

Altimétrie spatiale

Le géoïde

Sean Bruinsma / CNES

Introduction

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

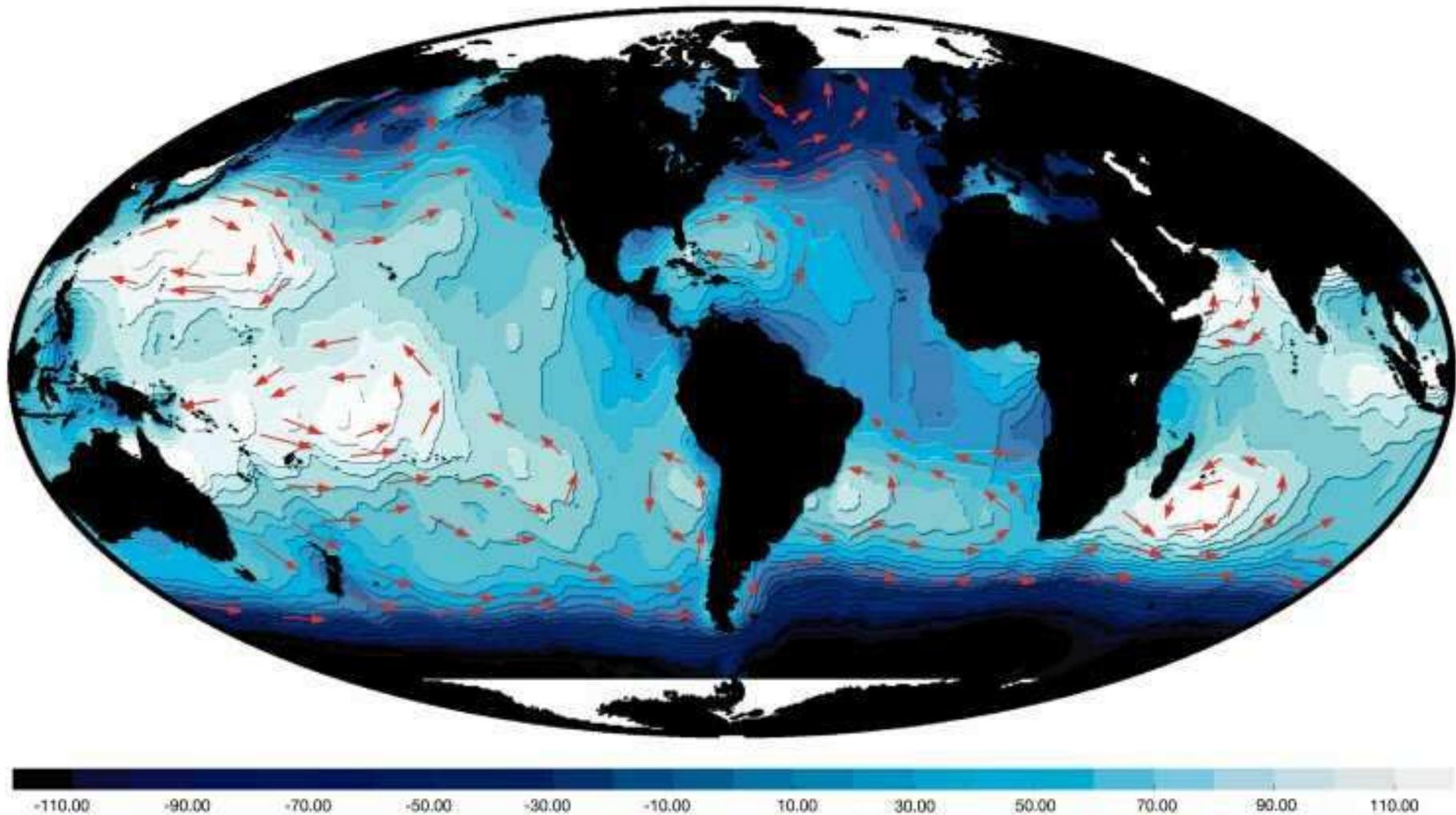
Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

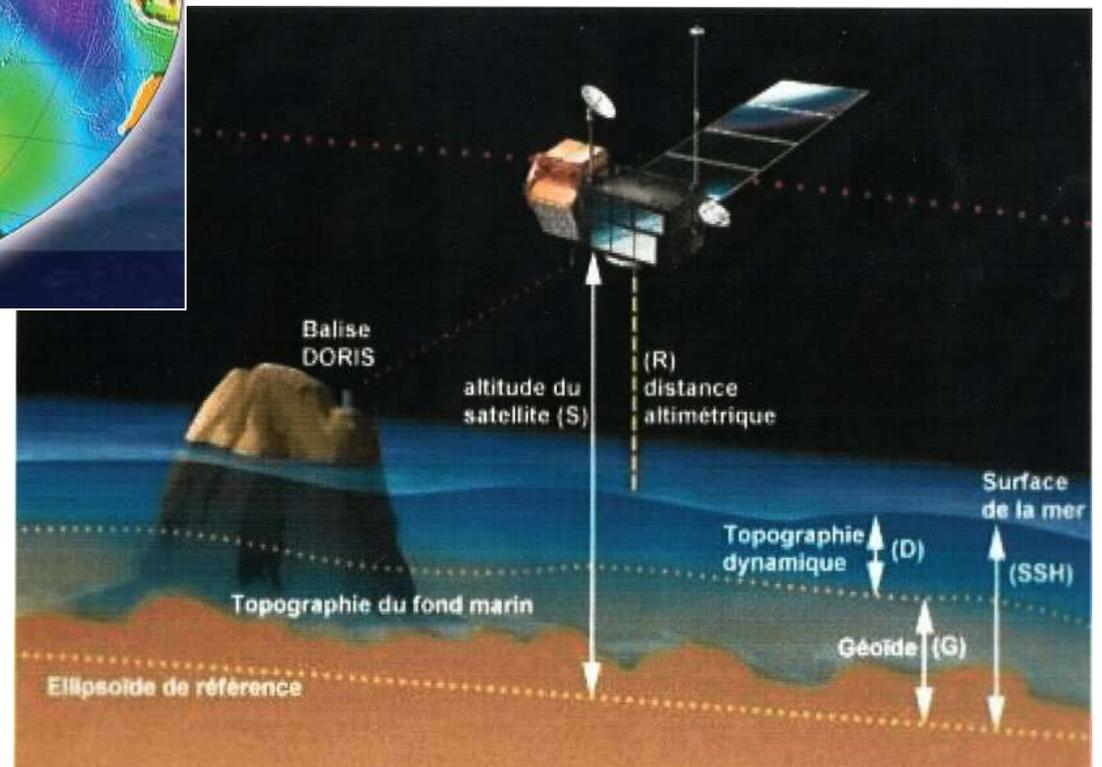
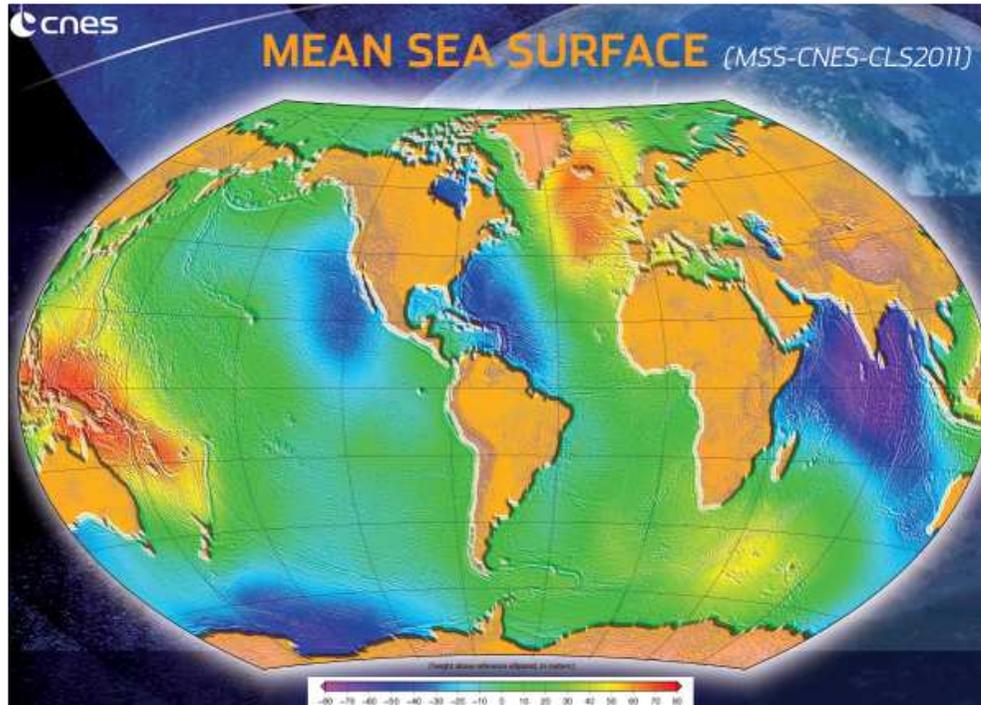
Bathymétrie

La circulation océanique



Ecart (en cm) entre surface moyenne de la mer et surface du géoïde
(= topographie dynamique moyenne)

Les mesures altimétriques : renseignent sur la surface moyenne océanique (proche du géoïde)

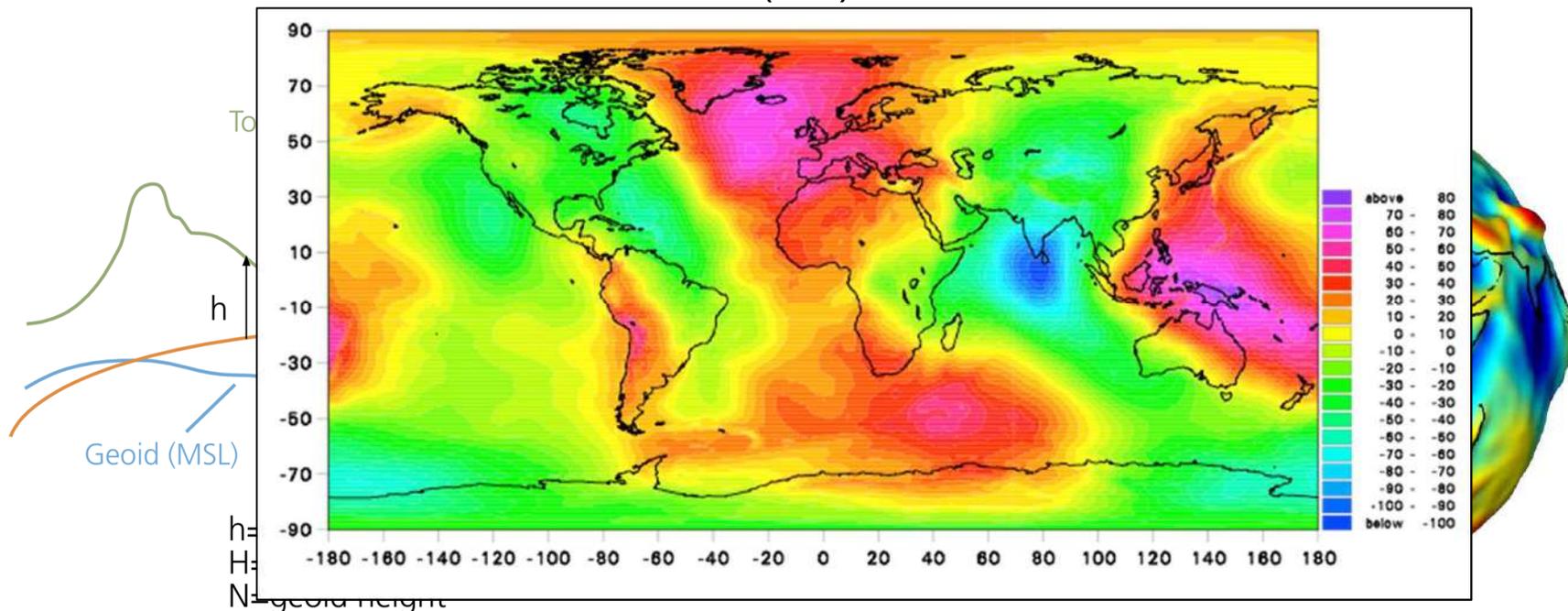


Géoïde :

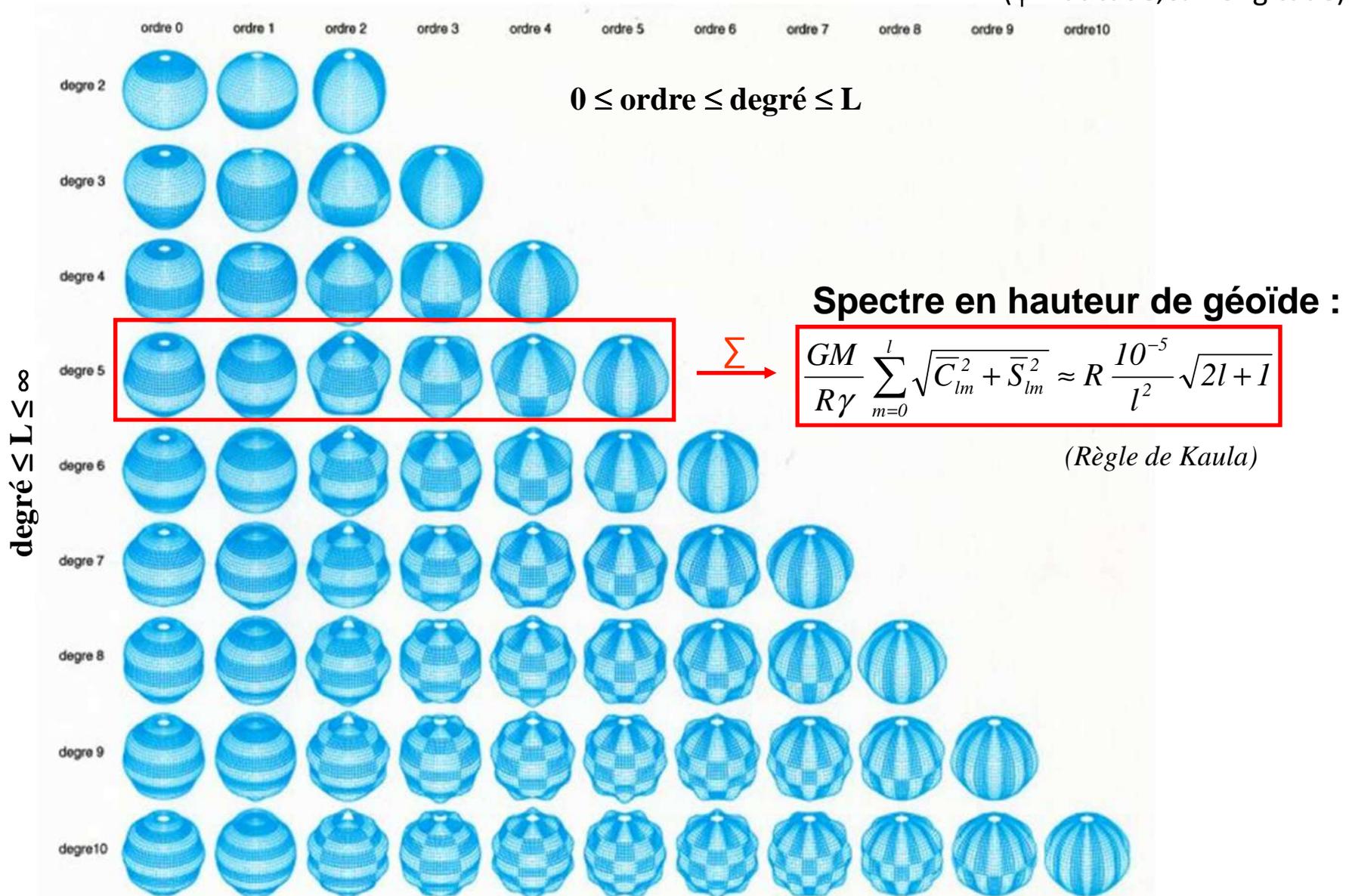
La surface équipotentielle du champ de gravité de la terre ajustée au mieux, au sens du moindre carré, à la surface moyenne des océans (marégraphes, altimétrie). C'est l'hypothétique océan 'au repos', sans courants. C'est la référence des hauteurs physiques.

Modèle global du potentiel terrestre : modèle du potentiel en harmoniques sphériques, tronqué au degré et ordre maximum n . La hauteur du géoïde se calcule à chaque point de la terre.

Résolution du modèle : $20000/n$ (km)



Harmoniques sphériques (de Laplace) : $P_{lm}(\sin\varphi) \cos m\lambda$, $P_{lm}(\sin\varphi) \sin m\lambda$
 (φ : latitude, λ : longitude)



Introduction

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Newton : loi de la gravitation universelle

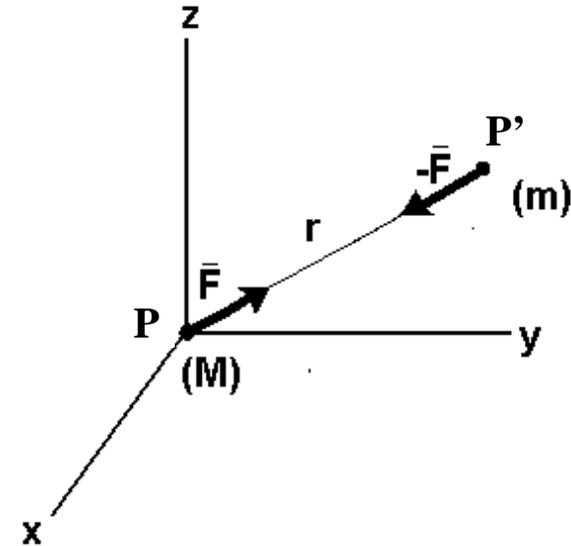
Toute la théorie du champ de gravité repose sur la loi de la gravitation universelle énoncée par Newton :

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Soit en notation vectorielle :

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

Le point P crée en tout point de l'espace un champ dit newtonien qui dérive du potentiel : $U = \frac{GM}{r}$



tel que l'accélération du point P' est :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -GM \frac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -GM \frac{y}{r^3} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} = -GM \frac{z}{r^3} \end{cases}$$

$$\vec{acc}_{P'} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Ce potentiel vérifie l'équation de Laplace (1785):

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Pour un corps de forme aléatoire, la densité peut être définie par:

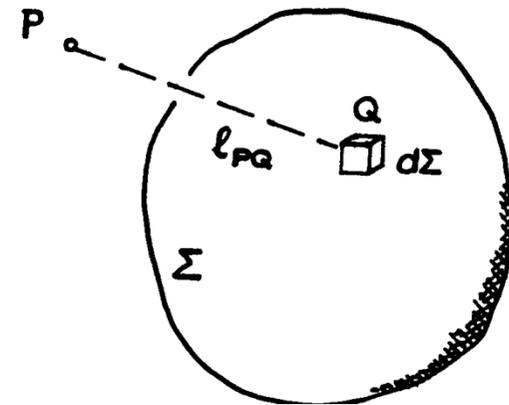
$$\rho = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \Sigma} = \frac{dm}{d\Sigma}$$

Le potentiel gravitationnel V peut s'écrire dans ce cas:

$$V(P) = G \int_{\Sigma} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\Sigma_Q$$

$$\underline{a}(P) = -G \int_{\Sigma} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}^3} \underline{r}_{PQ} d\Sigma_Q$$

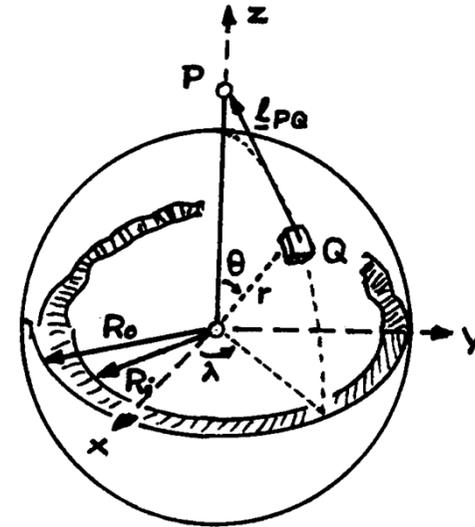
$$\iiint_{\Sigma} = \int_{\Sigma} ; \quad dx_Q dy_Q dz_Q = d\Sigma_Q$$



Exemple du potentiel et l'accélération à la surface d'une sphère creuse.

$$V = \frac{4}{3} \pi G \rho \frac{R_o^3 - R_i^3}{r} = \frac{GM_{shell}}{r}$$

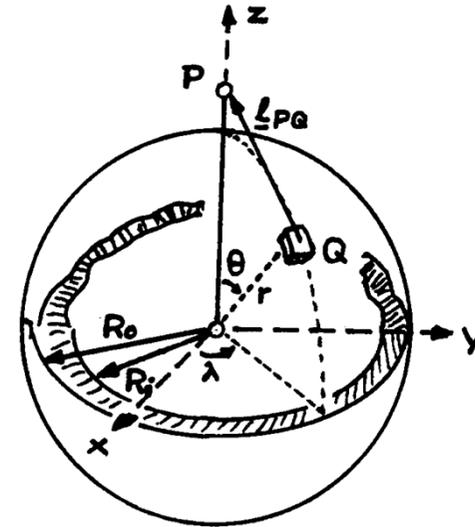
$$a_z = -\frac{4}{3} \pi G \rho \frac{R_o^3 - R_i^3}{r^2} = -\frac{GM_{shell}}{r^2}$$



Exemple du potentiel et l'accélération à la surface d'une sphère creuse.

$$V = \frac{4}{3} \pi G \rho \frac{R_o^3 - R_i^3}{r} = \frac{GM_{shell}}{r}$$

$$a_z = -\frac{4}{3} \pi G \rho \frac{R_o^3 - R_i^3}{r^2} = -\frac{GM_{shell}}{r^2}$$



Et pour une sphère pleine ($R_i = 0$):

$$V = \frac{G \left(\frac{4}{3} \pi \rho R^3 \right)}{r} = \frac{GM}{r}$$

$$a_z = -\frac{GM}{r^2}$$

L'accélération gravitationnelle à la surface de la terre : approximation sphérique

$$R = 6370800 \text{ m}$$

$$\rho = 5515 \text{ kgm}^{-3} \text{ (densité moyenne)}$$

$$G = 6.6732 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\frac{GM}{R^2} = 9.82 \text{ ms}^{-2}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{P ext. } \Sigma : \\
 \text{P int. } \Sigma :
 \end{array}
 \Delta_P V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \begin{cases} 0 & \text{LAPLACE} \\ -4 \pi G \rho(P) & \text{POISSON} \end{cases}$$

NB: Laplace = Poisson si densité=0

Les solutions de l'équation de Laplace sont des fonctions harmoniques

NB2: GOCE va mesurer les gradients de gravité

Théorème de Stokes :

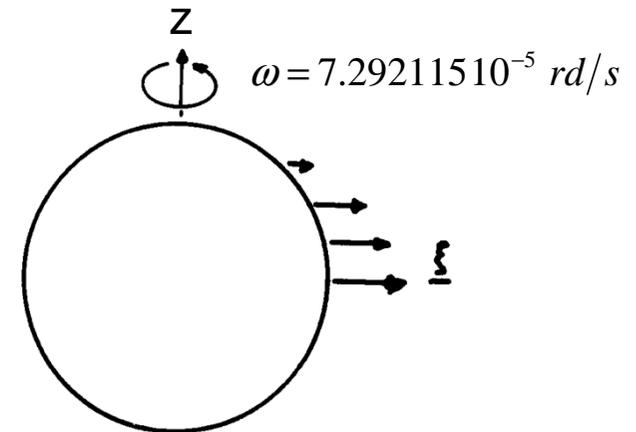
Une fonction V harmonique à l'extérieur de Σ est définie uniquement par ses valeurs à la surface. En revanche, il y a un nombre infini des distributions de masse donnant V comme potentiel extérieur.

Donc nous n'avons pas besoin de connaître la distribution de densité afin de calculer le potentiel à l'extérieur de la terre.

Gravitation et pesanteur

L'accélération centrifuge (max à l'équateur); le repère terrestre tourne

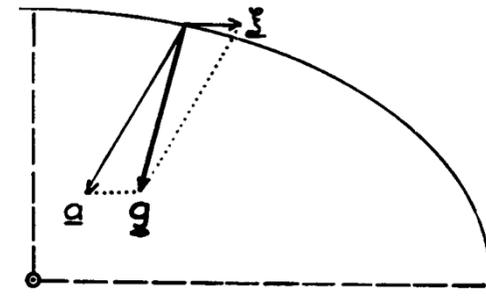
$$F_c \begin{cases} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{cases}$$



Le potentiel de pesanteur W est la somme du potentiel de la gravitation V et de la centrifuge Z :

$$\begin{aligned} W &= V + Z = \text{constant} \quad (= c_0, c_1, c_2, \text{etc}) \\ &= G \int_{\Sigma} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}} d\Sigma + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$W=\text{constant}$ =sont des cas particuliers et on parle d'une surface équipotentielle



Définition du vecteur de gravité g

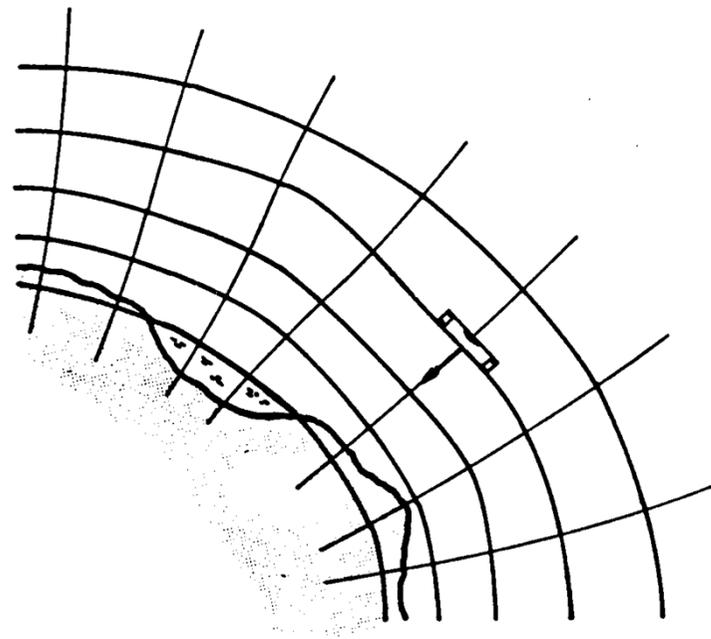
Hauteur physique

La définition naturelle de hauteur émerge de la pesanteur. Les fonctions $W=constante$ définissent des surfaces convexes appelées surfaces de niveau équipotentielle de pesanteur, ou surfaces de niveau.

Le géoïde est la surface de l'océan global au repos (sans courants), qui constitue une équipotentielle de pesanteur, c'est-à-dire une surface où l'eau est en équilibre gravitationnel et n'a de raison de s'écouler dans un sens ou un autre. Le géoïde se prolonge sous les continents, définissant ainsi le niveau zéro des altitudes.

Les directions des fils à plombs (pesanteur) sont perpendiculaires aux surfaces.

Le géoïde (W_0)



Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Développement du potentiel terrestre en harmoniques sphériques

Solution de l'équation de Laplace

$$\Delta_P V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Après transformation en coordonnées sphériques (r, θ, λ) :

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0$$

On suppose qu'une solution de la forme suivante existe:

$$V(\theta, \lambda, r) = Y(\theta, \lambda) f(r)$$

Solution équation différentielle (harmoniques de surface):

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$$

**Solution de l'équation différentielle
(harmoniques de surface) :**

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \begin{matrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{matrix}$$

Et:

$$f(r) = c \cdot r^{-(n+1)}$$

La solution complète à la surface et au-dessus (' R/r '):

$$V(\theta, \lambda, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$

Les coefficients A et B ont l'unité d'un potentiel; on les transforme en coefficients C et S sans unité :

$$A_{nm} = \frac{GM}{R} C_{nm} \quad ; \quad B_{nm} = \frac{GM}{R} S_{nm}$$

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$

Expression du coefficient de degré 0

Le degré 0 agit comme facteur d'échelle de la masse conventionnelle M de la Terre:

$$C_{0,0} = \frac{1}{M} \iiint_V dm = 1$$

GM est défini par sa valeur en Temps Coordonné Géocentrique (TCG). Cette constante gravitationnelle géocentrique, incluant la masse de l'atmosphère, est en fait déduite de l'ajustement d'orbite des satellites Lageos-1 et -2 à partir des données de suivi laser :

$$GM = 3.986004418 \cdot 10^{14} \pm 8 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ (IERS Standards)}$$

Le TCG est une échelle de temps-coordonnée (le t des équations) liée au système de référence spatio-temporel géocentrique. Il diffère du Temps Terrestre (TT), temps-coordonné lié à la réalisation du Temps Atomique International (TAI, appelé temps propre mesurable) et rapporté au géoïde:

$$TT = TAI + 32.184 \text{ s} \text{ (pour assurer la continuité avec le TE)}$$

Dans cette échelle rapporté à un temps mesurable, GM s'obtient par transformation:

$$GM_{TT} = GM_{TCG} (1 - L_G) = 3.986004415 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

avec $L_G \approx 7 \cdot 10^{-10}$

(C'est la valeur adoptée dans les modèles EIGEN)

Expression des coefficients de degré 1

Degré 1 :

$$C_{1,0} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,0}(\sin \varphi') dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \sin \varphi' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V z' dm = \frac{z_G}{a_e}$$

$$C_{1,1} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,1}(\sin \varphi') \cos \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \cos \varphi' \cos \lambda' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V x' dm = \frac{x_G}{a_e}$$

$$S_{1,1} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,1}(\sin \varphi') \sin \lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \cos \varphi' \sin \lambda' dm$$

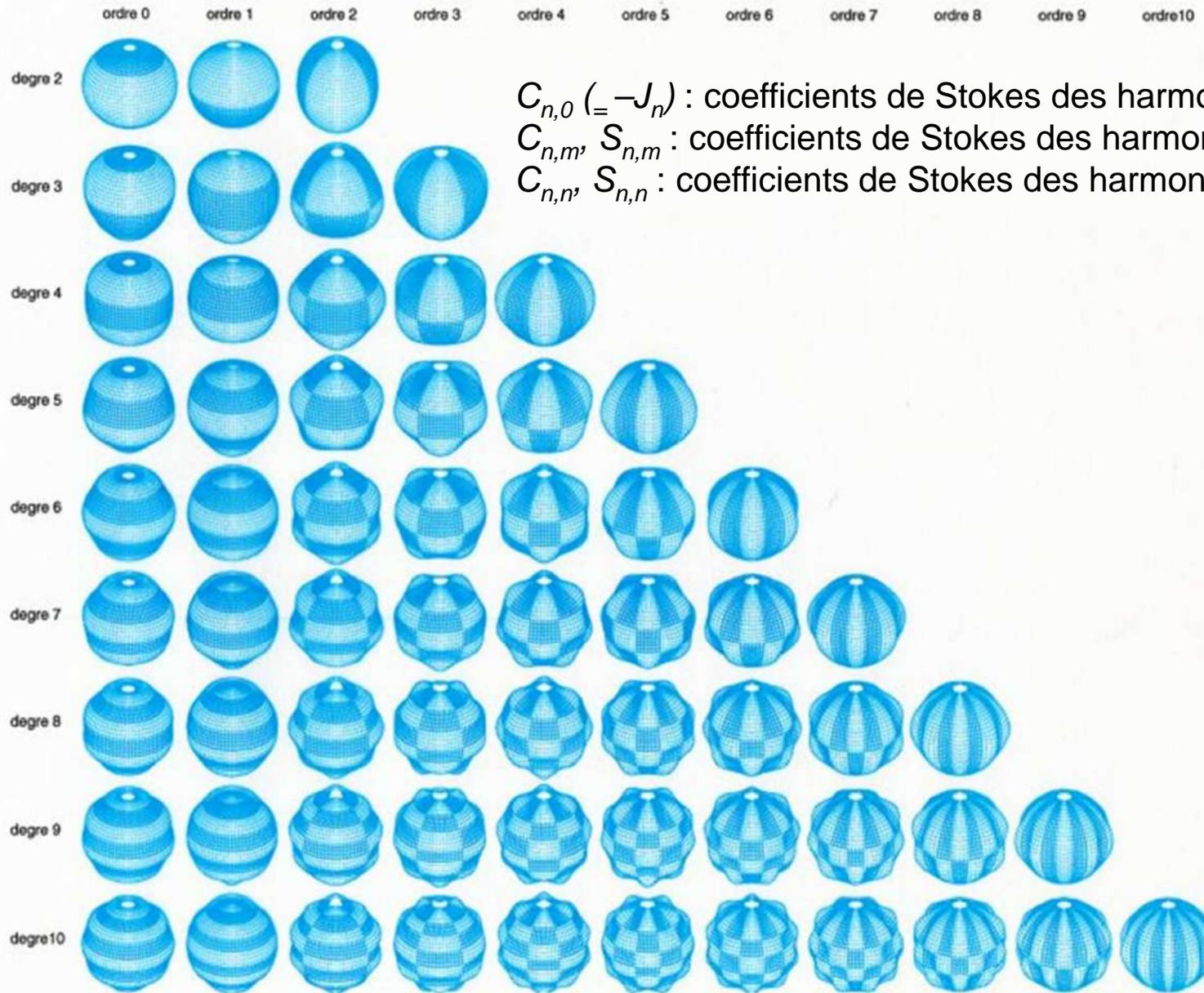
$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V y' dm = \frac{y_G}{a_e}$$

Le degré 1 définit le centre des masses G de la Terre tel que :

$$G \begin{cases} x_G = a_e C_{1,1} \\ y_G = a_e S_{1,1} \\ z_G = a_e C_{1,0} \end{cases}$$

Le degré 1 varie principalement en fonction du transfert saisonnier des masses fluides superficielles. Les satellites orbitant autour du centre des masses, cette variation se répercute d'autant sur l'origine du système de référence terrestre (le centre de figure) dont l'ITRF est la réalisation.

