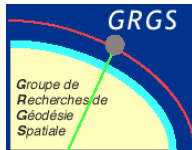


Analyse et Synthèse des Harmoniques Sphériques

Jean-Michel Lemoine
CNES DSO/ED/GS/GTP



Ecole de Géodésie Spatiale 2-6 Septembre 2002 Forcalquier

Analyse et synthèse harmonique sphérique

- Rappel des notations
- Rappel des propriétés des harmoniques sphériques
- Rotation des harmoniques sphériques
- Translation des harmoniques sphériques

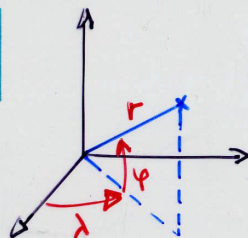
- **L'analyse harmonique sphérique :**

Détermination des coefficients harmoniques sphériques à partir de valeurs (ponctuelles ou moyennes) d'une fonction définie sur une sphère

- **La synthèse harmonique sphérique :**

Calcul des valeurs ponctuelles ou moyennes d'une fonction à partir de ses coefficients harmoniques sphériques

• Rappel des notations



r : rayon

φ : latitude

λ : longitude

- Une fonction F , vérifiant $\Delta F = 0$, peut être représentée, à l'extérieur de la sphère unité, sous la forme:

$$F(r, \varphi, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \sum_{m=0}^{\ell} (a_{\ell m} \cos m\lambda + b_{\ell m} \sin m\lambda) P_{\ell m}(\sin \varphi)$$

- Expression sous forme complexe:

où $\begin{cases} C_{\ell m} \text{ sont complexes} \\ Y_{\ell m}(\varphi, \lambda) = P_{\ell m}(\sin \varphi) e^{im\lambda} \end{cases}$

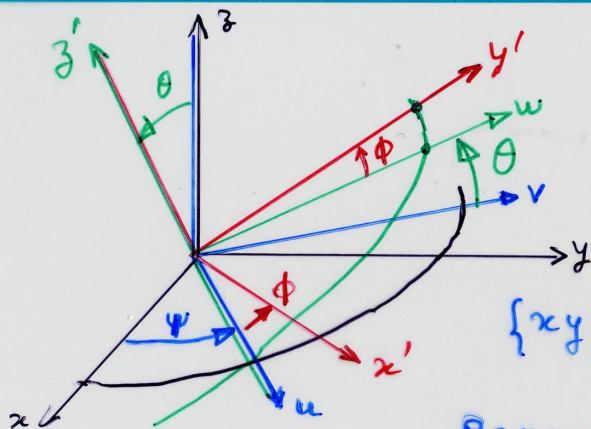
$$F(r, \varphi, \lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} C_{\ell m} Y_{\ell m}(\varphi, \lambda)$$

$Y_{\ell m}(\varphi, \lambda)$ sont appelées harmoniques de surface.

- Normalisation: $\bar{Y}_{\ell m} = \left(\frac{(2-\delta_{0m})(2\ell+1)(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell m}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{P}_{\ell m} = \nu_{\ell m} P_{\ell m} \\ \begin{Bmatrix} \bar{a}_{\ell m} \\ \bar{b}_{\ell m} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\nu_{\ell m}} \begin{Bmatrix} a_{\ell m} \\ b_{\ell m} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

• Rotation des harmoniques sphériques



$$P \begin{vmatrix} r \\ \varphi \\ \lambda \end{vmatrix} \rightarrow P \begin{vmatrix} r' \\ \varphi' \\ \lambda' \end{vmatrix}$$

$$\{xyz\} \rightarrow \{x'y'z'\}$$

r invariant

Ψ, θ, ϕ : Angles d'Euler

$$\{xyz\} \xrightarrow{R_3(\Psi)} \{uvw\} \xrightarrow{R_1(\theta)} \{u,w,z'\} \xrightarrow{R_3(\phi)} \{x'y'z'\}$$

Remarque : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3(\phi) \cdot R_1(\theta) \cdot R_3(\Psi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\bar{Y}_{em}(\Psi, d) = \sum_{m'=-e}^{+e} \frac{(e-m')!}{(e-m)!} \frac{\nu_{em}}{\nu_{em'}} \bar{Y}_{em'}(\Psi', d') E_{em}^{m'}(\Psi, \theta, \phi)$$

