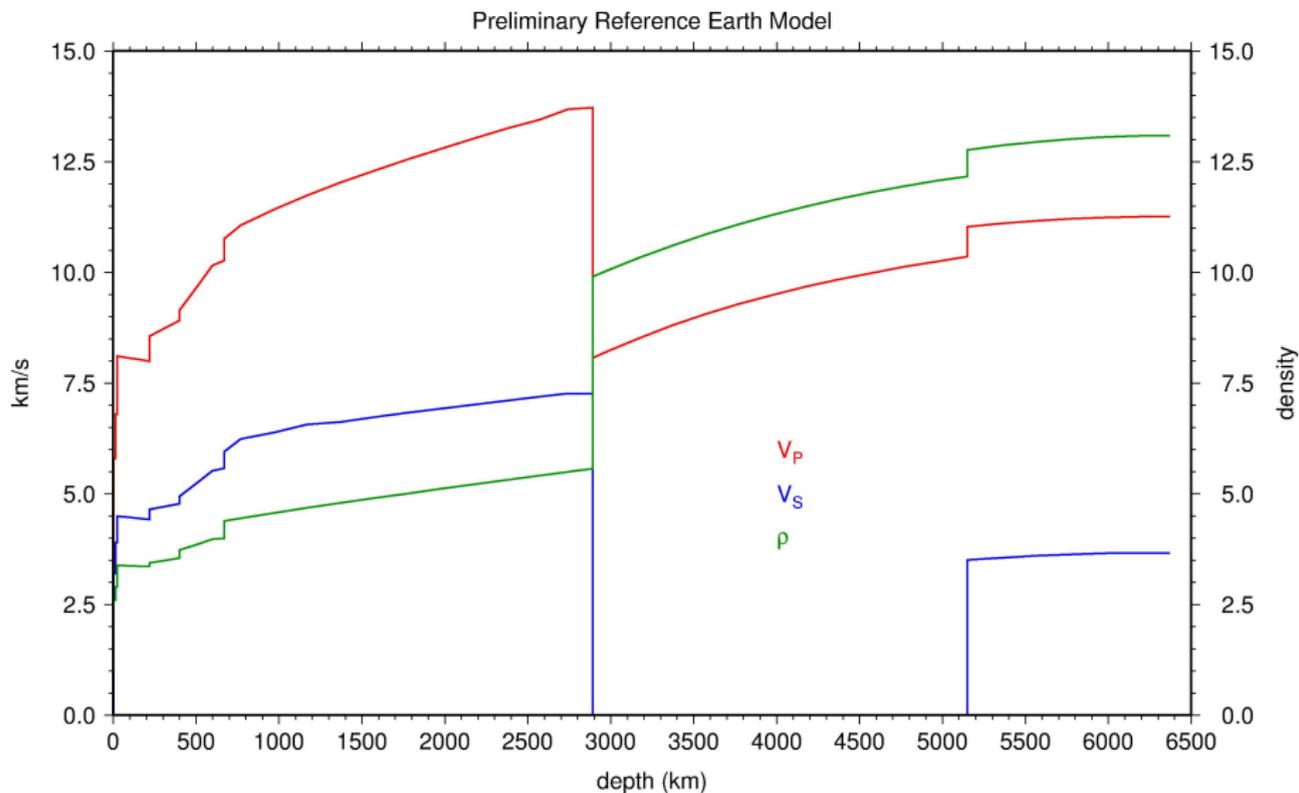
$$\dot{y}_7 = \frac{y_7}{r} + \frac{y_8}{\mu}$$

$$\dot{y}_8 = \frac{\mu(n^2 + n - 2)}{r} \frac{y_7}{r} - \frac{3y_8}{r}$$

$\dot{y}_i(r) = c_{i,j} y_j(r)$ avec $i, j = 1 \dots 6$: système sphéroïdal,

$\dot{y}_i(r) = c_{i,j} y_j(r)$ avec $i, j = 7 \dots 8$: système toroidal.

Modèle de Terre



Nombres de Love de potentiel

On considère un potentiel perturbateur :

$$V = \sum_n V_n \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \lambda)$$

Conditions aux limites :