Harmoniques $P_{lm} \cos$



$C_{n,0} (= -J_n)$: coefficients de Stokes des harmoniques zonaux ;
 $C_{n,m}, S_{n,m}$: coefficients de Stokes des harmoniques tesseraux ;
 $C_{n,n}, S_{n,n}$: coefficients de Stokes des harmoniques sectoriaux.

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Le potentiel normal U et la pesanteur normale γ

La Terre est en 1ère approximation un sphère, et en 2ème approximation un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles : l'écart entre les rayons équatorial et polaire est d'environ 21,3 km, soit 3% du rayon. Donc l'approximation la plus simple, sphérique, a des erreurs de l'ordre de 0,3%.

$$U = \frac{GM}{r} \quad ; \quad \gamma = \frac{GM}{r^2}$$

Le choix généralement accepté et mathématiquement assez simple est l'ellipsoïde de référence équipotentielle en rotation, définie par 4 paramètres (a, b, U_0, ω) :

- son centre de gravité coïncide avec celui de la Terre ;
- son axe de révolution est confondu à celui de la Terre;
- il est en rotation à la vitesse de rotation de la Terre ;
- sa masse est égale à la masse de la Terre (avec l'atmosphère);

$$U = V' + Z$$

$$= \frac{GM_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) + Z$$

L'ellipsoïde de référence est symétrique en rotation; U n'est pas une fonction de la longitude λ :

$$U = \frac{GM_o}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} c_{no} P_n(\cos\theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

L'ellipsoïde de référence est symétrique par rapport à l'équateur; n est toujours pair :

$$U = \frac{GM_o}{b} \sum_{n=0(2)}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} c_{no} P_n(\cos\theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Un ellipsoïde est très lisse et la sommation converge très vite; les termes inférieures à 10^{-5} sont négligés *ci-dessous*, et il ne reste que $n = 2$:

$$U = \frac{GM_o}{b} \left\{ \left(\frac{b}{r}\right) c_{00} + \left(\frac{b}{r}\right)^3 c_{20} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2 b}{GM_o} \sin^2 \theta \right\}$$

Nous avons deux expressions pour calculer U_o à la surface de l'ellipsoïde :

Substitution de $r = a(1 - f \cos^2 \theta)$; $f = \frac{a-b}{a}$ (l'aplatissement géométrique)

résulte en

$$U_o = \frac{GM_o}{a} \left(1 - \frac{c_{20}}{2} + \frac{m}{2} \right) \quad \text{et} \quad U_o = \frac{GM_o}{a} \left(1 + \frac{f}{3} + \frac{m}{3} \right) ; \quad m = \frac{\omega^2 a}{GM_o ab}$$

Le potentiel normal U_o est égal à celui du géoïde.

La forme ellipsoïdale correspond avec une très bonne approximation au cas d'une masse fluide homogène en rotation uniforme dont l'aplatissement hydrostatique : 1/297,3 serait toutefois légèrement différent de l'aplatissement de la Terre. Cet aplatissement hydrostatique déterminée par l'équation différentielle de Clairaut (1743) fait abstraction de la connaissance de la répartition de densité.

$$a = 6378136,46 \text{ m} \quad \frac{1}{f} = \frac{a-b}{a} \text{ , aplatissement (} f = 298,25765 \text{)}$$

$$b = 6356751,73 \text{ m} \quad \frac{1}{f} \cong \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \text{ , formule de Clairault (0,00162 + 0,00173)}$$

La pesanteur normale à la surface de l'ellipsoïde est :

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM_0}{a^2} \left\{ 1 + m + \left(f - \frac{5}{2}m \right) \sin^2 \theta \right\}$$

La pesanteur normale à l'équateur est donc :

$$\gamma_a = \gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left(1 + f - \frac{3}{2}m \right) \quad (\theta = 90^\circ)$$

Et aux pôles :

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} (1 + m) \quad (\theta = 0^\circ / 180^\circ)$$

On introduit l'aplatissement gravitationnel f^* par analogie avec l'aplatissement géométrique :

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

Et on substitue γ_a et γ_b :

$$f^* = \frac{\frac{5}{2}m - f}{1 + f - \frac{3}{2}m} \approx \frac{5}{2}m - f$$

C'est le théorème de Clairaut :

$$f^* + f = \frac{5}{2}m$$

Et on peut écrire la pesanteur normale à la surface de l'ellipsoïde ainsi :

$$\mathcal{N}(\theta) = \gamma_a (1 + f^* \cos^2 \theta)$$

Le champ de pesanteur normal adopté (IAG)

L'International Association of Geodesy a adopté le Geodetic Reference System 1980 (GRS80)

La pesanteur normale GRS80 avec une précision relative de 10^{-10} (10^{-4} mGal):

$$\begin{aligned}\gamma = & \gamma_e (1 + 0.005\,279\,0414 \sin^2 \varphi \\ & + 0.000\,023\,2718 \sin^4 \varphi \\ & + 0.000\,000\,1262 \sin^6 \varphi \\ & + 0.000\,000\,0007 \sin^8 \varphi)\end{aligned}$$

Ou plus simple avec une précision relative de 10^{-7} (10^{-1} mGal):

$$\gamma = 9.780\,327 \left(1 + 0.005\,3024 \sin^2 \varphi - 0.000\,0058 \sin^2 2\varphi \right) \text{ms}^{-2}$$

NB: 1 mGal = 0.01 ms⁻² / φ = latitude

Geodetic Reference System 1980

Defining Constants (exact)

$a = 6\,378\,137\text{ m}$	semimajor axis
$GM = 3\,986\,005 \times 10^8\text{ m}^3\text{ s}^{-2}$	geocentric gravitational constant
$J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$	dynamical form factor
$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}\text{ rad s}^{-1}$	angular velocity

Derived Geometrical Constants

$b = 6\,356\,752.3141\text{ m}$	semiminor axis
$E = 521\,854.0097\text{ m}$	linear excentricity
$c = 6\,399\,593.6259\text{ m}$	polar radius of curvature
$e^2 = 0.006\,694\,380\,022\,90$	e = first excentricity
$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775\,48$	e' = second excentricity
$f = 0.003\,352\,810\,681\,18$	flattening
$f^{-1} = 298.257\,222\,101$	reciprocal flattening
$Q = 10\,001\,965.7293\text{ m}$	meridian quadrant
$R_1 = 6\,371\,008.7714\text{ m}$	mean radius $R_1 = (2a + b)/3$
$R_2 = 6\,371\,007.1810\text{ m}$	radius of sphere of same surface
$R_3 = 6\,371\,000.7900\text{ m}$	radius of sphere of same volume.

Derived Physical Constants

$U_0 = 6\,263\,686.0850 \times 10\text{ m}^2\text{ s}^{-2}$	normal potential at ellipsoid
$J_4 = -0.000\,002\,370\,912\,22$	} spherical-harmonic coefficients
$J_6 = 0.000\,000\,006\,083\,47$	
$J_8 = -0.000\,000\,000\,014\,27$	
$m = 0.003\,449\,786\,003\,08$	$m = \omega^2 a^2 b / GM$
$\gamma_e = 9.780\,326\,7715\text{ ms}^{-2}$	normal gravity at equator
$\gamma_p = 9.832\,186\,3685\text{ ms}^{-2}$	normal gravity at pole
$f^* = 0.005\,302\,440\,112$	$f^* = (\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e$

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Potentiel perturbateur T

La différence entre une observable et la quantité correspondante calculée à l'aide du modèle de gravité normal – à la même position - est appelée perturbation. $T(P)$ est le potentiel perturbateur:

$$T(P) = W(P) - U(P)$$

W était défini comme: $W = V + Z$ (pesanteur = gravitation + centrifuge)

Dans un repère géocentrique ($C_{10}, C_{11}, S_{11} = 0$, et $C_{00} = 1$), $W(P)$ s'écrit :

$$W(P) = \frac{GM}{r_P} + \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \cdot \left(\bar{C}_{nm} \cos m \lambda_P + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda_P \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r_P^2 \cos^2 \varphi_P$$

Le potentiel normal U est développé en harmoniques sphériques aussi, dans le même système de référence et avec la même vitesse de rotation de la terre :

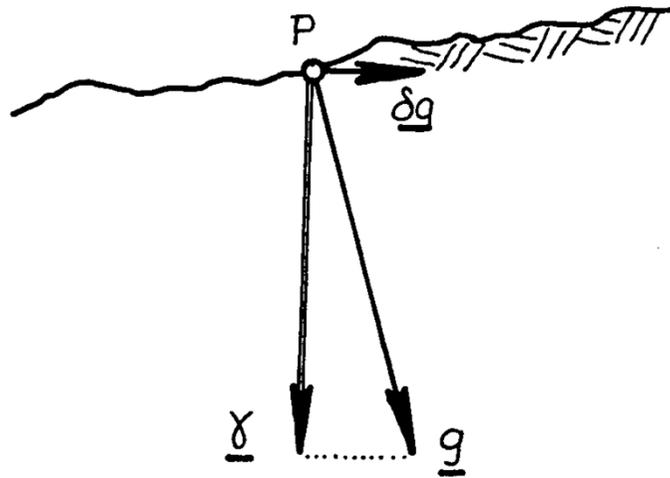
$$U(P) = \frac{GM_o}{r_P} + \frac{GM_o}{R} \sum_{n=2}^N \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \cdot (\bar{c}_{nm} \cos m \lambda_P + \bar{s}_{nm} \sin m \lambda_P) + \frac{1}{2} \omega^2 r_P^2 \cos^2 \varphi_P$$

Le potentiel de perturbation $T(P)$ est :

$$T(P) = \left(\frac{G \delta M}{r_P} + \right) \frac{GM_o}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \cdot (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda_P + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m \lambda_P)$$

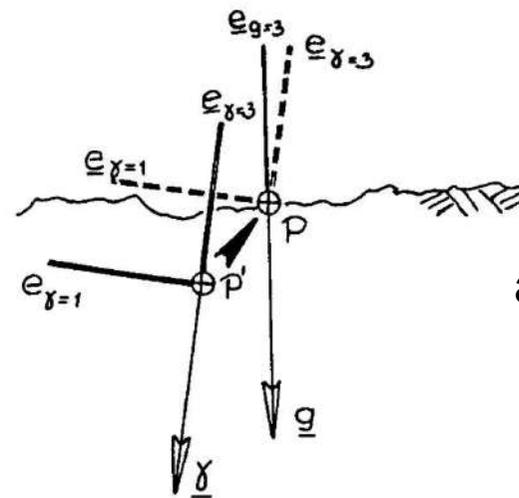
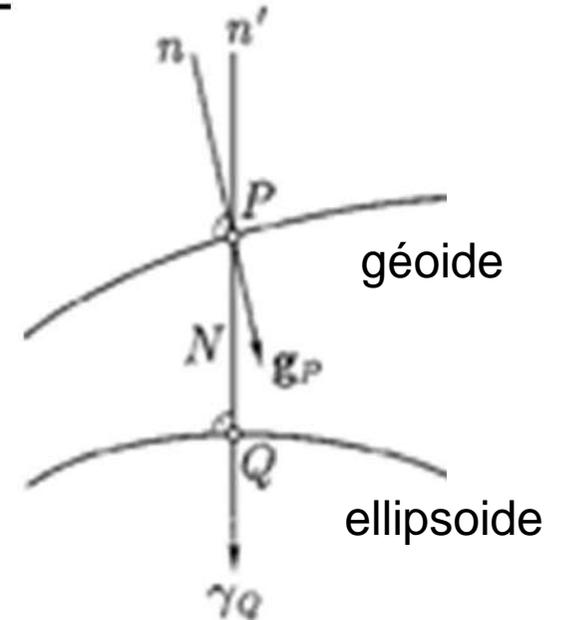
$$\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{c}_{nm} \quad ; \quad \Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{s}_{nm}$$

Perturbation et anomalie de gravité



La perturbation de gravité scalaire, δg , est définie comme:

$$\delta g = g_P - \gamma_P$$



anomalie de gravité

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

$$\Delta g = g_P - \gamma_{P'}$$

Donc: coordonnées parfaitement connues ou approchées. (GPS!)

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

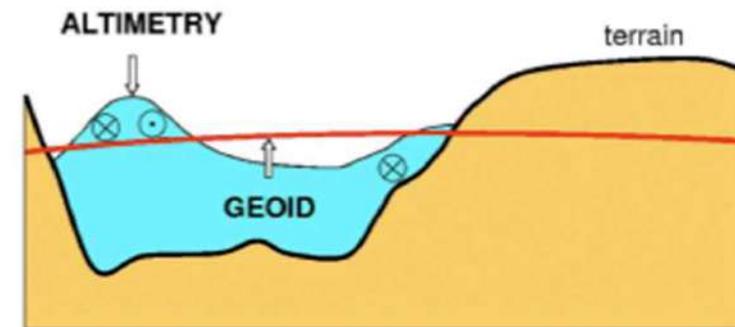
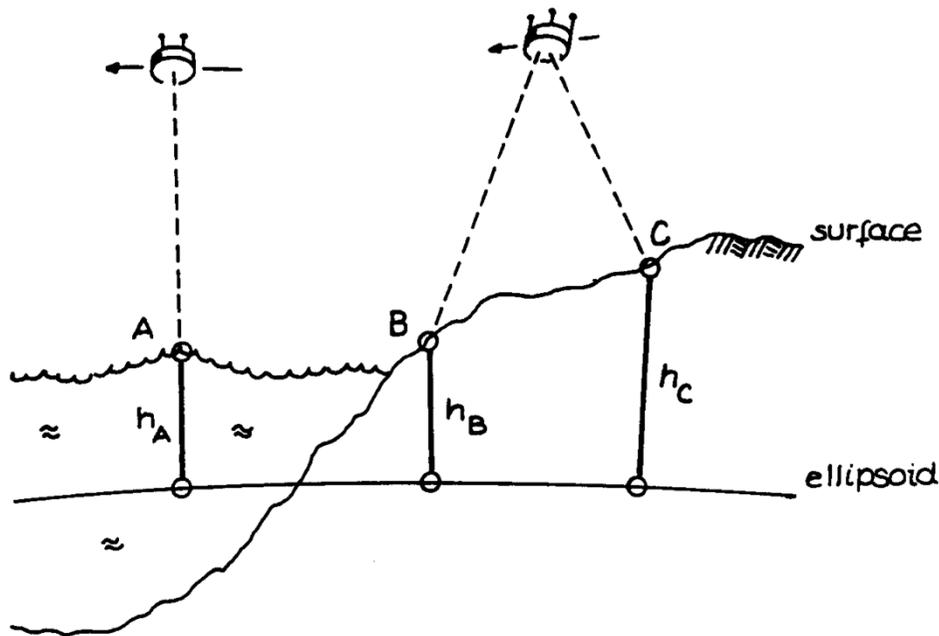
Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Systèmes de hauteurs : géométriques ou physiques

Une hauteur géométrique (GPS, altimétrie) est référencée à un ellipsoïde, et n'a pas de signification physique (*la direction d'écoulement d'eau*).



**La différence geoïde-altimétrie :
topographie dynamique**

Pour décrire la forme de la Terre aussi bien que le potentiel terrestre, les géodésiens ont été amenés à définir et à utiliser trois surfaces de référence :

La surface topographique : très irrégulière, elle est accessible aujourd'hui à la mesure par des méthodes géométriques de triangulation (GPS), mais devait être obtenue auparavant par nivellement en faisant intervenir la gravimétrie (à cause des déviations de la verticale locales).

L'ellipsoïde de référence

Le géoïde : surface équipotentielle du champ de pesanteur terrestre, coïncidant avec la surface moyenne des océans au repos. En tout point de cette surface, la pesanteur lui est normale.

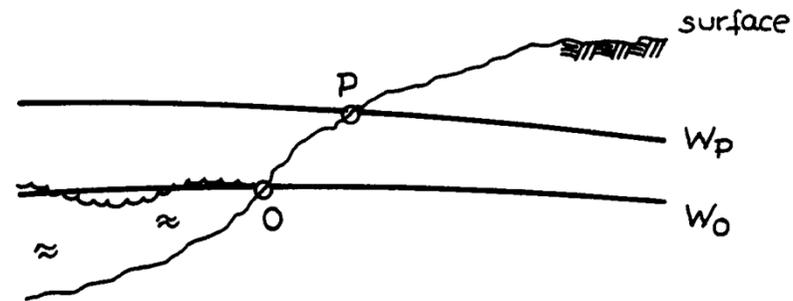
Le long des côtes, les marégraphes donnent accès à la connaissance du géoïde, mais pas sans problème.

Mais loin des côtes la mesure du géoïde est inaccessible par des mesures directes, on fait alors des mesures de nivellement ; ou on utilise les données spatiales.

Systemes de hauteurs : géométriques ou physiques

Une hauteur physique est référencée à une surface de niveau équipotentielle (ou très proche; traditionnellement, le niveau moyen de la mer établi sur des décennies avec des marégraphes).

Nous aimerions avoir des hauteurs identiques pour une même surface de niveau équipotentielle (W_O , W_P) :



Si le chemin est parallèle a g (fil à plomb), mais dans la direction opposée, on peut exprimer la différence constante entre deux surfaces de niveau ainsi :

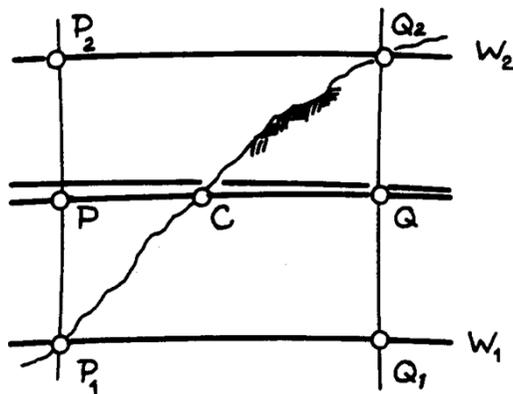
$$dW = -gdH$$

La différence de potentiel entre O (référence) et P , la cote géopotentielle C_{PO} (en m^2s^{-2}), est obtenue par intégration de W_O à W_P :

$$C_{PO} = W_O - W_P = \int_O^P g dH$$

Systemes de hauteurs : géométriques ou physiques

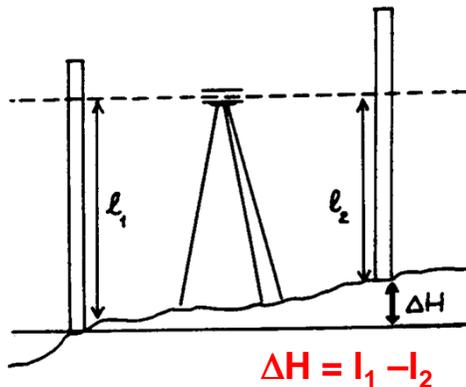
En réalité, g n'est pas constant et les surfaces de niveau ne sont pas parallèles (cas d'une sphère homogène) ; dH n'est pas constant.



$$dW = g(Q)dH_Q = g(P)dH_P = g(C)dH_C$$

$$\Rightarrow dH_P = \frac{g(Q)}{g(P)} dH_Q \neq dH_Q$$

$$dH_P = \frac{g(C)}{g(P)} dH_C \neq dH_C$$



Une campagne de nivellement donne une série de dH_i ; on obtient les différences de potentiel par multiplication avec la gravité mesurée g_i :

$$dW_{i+1,i} = -g_i dH_{i+1,i}$$

NB: sommation des dH sans tenir compte de la gravité introduit une dépendance du chemin suivi ($P_1-P_2-Q_2 \neq P_1-Q_1-Q_2 \neq P_1-C-Q_2$), et on ne peut pas mesurer une boucle parfaitement fermée.

Systemes de hauteurs : géométriques ou physiques

Les *hauteurs orthométriques* H sont les hauteurs officielles dans la plupart des pays. Physiquement elles représentent la longueur du fil à plomb de la surface W_0 à un point P .

Récrire l'équation pour C_{PO} donne pour la hauteur orthométrique H :

$$C_{PO} = \int_0^P g \, dH = H_P \frac{1}{H_P} \int_0^P g \, dH = H_P \bar{g} \quad \Rightarrow \quad H_P = \frac{C_{PO}}{\bar{g}}$$

Où \bar{g} est la gravité moyenne le long du fil à plomb.

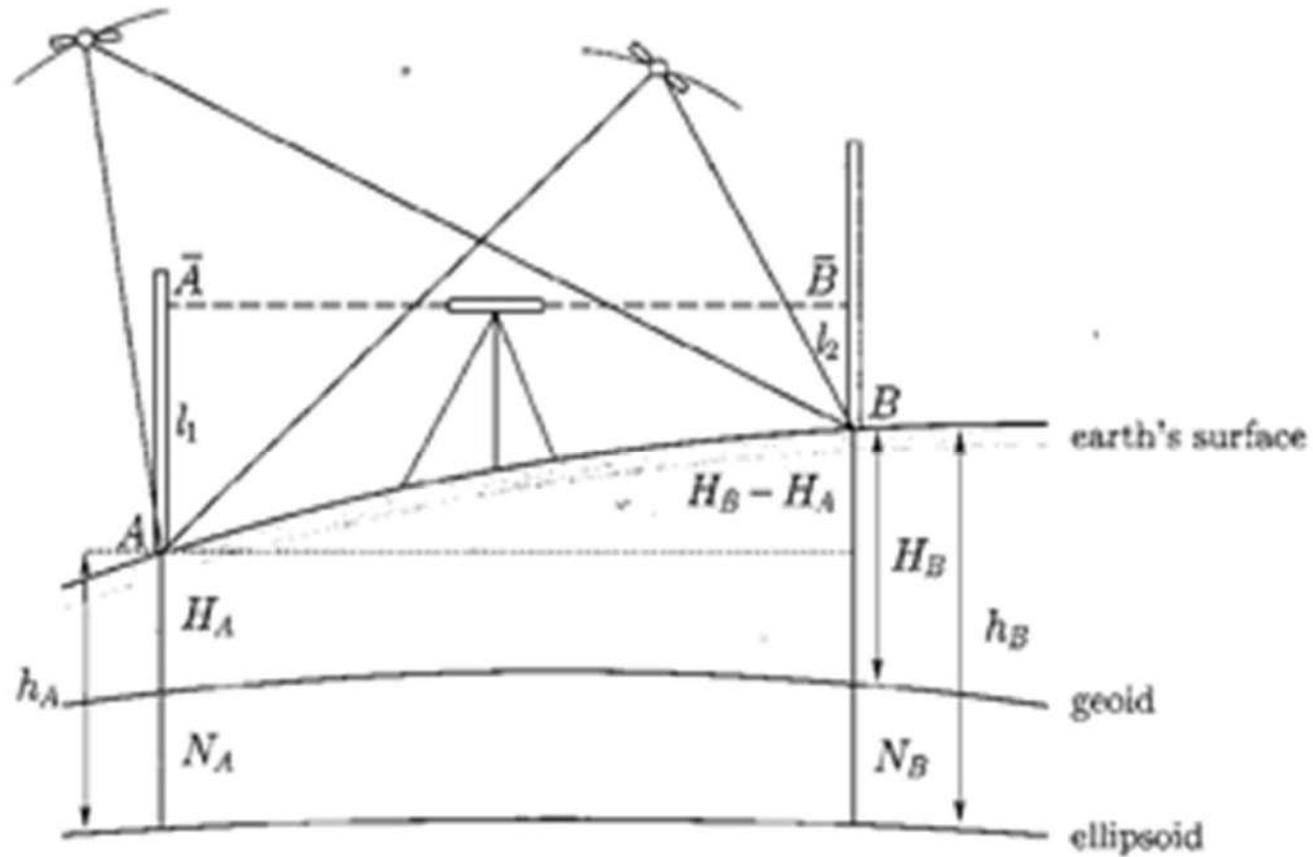
Il faut connaître non seulement la valeur de g à la surface, mais aussi dans la croûte terrestre. Cette valeur est donnée par la formule de réduction de Prey :

$$\bar{g} = g(P) + 0.0424 \frac{mGal}{m} H_P$$

On obtient pour la hauteur orthométrique une équation quadratique en H_P :

$$H_P = \frac{C_{PO}}{\bar{g}} \approx \frac{C_{PO}}{g(P) + 0.0424 \frac{mGal}{m} H_P}$$

Systemes de hauteurs : géométriques ou physiques



GPS nivellement :

$$H_A = h_A - N_A$$

$$H_B = h_B - N_B$$

Différence de hauteur :

$$H_B - H_A = h_B - h_A - N_B + N_A$$

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

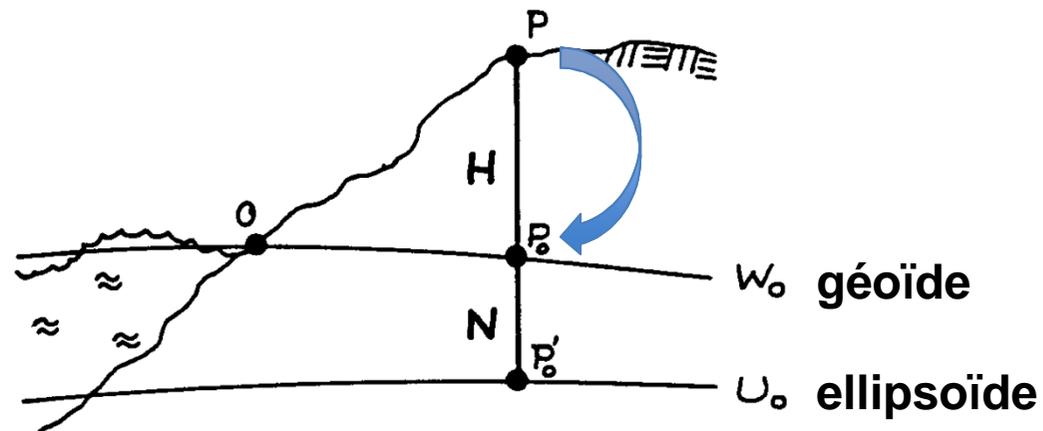
Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

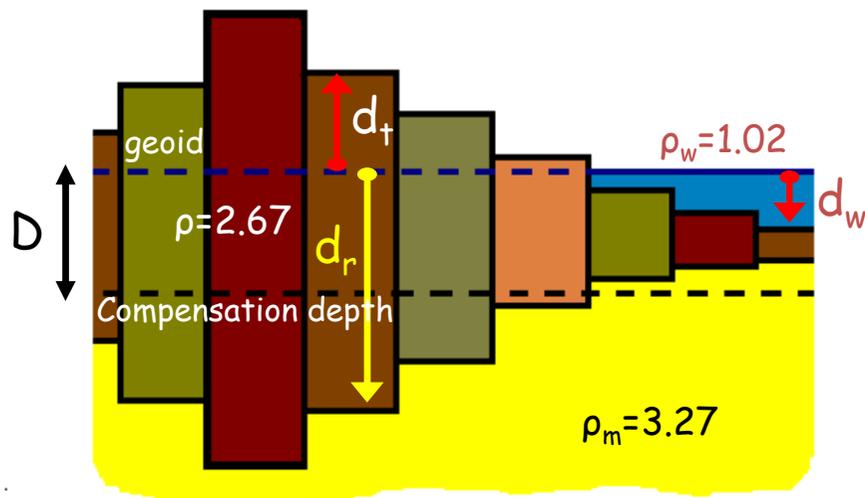
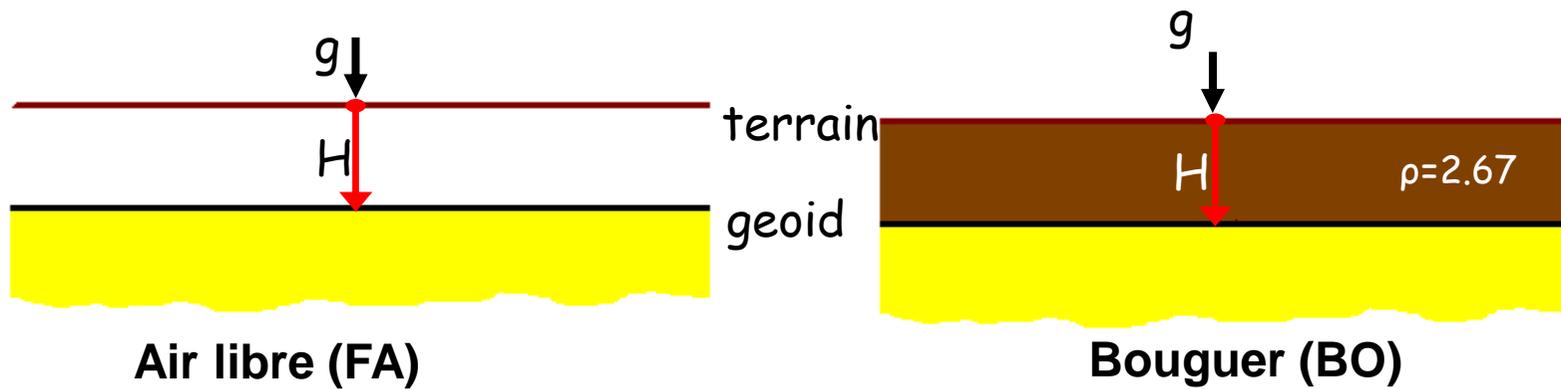
Bathymétrie

Réduction des mesures au niveau moyen de la mer (géoïde)

Les mesures gravimétriques sont réalisées sur le terrain, au-dessus du géoïde (surface W_0) ; il faut les réduire à cette surface le long du fil à plomb passant par le point de mesure, ou en utilisant la direction du fil à plomb normal. Ce prétraitement est nécessaire pour l'ajustement des coefficients en harmoniques sphériques (C_{nm} et S_{nm}) d'un modèle de potentiel.