$\Rightarrow d' = e$
 Conserve
 Spectre inchangé
 fonctions d'Euler

où $E_{em}^{m'}(\Psi, \theta, \phi) = (-1)^{e-m} e^{i(m'-m)\frac{\pi}{2}} e^{i(m\Psi+m'\phi)} \mathcal{C}_{em}^{m'}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

avec $\mathcal{C}_{em}^{m'}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sum_{j=\sup(0, -m-m')}^{\inf(e-m, e-m')} (-1)^j C_{e-m}^j C_{e+m}^{m+m'+j} (\cos \frac{\theta}{2})^{2j+m+m'} (\sin \frac{\theta}{2})^{2e-(2j+m+m')}$

Polynômes de Clifford

Les polynômes de Clifford généralisent les P_{em} (polynômes ultrasphériques)

(cf. Balmino, p 12)

• Rappel des propriétés des harmoniques sphériques

- $\bar{P}_{e,-m}(x) = (-1)^m \bar{P}_{e,m}(x)$

- orthogonalité : en appelant

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_{em}^c = \bar{P}_{em}(\sin\varphi) \cos md \\ \bar{Y}_{em}^s = \bar{P}_{em}(\sin\varphi) \sin md \end{array} \right.$$

on a: $\iint_{\sigma_1} \bar{Y}_{em}^c \bar{Y}_{e'm'}^s d\sigma = 4\pi \delta_{ee'} \delta_{mm'} \delta_{cs}$

- propriétés spectrales :

Soit f une fonction représentée par $f(\varphi, \theta) = \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{m=-e}^{+e} \bar{C}_{em} \bar{Y}_{em}(\varphi, \theta)$

avec $\iint_{\sigma_1} \bar{Y}_{em}^2 d\sigma = 4\pi$

alors $\|f\|^2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} f^2 d\sigma = \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{m=-e}^{+e} |\bar{C}_{em}|^2$ (Parseval)

→ définition du spectre : $\text{spectre} = \{S_e(f, f)\}$

avec $S_e(f, f) = \sum_{m=-e}^{+e} |\bar{C}_{em}|^2$ en notation complexe

$$= \sum_{m=0}^{+e} (\bar{a}_{em}^2 + \bar{b}_{em}^2) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Explicitation pour les harmoniques zonaux ($m=0$)

En se servant des équations précédentes et de la relation suivante :

$$C_{e0}^{m'}\left(\frac{\theta}{2}\right) = (-1)^{m'} C_{e0}^{-m'}\left(\frac{\theta}{2}\right) = (-1)^{(e-m')} \frac{e!}{(e+m')!} P_{em'}(\cos\theta)$$

on obtient rigoureusement :

$$\bar{Y}_{e0}(\psi, \delta) = \frac{\bar{P}_{e0}(\cos\theta)}{V_{e0}} \bar{P}_{e0}(\sin\psi') + \sum_{m'=1}^{+e} \frac{(-1)^{m'}}{V_{e0}} \bar{P}_{em'}(\cos\theta) \cos\left[m'\left(\phi + \delta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \bar{P}_{em'}(\sin\psi')$$

Application au d° 2 :

* Exemple de calcul pour $\theta = 90^\circ$ et $\phi, \psi = 0^\circ$, pour le seul terme d'aplatissement $\bar{C}_{20}$

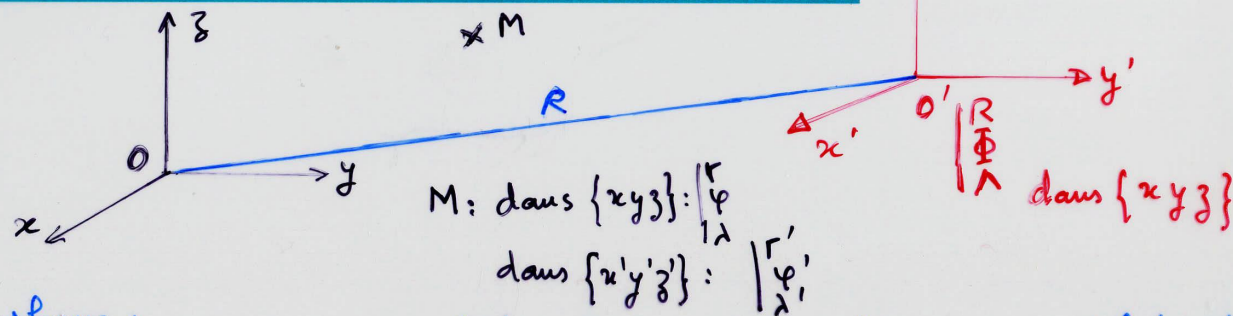
$$\begin{cases} \bar{C}'_{20} = -\frac{1}{2} \bar{C}_{20} \\ \bar{C}'_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{C}_{20} \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{C}'_{21}, \bar{S}'_{21}, \bar{S}'_{22} = 0$$