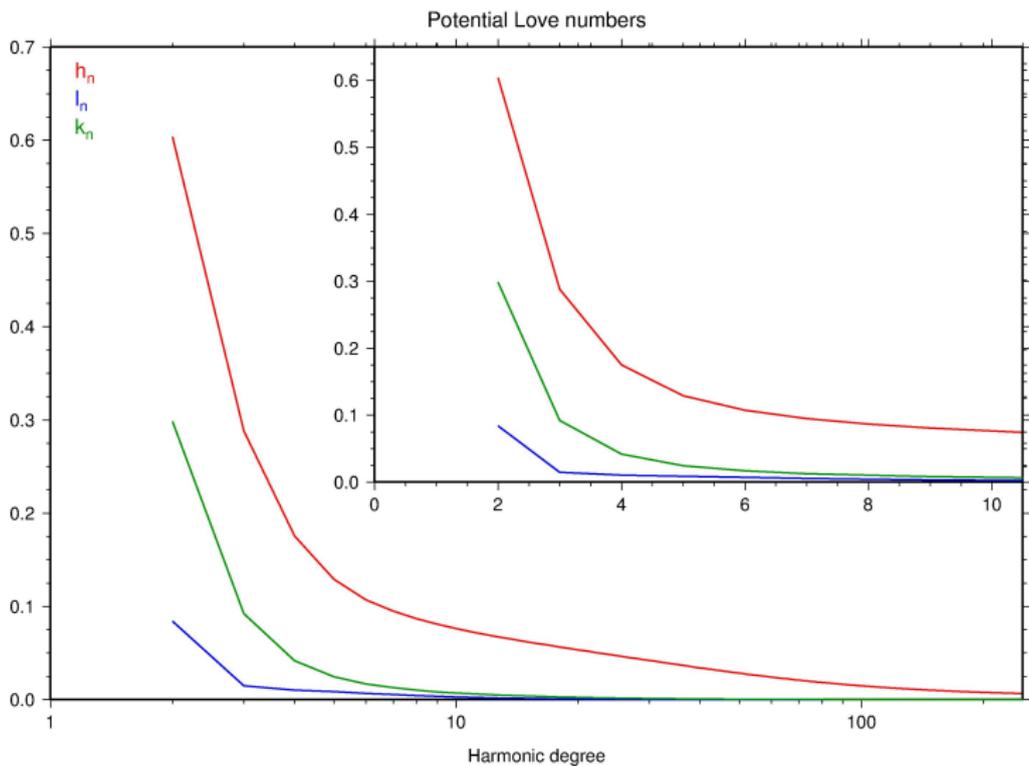
- surface libre : $y_2(a) = 0$ et $y_4(a) = 0$
- $y_6(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} V_n$ (voir annexes).

$$y_1(a) = h_n \frac{V_n}{g_0}$$

$$y_3(a) = l_n \frac{V_n}{g_0}$$

$$y_5(a) = (1 + k_n) V_n$$

Nombres de Love de potentiel



Nombres de Love de pression

On considère que la Terre est soumise à un champ de pression externe P_n .

Conditions aux limites :

- $y_2(a) = -P_n$ et $y_4(a) = 0$
- $y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = 0$

$$y_1(a) = \bar{h}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0}$$

$$y_3(a) = \bar{l}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0}$$

$$y_5(a) = \bar{k}_n \frac{P_n}{\rho_T}$$

Nombres de Love de surcharge

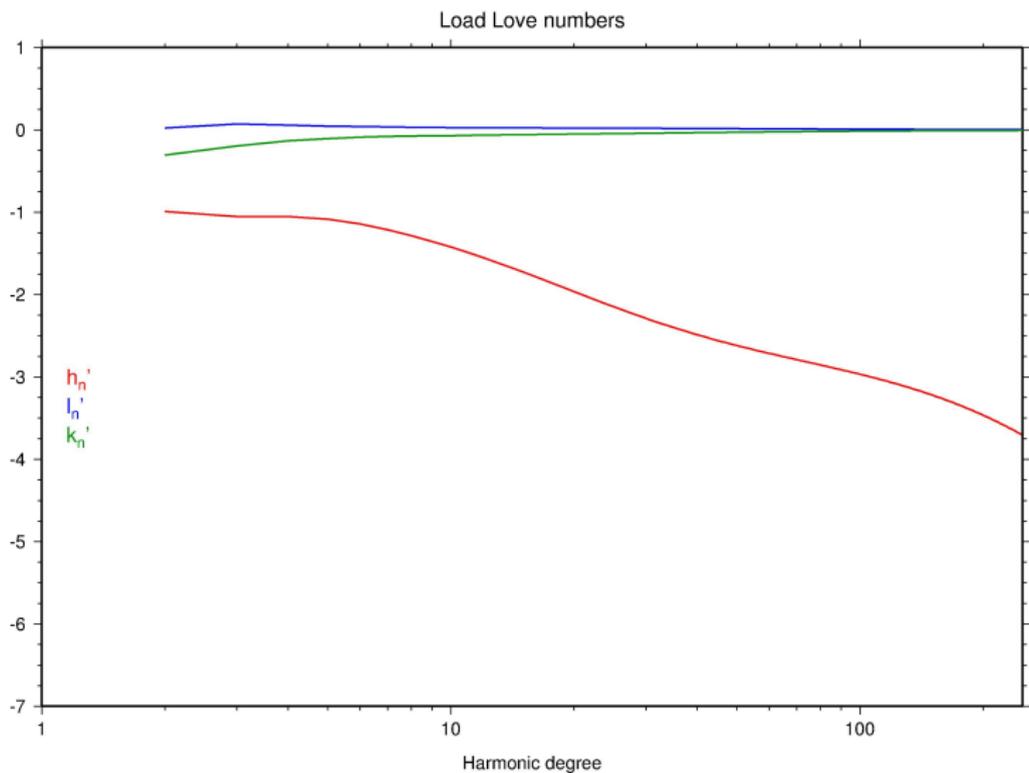
Si l'effet de pression est dû à une modification de masse, il faut alors ajouter l'effet d'attraction ; on a alors la somme des deux effets précédents (potentiel et pression). Une densité superficielle en surface de la Terre σ exerce une pression $P = -g_0\sigma$; on peut déterminer le potentiel d'attraction comme $V'_n = \frac{3g_0}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\rho_T}$. En faisant la somme des deux effets, on introduit alors les nombres de Love de surcharge :