Résumé des corrections gravimétriques



Correction isostatique d'Airy-Heiskanen

D : compensation depth

d_r : depth of the root ($\sim 25/30$ km) under the geoid

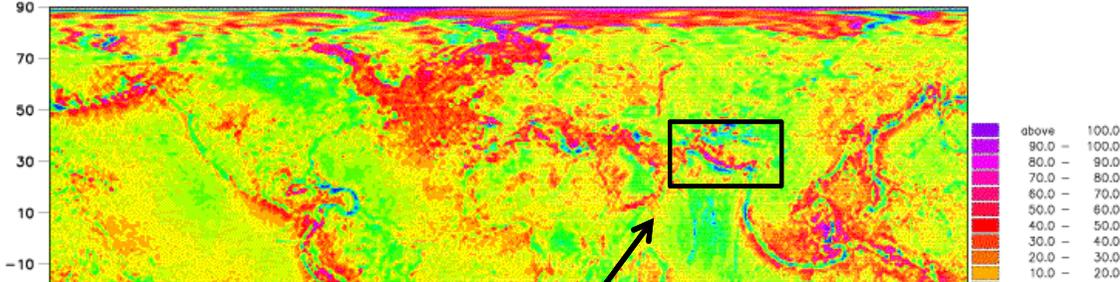
d_t : elevation of terrain

d_w : depth of water

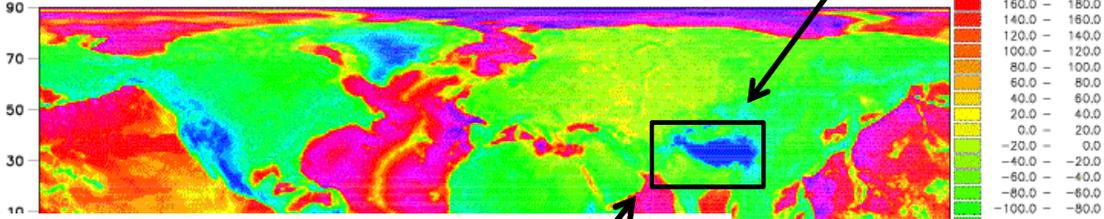
$$\text{in land area : } h = D + d_t \frac{\rho}{\rho_m - \rho}$$

$$\text{in ocean area : } h = D - d_w \frac{\rho - \rho_w}{\rho_m - \rho}$$

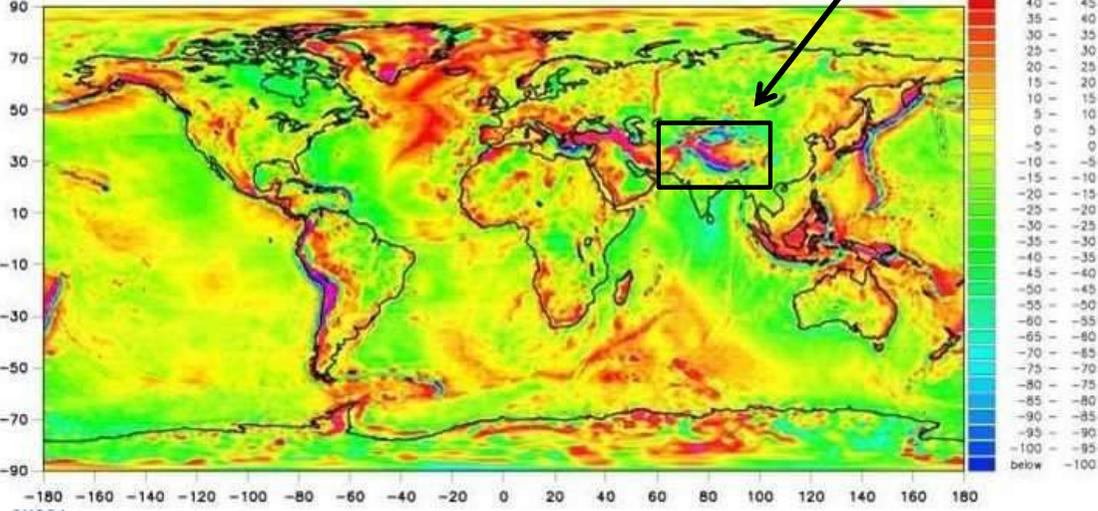
Airy-Heiskanen



Grille ponctuelle d'anomalies de Bouguer avec champ Bouguer résiduel (deg. 360)
fait avec Eigen_gl04c et Etopo2v2 a 360



Anomalies de gravite (mgal)
modele EIGEN-GLO4C (degre 2 a 360), min=-285, max= 345



Bouguer (BO)

Air libre (FA)

Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Solution du problème de Stokes

Le modèle linéaire complet des anomalies :

$$\begin{pmatrix} \Delta W_o \\ \Delta g \\ \Delta \Phi \\ \Delta \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x & U_y & U_z \\ -U_{xz} & -U_{yz} & -U_{zz} \\ -\frac{U_{xx}}{\gamma} & -\frac{U_{xy}}{\gamma} & -\frac{U_{xz}}{\gamma} \\ -\frac{U_{xy}}{\gamma \cos \varphi} & -\frac{U_{yy}}{\gamma \cos \varphi} & -\frac{U_{yz}}{\gamma \cos \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ -T_z \\ -\frac{1}{2}T_x \\ -\frac{1}{\gamma \cos \varphi}T_y \end{pmatrix}$$

**Anomalies
mesurées**

**positions inconnues
de W_o par rapport à U_o**

potentiel inconnu

**Une solution par point n'est pas possible avec 4 mesures et 7 inconnus.
Mais si les anomalies sont disponible globalement, T est l'unique inconnu :**

$$T(P) = \frac{\delta(GM)}{r_P} + \frac{GM_o}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\cos \theta_P) \cdot (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P)$$

Solution du problème de Stokes

La solution du modèle linéaire des anomalies est très compliquée, mais dans un système linéaire à résoudre par itération on peut simplifier le système en utilisant l'approximation sphérique à rayon constant :

$$\begin{pmatrix} \Delta W_o \\ \Delta g \\ \Delta \Phi \\ \Delta \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\frac{2\gamma}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R \cos \varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ -T_r \\ -\frac{1}{R\gamma} T_\varphi \\ -\frac{1}{R\gamma \cos^2 \varphi} T_\lambda \end{pmatrix}$$

- les anomalies ne sont pas modifiées ; seuls les coefficients à droite ;
- sans itérer, la solution a une précision de l'ordre de l'aplatissement de la terre, 1/298 ; une hauteur de géoïde de 30 m aura une incertitude de 10 cm ;
- Δz , la hauteur de géoïde, est calculé uniquement à l'aide de ΔW_o et Δg .

Solution du problème de Stokes

Nous allons utiliser uniquement Δg (et ΔW_o) comme observation par la suite ; en réalité, les latitudes et longitudes astronomiques ne sont pas observées aux points de mesures. Dans ce cas, le système linéaire à résoudre est (la hauteur de géoïde $N = \Delta z$) :

$$\Delta W_o = -\gamma N + T \quad (\text{a})$$

$$\Delta g = -\frac{2\gamma}{R} N - \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{b})$$

Elimination de la première équation de N donne l'équation de *Brun* :

$$N = \frac{T - \Delta W_o}{\gamma}$$

Substitution dans (a) donne l'équation fondamentale de la gravimétrie :

$$\Delta g - \frac{2}{R} \Delta W_o = -\left(\frac{2}{R} T + \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Solution du problème de Stokes

Résoudre l'équation fondamentale de la gravimétrie donne le potentiel perturbateur T en fonction de Δg et ΔW_0 :

$$T(P) = -R\langle\Delta g\rangle + 2\Delta W_0 + \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ})\Delta g_Q d\sigma_Q$$

$$\int_{\sigma} d\sigma_Q = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \cos\varphi_Q d\lambda_Q d\varphi_Q$$

$$St(\psi_{PQ}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi_{PQ}) \quad ; \quad \text{noyau de Stokes}$$

et sous sa forme analytique :

$$St(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$\langle\Delta g\rangle$ = moyenne globale des Δg ; ψ = distance sphérique

Maintenant on peut calculer la hauteur de géoïde avec l'équation de Brun :

$$\begin{aligned}
 N(P) &= -\frac{R}{\gamma} \langle \Delta g \rangle + \frac{\Delta W_0}{\gamma} + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) \Delta g_Q d\sigma_Q \\
 &= N_0 + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) \Delta g_Q d\sigma_Q
 \end{aligned}$$

On peut déterminer N_0 seulement si ΔW_0 ou au moins une hauteur N est connu. En réalité, on ne peut calculer que les différences de hauteur de géoïde et ce terme constant s'élimine.

Les anomalies de gravité sont des moyennes par bloc, et en pratique on utilise l'équation suivante, ou l'intégrale a été remplacée par une sommation :

$$N(P) = \frac{R}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J St(\psi_{PQ_{ij}}) \Delta g(Q_{ij}) \frac{\Delta s_{ij}}{4\pi} \text{ and } \psi < \Psi$$

$$\Delta s_{ij} = \cos \varphi_{ij} d\lambda_{ij} d\varphi_{ij} \quad ; \quad \text{élément de surface}$$

Exemple du calcul de la contribution d'une seule anomalie de gravité à la hauteur de géoïde avec Stokes :

$$N(P) = \frac{R}{\gamma} St(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) \frac{\Delta s}{4\pi}$$

Point de calcul P : latitude = 52° / longitude = 6°
 Rayon moyen $R = 6371031$ m
 γ à 52° = 9.81246 ms⁻²

Observation Q : latitude = 52° / longitude = 5°
 anomalie de gravité à l'air libre = 15 mGal = 15 10⁻⁵ ms⁻²
 moyenne d'un bloc de 3' x 5' (φ, λ)

Distance sphérique : $\cos(\psi_{PQ}) = \sin \varphi_p \sin \varphi_Q + \cos \varphi_p \cos \varphi_Q \cos(\lambda_P - \lambda_Q)$
 $\Rightarrow \psi_{PQ} = 0.62^\circ$ et $St(0.62^\circ) = 98.57$

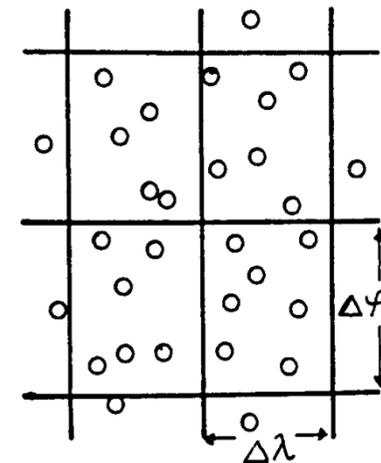
Élément de surface: $\frac{\Delta s}{4\pi} = \frac{\Delta \varphi \Delta \lambda \cos \varphi}{4\pi} = \frac{3 \cdot 5 \cdot (2.9087e-4)^2 \cdot 0.6156}{12.57} = 6.22e-8$

Contribution d'une seule mesure: 0.0006 m

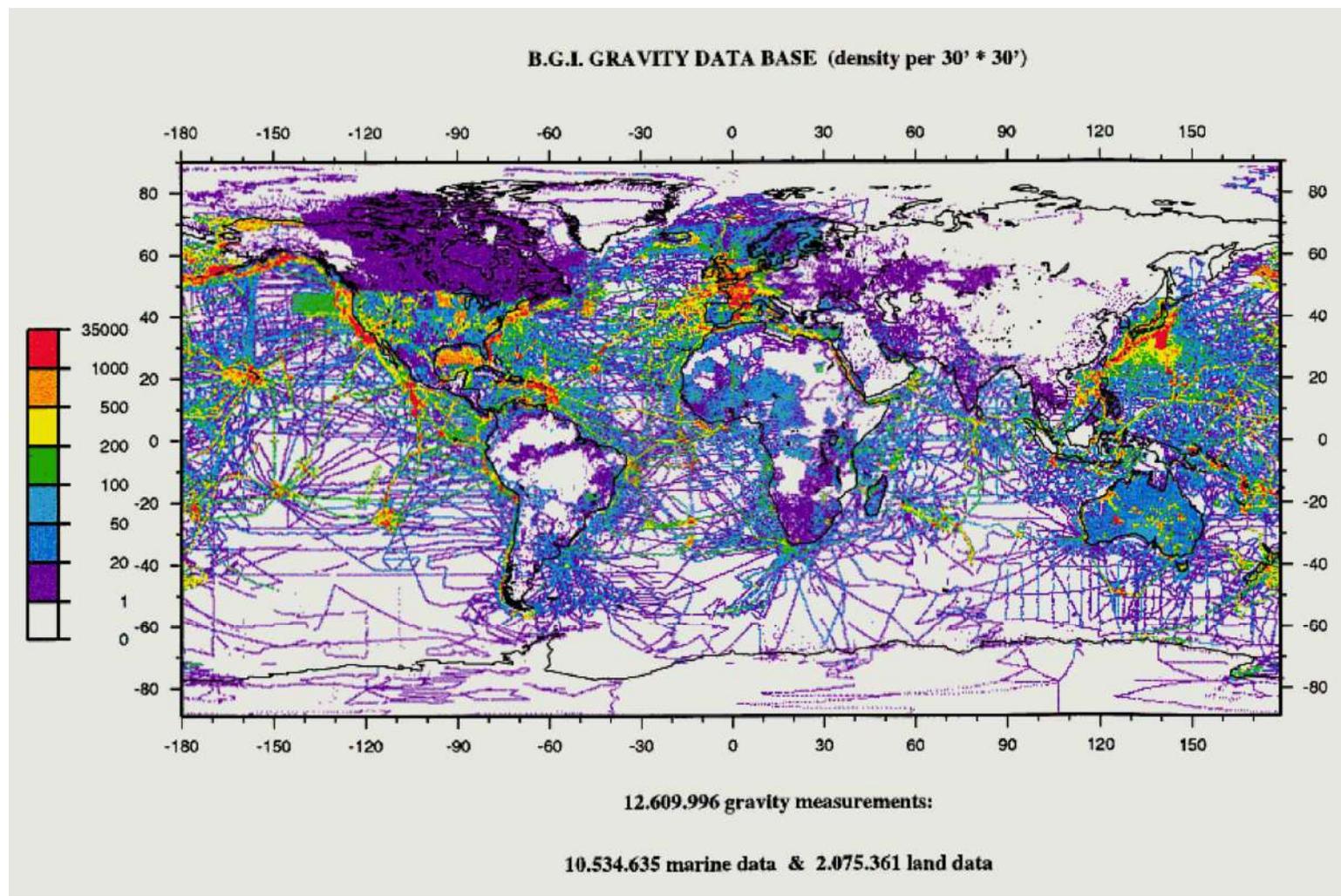
Les mesures sont prises avec des gravimètres, qui fournissent des mesures absolues ou relatives .



la moyenne des observations est calculée par bloc (latitude, longitude).



**Les mesures du Bureau Gravimétrique International (BGI).
Problème des données terrestres : beaucoup de trou de couverture, surtout
dans les zones difficiles d'accès ou par choix politique.**



Les mesures aéroportées (gravimètres)



DANISH NATIONAL
SPACE CENTER

Stability of airborne gravity sensor at long ranges

Two sensor types:

- Spring gravimeters (marine platform systems, e.g. L&R)
 - *Drift of sensor < 1 mgal / day*
 - *Old-fashioned system, limitations in turbulence*
- Inertial accelerometer systems (strapdown or stabilized platform, e.g. Litton, Honeywell aircraft INS's, Sander Geophysics hybrid systems, Russian systems)
 - *Larger drifts, can be up to 30 mgal/flight for commercial INS*
 - *Not readily available for gravimetry*



LCR S-meter



Installation in Fokker 27 (Great Barrier Reef)



Laserref INS in Twin-Otter (UoC/Intermap)

ESRIN Nov 2006



Principle of airborne gravimetry

- Operational for large-scale surveys since early 1990's
 - Proven accuracies 1-5 mgal @ 5-10 km resolution
- Basic principle – free air anomalies:

$$\Delta g = y - h'' - \delta g_{\text{eotvos}} - \delta g_{\text{tilt}} - y_0 + g_0 - \gamma_0 + 0.3086 (h - N)$$

y : measured acceleration (gravimeter or INS)

h'' : acceleration from GPS

y_0 : airport base reading, g_0 : airport reference gravity

h : GPS height, N geoid height

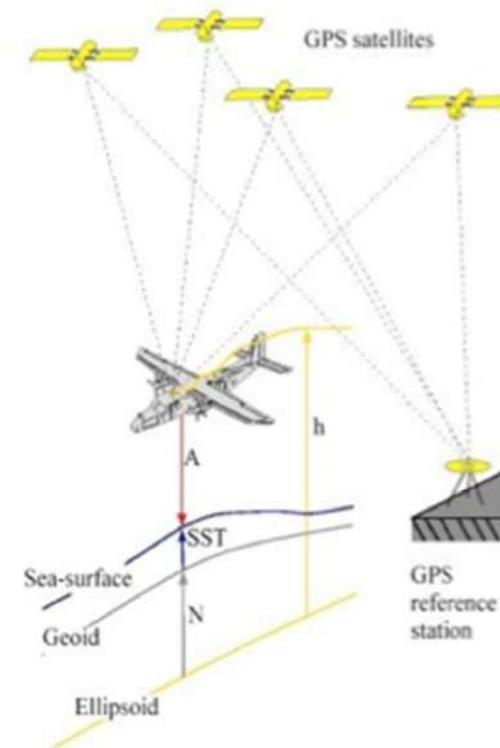
δg_{tilt} : Gravimeter instrument corrections

$\delta g_{\text{eotvos}} = -2\Omega \cos\phi v_E - (v_N^2 + v_E^2)/R$... Eotvos correction

$\gamma_0 + 0.3086 (h - N)$: normal gravity

N : geoid height

- Key to success for operational use:
 - Kinematic GPS phase positioning
 - Careful modelling of instrument performance (tilt errors)
 - Careful ties to global gravity reference system



Potentiel de gravitation et pesanteur

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Les modèles globaux du potentiel : l'apport des satellites

Les satellites ont l'avantage de couvrir toute la terre (cas de l'orbite polaire) souvent même de façon répétitive, contrairement aux données terrestres, mais les courtes longueurs d'ondes du champ de gravité sont moins bien voire pas observable ; c'est effet est appelé facteur d'atténuation d'altitude. L'équation du potentiel perturbateur le montre :

$$T(P) = \frac{GM_o}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \left[\Delta \bar{C}_{nm} \cos m \lambda_P + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m \lambda_P \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right]$$

Longueur d'onde des harmoniques : $40000/n$ (km)

Pour une satellite à 400 km : $R/r = 0.941$ $(R/r)^5 = 0.738$
1000 km: $R/r = 0.864$ $(R/r)^5 = 0.483$
20000 km: $R/r = 0.242$ $(R/r)^5 = 0.0008$

La sensibilité des orbites au champ de gravité diminue donc très vite avec l'altitude ; un satellite GPS est sensible presque uniquement au C_{20} . Afin de restituer les coefficients C et S à l'aide des données de suivis des satellites, une altitude basse est requise.

La méthode des perturbations orbitale

L'amplitude des perturbations doit être égale ou plus grande que la précision du système de suivi afin de les estimer (1 cm pour GPS et Laser).

**Les équations de Lagrange :
les éléments orbitaux en
fonction du potentiel.**

R : potentiel perturbateur
a : demi-grande axe
e : excentricité
i : inclinaison
M : anomalie moyenne
 ω : arg. perigée
 Ω : arg. nœud ascendant
n : mouvement moyen

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

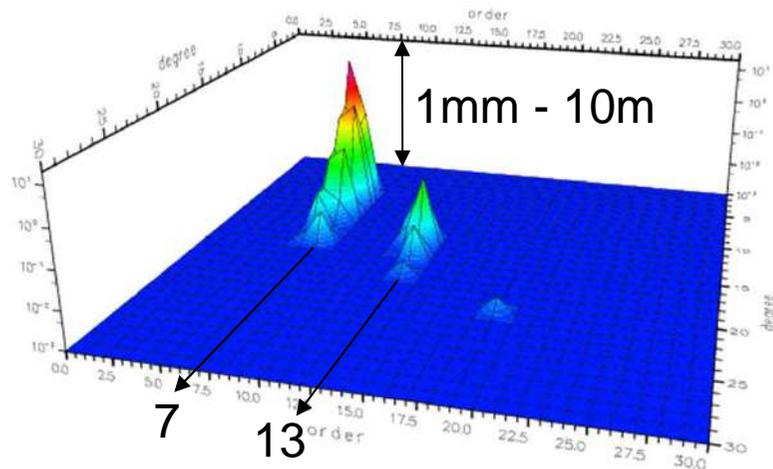
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

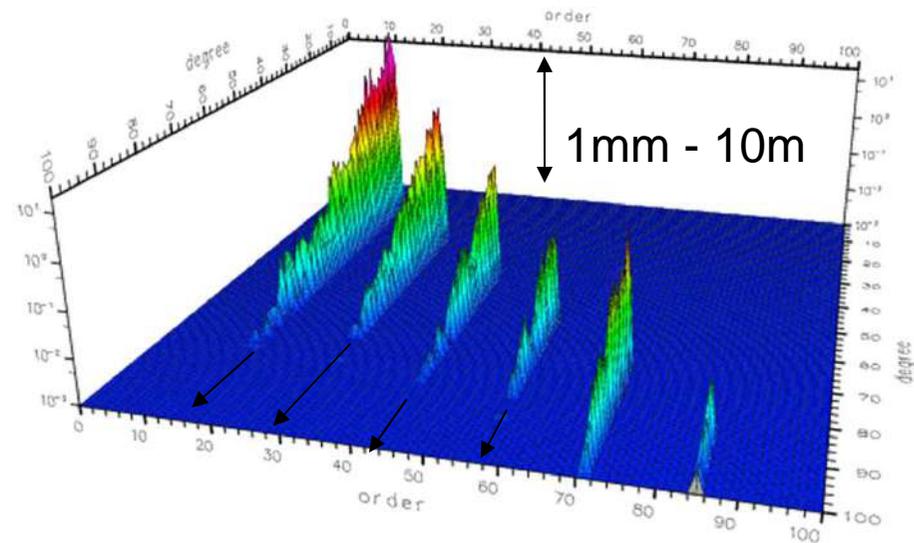
La méthode des perturbations orbitale

Les amplitudes des perturbations dues au potentiel, par degré et ordre, pour les satellites LAGEOS-1 et SPOT (calculées avec la méthode de Kaula).

LAGEOS1 : Perturbations en position avec EIGEN_GL04S deg 30 (m)

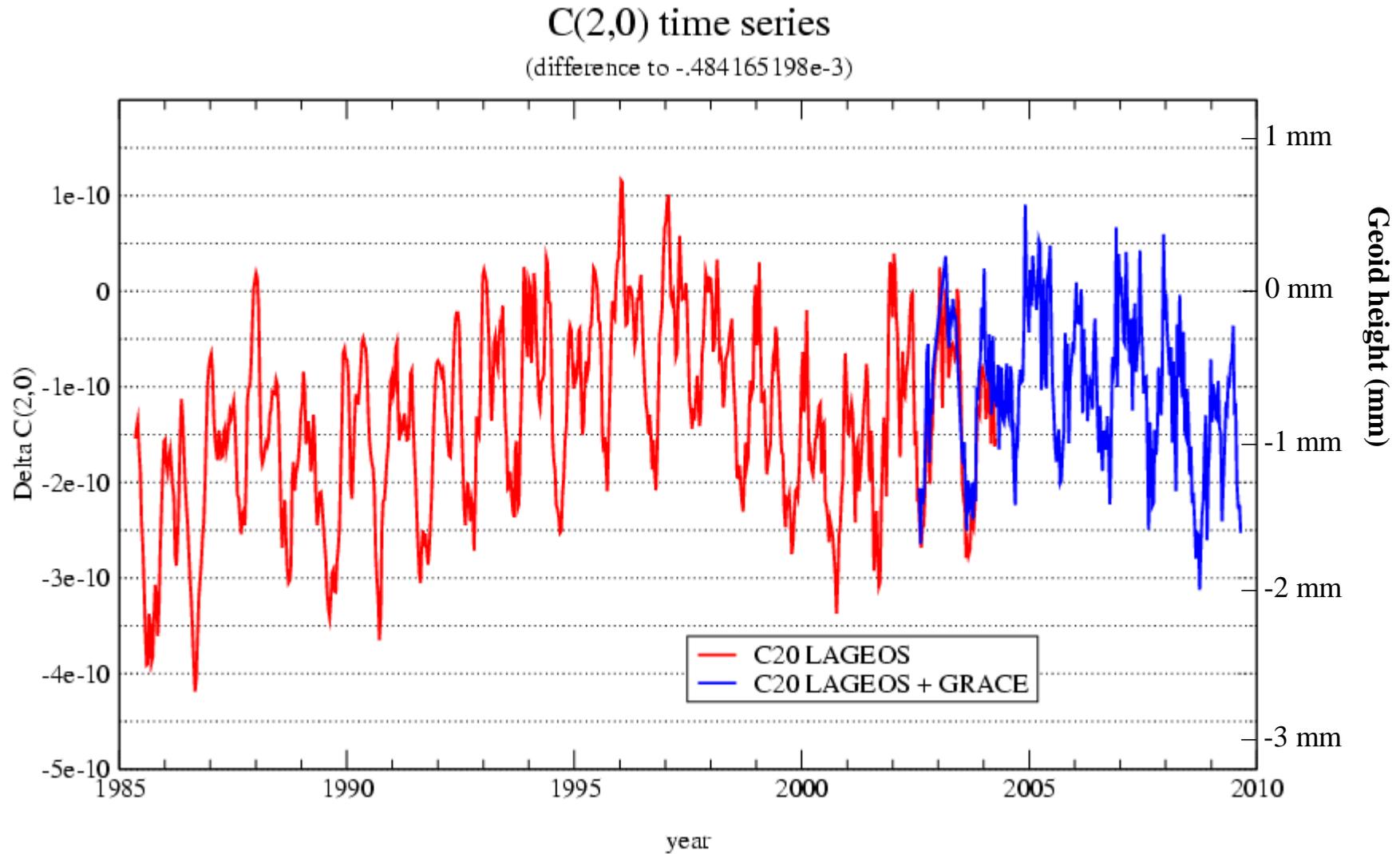


SPOT : Perturbations en position avec EIGEN_GL04S deg 100 (m)



La méthode des perturbations orbitale

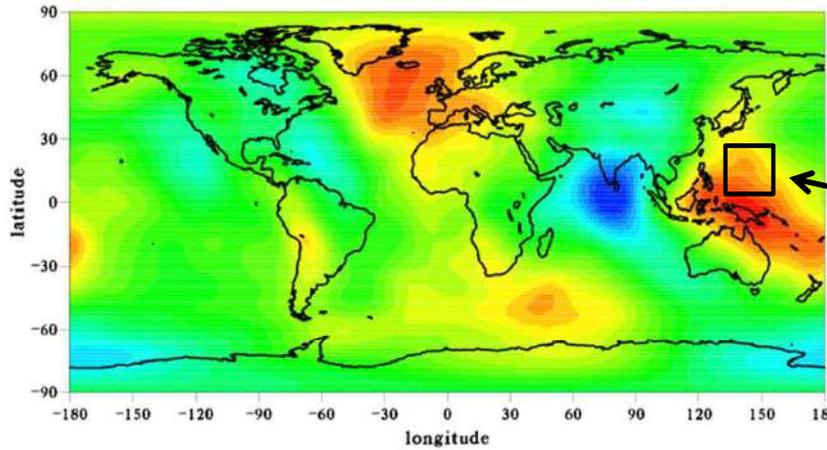
LAGEOS sensible au C20, et mesures laser très précises



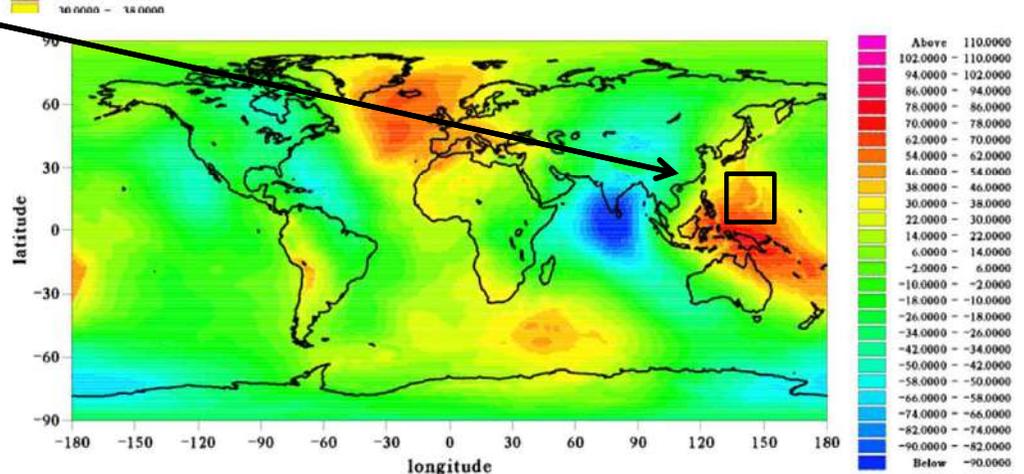
La méthode des perturbations orbitale

Les modèles globaux 'spatiaux' aux résolutions typiques des années '80-'00...
et 2010 (à droite)

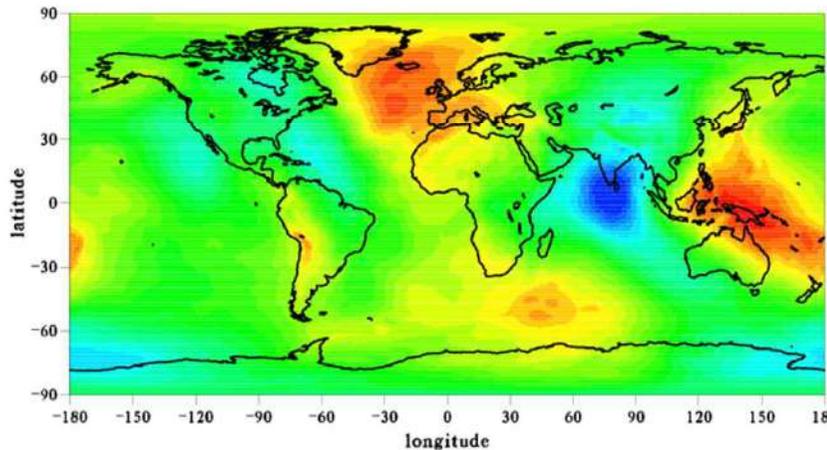
Degré max=20



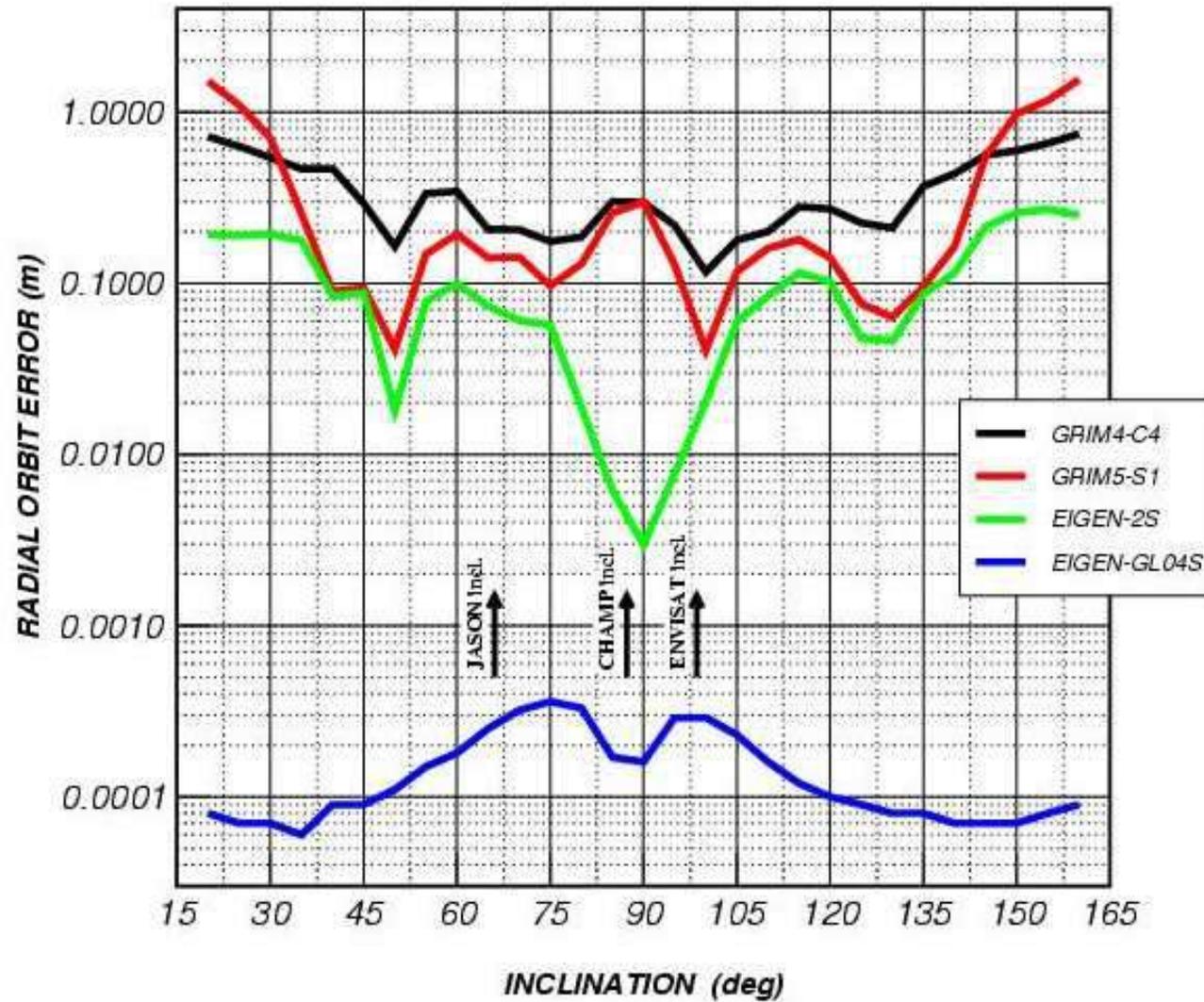
Degré max=150



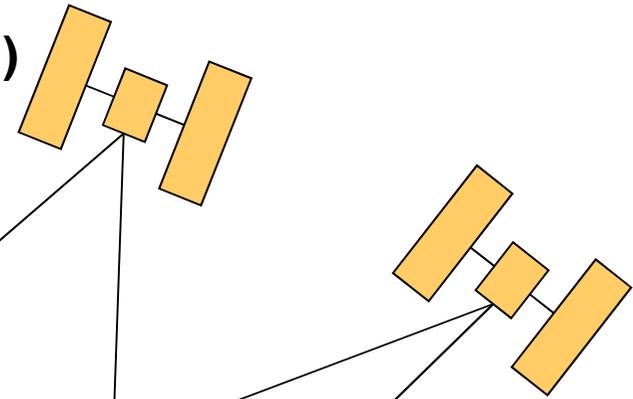
Degré max=70



EXPECTED RADIAL ORBIT ERROR AS A FUNCTION OF INCLINATION
FROM COVARIANCE MATRICES



La mission GRACE (2002 -)