* Application aux petits angles : mouvement du pôle (x_p, y_p)

$$\begin{cases} \Delta \bar{C}_{20} = -\frac{3}{2} (x_p^2 + y_p^2) \bar{C}_{20} \\ \Delta \bar{C}_{21} = \sqrt{3} x_p \bar{C}_{20} \\ \Delta \bar{S}_{21} = -\sqrt{3} y_p \bar{C}_{20} \\ \Delta \bar{C}_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (x_p^2 - y_p^2) \bar{C}_{20} \\ \Delta \bar{S}_{22} = \sqrt{3} x_p y_p \bar{C}_{20} \end{cases}$$

(cf. Sylvain Loyer, Thèse, p53-55)

• Translation des harmoniques sphériques



O, m transforme :

$$\frac{1}{r^{e+1}} P_{em}(\sin \varphi) e^{im\lambda} = Z_{em}(r, \varphi, \lambda) : \text{harmoniques solides du problème extérieur en théorie du potentiel}$$

$$Z_{em}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{p=0}^{+\infty} r'^{2p+1} (-1)^p \sum_{k=-p}^{+p} \frac{(-1)^k}{(p-k)!} (e+p-m-k)! Z_{e+p, m+k}(R, \Phi, \Lambda) Z_{p, -k}(r', \varphi', \lambda')$$

$$= \frac{1}{R^{e+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{r'}{R}\right)^p \sum_{k=-p}^{+p} (-1)^k \frac{(e+p-m-k)!}{(p-k)!} P_{e+p, m+k}(\sin \Phi) e^{i(m+k)\Lambda} P_{p, -k}(\sin \varphi') e^{-ik\lambda'}$$

$\Rightarrow$ un terme de degré ℓ (et d'ordre m) donne une infinité de termes de degrés (et ordres) de 0 à $\ell + \infty$.

(cf. Balmino, p 13)

• L'analyse harmonique sphérique

B.
-6-91

29

IV - L'ANALYSE HARMONIQUE SPHERIQUE

Principe

Soit $f(\varphi, \lambda)$ définie sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

que l'on écrit a priori (forme réelle et normalisée)

$$f \approx f_0 \sum_{l=0}^L g_l(\varphi) \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$$

développement $\Sigma f(L)$

Sous certaines conditions (cf. th. de Darboux), on sait que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \Sigma f(L) \text{ existe et } = f.$$

L est choisi en général en fonction de la résolution moyenne
des données $\Delta\rho$ (en degrés) : $L = \frac{180^\circ}{\Delta\rho}$

Formules de calcul dans le cas d'une grille régulière

- Formulation intégrale

Elle suppose que les $\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$ sont les projections de f sur la base de fonctions

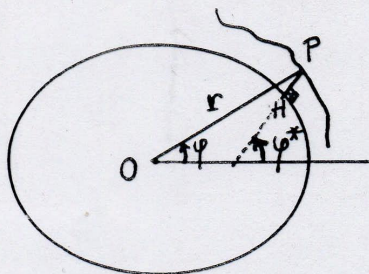
$$g_l(\varphi) P_{lm}(\sin\varphi) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$$

En général on n'a pas :

$$\iint_{\sigma_1} g_l(\varphi) P_{lm}(\sin\varphi) e^{im\lambda} g_{l'}(\varphi') P_{l'm'}(\sin\varphi') e^{im'\lambda'} d\sigma_1 = A_{ll'mm'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

sauf si $g_l(\varphi)$ indépendant de φ

Ex: ① Topographie



$$r(\varphi, \lambda) = R \left[1 + \sum_{l,m} T_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda) \right]$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = 1$$

$$\bar{H}P(\varphi, \lambda) = R \sum_{l,m} \tilde{T}_{lm} Y_{lm}(\varphi^*, \lambda)$$

$$= R \sum_{l,m} \tilde{T}_{lm}^* Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = 1$$