$$y_1(a) = \bar{h}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0} + h_n \frac{V'_n}{g_0} = h'_n \frac{V'_n}{g_0}$$

$$y_3(a) = \bar{l}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0} + l_n \frac{V'_n}{g_0} = l'_n \frac{V'_n}{g_0}$$

$$y_5(a) = \bar{k}_n \frac{P_n}{\rho_T} + (1 + k_n) V'_n = (1 + k'_n) V'_n$$

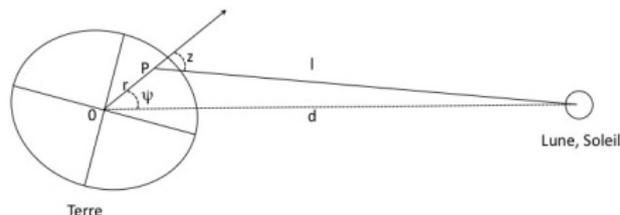
Nombres de Love de surcharge



Les corrections géophysiques

- 1 Introduction
- 2 Gravito-(an)élasticité
 - Système des y_i
 - Nombres de Love
- 3 Déformations de la Terre Solide
 - Marées solides
 - Surcharges (marées océaniques, atmosphère, etc.)
 - Rebond post-glaciaire
- 4 Rotation terrestre
 - Mouvement propre Eulérien
 - Cas de la Terre déformable : mouvement propre Chandlérien
- 5 Conclusion

Potentiel de marées (1/2)



avec z la distance zénitale et $\psi \approx z$.

La force de marées \vec{F}_M est la différence entre l'attraction par l'astre au point P et au centre de la Terre O .

$$\vec{F}_M = \frac{GM}{|AP|^3} \vec{PA} - \frac{GM}{|OA|^3} \vec{OA}$$

On peut montrer que cette force dérive du potentiel suivant :

$$W_M = \frac{GM}{|AP|} - \frac{GM}{|OA|^3} \vec{OP} \cdot \vec{OA}$$

$|AP|^{-1}$ est la fonction génératrice des polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{|AP|} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos z)$$

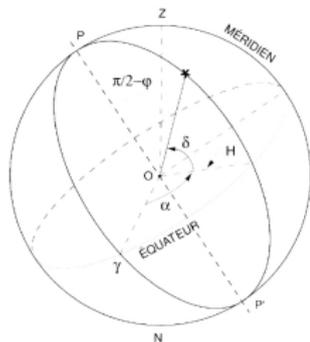
$$\frac{\vec{OP} \cdot \vec{OA}}{|OA|^3} = \frac{1}{d^3} (rd \cos z) = \frac{r}{d^2} \cos z$$

On obtient donc l'expression du potentiel de marées (défini à une constante près) :

$$W_M = \frac{GM}{d} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos z)$$

La distance zénitale z dépend de la position de l'astre (déclinaison δ et angle horaire H) et de la position du point P .

Potentiel de marées (2/2)



d'après Pascoli, 1997.

On a la relation (trigonométrie sphérique) :

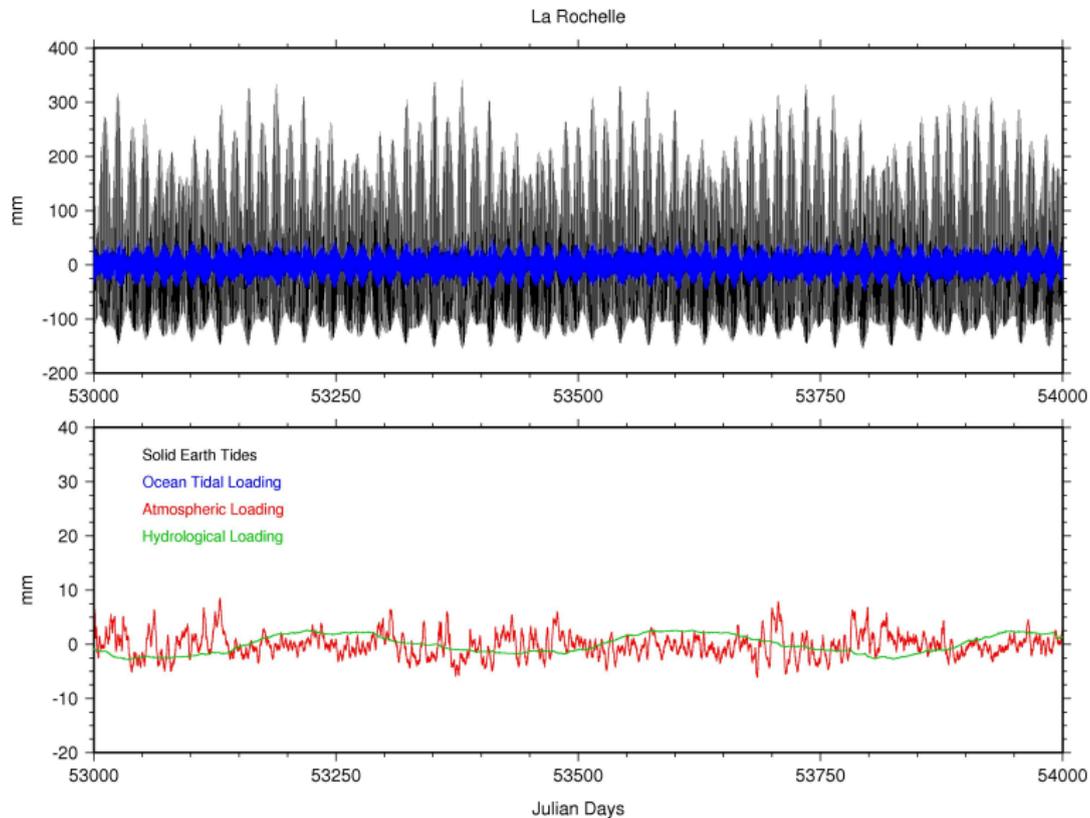
$$\cos z = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \theta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \sin \theta \cos H$$