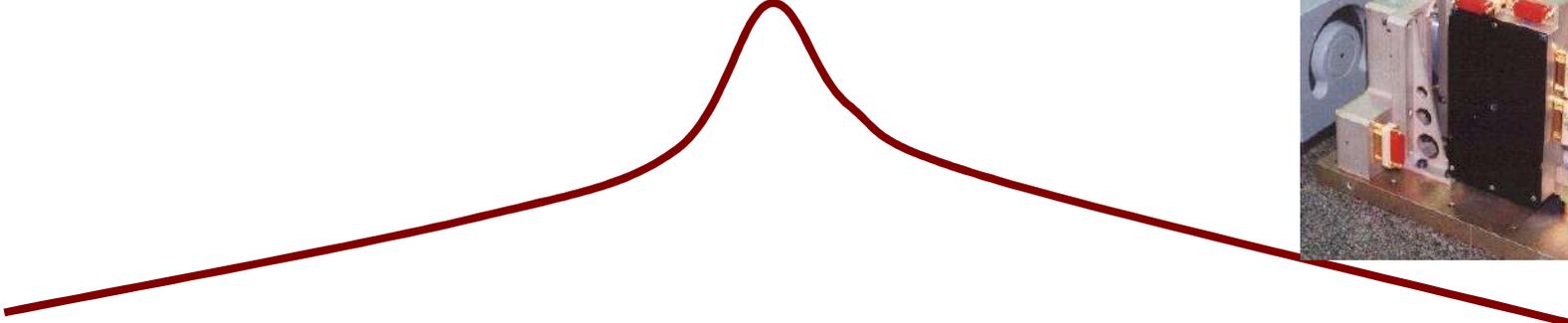
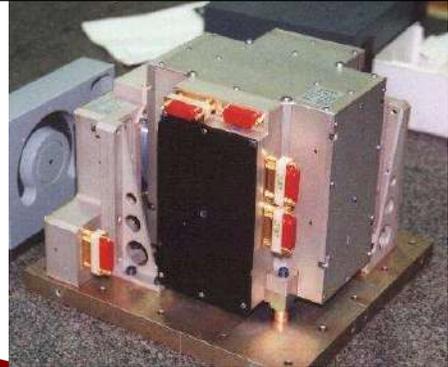
Mesures GPS →
Position ~ 2-3 cm

Tom

Jerry

Mesures KBR →
Distance ~ 1 μm
Vitesse ~ 0.1 μm/s

STAR : Précision ~ 10⁻¹⁰ m/s²



La mission GRACE

Time-variable gravity:

- Gravity field solutions to d/o 80 are computed every 30 days
- A mean reference field is computed to d/o 175 using all data

Variability (annual, semi-annual, trends, episodic events), which is due to the hydrological cycle, is measured with respect to the mean field:

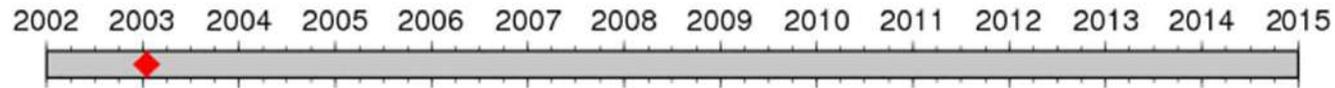
$\Delta\text{geoid} = (\text{30-day geoid}) \text{ minus } (\text{reference geoid})$

Geoid heights can be converted into equivalent water heights at the surface via the following equation using the load deformation coefficients k' of degree l (max=80):

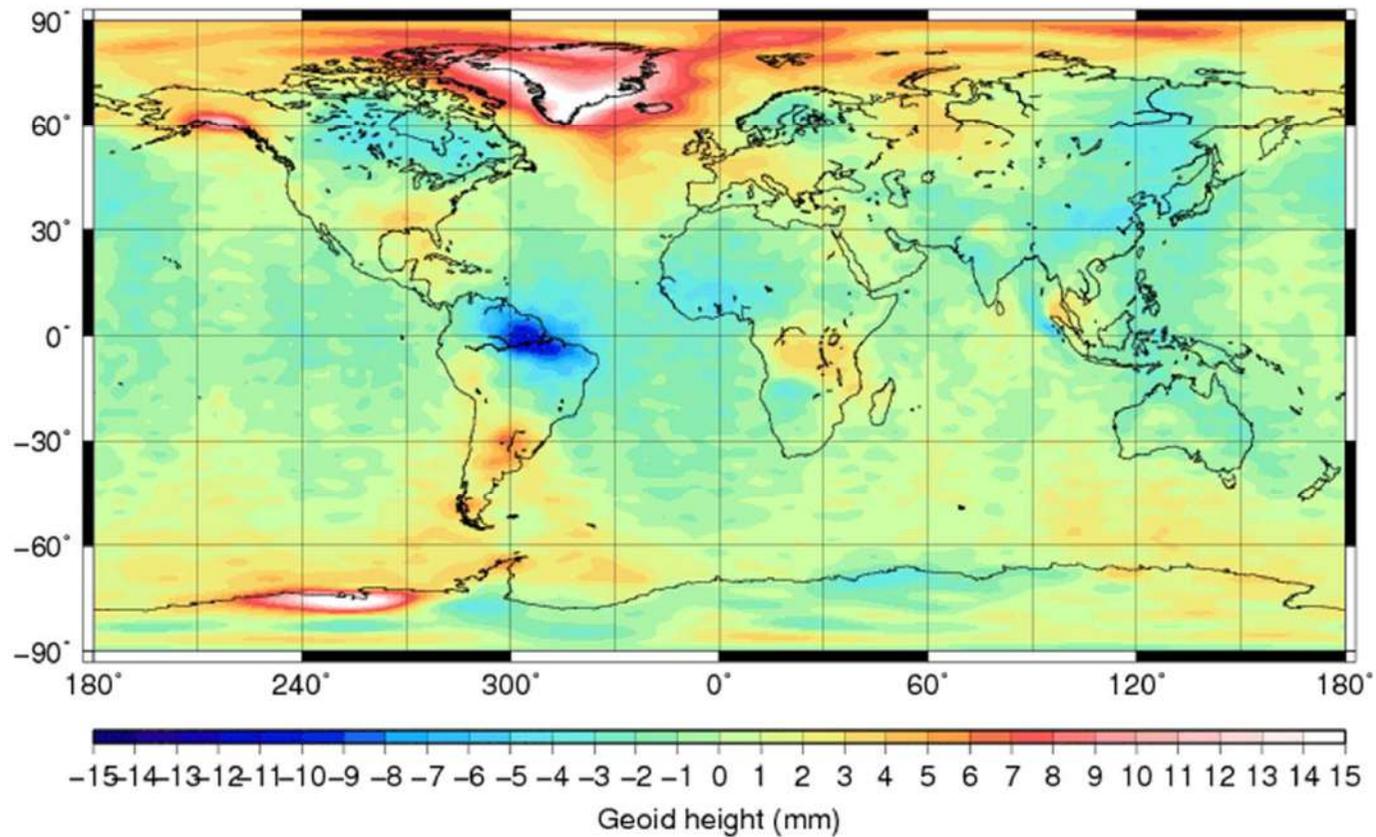
$$h^{water} = \frac{g}{4\pi GR\rho_w} \sum_{l=2}^{80} \frac{2l+1}{1+k'_l} \Delta h_l^{geoid}$$

GRACE

CNES/GRGS hauteurs de géoïde (2003-2013)

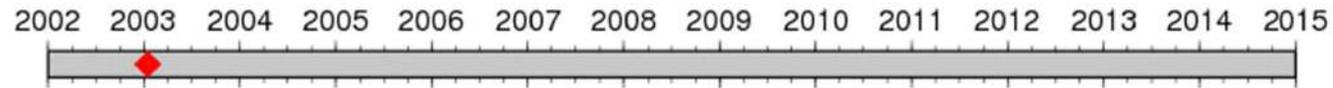


Monthly gravity field from GRACE

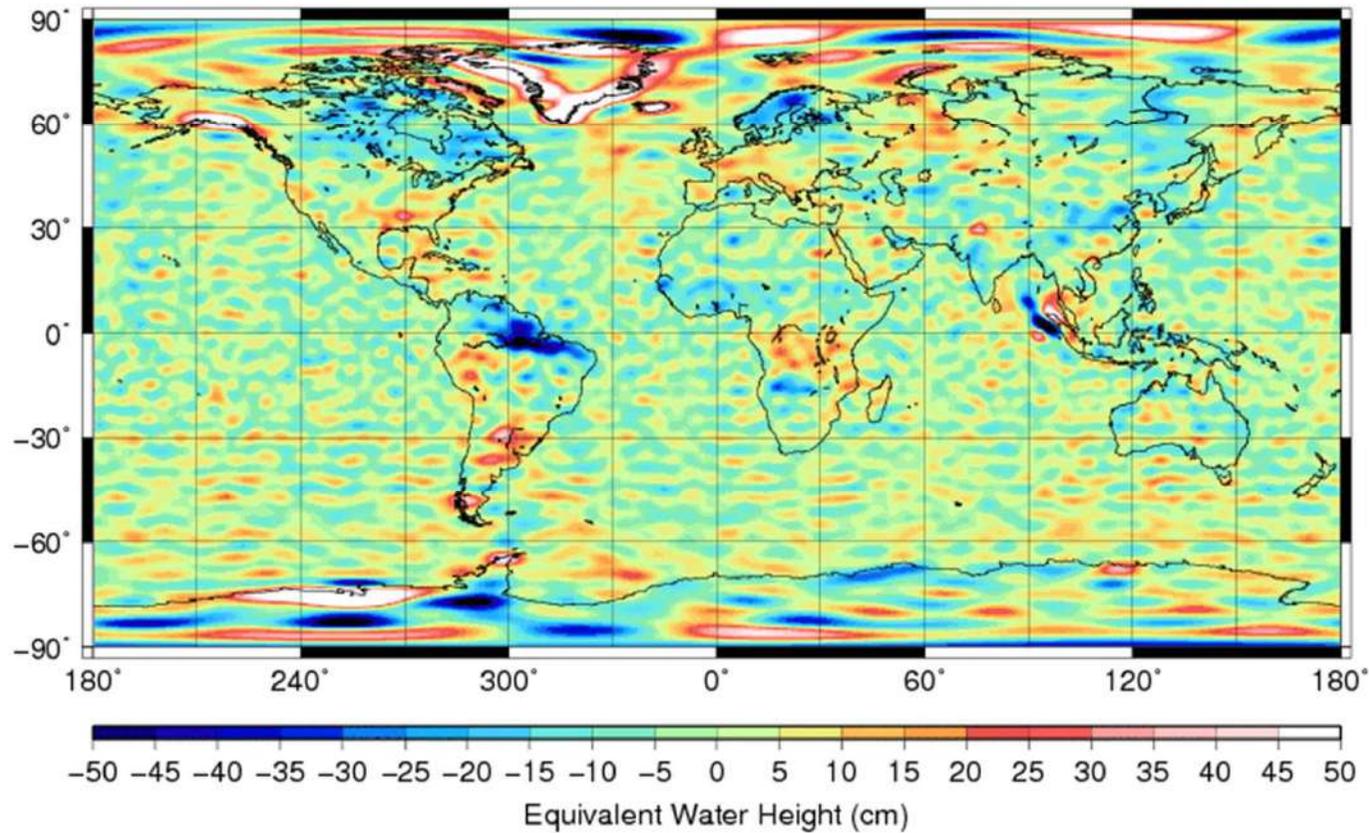


GRACE

CNES/GRGS hauteurs d'eau equivalentes (2003-2013)

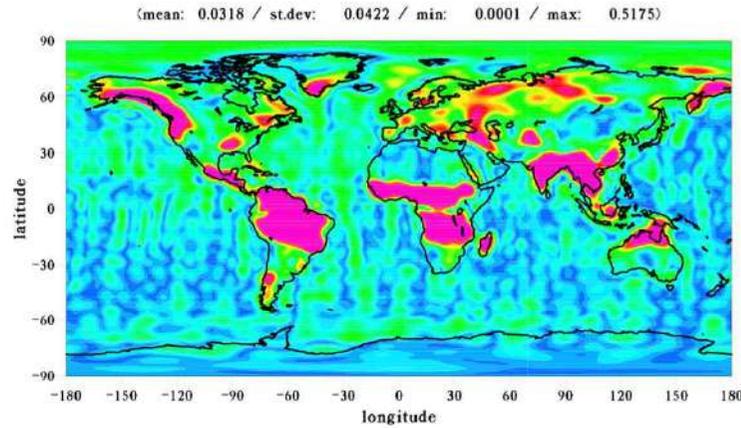


Monthly gravity field from GRACE

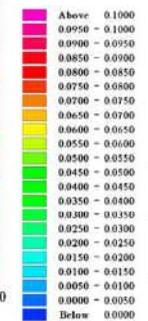


GRACE

SIGNAL ANNUEL

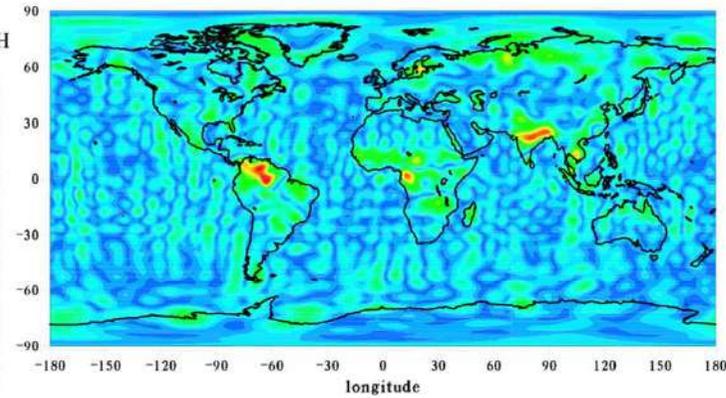


(e)
meter of EWH

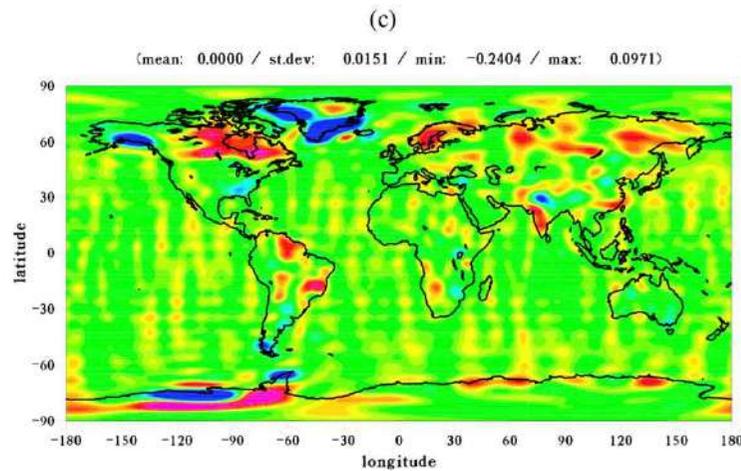
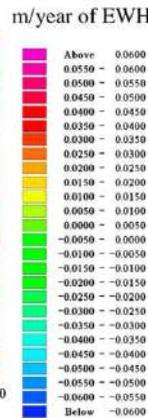


SIGNAL SEMI-ANNUEL

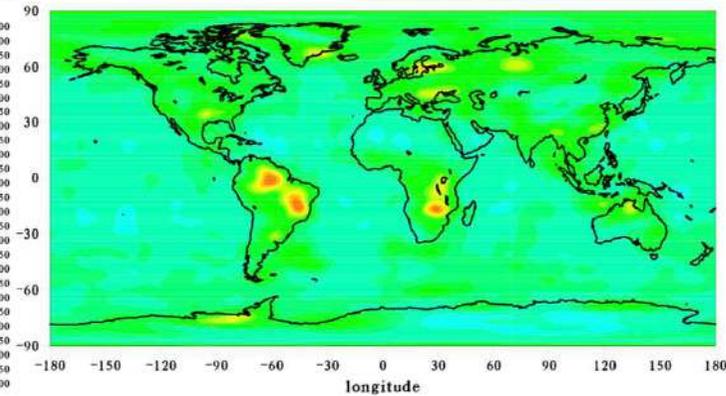
(mean: 0.0137 / st.dev: 0.0096 / min: 0.0000 / max: 0.0896)



(f)
m/year of EWH



(d)
(mean: 0.0280 / st.dev: 0.0082 / min: 0.0166 / max: 0.0754)

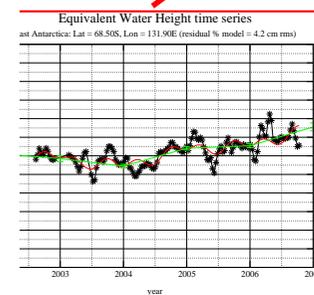
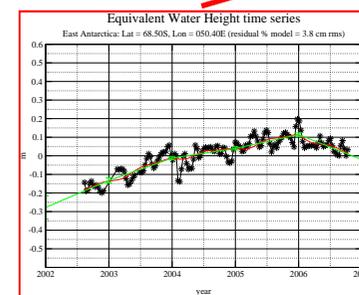
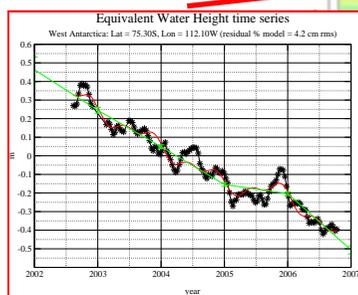
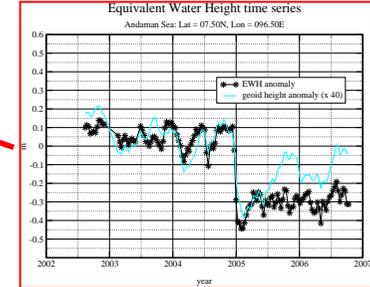
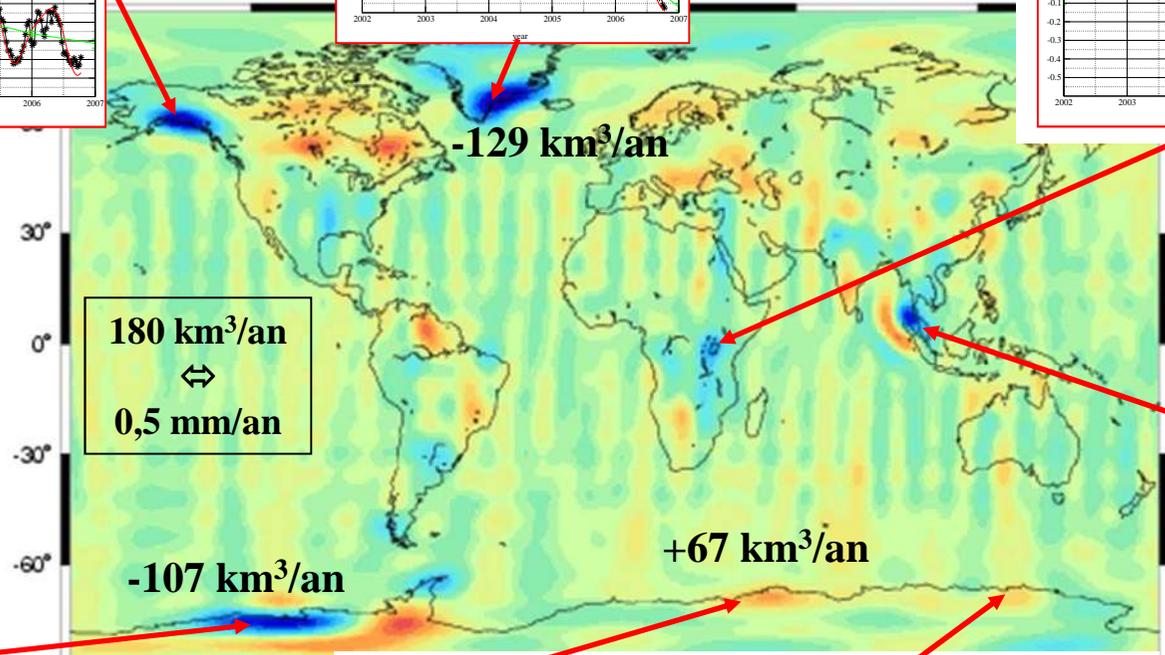
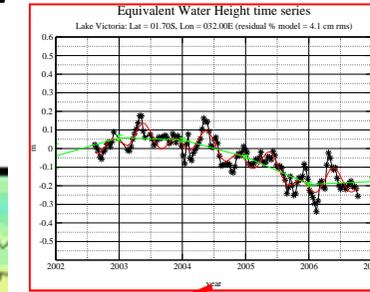
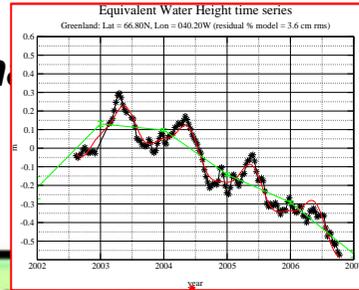
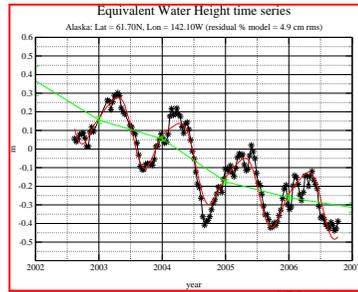


TENDANCE

RESIDUS NON PERIODIQUES

Tendances linéaires sur 2002-2006

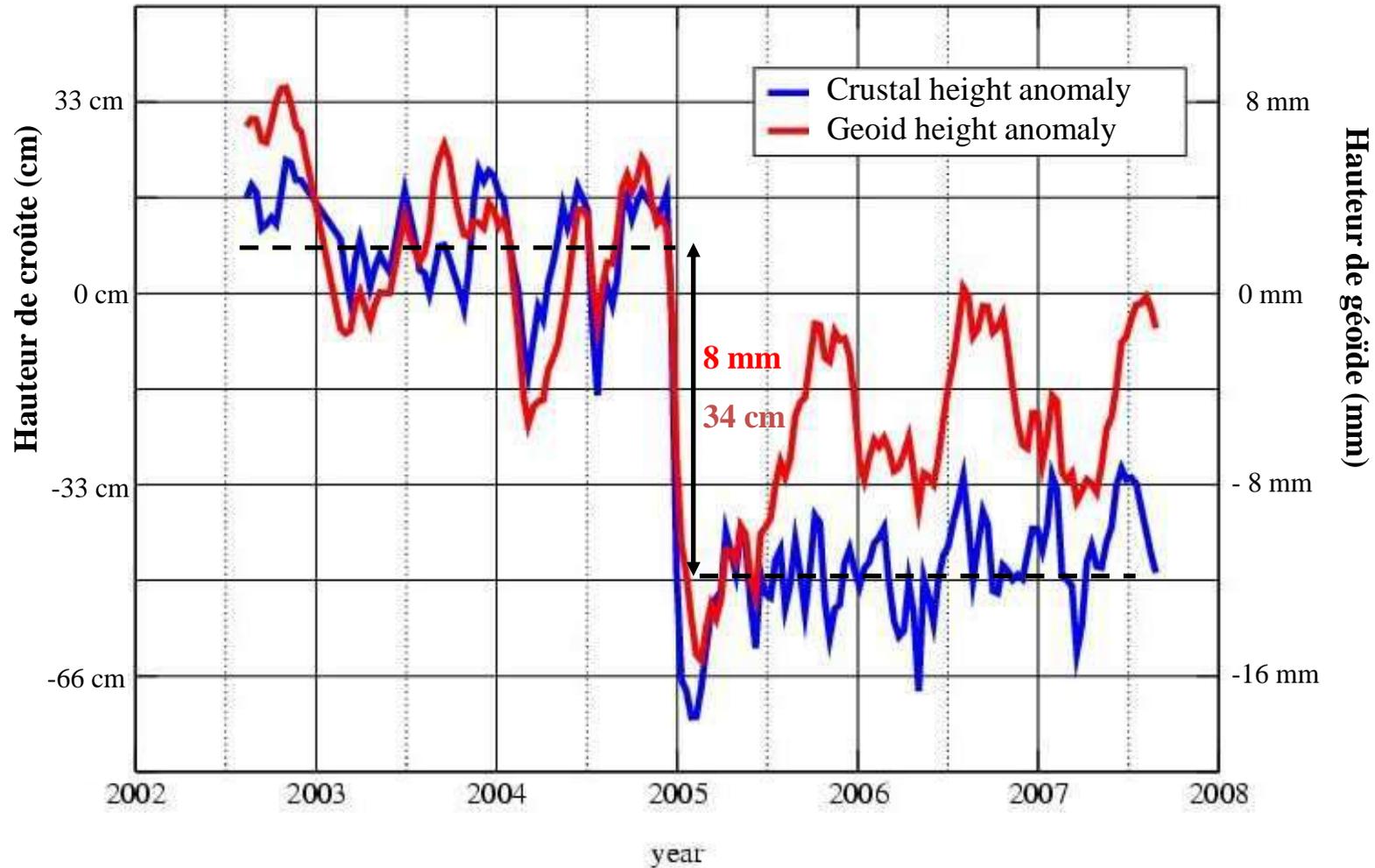
en h... quivalente (m/an)



minimum : -18 cm/an
 maximum : +9 cm/an
 ms global : 2 cm/an

Détection par GRACE de l'événement sismique de Sumatra du 26 décembre 2004

Andaman Sea: Lat = 07.50N, Lon = 096.50E



L'effet d'atténuation avec l'altitude est moindre pour les quantités dérivées du potentiel perturbateur T . Ceci est démontré par les dérivées radiales de T :

$$T = \frac{GM_o}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda_P + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda_P \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

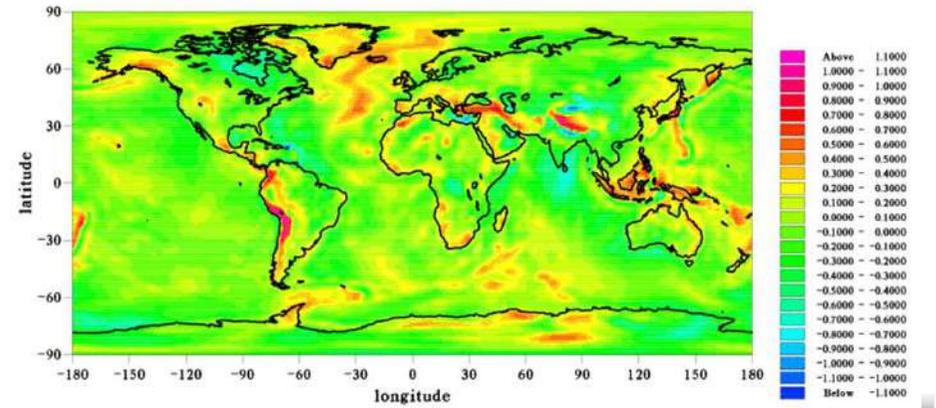
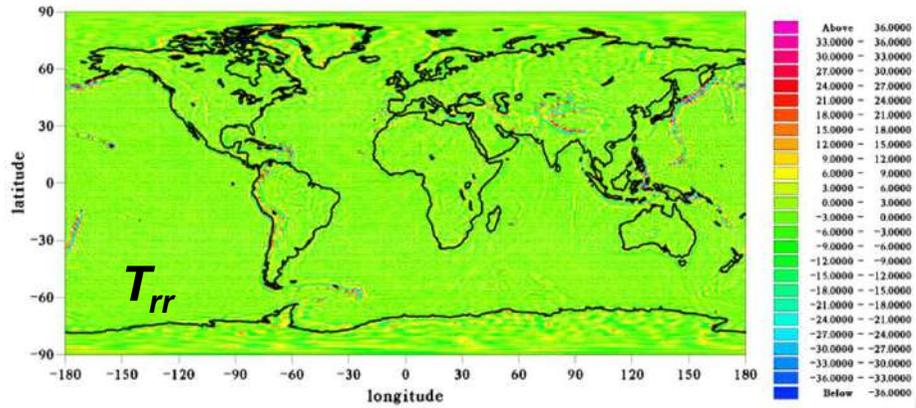
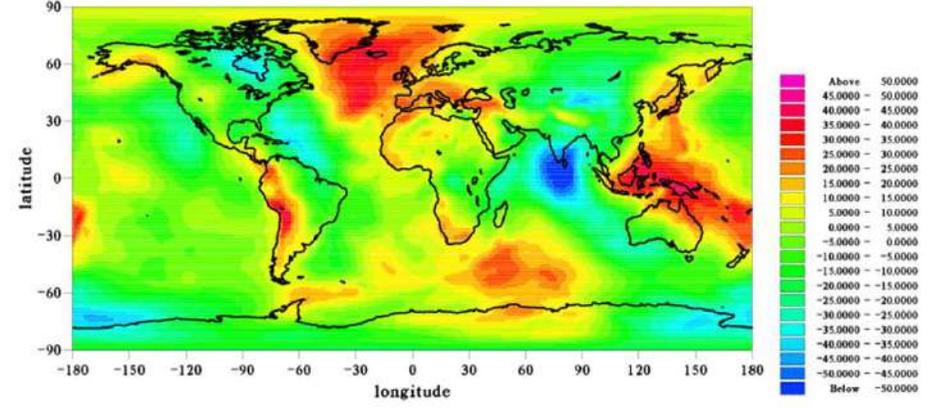
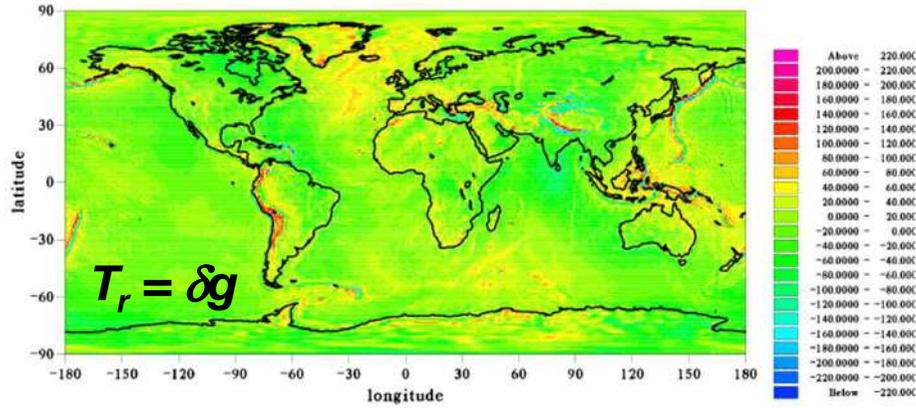
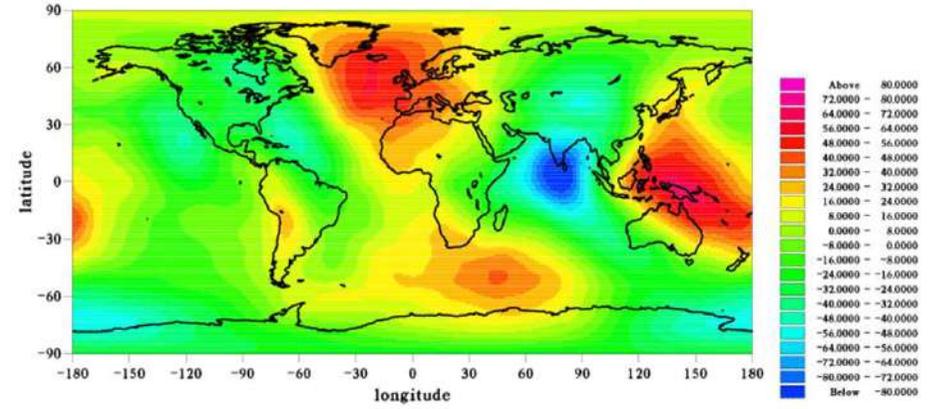
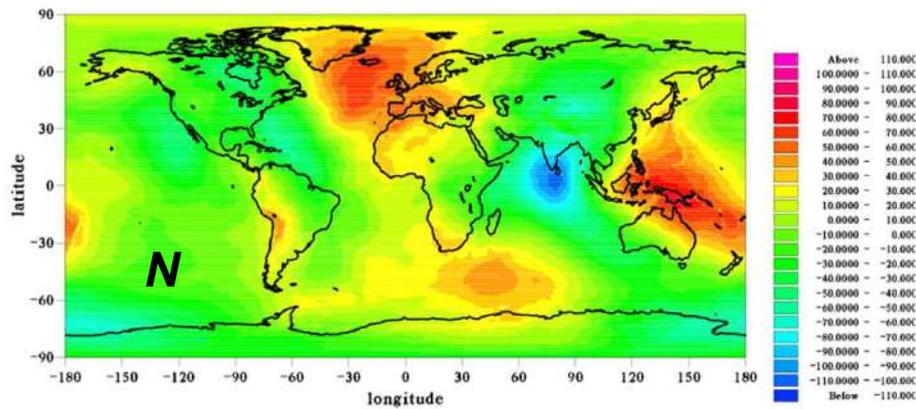
$$T_r = \frac{\partial T}{\partial r} = -\gamma \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

$$T_{rr} = \frac{\gamma}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+3} \sum_{m=0}^n \left[\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