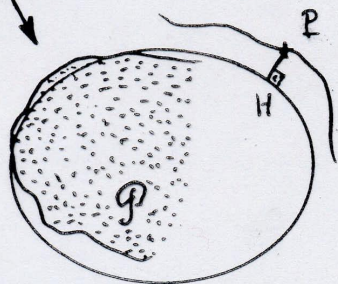
② Géoïde, correspondant à $\{C_{lm}, S_{lm}\}$ gravitationnels de $\mathcal{G}$

$$\bar{H}P = \frac{GM}{R \gamma(\varphi)} \sum_l \left[\frac{R}{r(\varphi)} \right]^{l+1} \sum_m \delta_{(C,S)_{lm}} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = \frac{R^{l+1}}{\gamma(\varphi) \cdot r(\varphi)^{l+1}} !$$

$$\approx 1 / \langle \gamma \rangle \dots$$

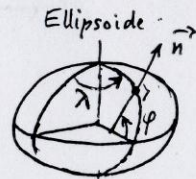
$\gamma(\varphi) \dots$
= pesanteur



EXPRESSION INTÉGRALE DES COEFFICIENTS

f définie sur une sphère
ou sur (Σ) paramétrable par (φ, λ)

Ex.



Si l'on peut écrire (développement en série d'harmoniques de surface)

$$f(\varphi, \lambda) =: \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \bar{f}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda) = \Sigma_f$$

alors :

$$\bar{f}_{lm} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\varphi, \lambda) \bar{Y}_{l,-m}(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

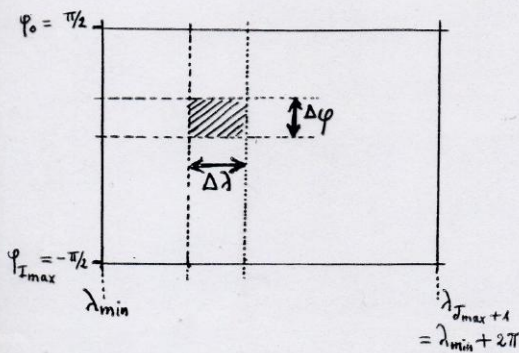
$\Rightarrow$ CV ?

- Théorème de Stone-Weierstrass : Oui si f est continue sur (φ, λ)
- Théorème de Darboux : Oui en dehors des discontinuités si f a un nombre fini de discontinuités

EXPRESSION INTEGRALE DES COEFFICIENTS

$$f_0 g_2 \left(\frac{\bar{C}_{lm}^*}{\bar{S}_{lm}^*} \right) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} f(\varphi, \lambda)^* \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos m \lambda \\ \sin m \lambda \end{pmatrix} d\sigma$$

CALCUL PRATIQUE



Grille : $\Delta \varphi \times \Delta \lambda$

$$I_{\max} = \pi / \Delta \varphi$$

$$J_{\max} = 2\pi / \Delta \lambda$$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} - i \Delta \varphi, (0 \leq i \leq I_{\max})$$

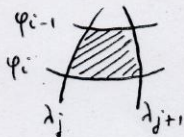
$$\lambda_j = \lambda_{\min} + (j-1) \Delta \lambda \quad (1 \leq j \leq J_{\max})$$

Données

$$f_{ij}^* = f(\varphi_i, \lambda_j)^* \quad \text{grille ponctuelle}$$

$$\text{ou : } \bar{f}_{ij}^* = \frac{1}{\Delta \sigma_{ij}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i-1}} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} f(\varphi, \lambda)^* d\sigma$$

$$\text{avec } \Delta \sigma_{ij} = \Delta \lambda (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$



ON suppose que l'on a toujours $\bar{f}_{ij}^*$

(on peut transformer

$$f_{ij}^* \xrightarrow{\text{collocation (wiener)}} \bar{f}_{ij}^*)$$

approximation locale par une surface

Finalement :