avec l'angle $H = H_G - \lambda$ comprenant la projection du mouvement de l'astre dans le plan équatorial et la rotation propre de la Terre.

En ne retenant que le degré 2, et en supposant des trajectoires circulaires, on obtient :

$$W_M = GM \frac{r^2}{d^3} \left(P_{20}(\cos \theta) \frac{3 \sin^2 \delta - 1}{2} + R_{21}(\theta, \lambda) \sin \delta \cos \delta \cos H_G - \right. \\ \left. S_{21}(\theta, \lambda) \sin \delta \cos \delta \sin H_G + R_{22}(\theta, \lambda) \frac{1}{4} \cos^2 \delta \cos 2H_G + S_{22}(\theta, \lambda) \frac{1}{4} \cos^2 \delta \sin 2H_G \right)$$

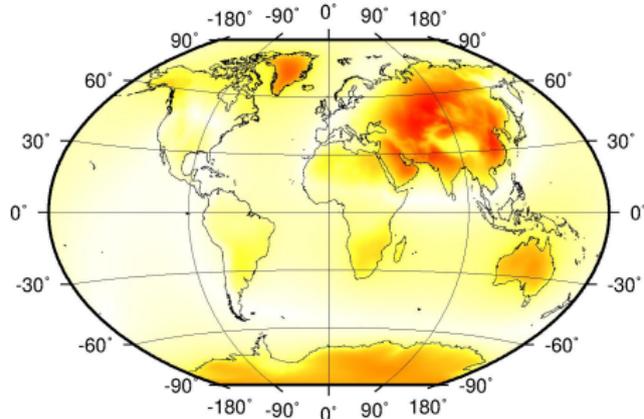
Déplacements verticaux



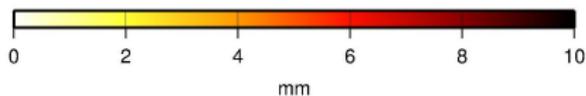
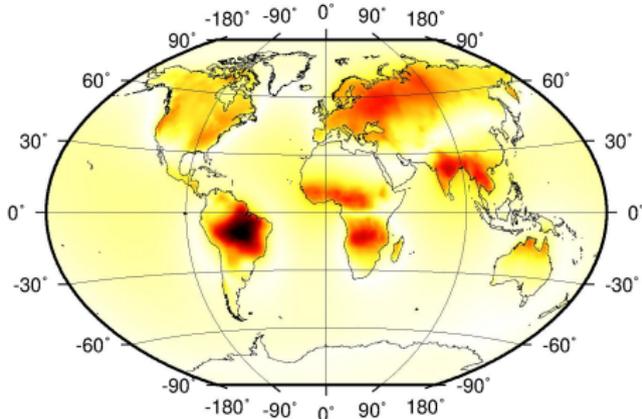
Surcharges superficielles

Déplacements verticaux annuels (amplitude)

