

Localisation précise par moyens spatiaux

Analyse de séries temporelles Et outils d'analyse

X. Collilieux



Plan

Que souhaite-t-on obtenir?

- Analyse standard "repère de référence". Le repère est-il bien défini?
- Comment former des séries temporelles dans un repère homogène? -> impact sur les signaux périodiques

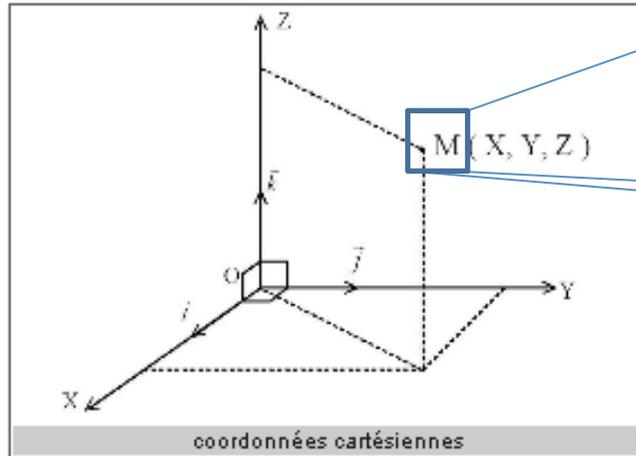
Comment caractériser

- Analyse spectrale de série temporelles.
- Ondelettes et SSA
- Analyse de « bruit »
- Analyse spatiale
- Détection de rupture. Pourquoi est-ce un problème; où en sommes-nous. Comment procéder?

Synthèse

Comment tester l'amélioration d'une nouvelle méthode de stratégie?

Introduction



Lorsque l'on dispose des coordonnées d'un réseau de stations, on possède à la date t_i les covariances entre les différentes coordonnées

Série temporelle de coordonnées GPS:

$$\Sigma = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} x(t1) & y(t1) & z(t1) \\ x(t2) & y(t2) & z(t2) \\ \text{ND} & \text{ND} & \text{ND} \\ x(t3) & y(t3) & z(t3) \\ \dots & & \end{array} \right| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} \Sigma_{3,3}(t1) & 0 & 0 & 0 \\ & \Sigma_{3,3}(t2) & 0 & 0 \\ & & \text{ND} & 0 \\ & \dots & & \Sigma_{3,3}(t3) \\ & & & \dots \end{array} \right| \end{array}$$

* ND: non disponible

Introduction

Exemple de série dans le repère local

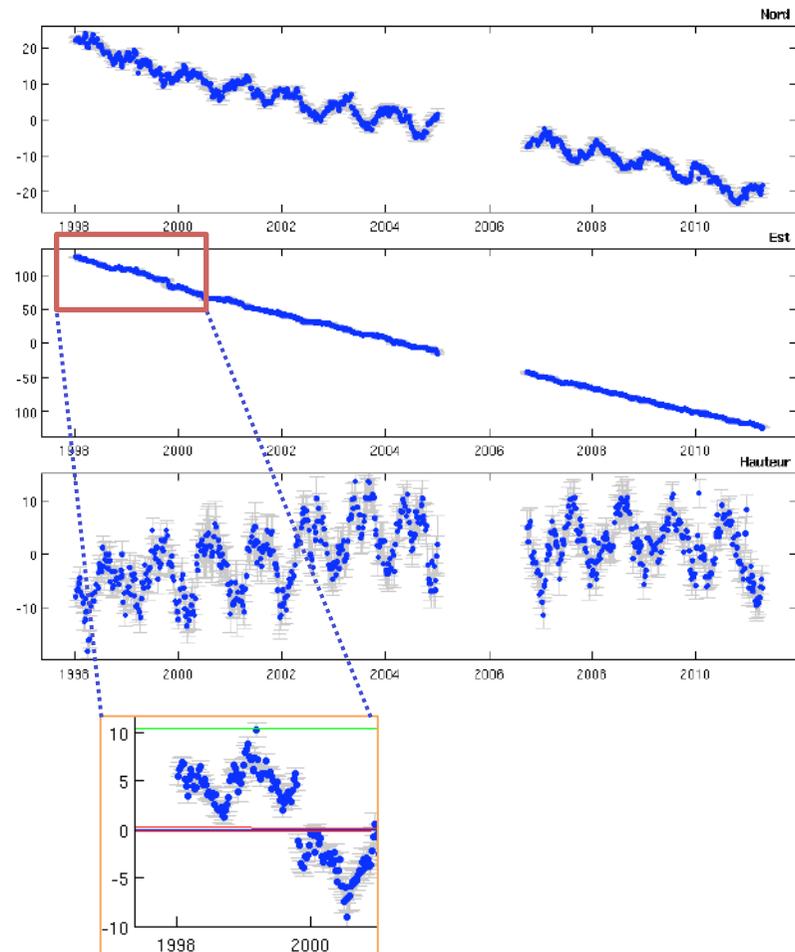
Pourquoi ce repère est-il plus intéressant?