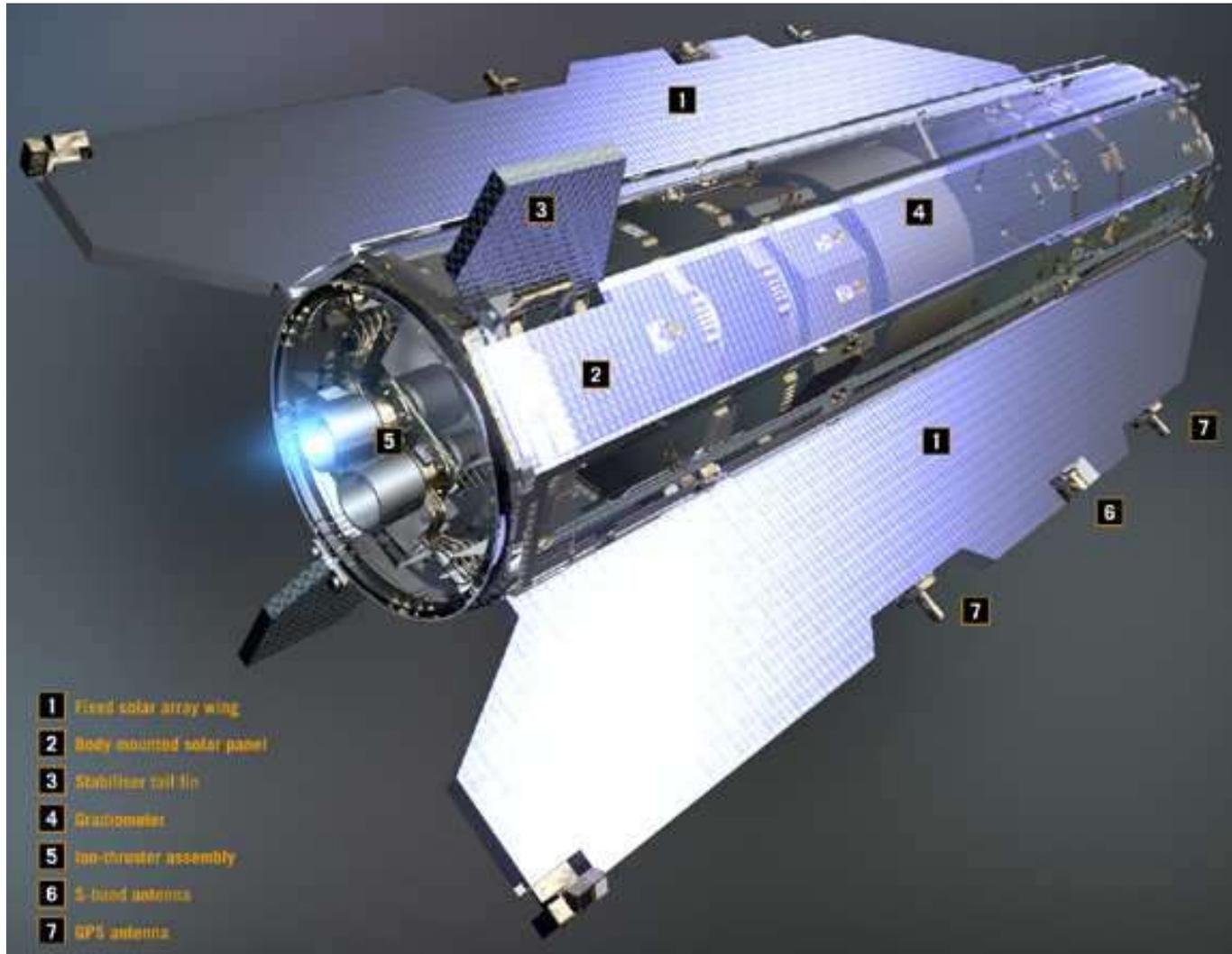
T_{rr} est le gradient de gravité radial ; c'est la mission GOCE, qui combine altitude basse (270 km) avec une mesure plus sensible aux courtes longueurs d'ondes du champ de gravité.

Sur le géoïde

Idem, à 300 km d'altitude



La mission GOCE (2009 – 2013)



GOCE mission overview

Launched from Plesetsk 17 March 2009, atmospheric re-entry 11 November 2013

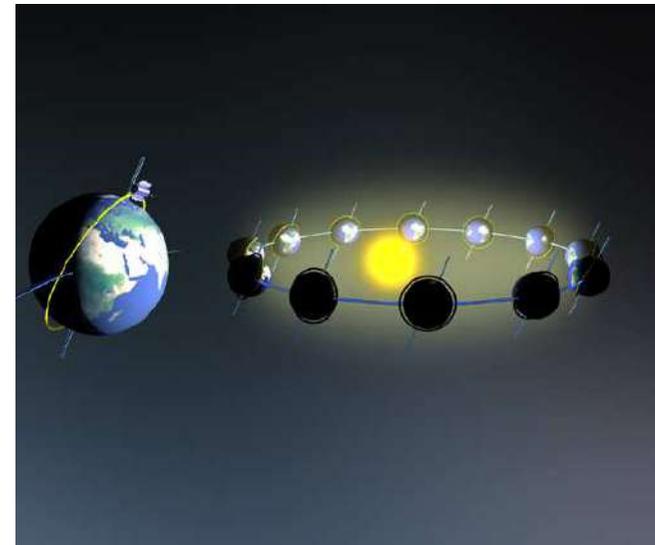
Mission objectives:

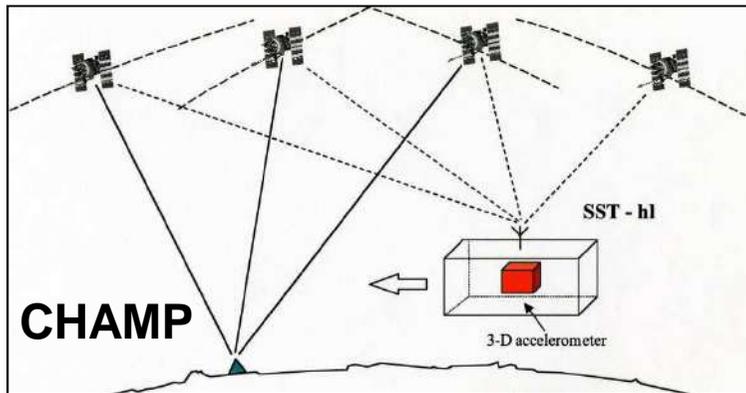
Determine geoid with an accuracy of 2 cm and gravity anomalies with an accuracy of 1-2 mGal ($1-2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$) at a resolution of 100 km (degree 200)

Payload: Gradiometer, 12-channel GPS receiver, laser retroreflector, star sensors

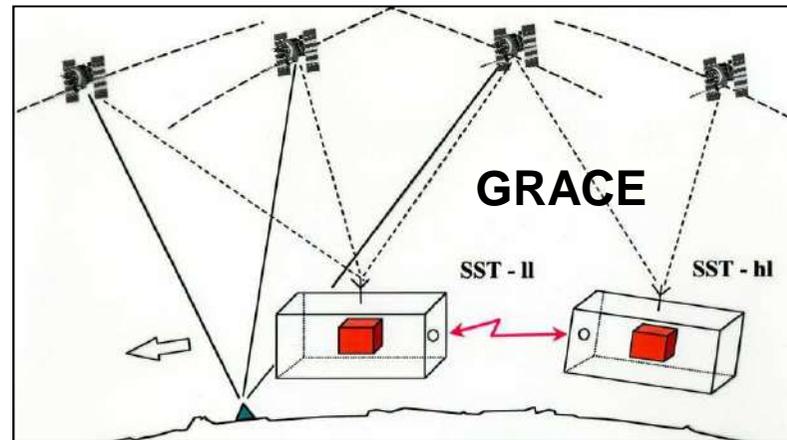
Mission orbit:

- Sun-synchronous ($i=96.7^\circ$), dusk/dawn
- 255-225 km altitude



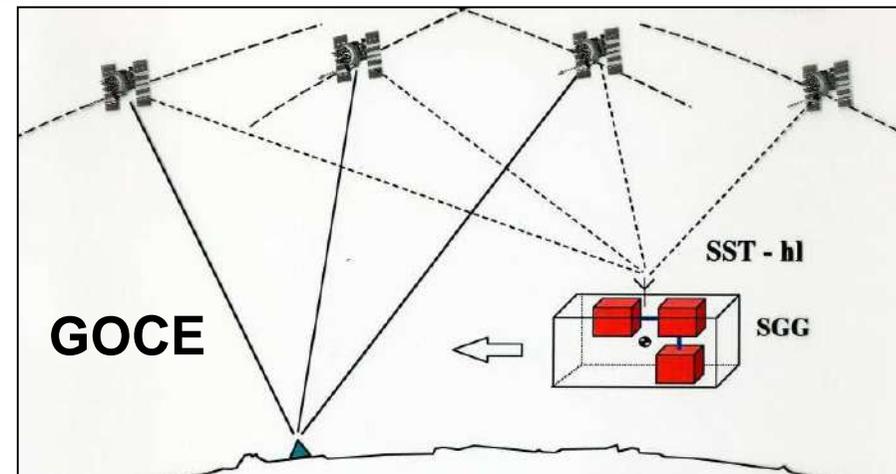


L'évolution des systèmes d'observation:
CHAMP, GRACE, GOCE



GOCE (4 critères satisfaits) :

- basse altitude (*propulsion*)
- suivie continue (*GPS*)
- mesurer forces de surface (*accéléromètres*)
- augmenter la sensibilité (*gradiomètre*)



GOCE payload: gradiomètre

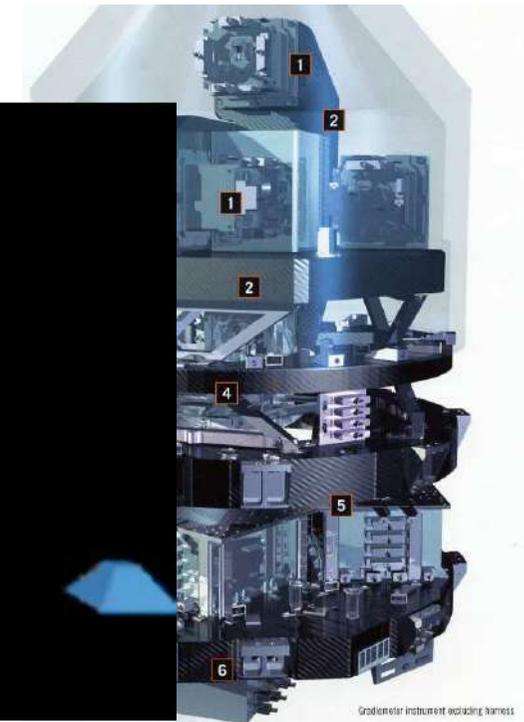
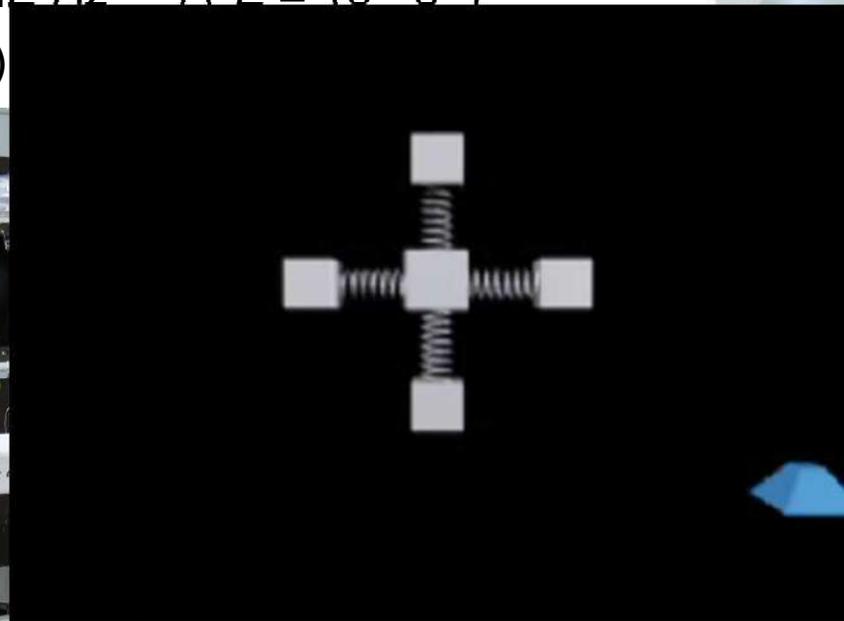
Gravity gradiometer

- Three pairs of accelerometers, baseline 0.5 m, perpendicular to each other.
 - The read-out difference per pair of accelerometers provides one component of the gravity gradient, the average gives the common mode
 - Angular accelerations are also obtained

$$V_{XX} = (X_2 - X_1) / 0.5$$

$$Acc_{XX} = (X_2 + X_1) / 0.5$$

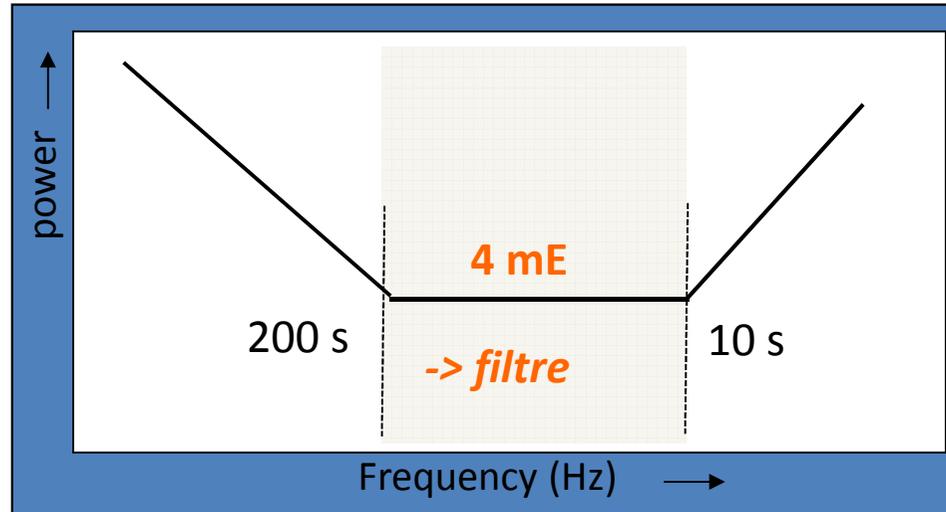
- Measurement bandwidth: 0.005-0.1 Hz
precision: 3-6 mE Hz^{-0.5} (1 E = 10⁻⁹ s⁻²)
- Power: 100 W (180 kg)



- 1 Accelerometer pair 3 Isostatic X-frame 5 Intermediate tray
2 Ultra-stable carbon-carbon structure 4 Panel regulated by heaters 6 Electronic panel

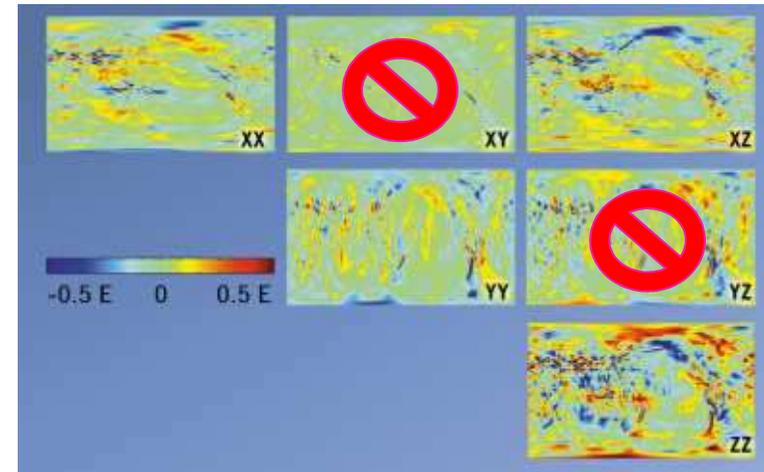
GOCE payload: gradiomètre

Gradiomètre: densité spectrale du bruit



The measurement bandwidth of the gradiometer is 200-10 seconds; this corresponds approximately to 1600-80 km along the orbit, and therefore degrees 13-250 (20000 km/n).

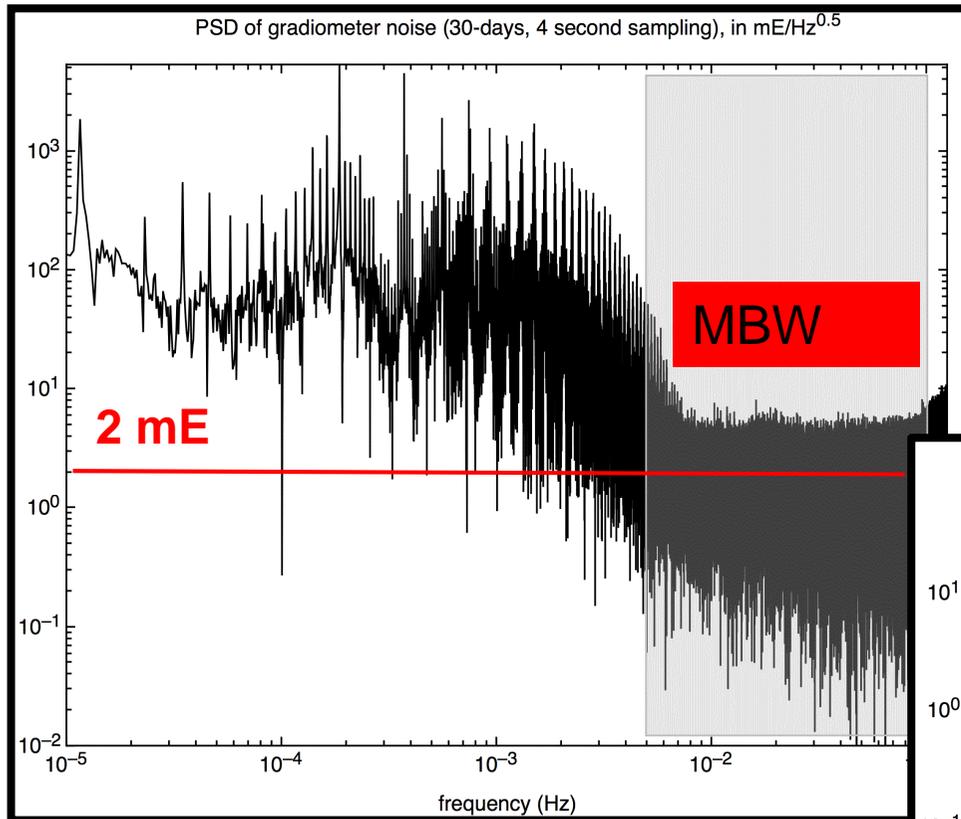
Composants du tenseur



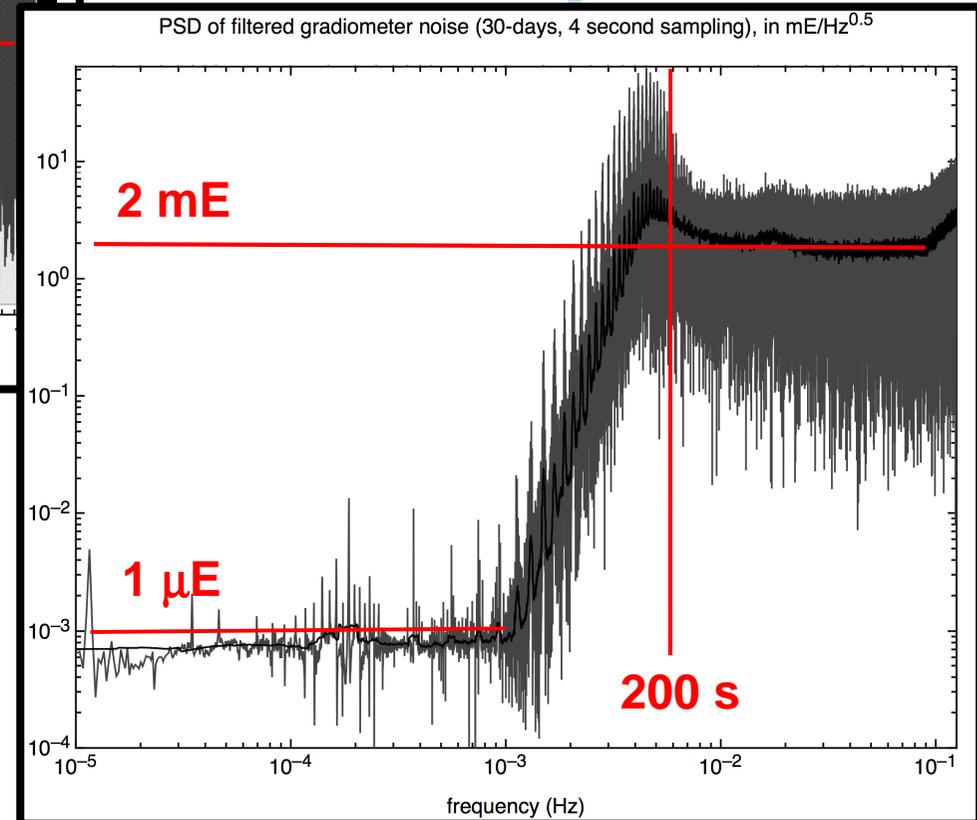
Highest precision: diagonal + XZ

$$V_{XX} + V_{YY} + V_{ZZ} = 0 \text{ (Laplace)}$$

GOCE payload: gradiomètre

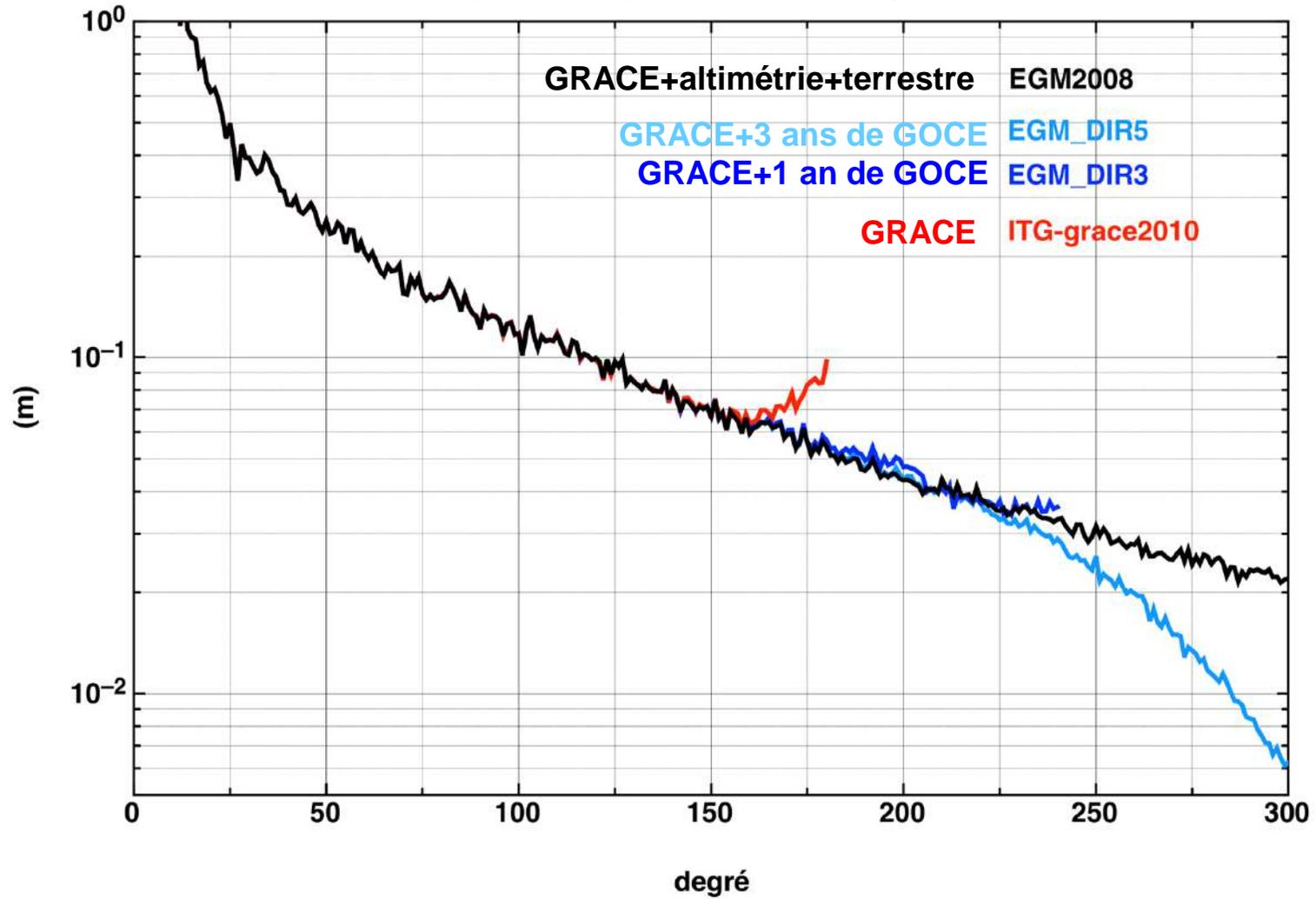


Filtre passe-haut
(220 s période de coupure)