Atmospheric loading



Hydrological loading



Impact de la modélisation des surcharges sur les orbites Jason

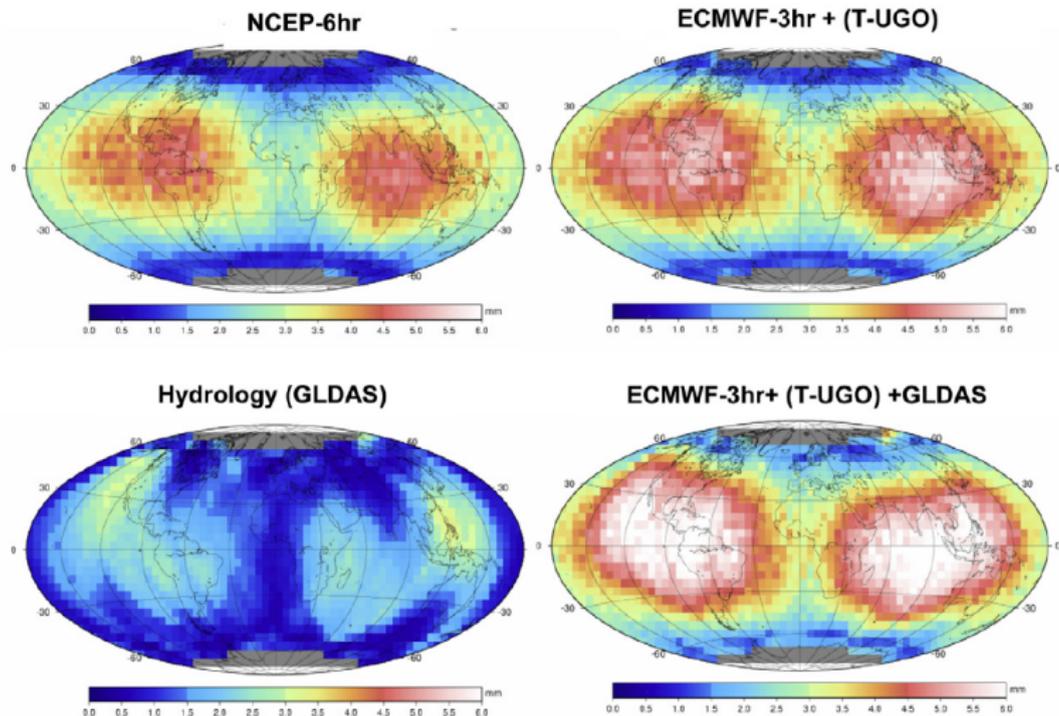
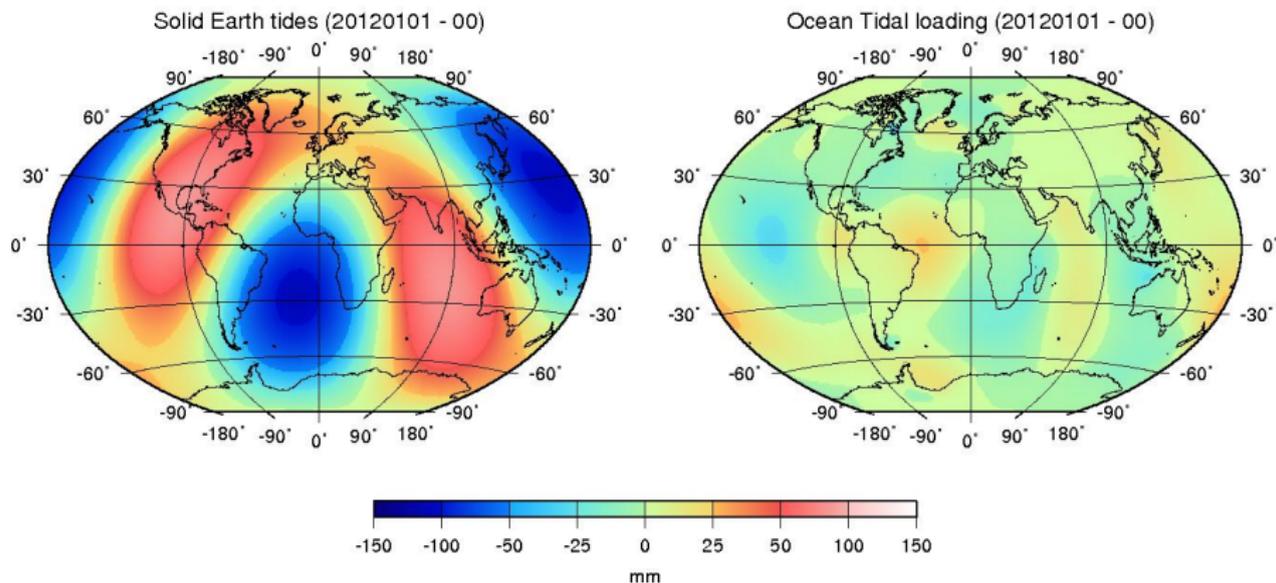


Fig. 6. RMS Radial differences on the Jason-1 orbit (from January 2003 to January 2005) due to each of the geophysical fields tested: (1) NCEP-6hr (atmospheric gravity); (2) ECMWF-3hr (atmospheric gravity) + barotropic ocean (T-UGO); (3) Hydrology (GLDAS); (4) The total signal (ECMWF-3hr + T-UGO + GLDAS).

d'après Lemoine et al. (2010).

Marées solides et surcharge de marées océanique



Nombres de Love visco-élastiques

Dans le cas général d'une rhéologie linéaire, on a une relation linéaire entre $\underline{\underline{\Sigma}}$, $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ (tenseur des contraintes), $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\dot{E}}}$ (tenseur de déformation).

En prenant la transformée de Fourier, on a une relation linéaire entre $\underline{\underline{\Sigma}}(\omega)$ et $\underline{\underline{E}}(\omega)$. Dans le domaine des fréquences, les équations et les conditions aux limites sont les mêmes (principe de correspondance).