Ordre de grandeur typique une fois une tendance retirée:

RMS horizontal : ~1-2 mm
RMS vertical : ~4-5 mm

Rapport erreur formelle verticale/
horizontale : ~ 3

Ex: Goldstone (USA)

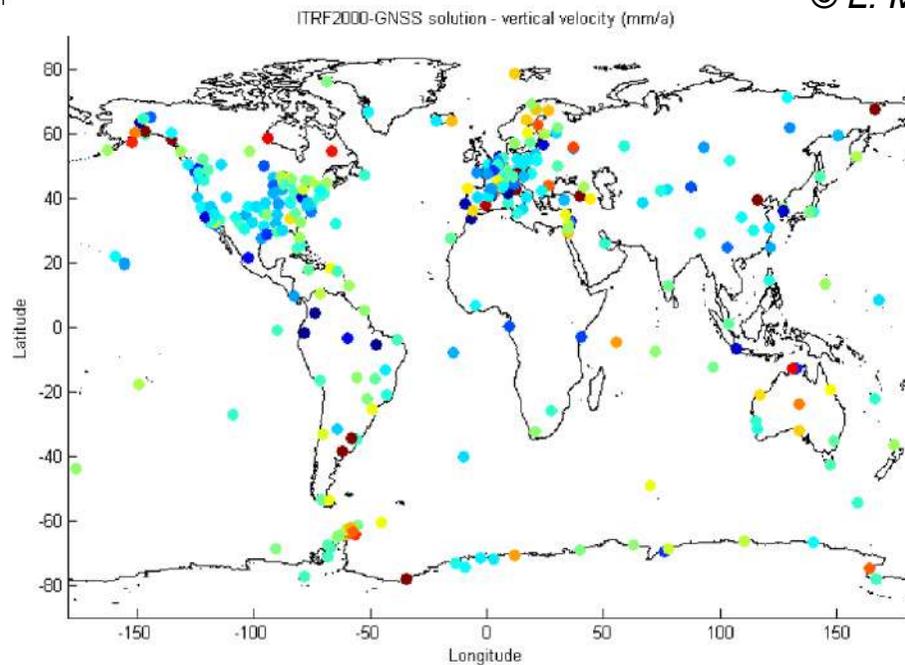


Introduction

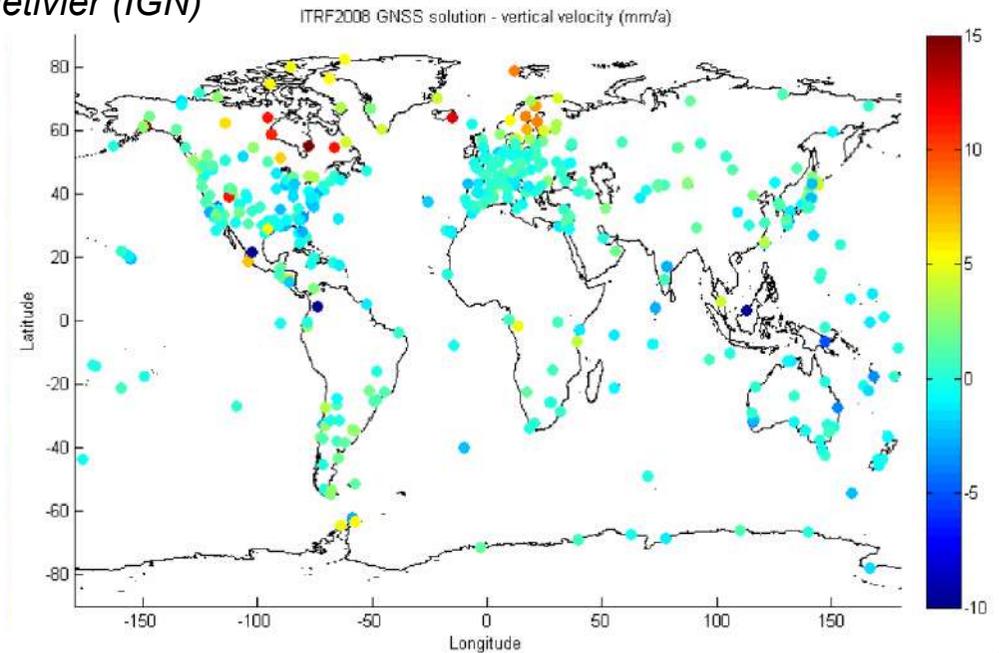
Déplacements verticaux à long-terme observés par GPS

- On progresse !

© L. Métivier (IGN)



Vitesses verticales calculées en 2001



Vitesses verticales calculées en 2010

Comment évaluer plus encore la précision de ces vitesses?

Introduction

Utilisation de certains outils dans différents « langages »:

Calculs, visualisation

- Matlab
- R
- gmt

Traitements plus particulier de données GPS ou séries temporelles

- Autres programmes compilés (TEQC, CATS, CATREF)
- FAMOUS

Voir aussi: « GPS toolbox » de GPS solutions:

Sources dispos également à <http://www.ngs.noaa.gov/gps-toolbox/exist.htm>

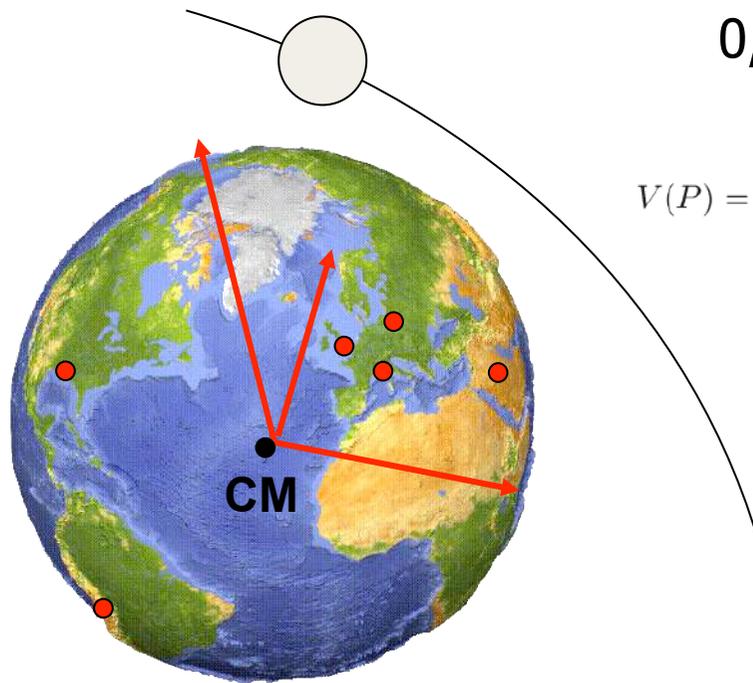


Que souhaite-t-on obtenir?

Repères de référence

Repère de référence

Rappel : origine



Lorsque les orbites sont calculées, le degré 1 du champ de gravité est fixé à 0, or:

$$V(P) = \frac{GM}{a} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \left(\sum_{m=0}^n P_{n,m}(\sin \phi) (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda)) \right) \right)$$

$$C_{1,0} = \frac{1}{a} \iiint z \cdot dM$$

$$C_{1,1} = \frac{1}{a} \iiint x \cdot dM$$

$$S_{1,1} = \frac{1}{a} \iiint y \cdot dM$$

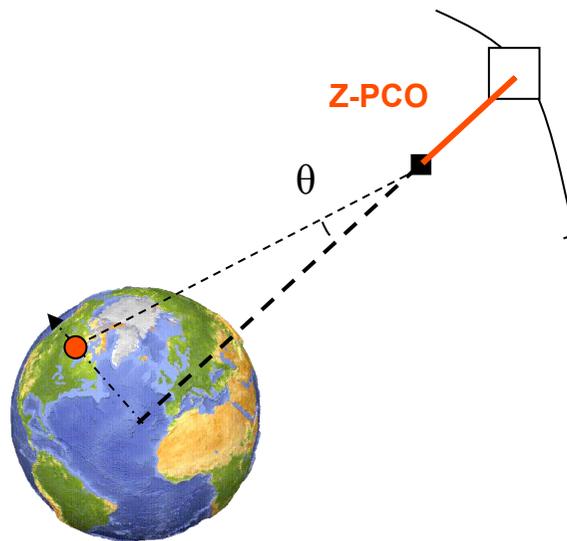
Égale à la position
du centre des
masses de la Terre

Repère de référence

Rappel: Echelle

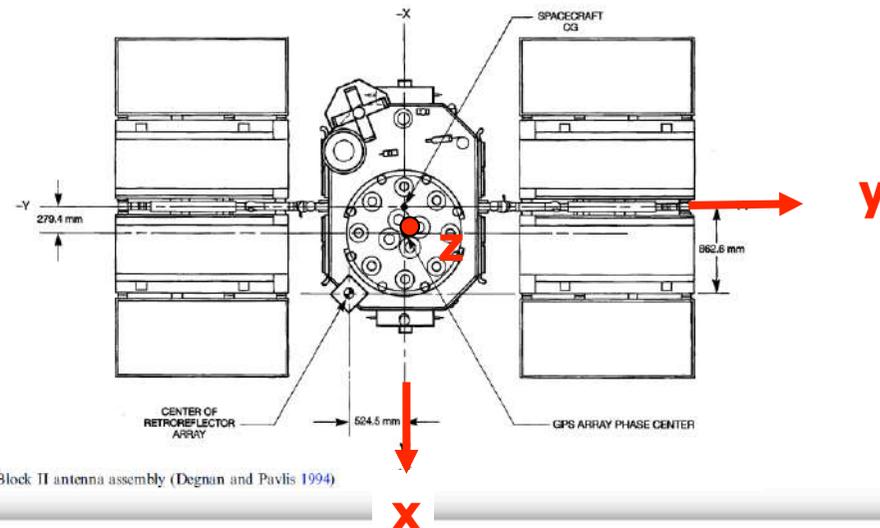
l'échelle est défini par:

- l'échelle de temps
- GM
- C
- mais pas seulement: toute erreur agissant sur la composante verticale, constantes instrumentales



Exemple du GPS:

Position du centre de phase satellite (phase center offset PCO)



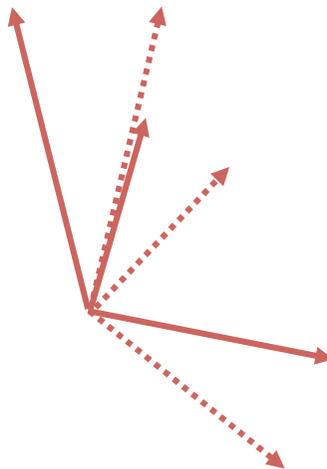
Block II antenna assembly (Degnan and Pavlis 1994)