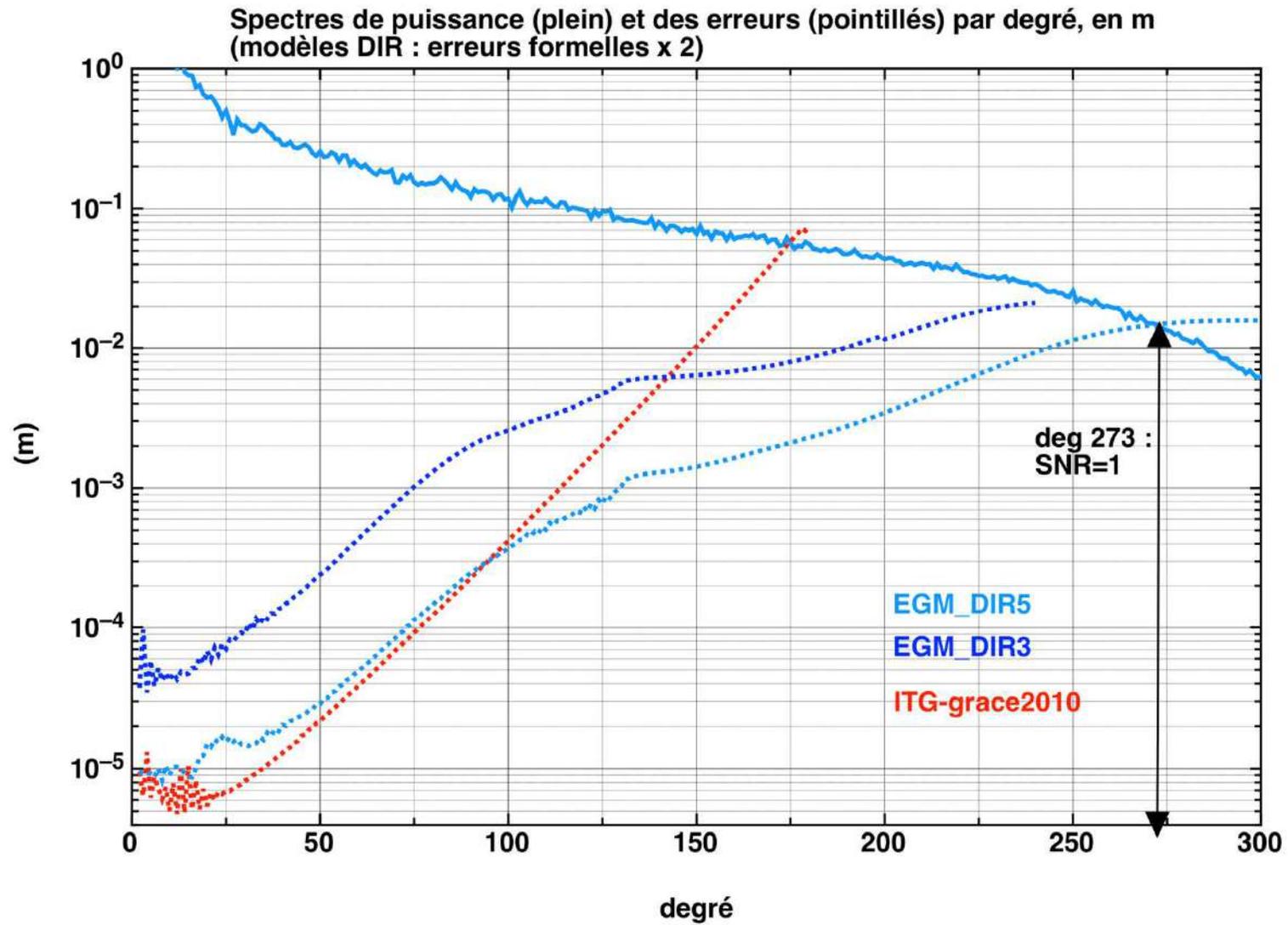


GOCE : modèles

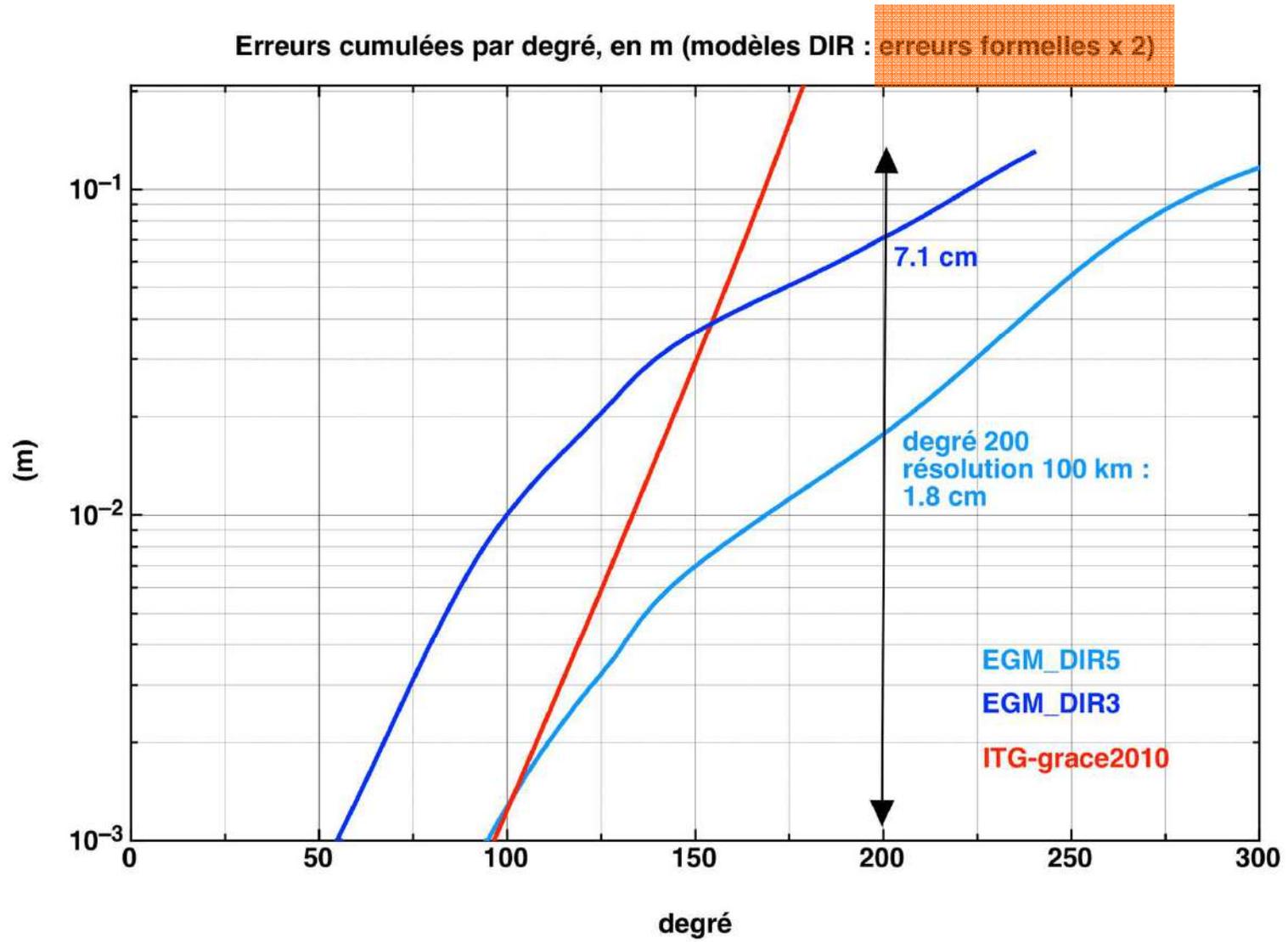
Spectres de puissance par degré, en m



GOCE : modèles

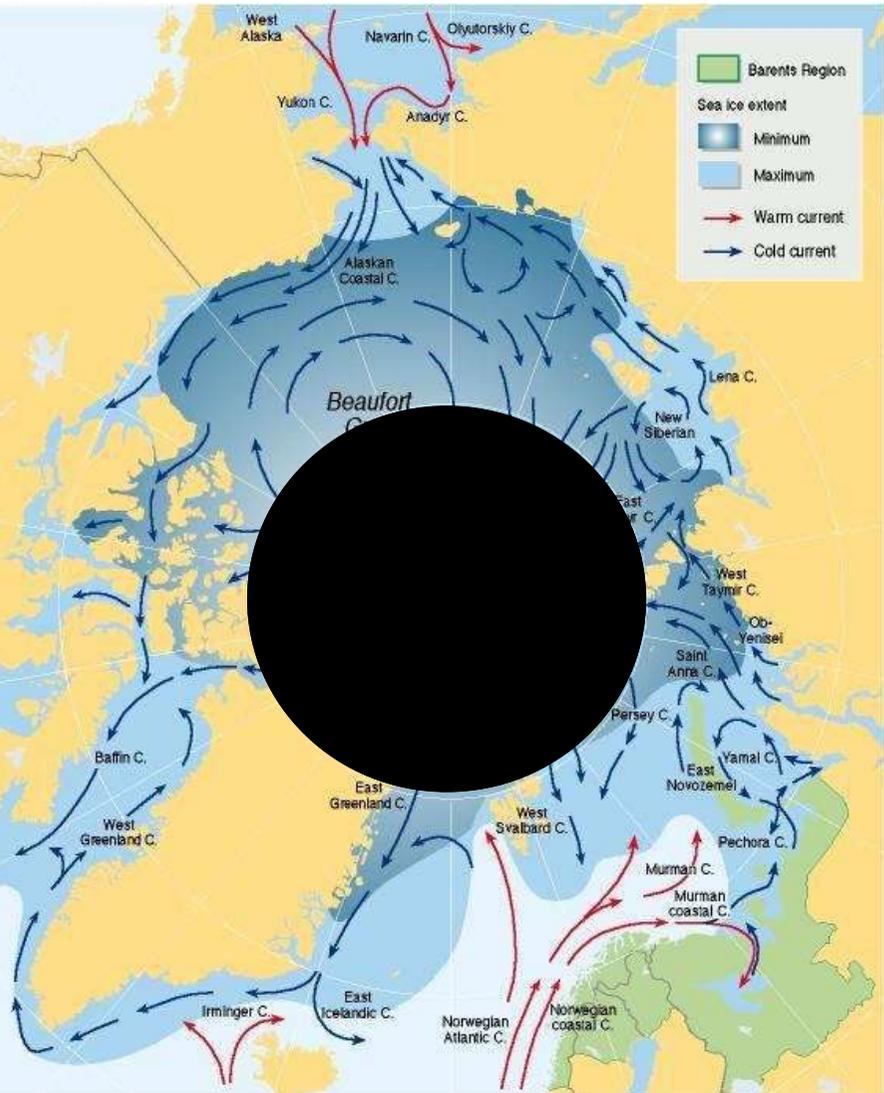
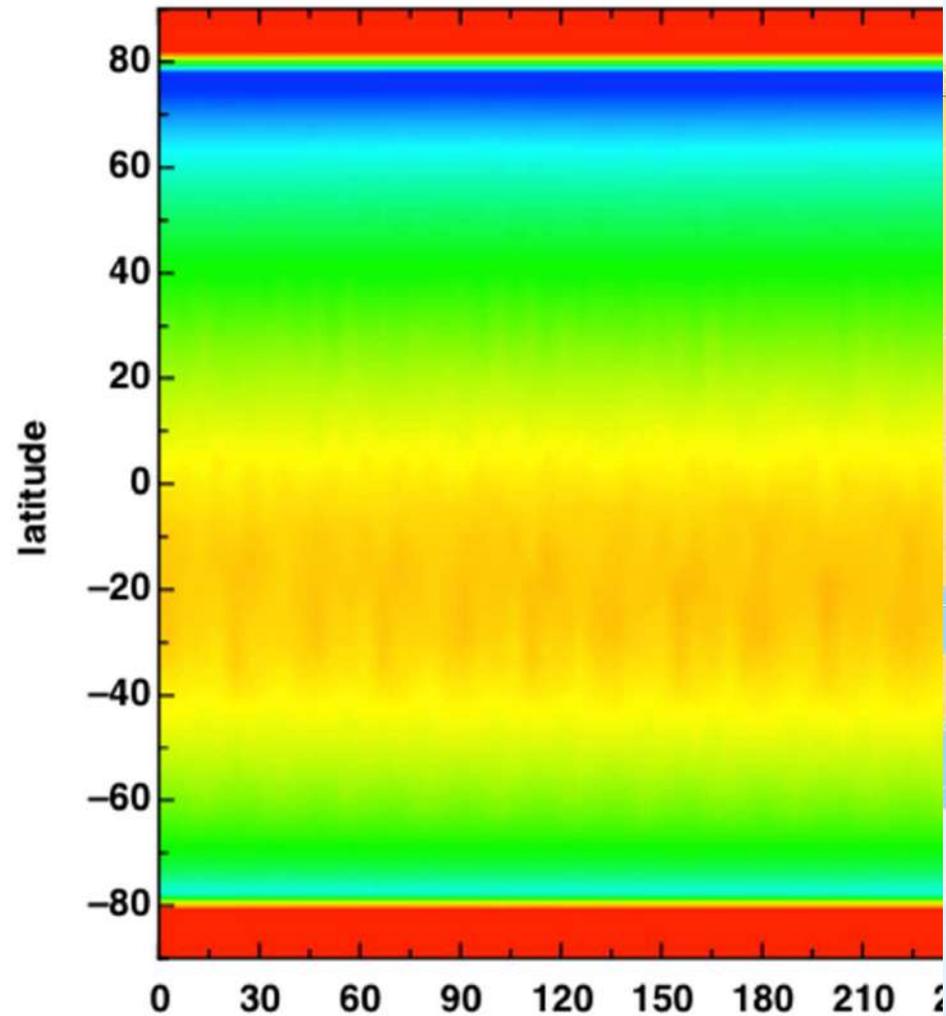


GOCE : modèles



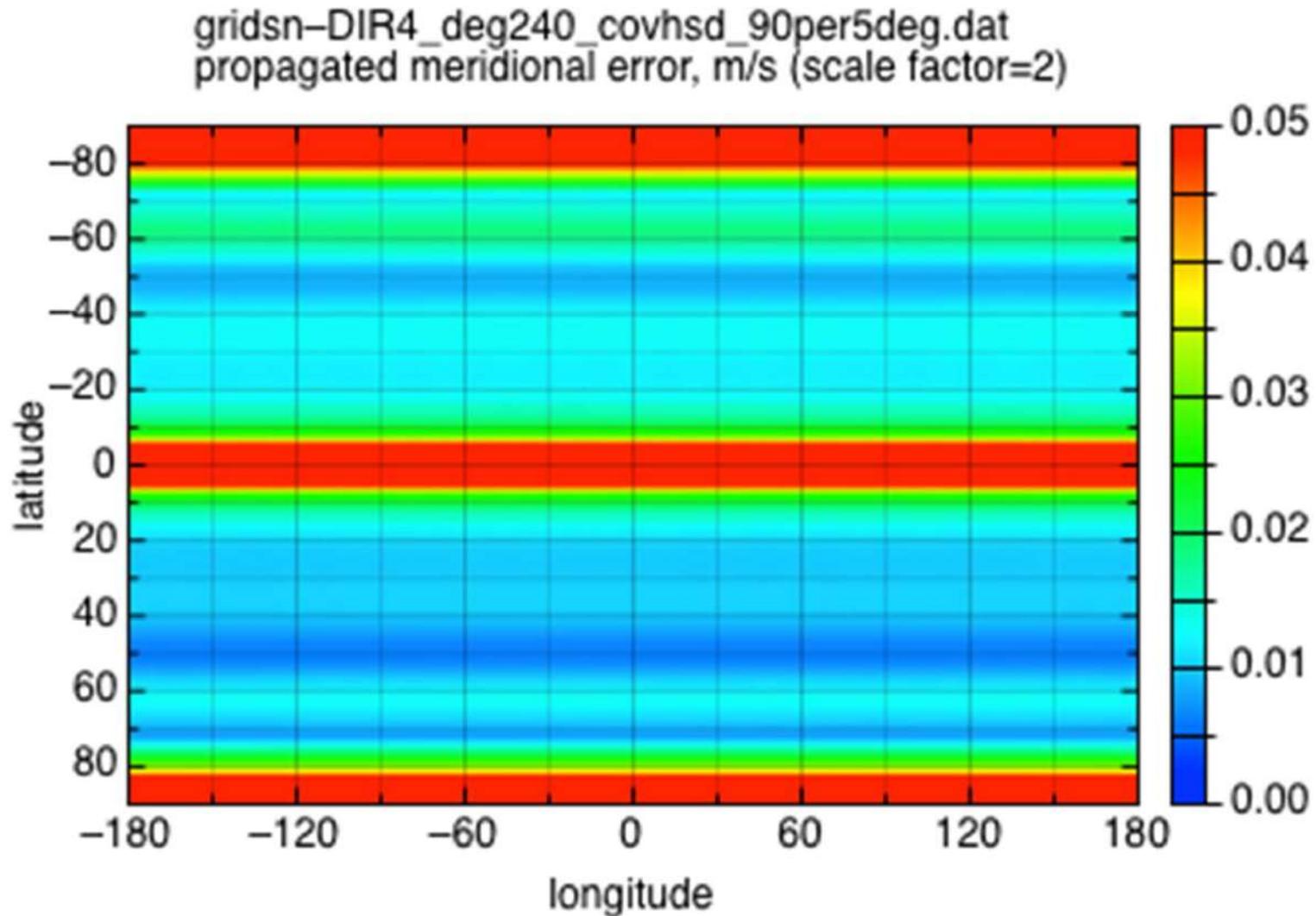
GOCE : modèles

Geoid error EGM-DIR-R4 (c)



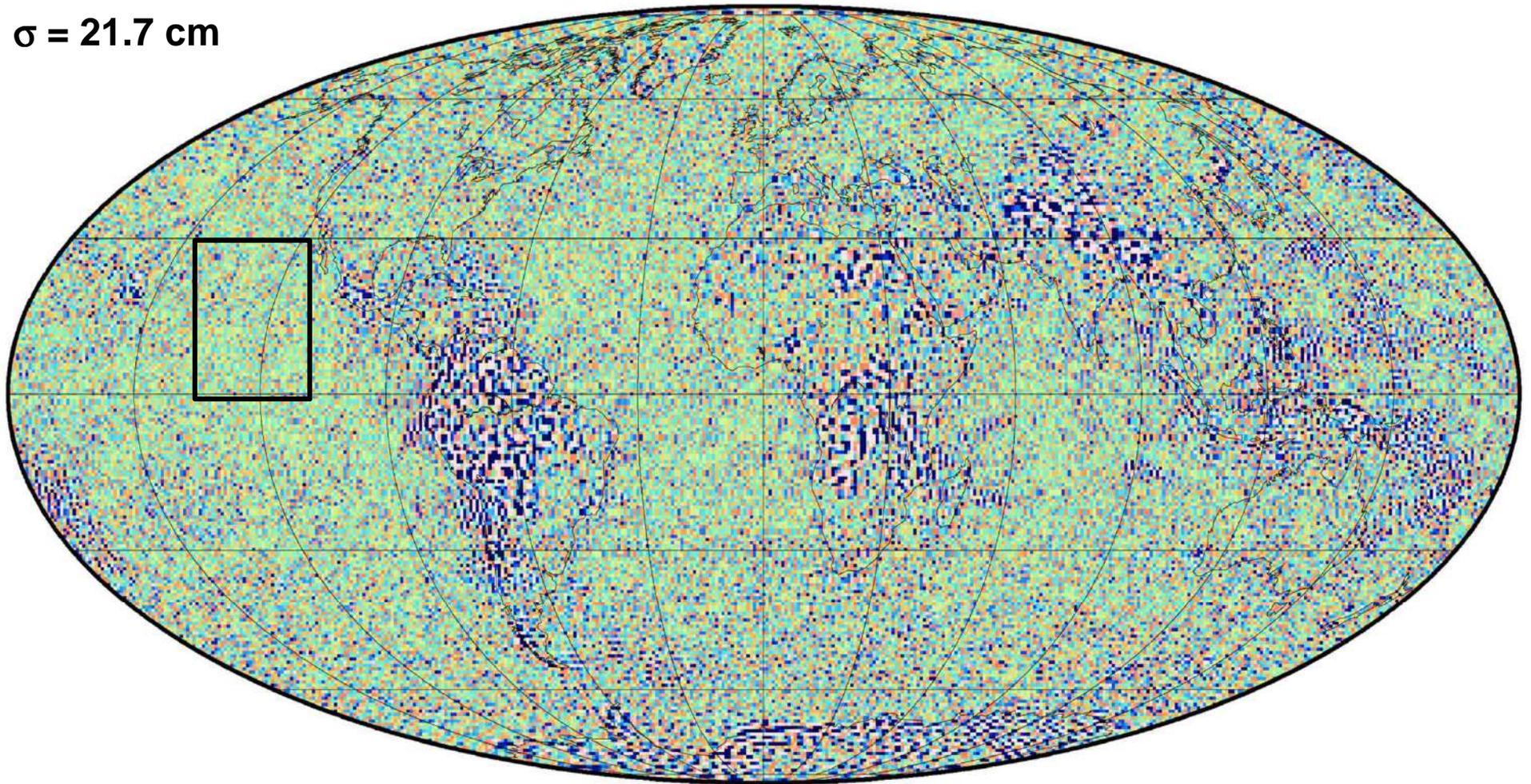
GOCE : modèles

The geostrophic current errors due to the geoid model error, in cm/s; the meridional component is shown below evaluated at degree 200.



GOCE : modèles (GRACE + 1 an de GOCE)

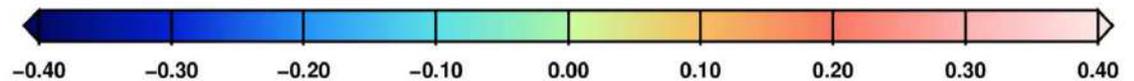
$\sigma = 21.7$ cm



DIR-3 vs EGM2008 max 240

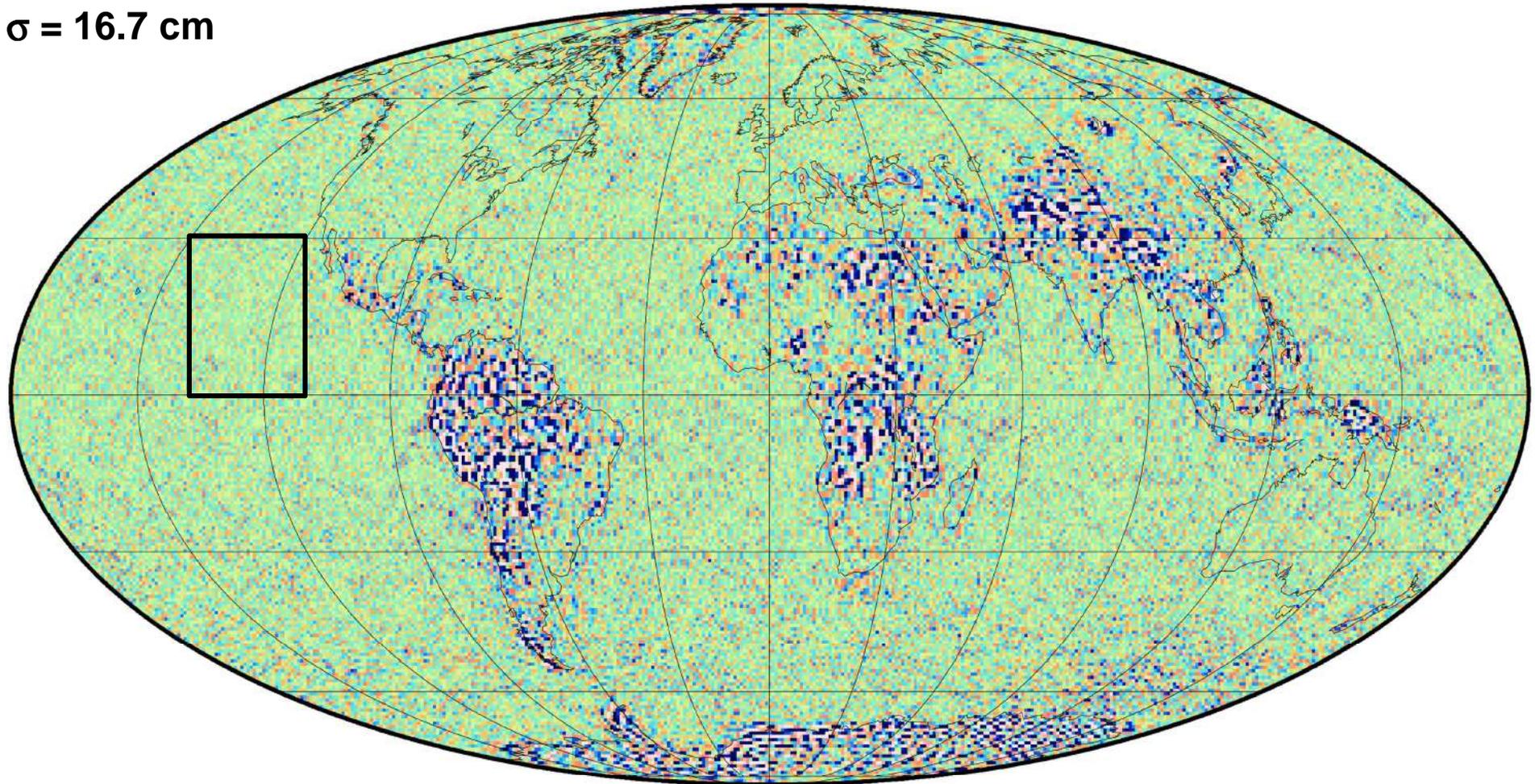
ζ , $0.75^\circ \times 0.75^\circ$

wrms about mean / min / max = 0.2167 / -3.134 / 3.365 meter



GOCE : modèles (GRACE + 3 ans de GOCE)

$\sigma = 16.7 \text{ cm}$



DIR-5 vs. EGM2008 max 240

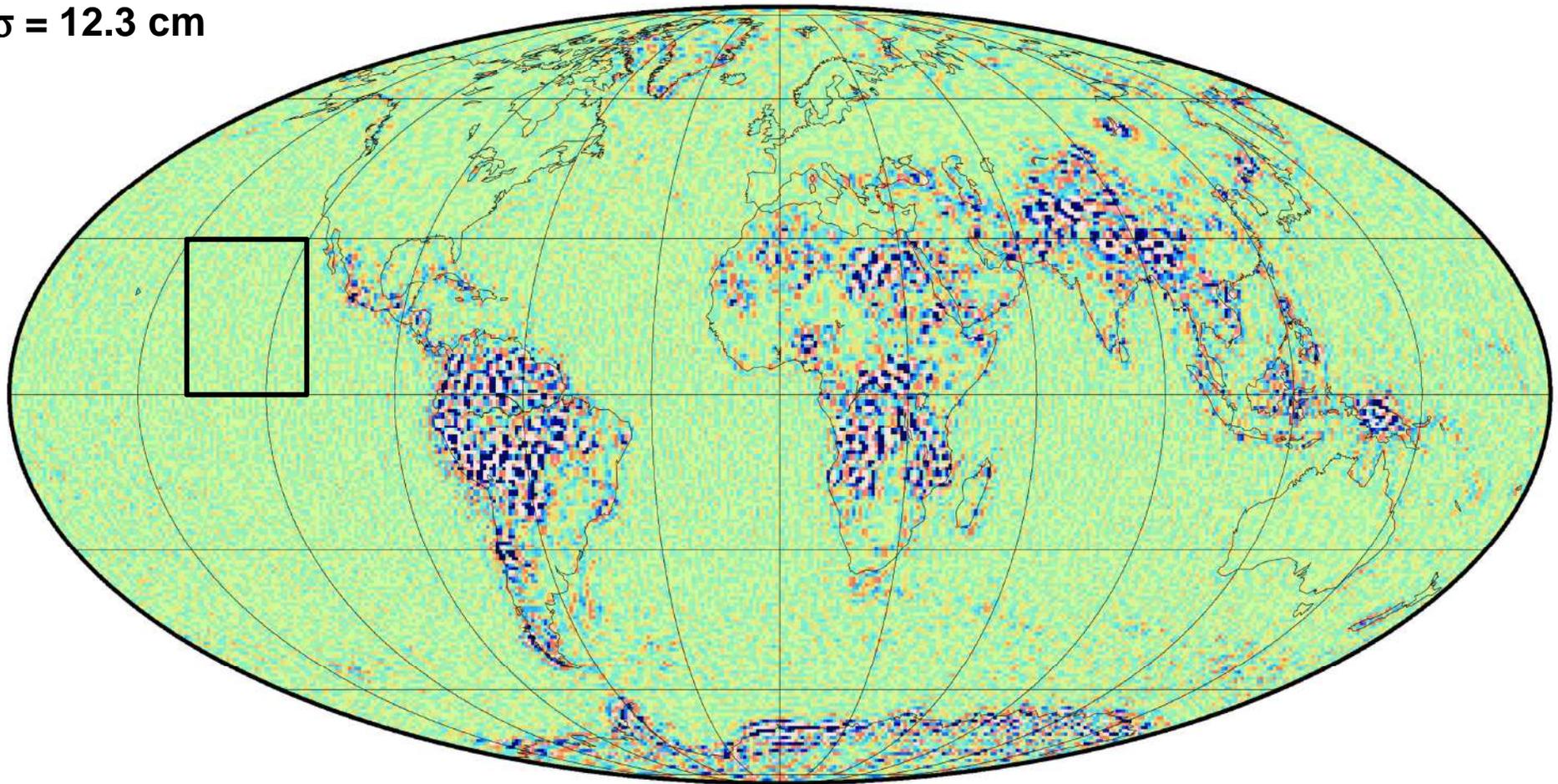
ζ , $0.75^\circ \times 0.75^\circ$

wrms about mean / min / max = 0.1665 / -3.47 / 3.155 meter



GOCE : modèles (GRACE + 3 ans de GOCE + données de surface)

$\sigma = 12.3 \text{ cm}$



EIGEN-6C4 vs. EGM2008 max d/o 260

ζ , $0.75^\circ \times 0.75^\circ$

wrms about mean / min / max = 0.1225 / -3.276 / 2.577 meter



Calculer la topographie dynamique : GUT (ESA)

Topographie Dynamique Moyenne = Surface Moyenne Océanique – géoïde

La GOCE User Toolbox (GUT) de l'ESA permet de calculer toutes les quantités nécessaires.

Mais attention à :

- marée permanente**
- ellipsoïde**

La correction de marée terrestre dans le potentiel terrestre

La lune et le soleil exercent une attraction gravitationnelle dont une composante dans le développement harmonique est constante. C'est le terme de marée permanente dit de Honkasalo qui peut être incorporé au potentiel terrestre (en modèle "zero tide") par l'ajout de:

$$\Delta \bar{C}_{20} = A_0 H_0 k_{20} = \frac{1}{R\sqrt{4\pi}} (-0.31460) k_{20} = -4.20110^{-9}$$

Modèle "Tide Free"

néglige tout impact de la lune et du soleil, comme si ces corps n'existaient pas. Le potentiel de marée terrestre doit contenir tous les termes, permanents (U_{p0}) et périodiques

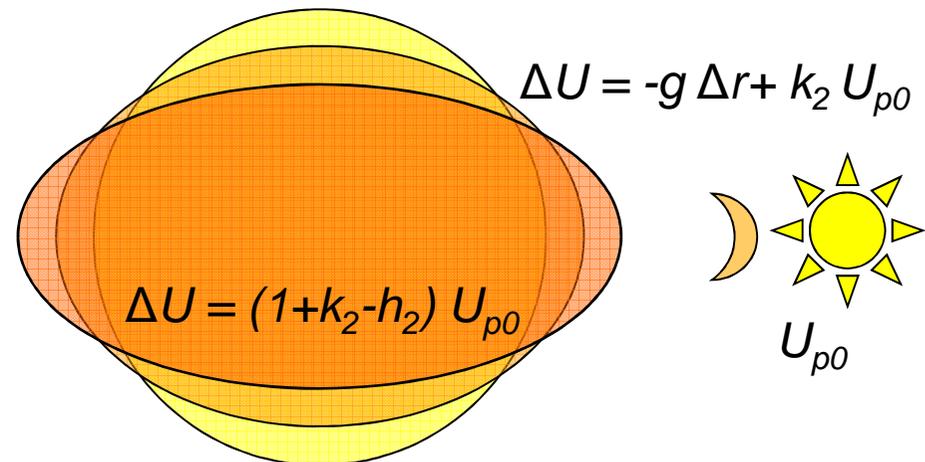
Modèle "Zero Tide"

Le potentiel terrestre tient compte de la déformation géométrique de marée permanente ($-h_2 U_{p0}$)

Modèle "Mean Tide"

Le potentiel terrestre tient compte de la déformation + du potentiel induit de marée permanente ($-h_2 U_{p0} + k_2 U_{p0}$)

Les modèles globaux sont classiquement donnés en système "tide free", parfois en système "zero tide" ; les mesures de gravité sont faites en système "mean tide".



La déformation de marée permanente sur le géoïde

In mean tide system:

$$a_e = 6\,378\,136.70 \text{ m}$$

$$1/f = 298.25227$$

In zero tide system:

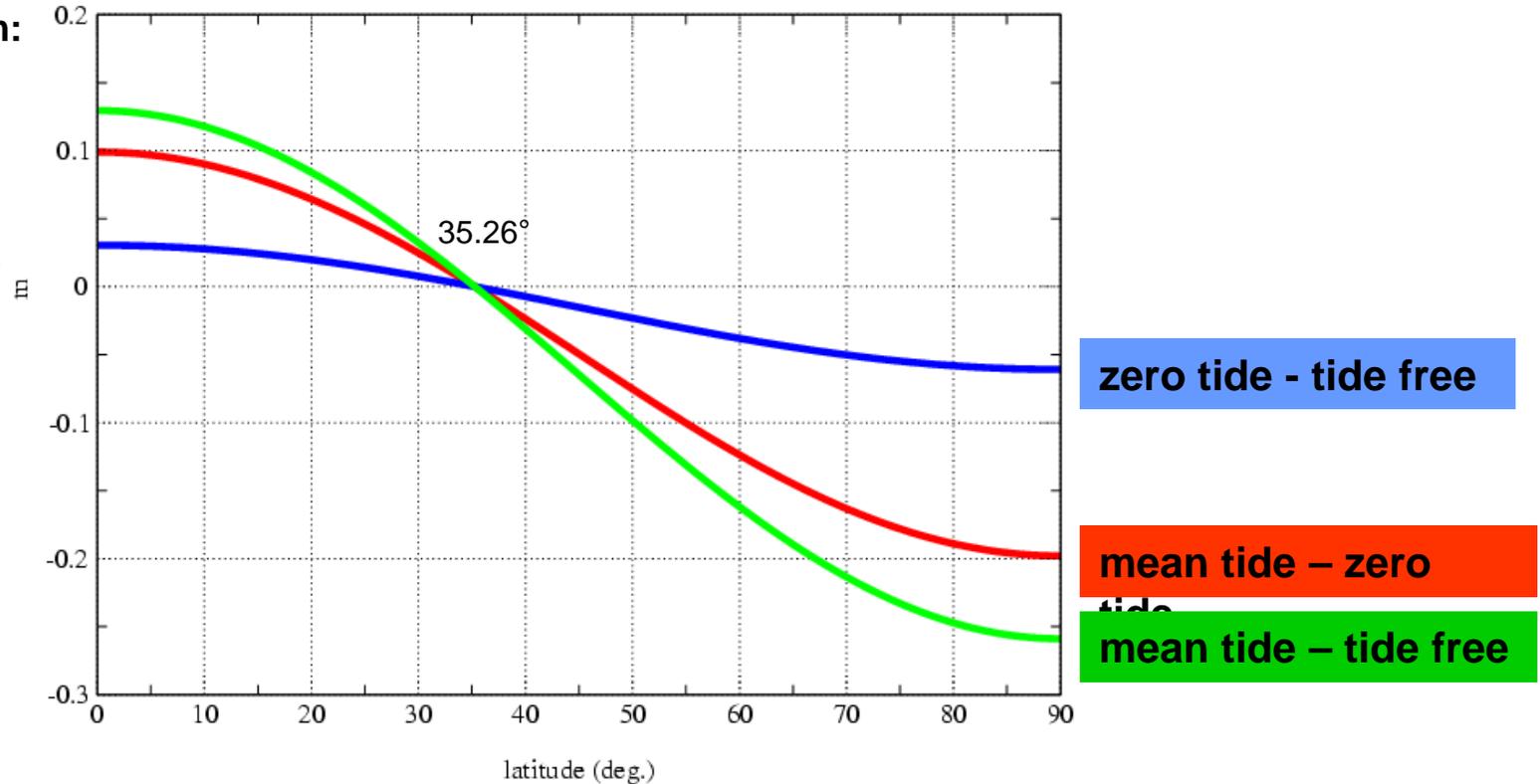
$$a_e = 6\,378\,136.60 \text{ m}$$

$$1/f = 298.25642$$

In tide free system:

$$a_e = 6\,378\,136.57 \text{ m}$$

$$1/f = 298.25767$$



$$R[\Delta C_{20}]_{perm} = -.198 \text{ m}$$

→

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{mean} - N_{zero} = -.198 (1.5 \sin^2 \varphi - .5) \\ N_{zero} - N_{free} = -.198 k_2 (1.5 \sin^2 \varphi - .5) \\ \hline N_{mean} - N_{free} = -.198 (1+k_2) (1.5 \sin^2 \varphi - .5) \end{array} \right.$$

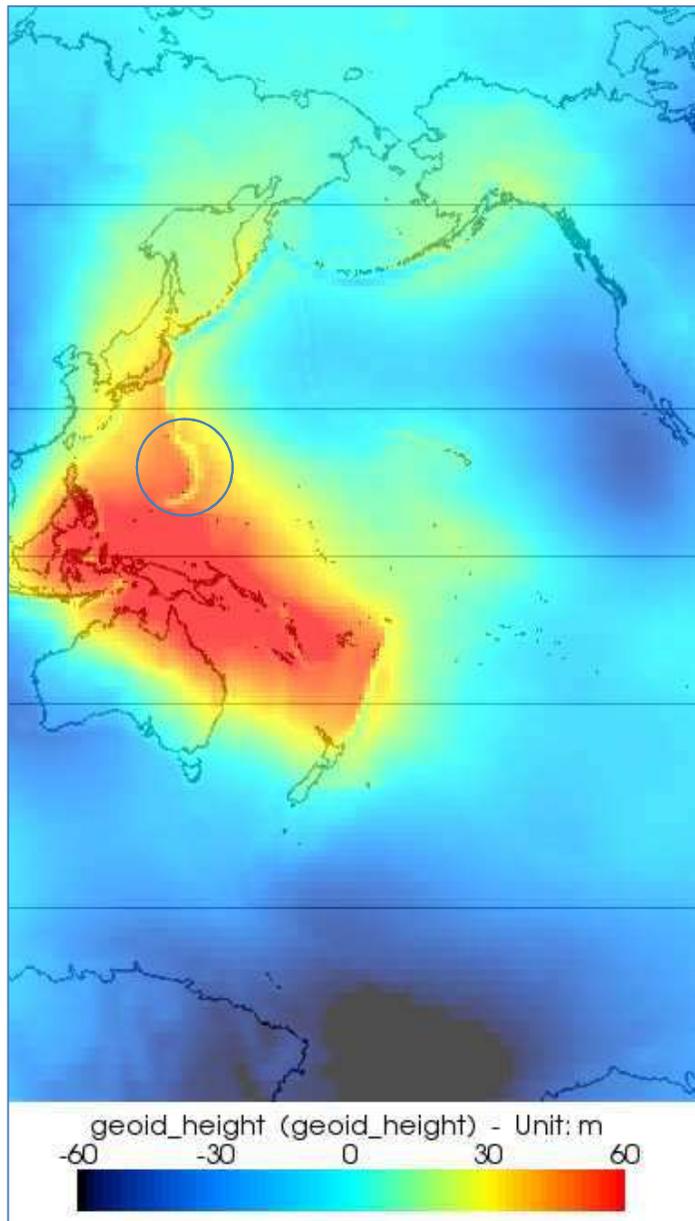
Ellipsoïdes : WGS84, TOPEX, ...