On introduit les nombres de Love visco-élastiques :

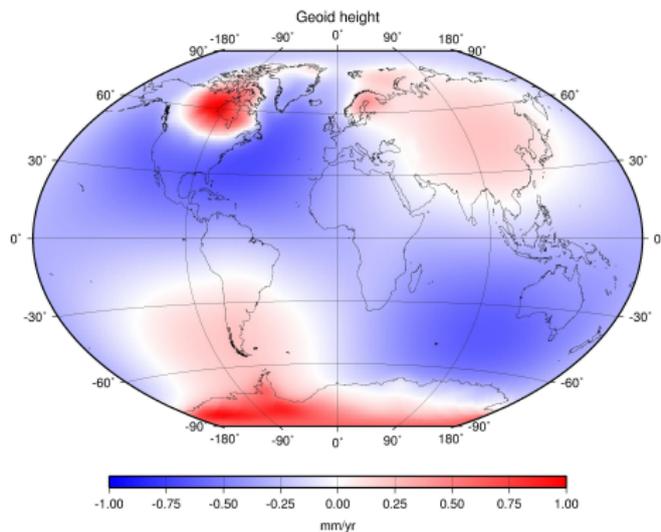
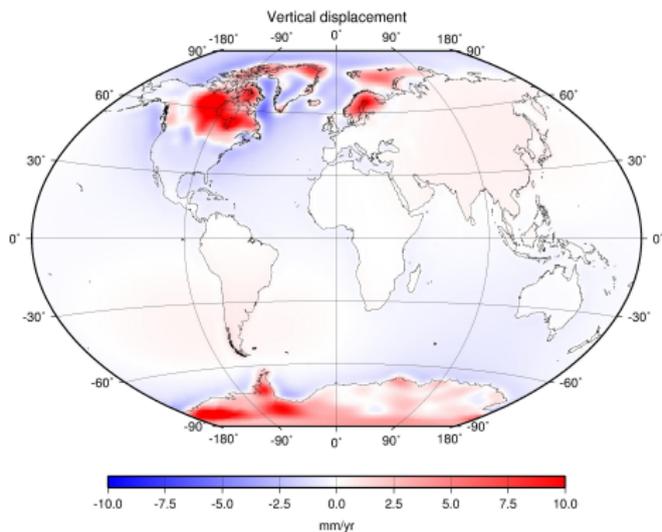
$$y_{1,n} = h_n(\omega) \frac{V_n(\omega)}{g_0} + \bar{h}_n(\omega) \frac{P_n(\omega)}{\rho g_0} + h'_n(\omega) \frac{V'_n(\omega)}{g_0}$$

Dans le domaine temporel, on obtient alors :

$$y_{1,n} = h_n(t) * \frac{V_n(t)}{g_0} + \bar{h}_n(t) * \frac{P_n(t)}{\rho g_0} + h'_n(t) * \frac{V'_n(t)}{g_0}$$

où "*" dénote la convolution temporelle, c'est-à-dire la mémoire visqueuse de la planète.

Modèle de rebond post-glaciaire



Modèle ICE-5G (VM2) d'après Peltier (2004)

Les corrections géophysiques

- 1 Introduction
- 2 Gravito-(an)élasticité
 - Système des y_i
 - Nombres de Love
- 3 Déformations de la Terre Solide
 - Marées solides
 - Surcharges (marées océaniques, atmosphère, etc.)
 - Rebond post-glaciaire
- 4 Rotation terrestre
 - Mouvement propre Eulérien
 - Cas de la Terre déformable : mouvement propre Chandlérien
- 5 Conclusion

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\Gamma}$$

où \vec{H} est Moment Cinétique dans un repère absolu, et $\vec{\Gamma}$ est le couple des forces extérieures.

La Terre étant en rotation ($\vec{\Omega}$), le repère n'est pas absolu :

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{abs} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{rel} + \vec{H}_{rel} \wedge \vec{\Omega}$$

Le moment cinétique s'exprime en fonction du tenseur d'inertie $\underline{\underline{I}}$:

$$\vec{H} = \underline{\underline{I}} \vec{\Omega}$$

Pour une Terre ellipsoïdale à symétrie de révolution :

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Mode propre Eulérien

On cherche les modes propres de rotation, e.g. $\vec{\Gamma} = \vec{0}$; on pose

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 + \Omega \end{pmatrix}$$

Avec $\omega_i \ll \Omega$. Au premier ordre, on obtient le système suivant :

$$A\dot{\omega}_1 + (C - A)\Omega\omega_2 = 0$$

$$A\dot{\omega}_2 - (C - A)\Omega\omega_1 = 0$$

$$C\dot{\omega}_3 = 0$$

On pose $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, avec $i = \sqrt{-1}$; on obtient alors le système suivant

$$A\dot{\omega} - i(C - A)\Omega\omega = 0$$

La solution est de la forme :

$$\omega = \omega_0 e^{i \frac{C-A}{A} \Omega t}$$

soit un mouvement de période $T = 2\pi \frac{A}{C-A} \frac{1}{\Omega} = 304$ jours.