Repère de référence

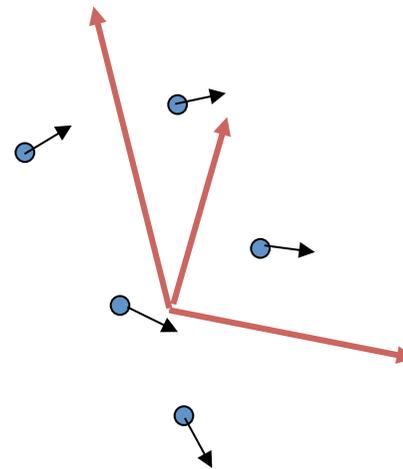
Rappel: orientation

Il existe une singularité

- 1) Le pôle s'est effectivement déplacé 2) Toutes les stations se sont déplacés



ou

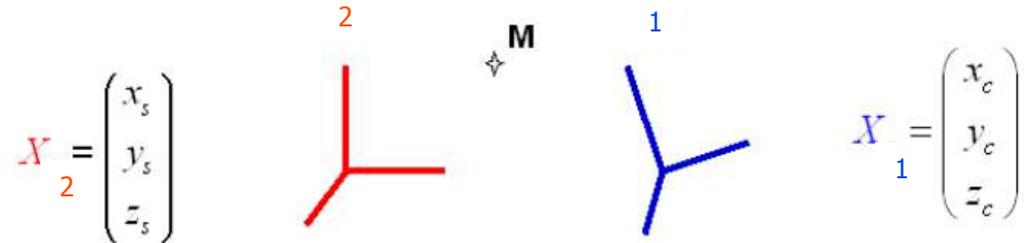


Sans repère terrestre, on ne peut déterminer la rotation de la Terre

Repère de référence

Comment vérifier?

Similitude euclidienne linéarisée
positions



$$X_2 = X_1 + T + DX_1 + RX_1$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R3 & R2 \\ R3 & 0 & -R1 \\ -R2 & R1 & 0 \end{pmatrix}$$

Changement d'**origine**
Changement d'**échelle**
Changement d'**orientation**

Valides que pour de petits angles!!

Ex: X_1 : - Coordonnées ITRF
- Coordonnées issues d'un autre calcul GPS

Repère de référence

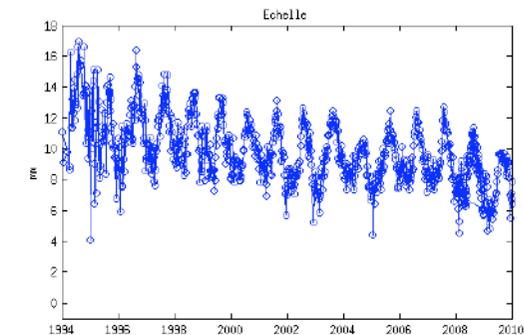
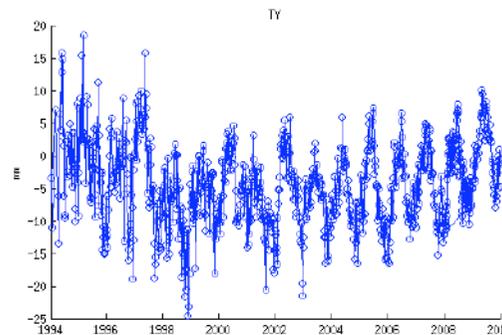
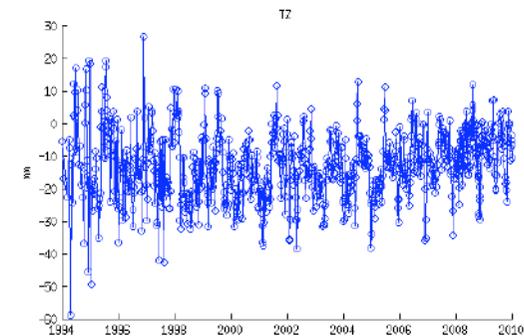
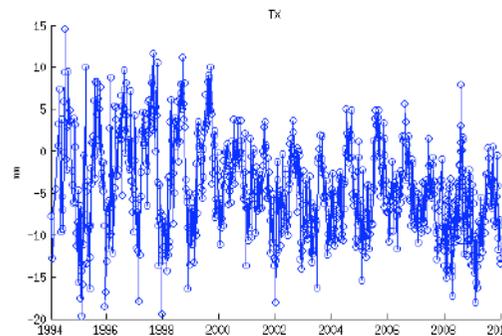
Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (1/8)

En entrée: positions de stations ($3 \cdot n$ paramètres) et covariance ($3 \cdot n \cdot (3 \cdot n + 1) / 2$ termes)
(format d'échange SINEX)

1. Inversion de la solution ou modification des contraintes si besoin
2. Calcul des paramètres de transformation entre vos données et l'ITRF de la date

Ex: Solution CO1 recalculée
+ COD opérationnelle par
rapport à l'ITRF2008

NB Convention de signe:
COD – ITRF2008



Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (2/8)