Les mesures altimétriques et les surfaces moyennes sont données par rapport à l'ellipsoïde GRS80/WGS84 ou TOPEX :

	<u>WGS84</u>	<u>TOPEX</u>
a :	6378137.0	6378136.3
f ⁻¹ :	298.257223563	298.257

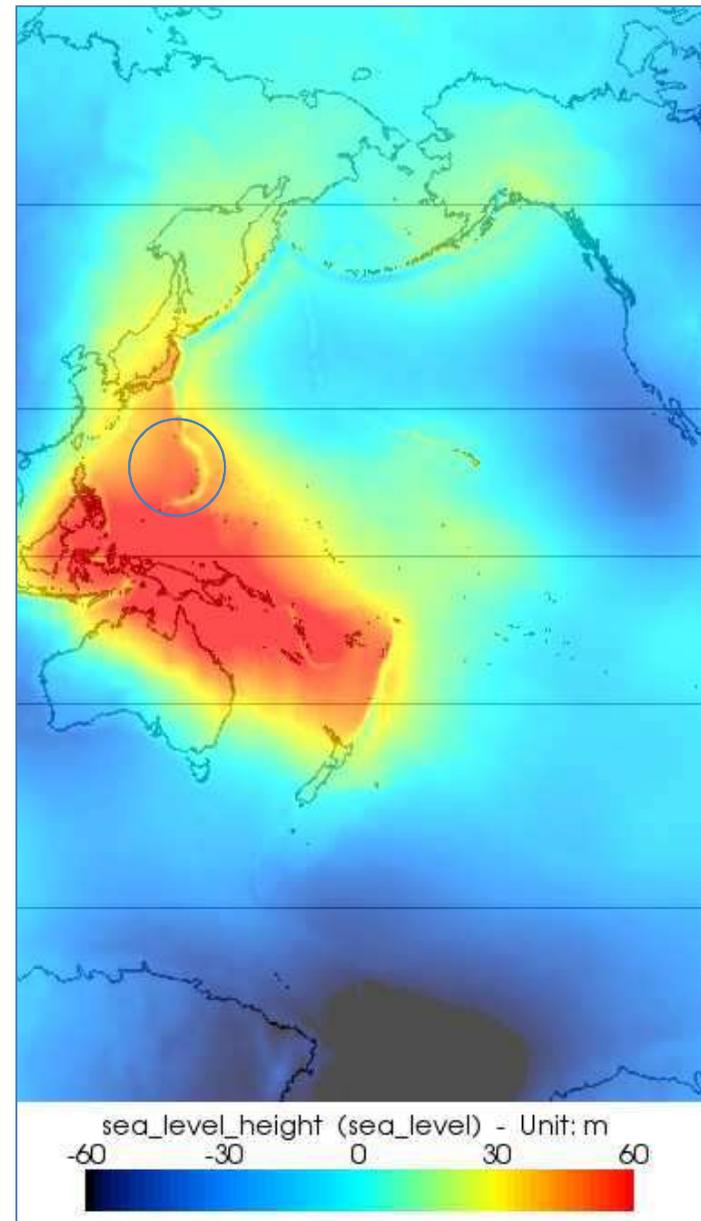
NB : l'information concernant a et GM (et J_2/C_{20}) est donné dans le fichier électronique du modèle du champ de gravité

Calculer la topographie dynamique : GUT (ESA)

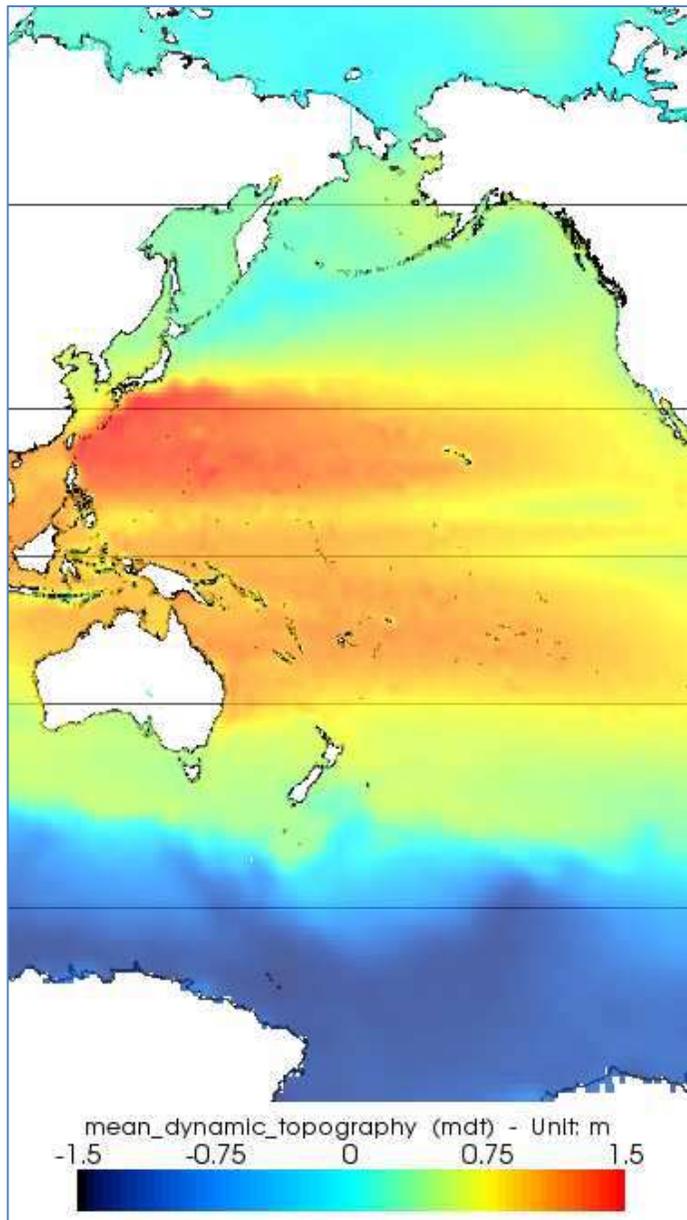


←
Géoïde
et
SMO
→

Petites
différences
(résolution)

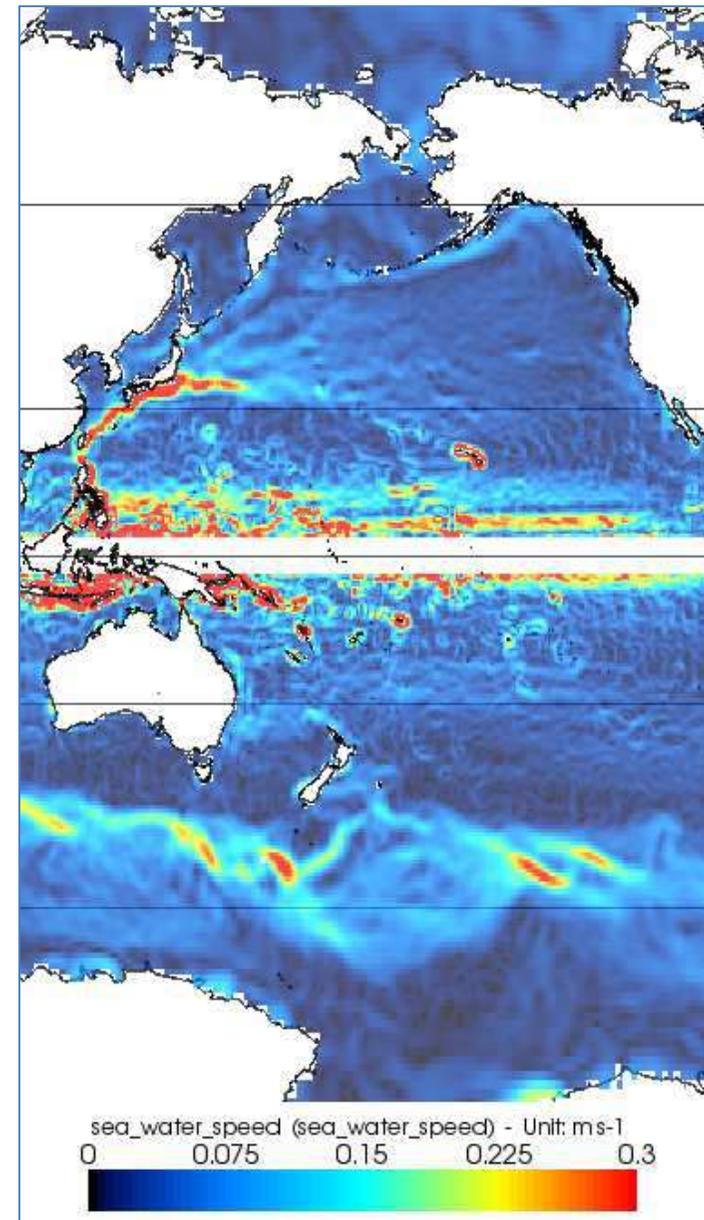


Calculer la topographie dynamique : GUT (ESA)



←
TDM
et
Vitesses
→

NB:
Pas filtré



Potentiel de gravitation et gravité

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

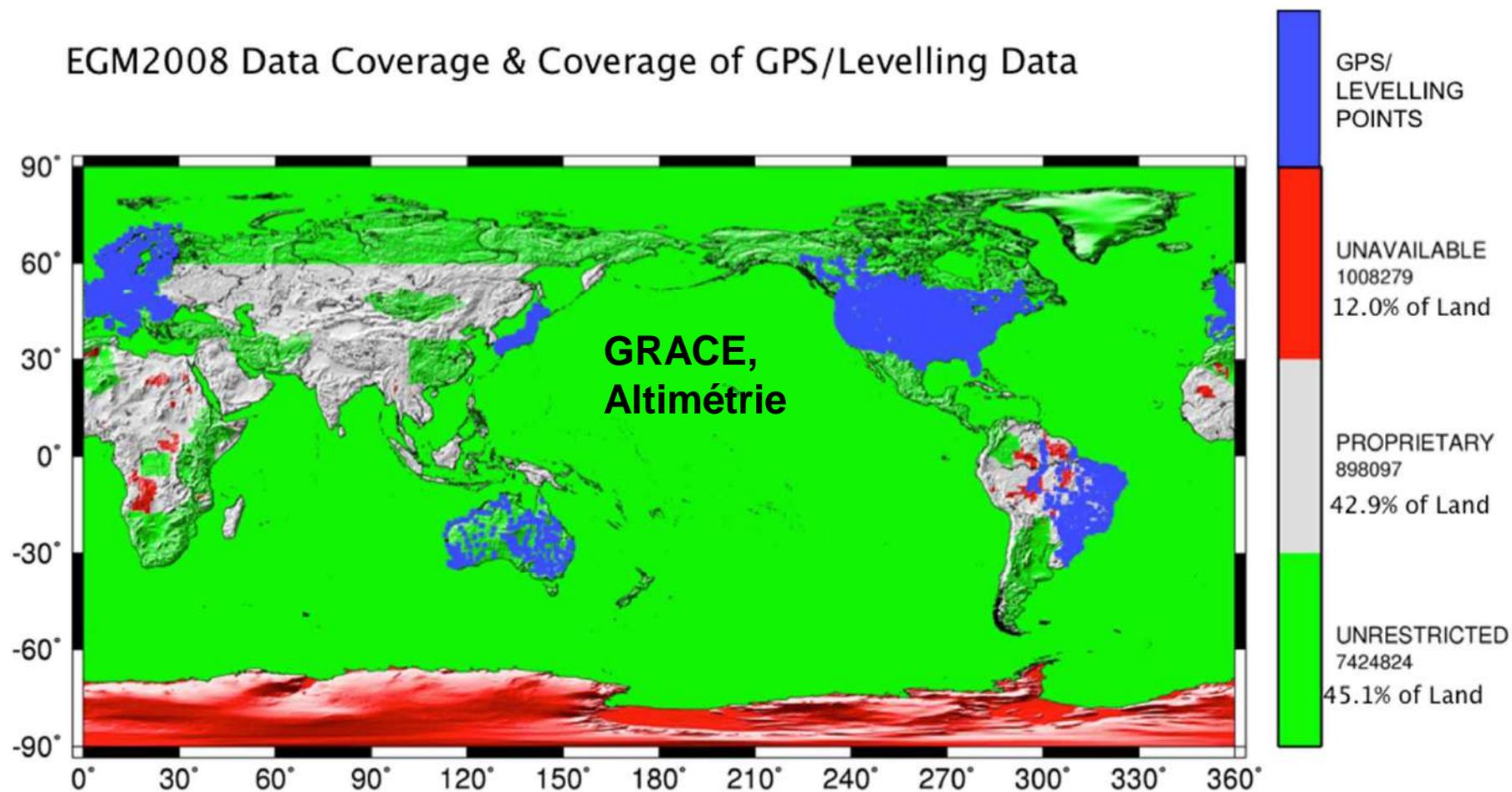
Les modèles globaux du potentiel

Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Combiner les données spatiales et terrestres

EGM2008 Data Coverage & Coverage of GPS/Levelling Data



Source: Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes, Steve C. Kenyon, and John K. Factor: An Earth Gravitational Model to Degree 2160 EGM2008

Combiner les données spatiales et terrestres

Accumulation of a **full normal matrix** up to d/o 370:

~200.000 parameters, ~ 250 GByte

contribution to the solution:



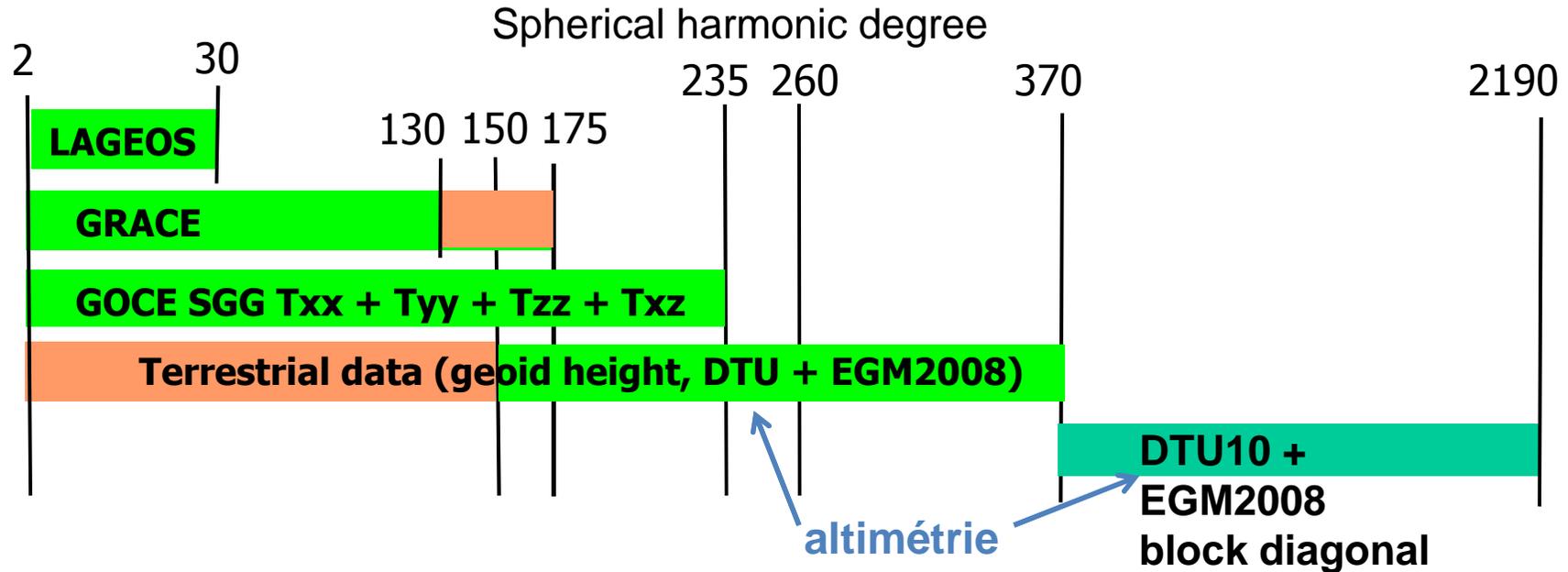
reduced beforehand:



Separate block diagonal solution:

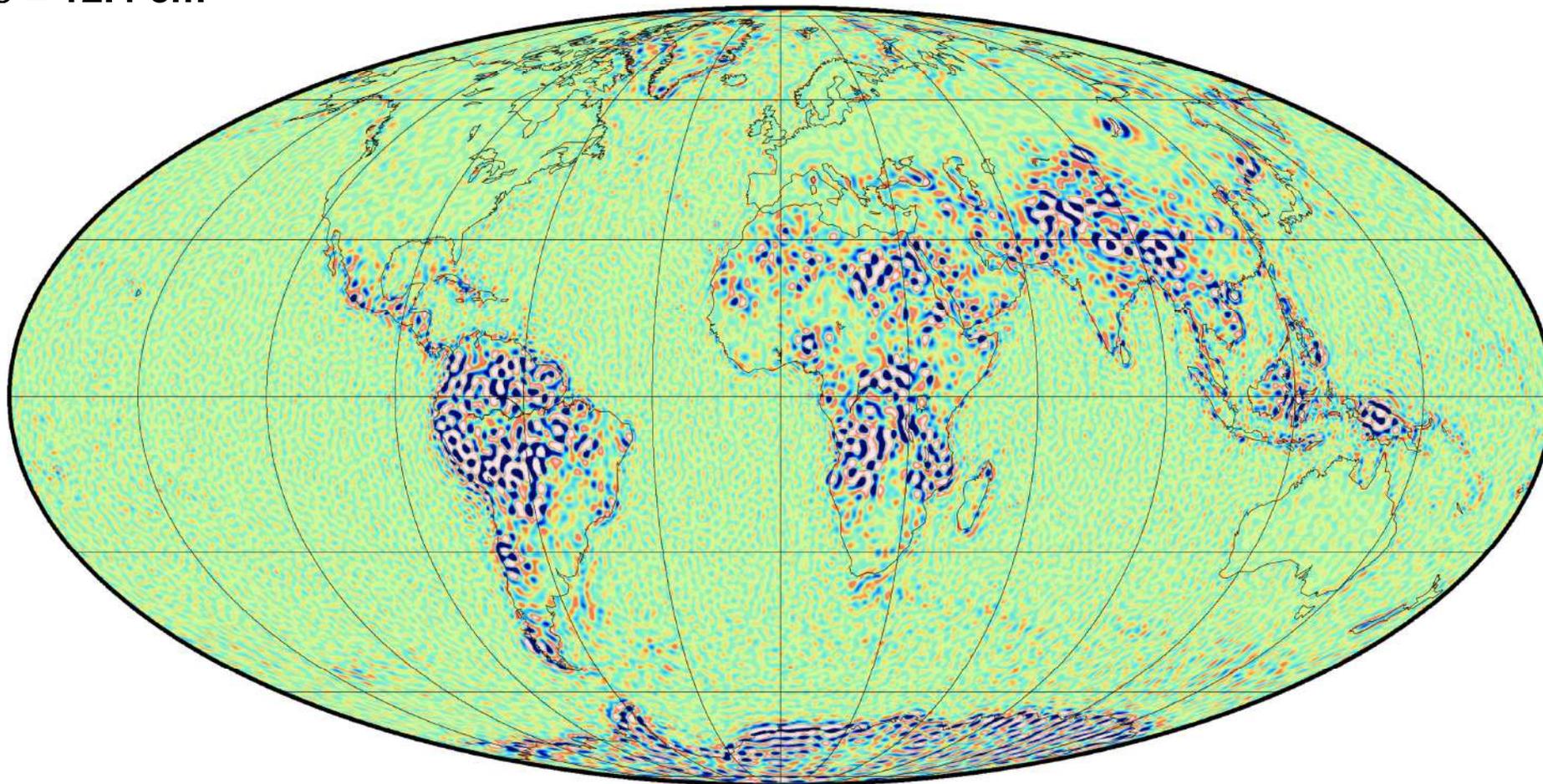


Modèles EIGEN :
La combinaison au niveau de l'équation normale est fonction du type d'observation (donc de sa résolution).



Combiner les données spatiales et terrestres

$\sigma = 12.4$ cm



EIGEN-6C4 vs. EGM2008 max d/o 2190

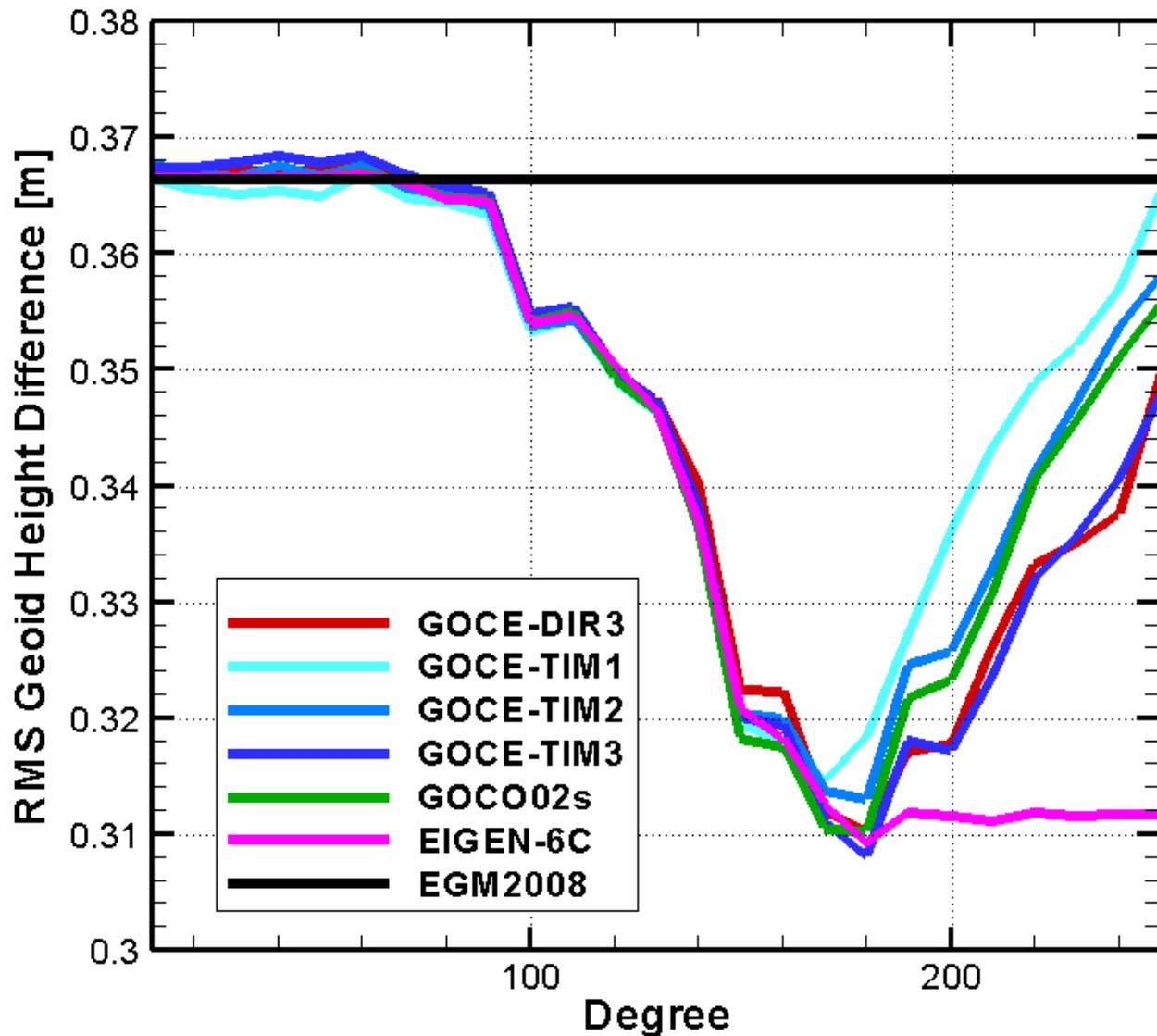
ζ , $0.1^\circ \times 0.1^\circ$

wrms about mean / min / max = 0.1237 / -3.643 / 3.051 meter



EIGEN-6C comparé à EGM2008

Validation des modèles en utilisant des *nouvelles* données GPS/Leveling au Brésil



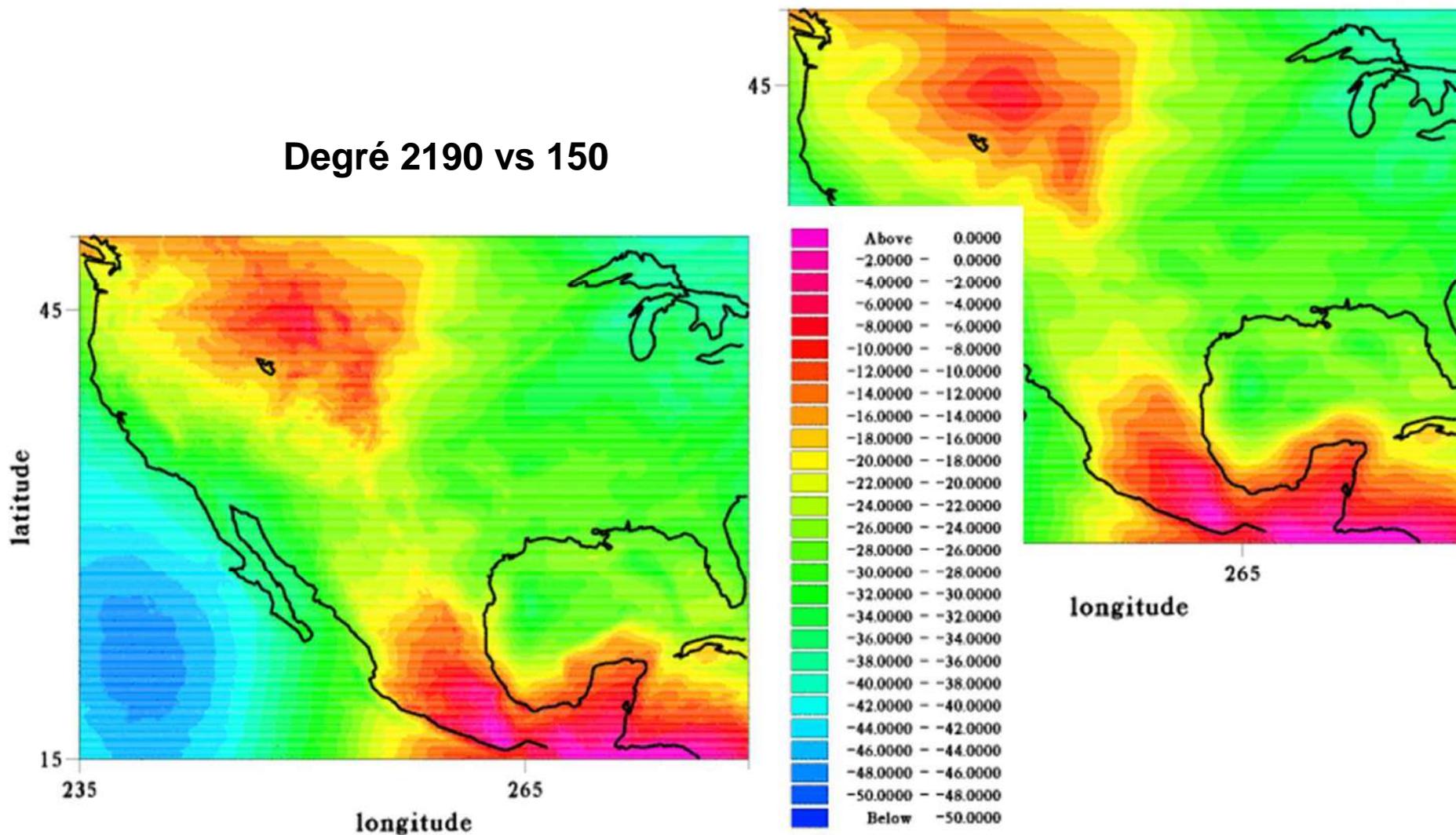
Amélioration grâce
aux données
GRACE et GOCE

European Space Agency

Combiner les données spatiales et terrestres

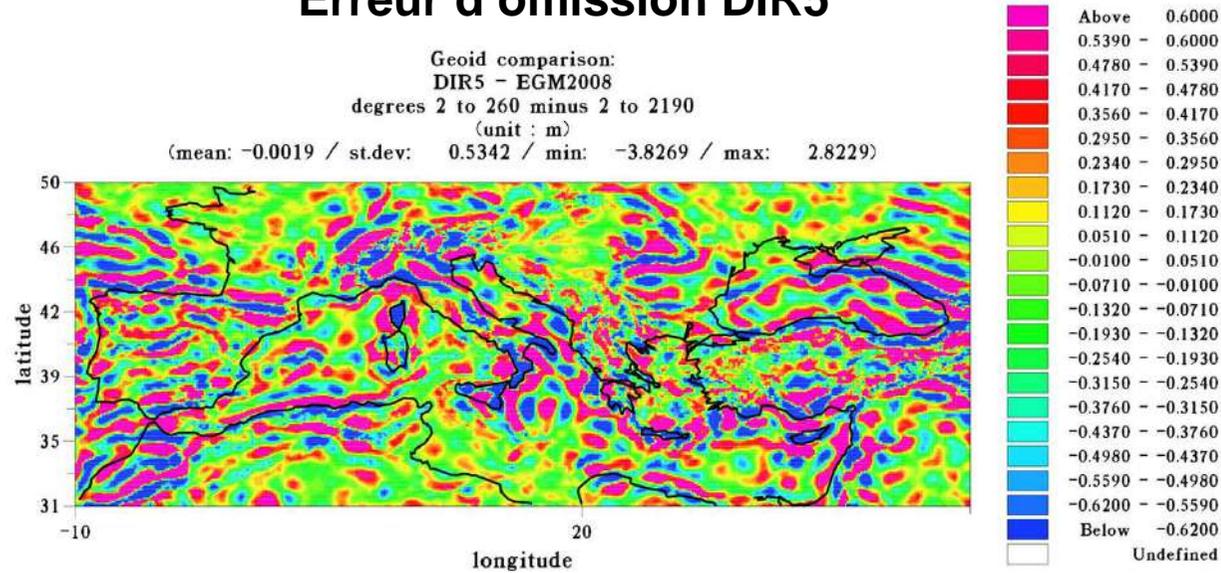
EGM2008 : résolution énormément augmentée grâce aux données terrestres.