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4\pi f_0} \frac{\theta_m(\Delta\lambda)}{g_l \beta_l} \Delta\lambda \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(I_{\max}, J_{\max})} \bar{f}_{ij}^* \bar{J}_{lm}^i \begin{pmatrix} \cos m \bar{\lambda}_j \\ \sin m \bar{\lambda}_j \end{pmatrix}$$

CALCUL DES INTEGRALES DES POLYNOMES
ET FONCTIONS DE LEGENDRE

$$\bar{J}_{lm} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \quad ; \quad (0 \leq m \leq l \leq L)$$

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi, \quad y = \cos \varphi, \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 \\ x_i &= \sin \varphi_i, \quad y_i = \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$$\tau_l = [(2l-1)(2l+1)]^{1/2}$$

$$W_1^1 = \sqrt{3}, \quad W_m^m = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{1/2}, \quad 1 \leq m \leq L$$

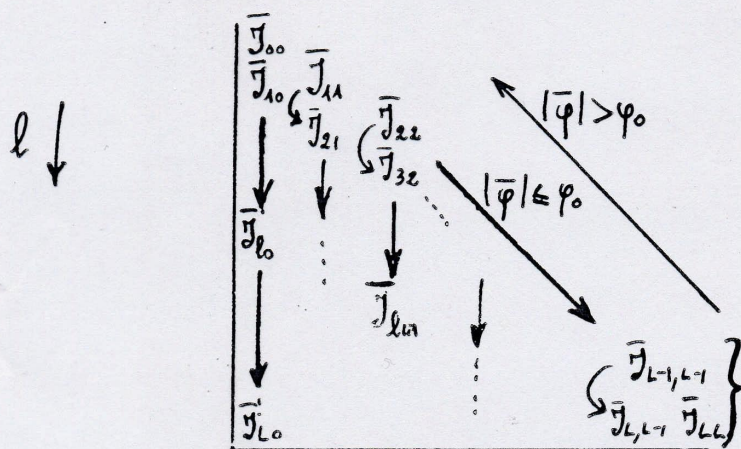
$$W_l^m = \tau_l / [(l-m)(l+m)]^{1/2}, \quad 1 \leq m < l \leq L$$

$$\bar{J}_{00} = x_2 - x_1$$

$$\bar{J}_{10} = \sqrt{3} \bar{I}_{00} \bar{\varphi}$$

$$\bar{J}_{l0} = \left\{ \bar{P}_{l+1,0} / \tau_{l+1} - \bar{P}_{l-1,0} / \tau_l \right\}_1^2, \quad 2 \leq l \leq L^*$$

(Les $\bar{P}_{l,0}$ sont calculés par les formules page 10)



$$\begin{aligned} &^* \{A(x, y, \varphi)\}_1^2 \\ &= A(x_2, y_2, \varphi_2) - A(x_1, y_1, \varphi_1) \end{aligned}$$

APPROXIMATION DE L'INTEGRALE PAR UNE FONCTION LINEAIRE / $\bar{f}_{ij}$

$$f \circ g_{\ell} \begin{pmatrix} \bar{C}_{\ell m}^* \\ \bar{S}_{\ell m}^* \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} \bar{f}_{ij}^* \begin{pmatrix} \langle \bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi) \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]} \Delta \sigma_{ij} \\ \langle \cos m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} \\ \langle \sin m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\bullet \langle \bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi) \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]} = \frac{1}{\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i} \int_{\sin \varphi_i}^{\sin \varphi_{i-1}} \bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi) d(\sin \varphi) = \bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi_{i-1/2})$$

$$\bullet \langle \cos m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} = \theta_m(\Delta \lambda) \cos m \bar{\lambda}_j$$

$$\langle \sin m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} = \theta_m(\Delta \lambda) \sin m \bar{\lambda}_j$$

$$\theta_m(\Delta \lambda) = \frac{\sin(m \Delta \lambda / 2)}{m \Delta \lambda / 2} \quad \text{si } m > 0$$

$$= 1 \quad \dots \dots \text{si } m = 0$$

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_{\min} + (j - \frac{1}{2}) \Delta \lambda$$