Echelle: la loi de Zhu

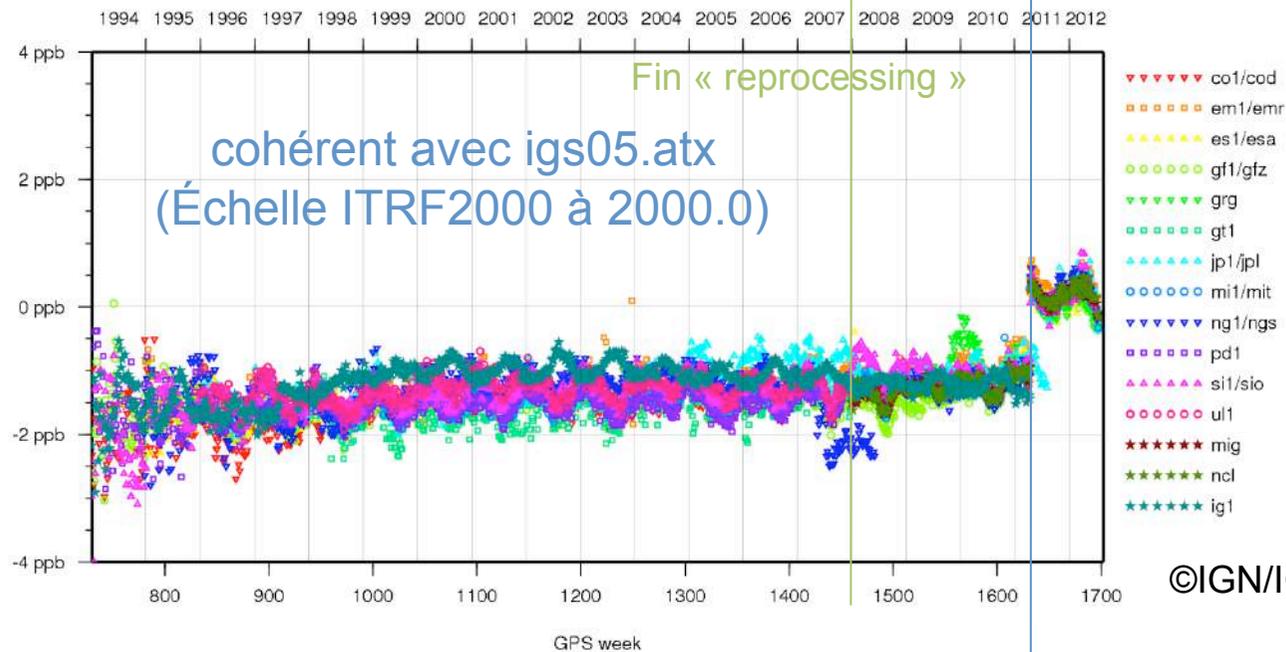
(Zhu et al., JoG, 2003)

Différence moyenne de z-PCO

$$dz(mm) = -20 \cdot ds(mm)$$

Différence moyenne de coordonnée radiale

Scale differences between solutions and RF

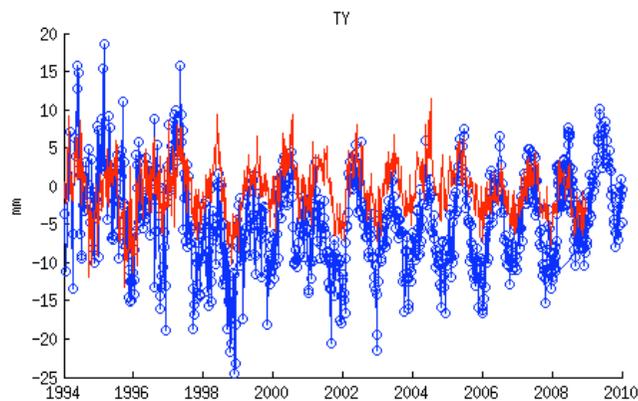
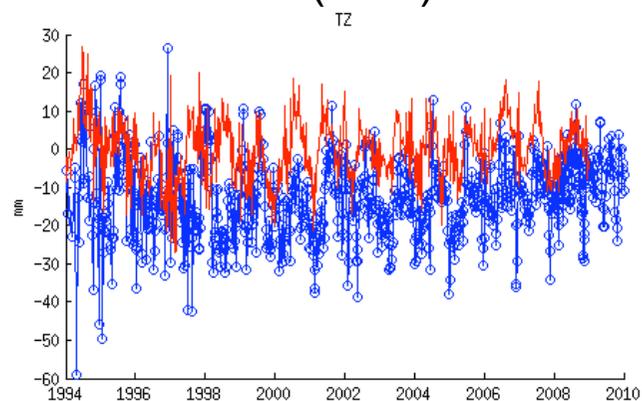
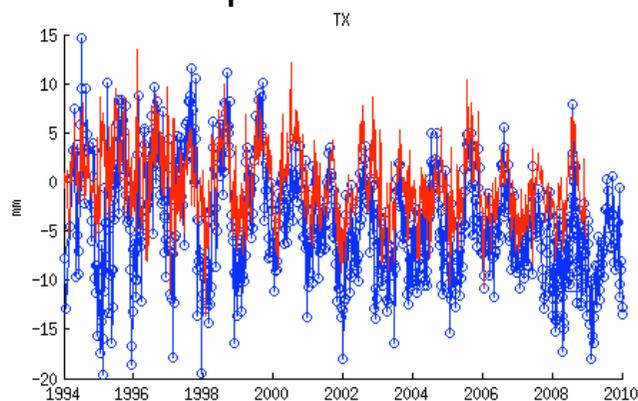


Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (3/8)

Translation : déplacement du CM quasi-instantané par rapport au CM moyen

➔ Comparaison télémétrie laser sur satellites (SLR)



— GPS (COD)
— SLR



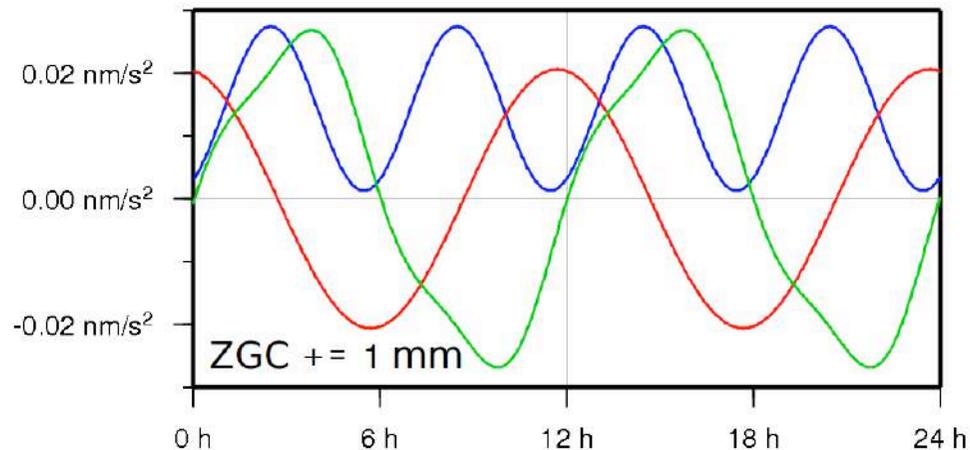
Fig. : Starlette



Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (4/8)

Pourquoi a-t-on une telle différence ?



Accelerations que ressentirait un satellite si le CM était déplacé de 1 mm selon Z. Les accélérations sont montrées dans le repère « DYB »:

- D: axe satellite-soleil*
- Y: axe de rotation des panneaux solaires*
- B: troisième axe*

Une corrélation avec certains paramètres du modèle CODE est évidente (constante selon D; once-per-rev selon B).

Rebischung et al., EGU2012

Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (5/8)

Paramètres d'orientation de la Terre

Si le repère de référence est l'ITRF2008, la position du pôle doit être cohérente avec celle de l'EOPC04 de la date à $\sim 40 \mu\text{s}$

Comment imposer l'orientation du repère à être celle de l'ITRF2008?

- Contraintes minimales en orientation « pendant » le calcul GPS
- Application des paramètres de rotation estimés à l'aide des positions aux EOPs (modèle de CATREF)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_s^i \\ y_s^i \\ z_s^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix} + (t_s^i - t_0) \begin{pmatrix} \dot{x}^i \\ \dot{y}^i \\ \dot{z}^i \end{pmatrix} + T_k + D_k \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix} + R_k \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix} \\ x_s^p = x^p + R2_k \\ y_s^p = y^p + R1_k \\ UT_s = UT - \frac{1}{f} R3_k \end{array} \right. \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R3 & R2 \\ R3 & 0 & -R1 \\ -R2 & R1 & 0 \end{pmatrix}$$