Cas de la Terre déformable

On sait que la Terre est déformable, tout changement de la rotation $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ va déformer la Terre et donc induire des changements de son tenseur d'inertie. $\underline{\underline{I}}$ devient alors :

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & A + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{pmatrix}$$

avec c_{ij} petit devant A et C . On pose $c = c_{13} + ic_{23}$ et $\omega = \omega_1 + i\omega_2$; au premier ordre, on obtient l'équation :

$$A\dot{\omega} - i(C - A)\Omega\omega + \dot{c}\Omega + i\Omega^2 c = 0$$

On peut relier les éléments du tenseur d'inertie au potentiel de degré 2 (voir annexes).

$$c_{13} = -k_2 \frac{a^3}{G} V_{21}^c \quad c_{23} = -k_2 \frac{a^3}{G} V_{21}^s$$

où V_{21} est le potentiel de rotation de degré 2 et d'ordre 1. En surface, on a les expressions du potentiel $V_{21}^c = -\frac{\Omega\omega_1 a^2}{3}$ et $V_{21}^s = -\frac{\Omega\omega_2 a^2}{3}$.

Période de Chandler

On introduit classiquement le nombre de Love fluide k_f . La différence entre C et A est due à la rotation axiale et :

$$C - A = -k_f \frac{a^3}{G} \left(-\frac{\Omega^2 a^2}{3} \right)$$

et donc on obtient :

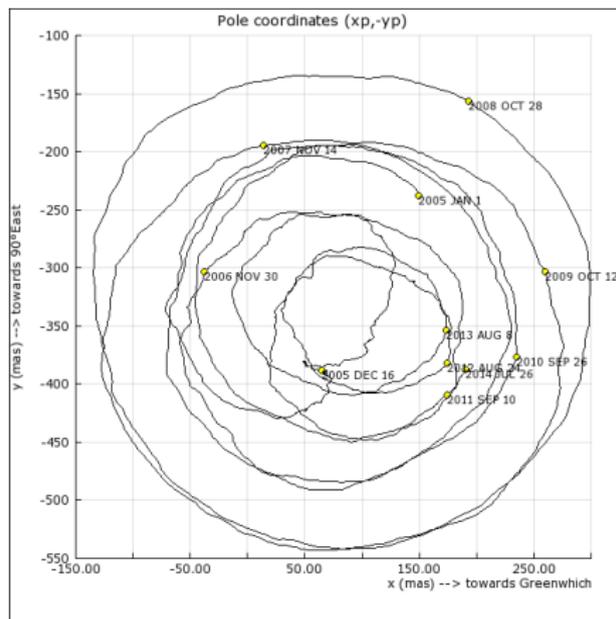
$$c = \frac{k_2}{k_f} (C - A) \frac{\omega}{\Omega}$$

et le système suivant :

$$\dot{\omega} \left(1 + \frac{C - A}{A} \frac{k_2}{k_f} \right) - i\Omega\omega \frac{C - A}{A} \left(1 - \frac{k_2}{k_f} \right) = 0$$

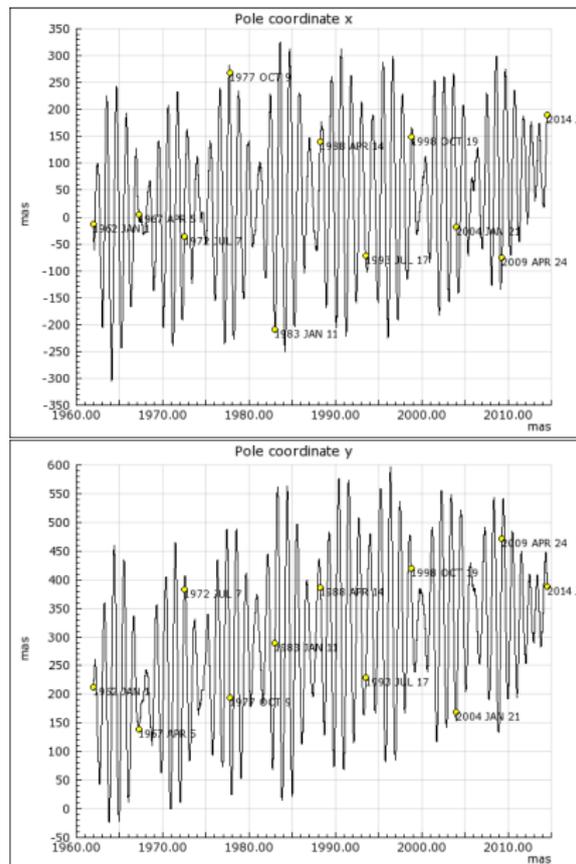
En posant $\alpha = \frac{C-A}{A}$, on obtient un mouvement de pulsation $\alpha\Omega \left(1 - \frac{k_2}{k_f} \right)$, soit de période d'environ 435 jours ($k_2 \approx 0.3$ et $k_f \approx 0.93$).