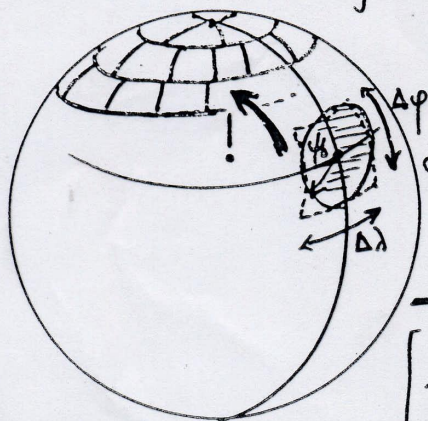
$$\bullet \Delta \sigma_{ij} = \Delta \lambda (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$

$$\bullet \bar{C}_{\ell m}^*, \bar{S}_{\ell m}^* : \text{harmoniques modifiées ...}$$

... en effet :

$$f^* \text{ est connu par } \bar{f}^*(\varphi, \lambda) = \langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle_{\Delta \varphi \times \Delta \lambda}$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_{\varphi_0}} \iint_{A_{\varphi_0}} f^*(\varphi, \lambda) d\sigma$$



$$\sigma_{\varphi_0} = 2\pi(1 - \cos \varphi_0) \approx \Delta \varphi \Delta \lambda$$

O.K. seulement à l'équateur

→ pavage en aires $\approx$ égales : plus satisfaisant!

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{\ell m}^* \\ \bar{S}_{\ell m}^* \end{bmatrix} = \beta_{\ell} \begin{bmatrix} \bar{C}_{\ell m}^* \\ \bar{S}_{\ell m}^* \end{bmatrix}$$

$$\beta_{\ell} = \text{coefficients de Meissl-Pallinen} \\ = \frac{P_{\ell-1}(\cos \varphi_0) - P_{\ell+1}(\cos \varphi_0)}{(2\ell+1)(1 - \cos \varphi_0)}$$

- Equations d'observation et solution par moindres carrés

$$\langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle = f_0 \sum_{l=l_0+1}^L g_l(\varphi) \sum_{m=m_0+1}^l (\bar{C}_{lm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{lm}^* \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin\varphi)$$

On pose :

- $X = \begin{bmatrix} \{\bar{C}_{lm}^*\} \\ \{\bar{S}_{lm}^*\} \end{bmatrix}$

- $A = \left[f_0 g_l(\varphi) H_{lm} \{ \cos m\tilde{\lambda}, \sin m\tilde{\lambda} \} \right]$

avec $H_{lm} = \begin{cases} \bar{P}_{lm}(\sin\varphi) \\ \bar{P}_{lm}(\theta_m) \cdot \Delta\lambda \end{cases}$ si $\langle \dots \rangle$

$\tilde{\lambda} = \lambda$, ou $\tilde{\lambda} \neq \lambda$

- $B = [\langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle]$

On donne également $\sigma =$ erreur estimée sur $\langle f^* \rangle$



$$A X = B \quad \text{avec } \Pi = \text{Diag} \{ 1/\sigma^2 \}$$

SOLUTION :

- $\hat{X} = (A^T \Pi A)^{-1} A^T \Pi B$

$$\text{COV}_{\hat{X}} = \Sigma_0 (A^T \Pi A)^{-1}$$

avec $\Sigma_0 = \left\{ \frac{B^T \Pi B - \hat{X}^T A^T \Pi B}{\text{Nég.} - n_{\text{inconnues}}} \right\}^{1/2}$

La formulation est générale ... (Couverture quelconque)



CONSTRAINTES POSSIBLES
SOLUTIONS DANS L'ESPACE PARAMETRE

OPTIMISATIONS

- cas de la formulation intégrale : optimisation de l'ordre des boucles qui permettent de calculer les $J_m(\psi_i)$ et les $\begin{cases} \cos m \Delta_i \\ \sin m \Delta_i \end{cases}$
 - cf. Balmino, p 37-38
- cas du calcul par moindres carrés : méthode de formation directe des équations normales, sans passer par les équations d'observation.
 - cf. Balmino, p 39 à 45

FONCTIONS DÉFINIES SUR UN DOMAINE RESTREINT DE LA SPHÈRE



→ par exemple : Surface océanique

- * complétion par des valeurs a-priori puis formulation intégrale :
quelles valeurs ? (phénomène de Gibbs aux frontières)
- * calcul par moindres carrés : problème de stabilisation de la solution
- * décomposition sur une base de fonctions orthonormées sur le domaine :
"fonctions de Hwang" : combinaisons linéaires des Harmoniques Sphériques suivant le processus de Gram-Schmidt