Degré 2190 vs 150

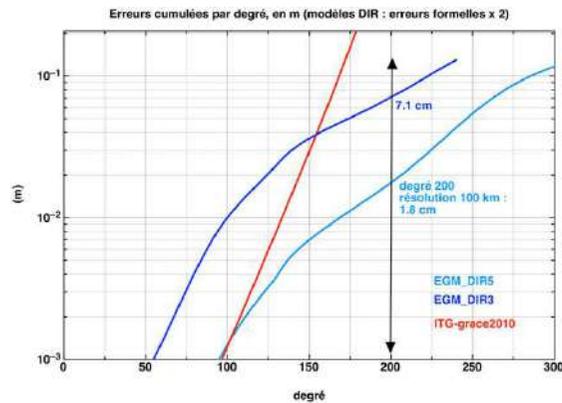
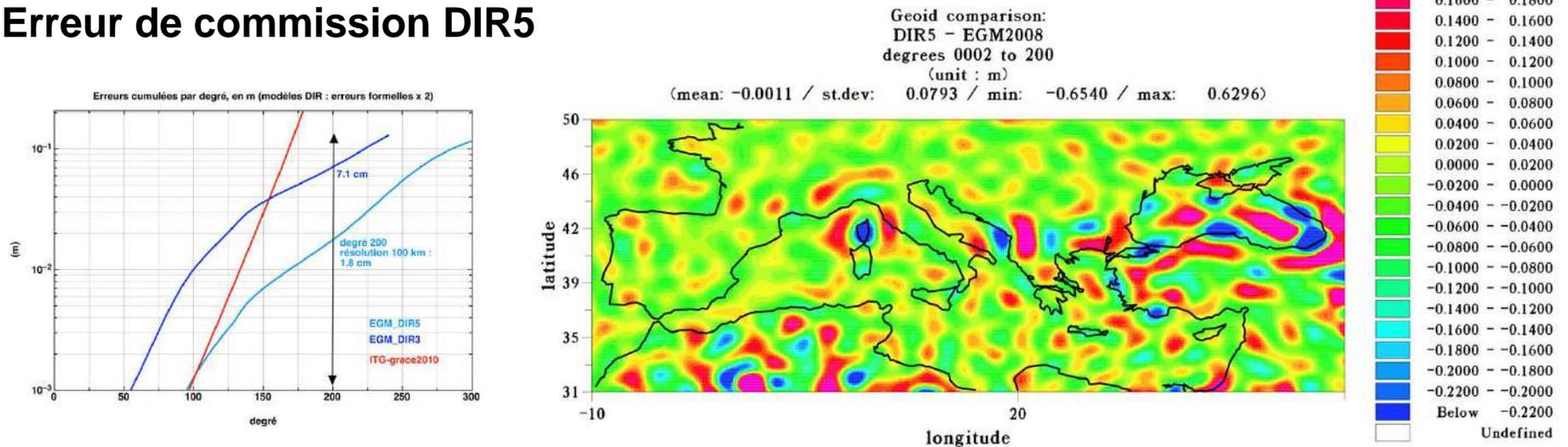


Combiner les données spatiales et terrestres

Erreur d'omission DIR5



Erreur de commission DIR5



Potentiel de gravitation et gravité

Harmoniques sphériques

Le potentiel normal

Le modèle linéaire de la gravimétrie

Systemes de hauteurs

Réduction des mesures gravimétriques

Solution du problème de Stokes

Les modèles globaux du potentiel

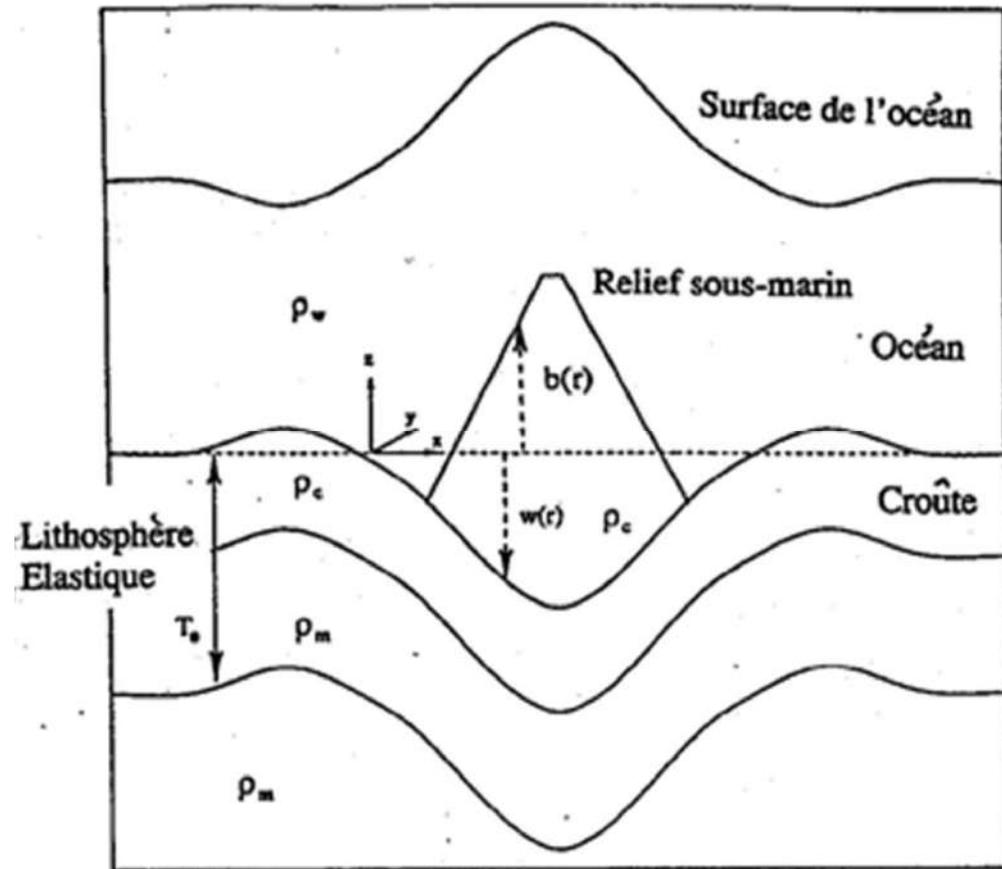
Modèle de géoïde combiné

Bathymétrie

Bathymétrie à partir de l'altimétrie

Les échos-sondages des navires contraignent les grandes longueurs d'onde du relief tandis que les courtes longueurs d'onde de la topographie sont déduites des mesures continues de gravité des satellites.

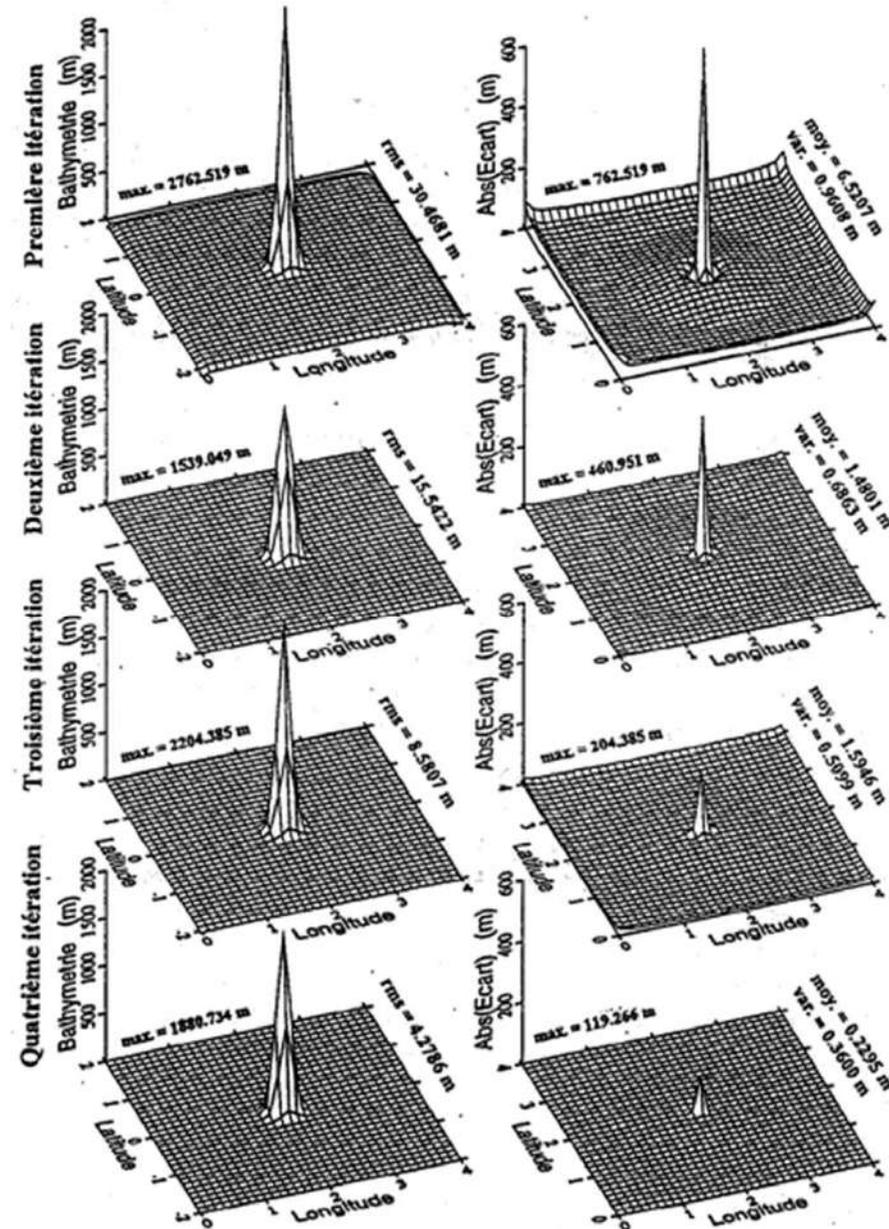
Le calcul de la bathymétrie est seulement possible sur une bande limitée de longueurs d'ondes, les grandes longueurs d'ondes sont fortement dépendantes de l'épaisseur élastique de la lithosphère et/ou de l'épaisseur de la croûte, la sédimentation des matières en suspension peuvent parfois gommer la topographie préexistante.



Bathymétrie à partir de l'altimétrie

La construction itérative
d'un mont sous-marin
conique d'une hauteur de
2000 m et 30 km de rayon de
base.
Données en entrée : géoïde
avec 10 cm d'incertitude

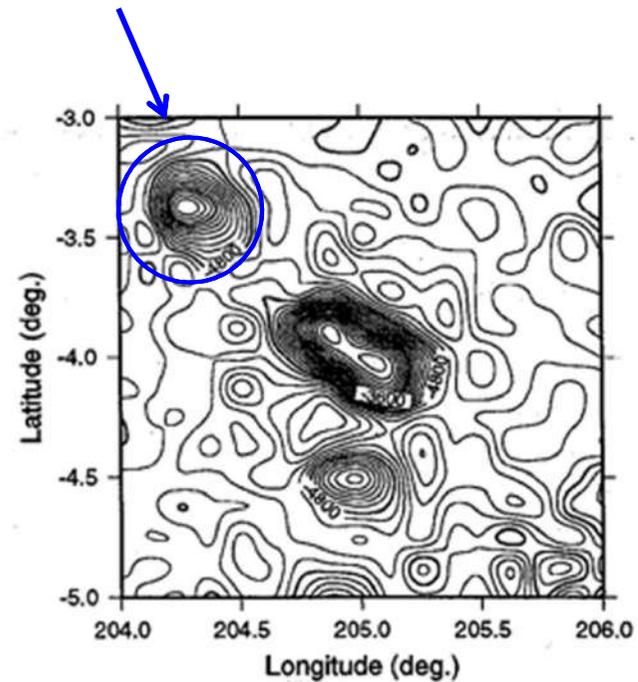
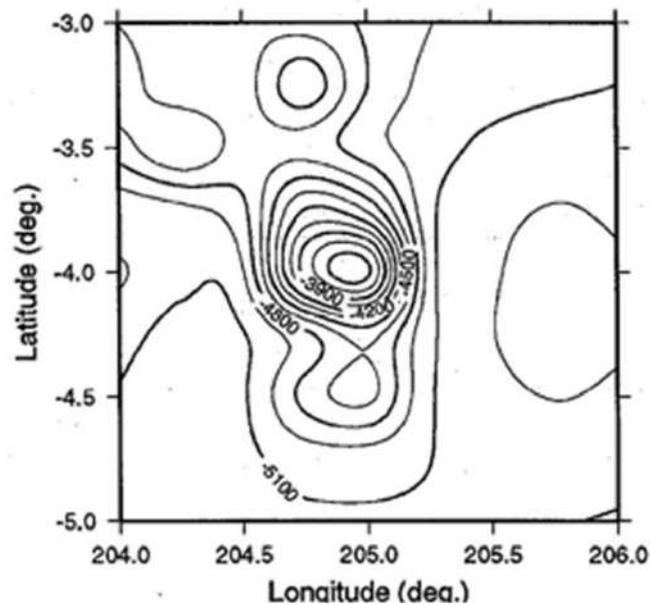
La solution topographique
(gauche)
et l'écart entre estimation et
vérité (droite)



Bathymétrie à partir de l'altimétrie

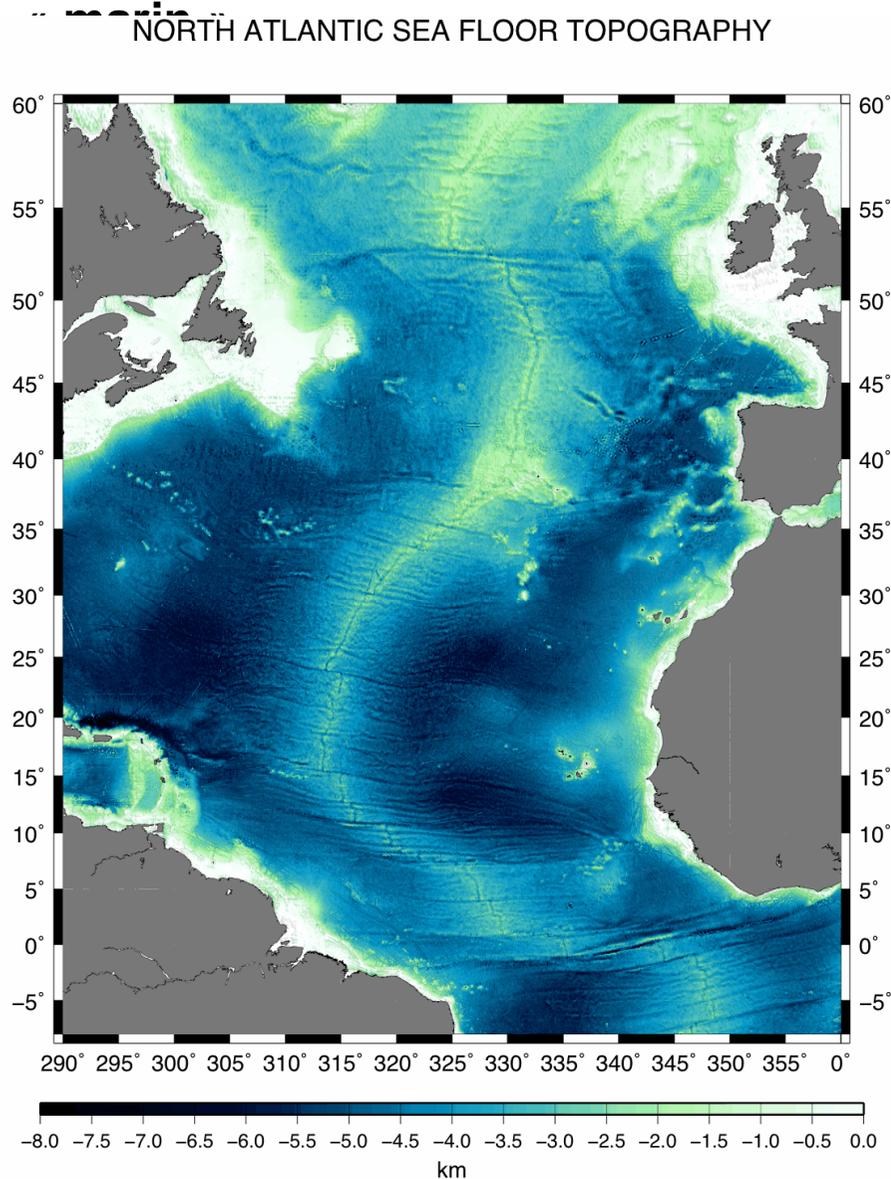
Bathymétrie : ETOPO5 (gauche) et à partir de l'altimétrie (droite)

Meilleure résolution, et mont sous-marin **non détecté** dans ETOPO5

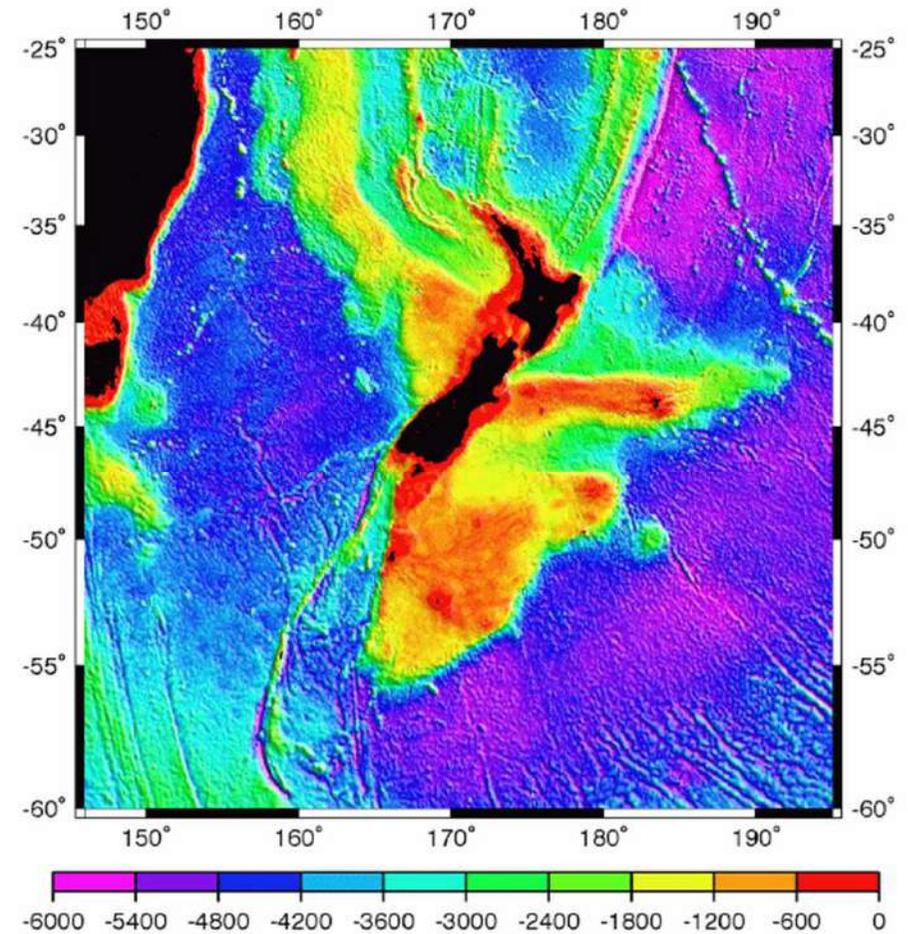


Bathymétrie à partir de l'altimétrie

Topographie sous-marine à partir des variations de hauteur du géoïde



Exemple :
Nouvelle Zélande



Ramillien et al., 1998, 1999

Annexes

Les polynômes de Legendre (1783)

Solution de l'équation différentielle de Legendre: $\frac{d \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right]}{dx} + n(n+1)P_n = 0$ pour $x \in [-1, +1]$

soit : $(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$

$$P_n(x) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right]$$

ou si l'on pose $x = \cos \theta$:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \cos^{n-2k} \theta = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{2^{2n-1} k!^2 (n-k)!^2} \cos(n-2k)\theta$$

$$P_n(\cos \theta) = 2 \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \left[\cos n\theta + \frac{n}{(2n-1)} \cos(n-2)\theta + \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right]$$

Formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

Formules de récurrence :

$$nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$$

$$(n+1)(P_{n+1} - xP_n) - n(xP_n - P_{n-1}) = 0$$

Dérivation :

$$(x^2-1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n - P_{n-1})$$

$$(2n+1)(x^2-1) \frac{dP_n}{dx} = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1})$$

Expressions littérales jusqu'au degré 7 :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x = \cos \theta$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 = (3 \cos 2\theta + 1)/4$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2 = (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)/8$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 = (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9)/64$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 = (63 \cos 5\theta + 35 \cos 3\theta + 30 \cos \theta)/128$$

$$P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16 = (231 \cos 6\theta + 126 \cos 4\theta + 105 \cos 2\theta + 50)/512$$

$$P_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16 = (429 \cos 7\theta + 231 \cos 5\theta + 189 \cos 3\theta + 175 \cos \theta)/1024$$

Polynômes bornés entre [-1,+1] :

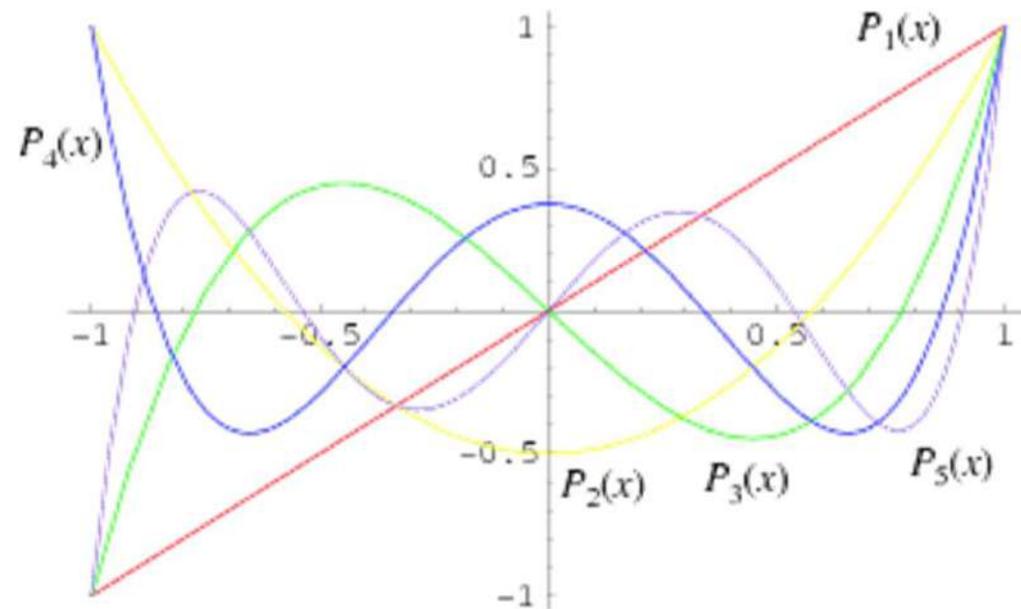
$$P_n(0) = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$P_n(0) = (-1)^{n/2} \frac{1.3.5 \dots (n-1)}{2.4 \dots n}$$

$$= (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n (n/2)!^2} \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$



Le point faible des hauteurs orthométriques est le fait qu'un modèle de densité est nécessaire. Ce n'est pas forcément un désavantage pratique, mais le concept est moins attractif.

Il y a une hauteur qu'on peut calculer *sans* hypothèses sur la distribution de densité des masses topographiques : la hauteur normale H' .

On définit un point P^0 , sur le fil à plomb *normal*, qui satisfait l'équation suivante:

$$C_{PO} = W_O - W_P \equiv U_{P^0} - U_P = C_{PP^0}$$

C'est à dire, la différence de potentiel réelle entre O et P est égale à la différence du potentiel normal de P^0 et P . La hauteur normale est :

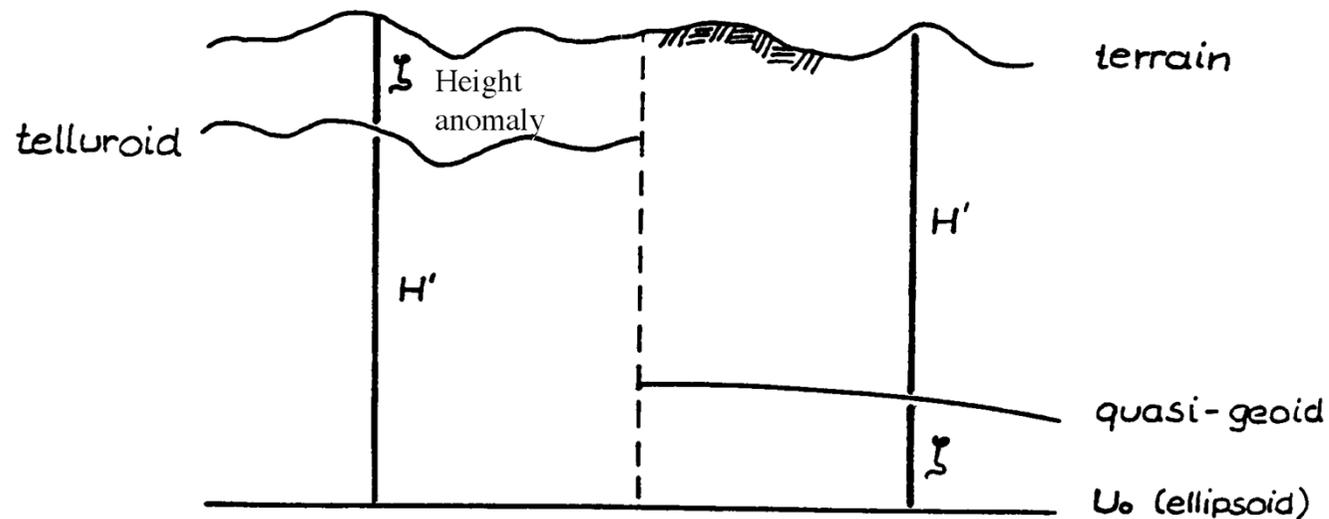
$$H'_P = \frac{C_{PP^0}}{\bar{\gamma}} = \frac{C_{PO}}{\bar{\gamma}}$$

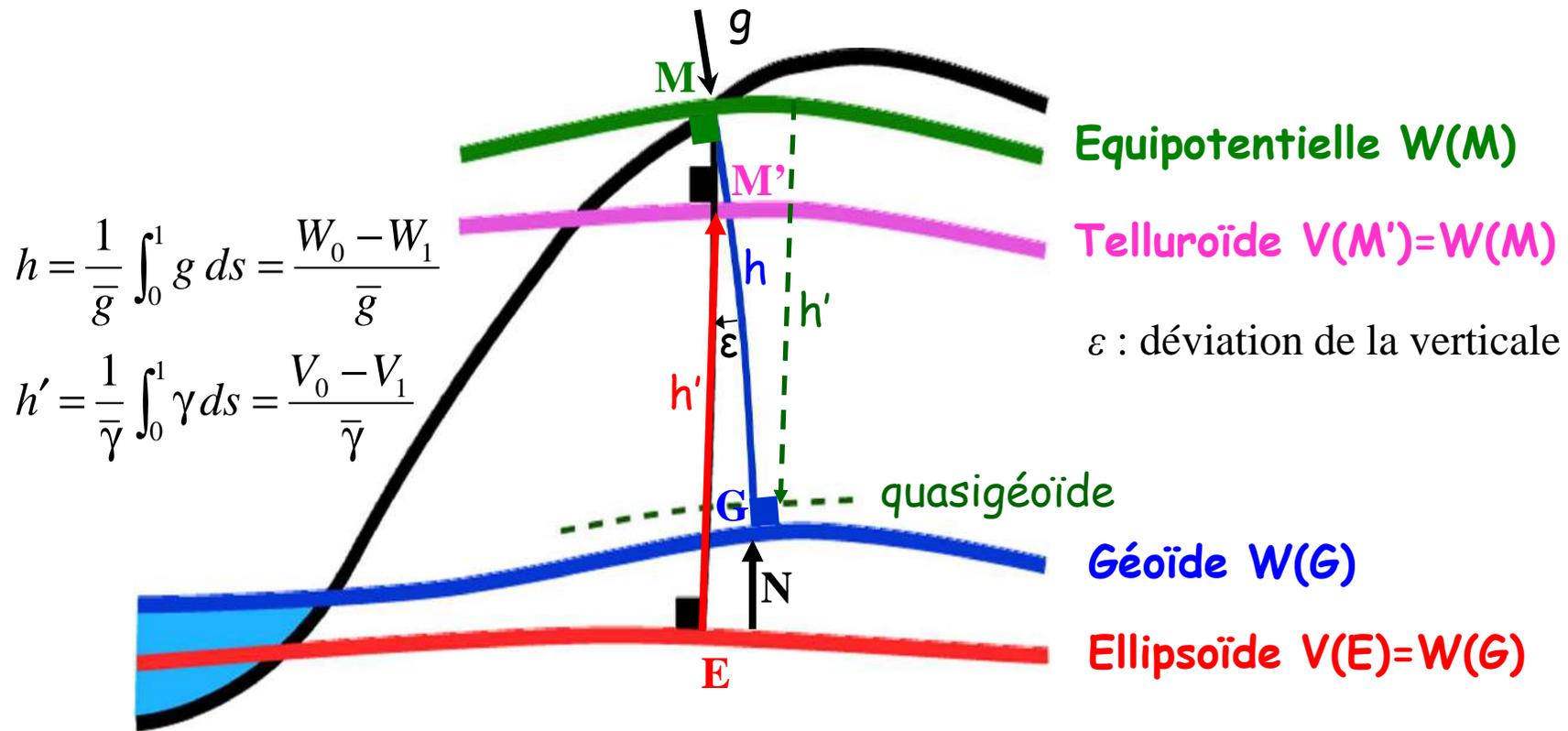
La pesanteur normale moyenne le long le fil à plomb de P à P^0 est :

$$\bar{\gamma} \approx \gamma_{P^0} - \frac{\gamma}{a} H'_P = \gamma_{P^0} - 0.1543 \frac{mGal}{m} H'_P$$

Hauteur normale

- Les hauteurs normales sont référencées à l'ellipsoïde: la surface générée est le telluroïde, *qui ne représente pas une surface de la terre* (niveau moyen de la mer).
- Les hauteurs normales sont référencées au terrain: la surface générée est le quasi géoïde, *qui n'est pas une surface de niveau équipotentielle* (mais presque).





N : hauteur du géoïde / ellipsoïde

$g = -\partial W / \partial h$: accélération de la pesanteur

h : altitude orthométrique (normale au géoïde)

$\gamma = -\partial V / \partial h$: accélération normale

h' : altitude normale (à l'ellipsoïde)

Anomalie d'altitude:
$$h' - h = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} h = \frac{g - \gamma - 2\pi G \rho h + \gamma(J - J_0)}{\bar{\gamma}} h \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} h$$

(Δg_B : anomalie de Bouguer)

Résumé des systèmes de hauteur

Type	Symbol	Correction	Discussion
Levelled height	Δn	-	No physical meaning (does not tell us "up" /"down"); in flat terrain sufficient (ex: NAP).
Potential difference	C	none	Theoretically ideal height concept, requires levelling & gravity, not very practical [dimension: m^2/s^2].
Dynamical height	$H^{dyn} = \frac{C}{\gamma_0}$	large	Translation of potential differences into metric heights; DC large in areas where γ is significantly different from adopted γ_0 .
Orthometric height	$H = \frac{C}{g}$	small	= distance from datum level surface; not free from hypothesis on density distribution; adopted by majority of countries.
Normal heights	$H' = \frac{C}{\bar{\gamma}}$	small	Adopted by some countries, no density assumption, refers to quasi-geoid.
Geometric height	h	-	No physical relevance (no reference to gravity) delivered by GPS, altimeters, photogrammetry, zenith angles.