Marée polaire observée

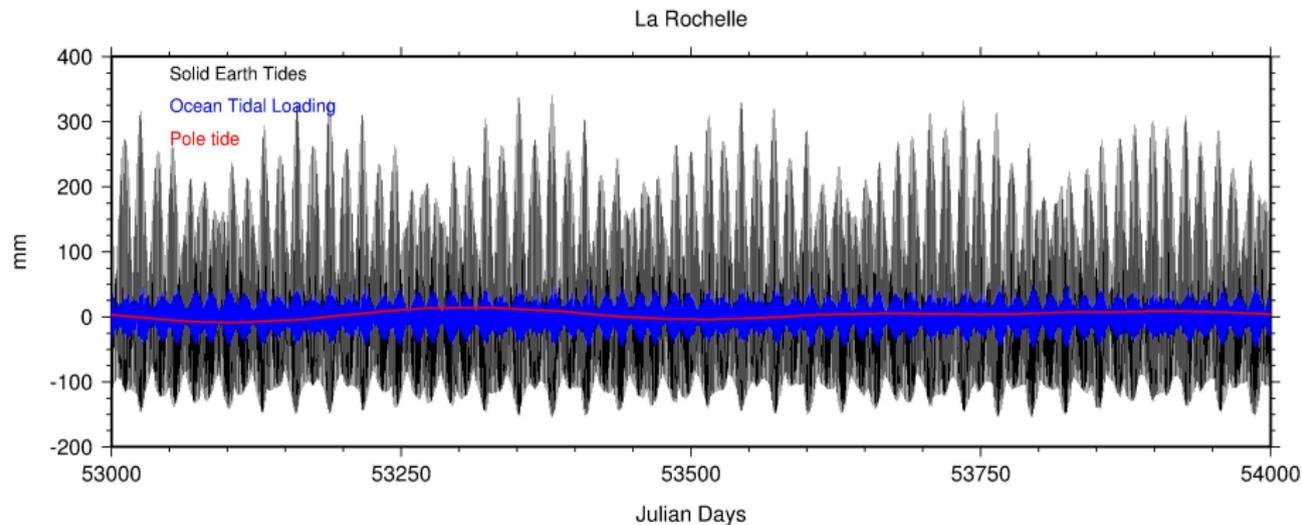


d'après l'IERS (<http://hpiers.obspm.fr/>)

A ce mouvement libre se rajoutent des mouvements forcés (notamment annuels).



Marées solides, surcharge de marées océaniques et marée polaire



Corrections géophysiques

- Les équations de la gravito-(an)élasticité permettent de modéliser les déformations de la Terre Solide, pour des modèles de corps à symétrie sphérique, auto-gravitant, isotrope, sans rotation et de rhéologie (an)élastique linéaire.
- Aux échelles de temps de quelques heures à quelques années, un modèle élastique est suffisant ; pour les longues périodes (rebond post-glaciaire), une rhéologie visco-élastique est généralement adoptée ; la viscosité du manteau est toutefois assez mal contrainte.
- La prise en compte de la géométrie plus complexe de la Terre, on peut utiliser un formalisme de perturbation (cas de l'ellipticité) ; pour la structure 3-D complète (anomalies de masse dans le manteau), il faut passer par des résolutions numériques (éléments finis, ...).
- L'ordre de grandeur des déplacements verticaux en surface est de plusieurs dizaines de centimètres pour les marées solides, quelques centimètres pour les surcharges de marées océaniques (décroissent avec la distance aux côtes) et la marée polaire. Ces contributions sont prises en compte dans tous les traitements opérationnels géodésiques.
- Pour les autres charges (atmosphère, hydrologie, ...), les amplitudes sont centimétriques, mais observables (GPS notamment). Les déplacements horizontaux sont, en gros, 5 fois plus faibles que les déplacements verticaux.

Questions ?

$$\text{Condition aux limites en potentiel : } y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n$$

La déformation de la Terre peut s'interpréter comme une densité superficielle $\rho y_1(a)$, et donc introduit une discontinuité dans le champ gravifique :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^+) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^-) = -4\pi G (\rho y_1(a))$$

Or $\Phi_n = y_5 - V_n$, si on prolonge le potentiel à l'extérieur, on obtient alors (expression en a^+) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left((y_5(a) - V_n) \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \right)$$

La discontinuité du champ gravifique s'écrit alors :

$$-\frac{n+1}{a} (y_5(a) - V_n) - \dot{y}_5(a) + \frac{n}{a} V_n = -4\pi G (\rho y_1(a))$$

En combinant avec la 5^e équation du système des y_i ($\dot{y}_5 = 4\pi G \rho y_1 + y_6$), on obtient :

$$y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n$$

Lien entre produit d'inertie et potentiel gravifique de degré 2

Par définition, on a :

$$c_{13} = - \iiint \rho x_1 x_3 dv \quad \text{et} \quad V(r, \theta, \lambda) = G \iiint \frac{\rho}{l} dv$$

$\frac{1}{l}$ est la fonction génératrice des polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

La formule d'addition donne :

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=-n, m \neq 0}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \left(Y_n^m(\theta, \lambda) Y_n^m(\theta', \lambda') \right)$$

Si on ne s'intéresse qu'au seul terme de degré 2 et d'ordre 1, on a alors

$$V_{21}^C(r, \theta, \lambda) = G Y_2^1(\theta, \lambda) \iiint \frac{\rho}{r} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{Y_2^1(\theta', \lambda')}{3} dv$$

or $x_1 = r' \sin \theta' \cos \lambda'$ et $x_3 = r' \cos \theta'$, et $Y_2^1(\theta', \lambda') = 3 \cos \theta' \sin \theta' \cos \lambda'$, d'où :

$$c_{13} = -\frac{a^3}{G} V_{21}^C(a) \quad \text{et de même} \quad c_{23} = -\frac{a^3}{G} V_{21}^S(a)$$