GAINS : - nombre de coefficients
- stabilité spectrale :
Spectre invariant $\forall$ le
nombre de coefficients

DÉFAUTS : - la définition du domaine modifie
la définition des fonctions
- On perd la notion de longueur d'onde ($L_{Hwang} \neq L_{HS}$)
- à l'intérieur du domaine :
"Hwang" $\Leftrightarrow$ moindres carrés sans stabilisation

(cf. Sylvain Loyer, mémoire de DEA)

1. SYNTHÈSE DE GRILLES :

Synthèse ponctuelle / moyenne

$$f(\varphi, \lambda) \text{ définie sur } \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

$$f \approx f_0 \sum_{l=0}^L g_l(\varphi) \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$$

On cherche à calculer :

- $f_{ij} = f(\varphi_i, \lambda_j)$
 $\varphi_i = \varphi_{\max} - (i-1) \Delta\varphi ; i = 1, 2, \dots, I_{\max}$
 $\lambda_j = \lambda_{\min} + (j-1) \Delta\lambda ; j = 1, 2, \dots, J_{\max}$

= GRILLE PONCTUELLE

Complète si $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}, I_{\max} = \frac{\pi}{\Delta\varphi} + 1$

$$\lambda_{J_{\max}} = \lambda_{\min} + 2\pi$$

$$J_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta\lambda} + 1$$

- $\bar{f}_{ij} = \langle f(\varphi, \lambda) \rangle_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i-1}], \lambda \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]}$

= GRILLE MOYENNE

$$f_{ij} = f_0 \sum_{m=0}^L \sum_{l=m}^L g_l(\varphi_i) (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_j + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_j) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i)$$

$$\bar{f}_{ij} = f_0 \sum_{m=0}^L \theta_m(\Delta\lambda) \sum_{l=m}^L \langle g_l(\varphi_i) \rangle (\bar{C}_{lm} \cos m\bar{\lambda}_j + \bar{S}_{lm} \sin m\bar{\lambda}_j) \times \bar{P}_{lm}^i$$

avec $\theta_m(\Delta\lambda) : f. \text{ page 33}$

$$\bar{P}_{lm}^i = \bar{P}_{lm}(\varphi_i, \varphi_{i-1}) / (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$

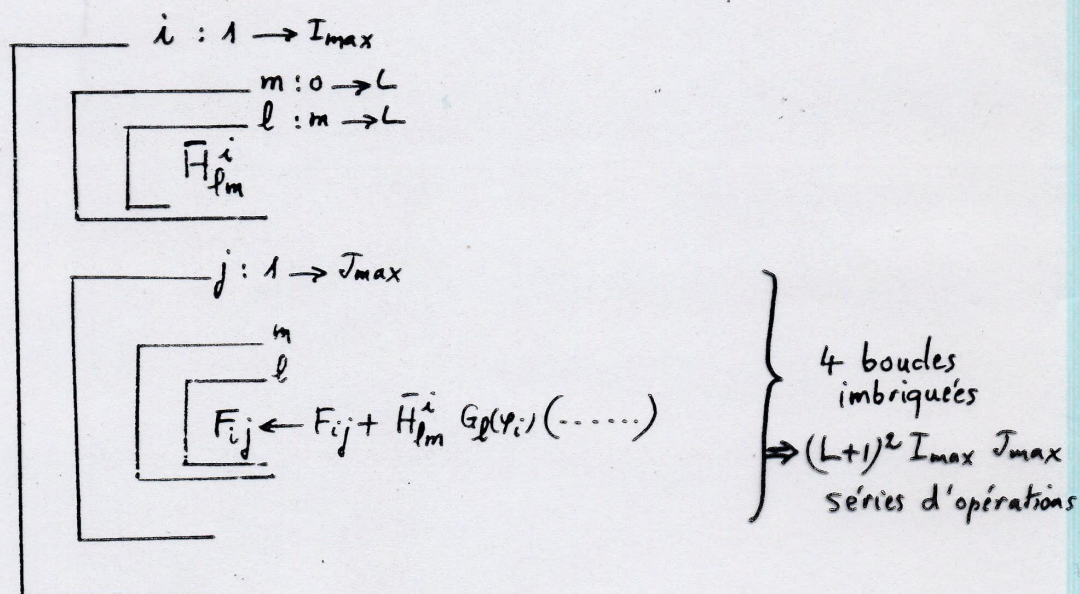
$$\bar{\lambda}_j = \lambda_{\min} + (j - 1/2) \Delta\lambda$$

Dans tous les cas nous écrivons :

$$F_{ij} = \sum_{m=0}^L \sum_{l=m}^L G_l(\varphi_i) (\bar{C}_{lm} \cos m \Lambda_j + \bar{S}_{lm} \sin m \Lambda_j) \bar{H}_{lm}^i$$

	Grille ponctuelle	Grille moyenne
F_{ij} :	f_{ij}	$\bar{f}_{ij}$
$G_l(\varphi_i)$:	$f_0 g_l(\varphi_i)$	$f_0 \langle g_l(\varphi) \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]}$
Λ_j :	λ_j	$\bar{\lambda}_j$
$\bar{H}_{lm}^i$:	$\frac{\lambda_j}{P_{lm}(\sin \varphi_i)}$	$\frac{\theta_m(\Delta \lambda) \bar{J}_{lm}(\varphi_i, \varphi_{i-1})}{\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i}$

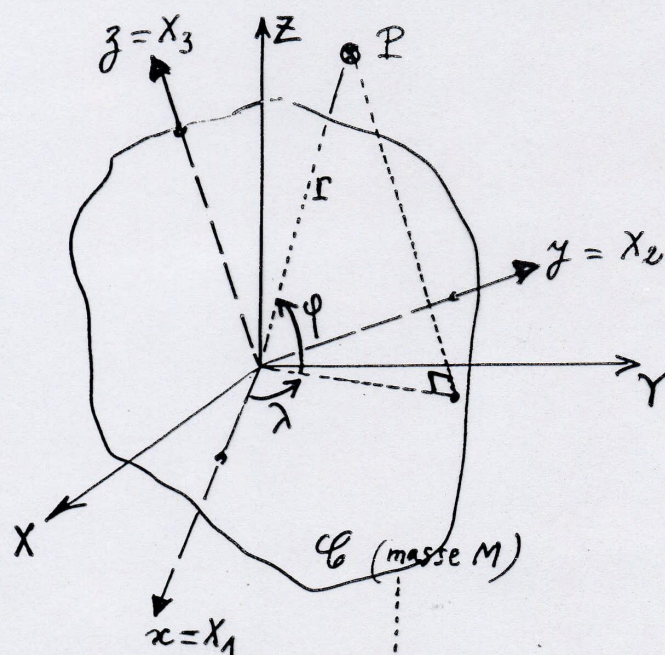
OPTIMISATIONS :



$\Rightarrow$ Solution : ECRIRE :

$$F = \sum_{m=0}^L F_m, \text{ avec } F_m = A_m \cos m \Lambda + B_m \sin m \Lambda$$

2. SYNTHÈSE PONCTUELLE DU POTENTIEL DE GRAVITATION ET DE SES DÉRIVÉES EN MÉCANIQUE SPATIALE



$$\{r\} = \{x \ y \ z\} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}$$

: fixe / corps $\mathcal{C}$

$$\{R\} = \{X \ Y \ Z\} : \text{autre repère}$$

$$P : r, \varphi, \lambda / \{x \ y \ z\}$$

$$U(P) = \frac{GM}{r} \left[\varepsilon + \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{l \geq m \\ (l+m \neq 0)}}^L \left(\frac{a}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}^{(\sin \varphi)} \right]$$

Constante de la gravitation

1 si terme "central" inclus
0 sinon

- Calcul de $U(P)$: élémentaire ... $\left(\frac{a}{r}\right)^l = g_l$

- Problème :

$$\text{calculer} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} U \\ \bar{\nabla}(\bar{\nabla} U) \end{array} \right\} \text{ dans } \{R\}$$

$\bar{\nabla} U$: vecteur champ

$\bar{\nabla}(\bar{\nabla} U)$: tenseur gradient de gravité
(symétrique, trace nulle)