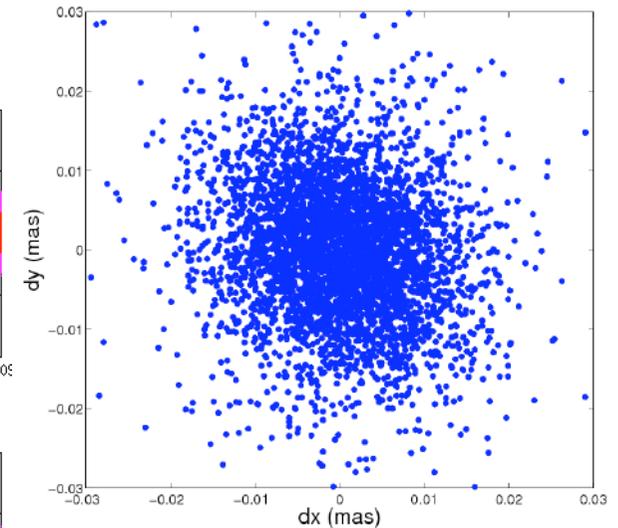
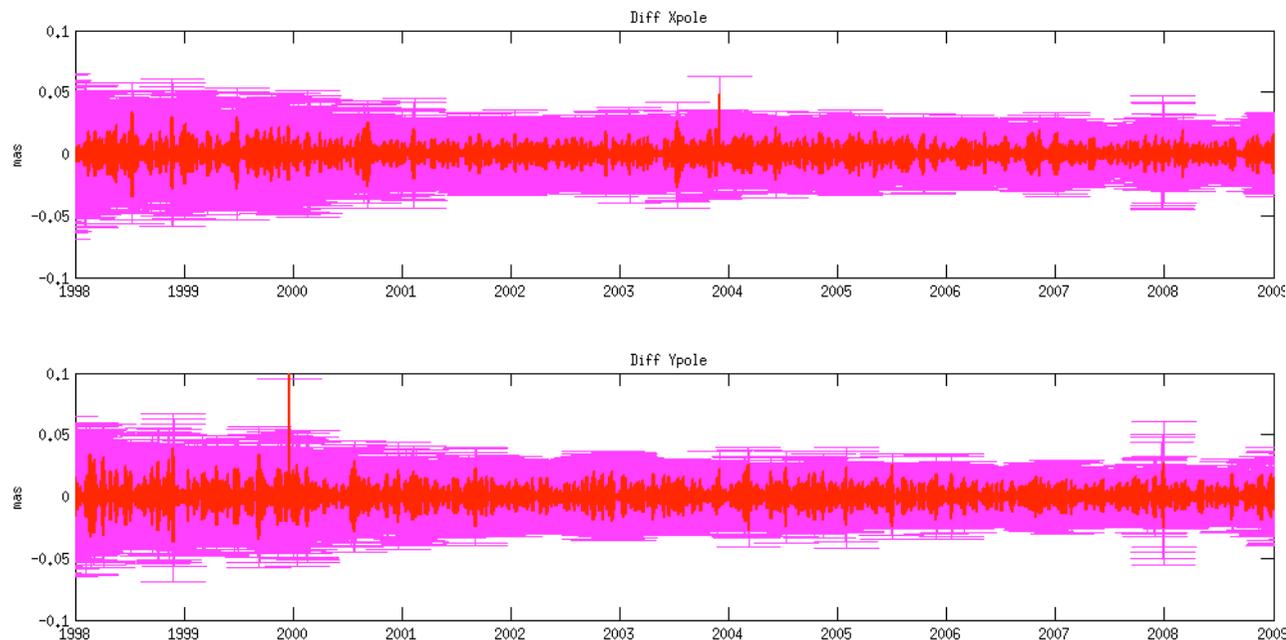
© Z. Altamimi

Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (6/8)

Paramètres d'orientation de la Terre

Ex: différence entre la série (xp, yp) ITRF2008 (depuis 1998) et l'EOPC04

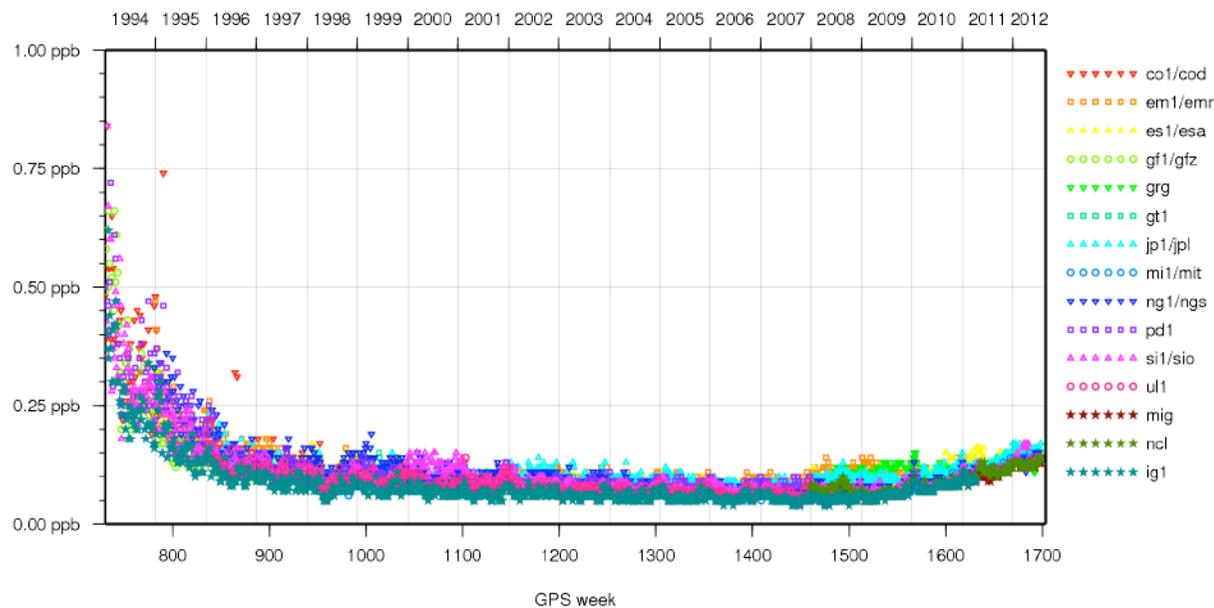


WRMS:
Xpo : 21.1 microas
Ypo : 21.6 microas

Repère de référence

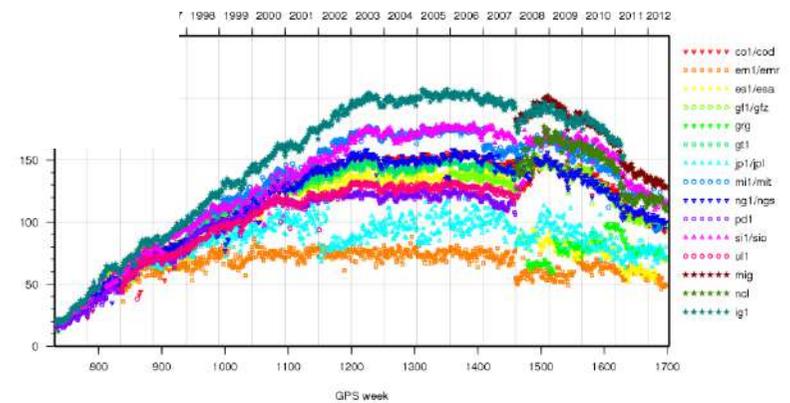
Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (7/8)

Standard deviations of scale differences between solutions and RF



©IGN/IGS

Comparison to RF: Number of stations



Attention à la précision de l'ITRF!

Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à l'ITRF (8/8)

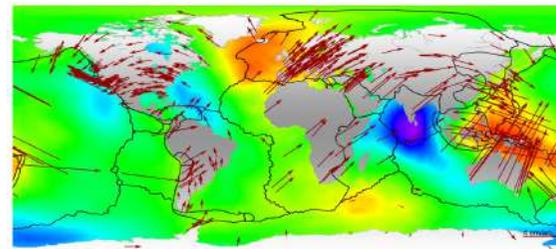
Reestimation simultanée des positions et vitesses (CATREF)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_s^i \\ y_s^i \\ z_s^i \end{pmatrix}}_{\text{observé}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix}}_{\text{estimé}} + (t_s^i - t_0) \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}^i \\ \dot{y}^i \\ \dot{z}^i \end{pmatrix}}_{\text{estimé}} + T_k + D_k \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix} + R_k \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix}$$

© Z. Altamimi

+ Contraintes de définition de repère sur $\begin{pmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dot{x}^i \\ \dot{y}^i \\ \dot{z}^i \end{pmatrix}$
Ex: Mise en référence dans l'ITRF2008

- Nouvelle estimation de positions et vitesses pour analyse géophysique
- Séries de paramètres de transformation
« homogène »



Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à d'autres centres d'analyse

On souhaite comparer les coordonnées de deux solutions journalières/ hebdomadaires dans le « même repère de référence » (orientation mais aussi parfois origine & «échelle»)

Quand on a 2 jeux de coordonnées à comparer: estimation des paramètres de transfo
Quand on a plus de 2 jeux: combinaison !

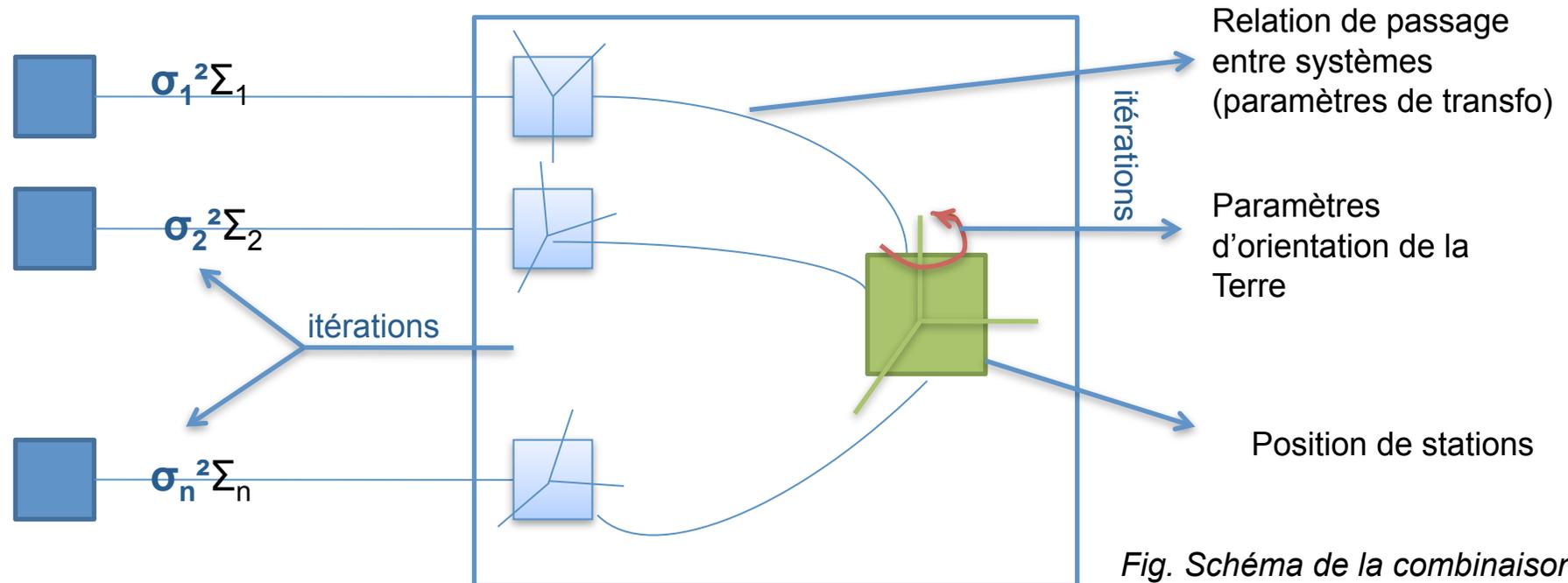


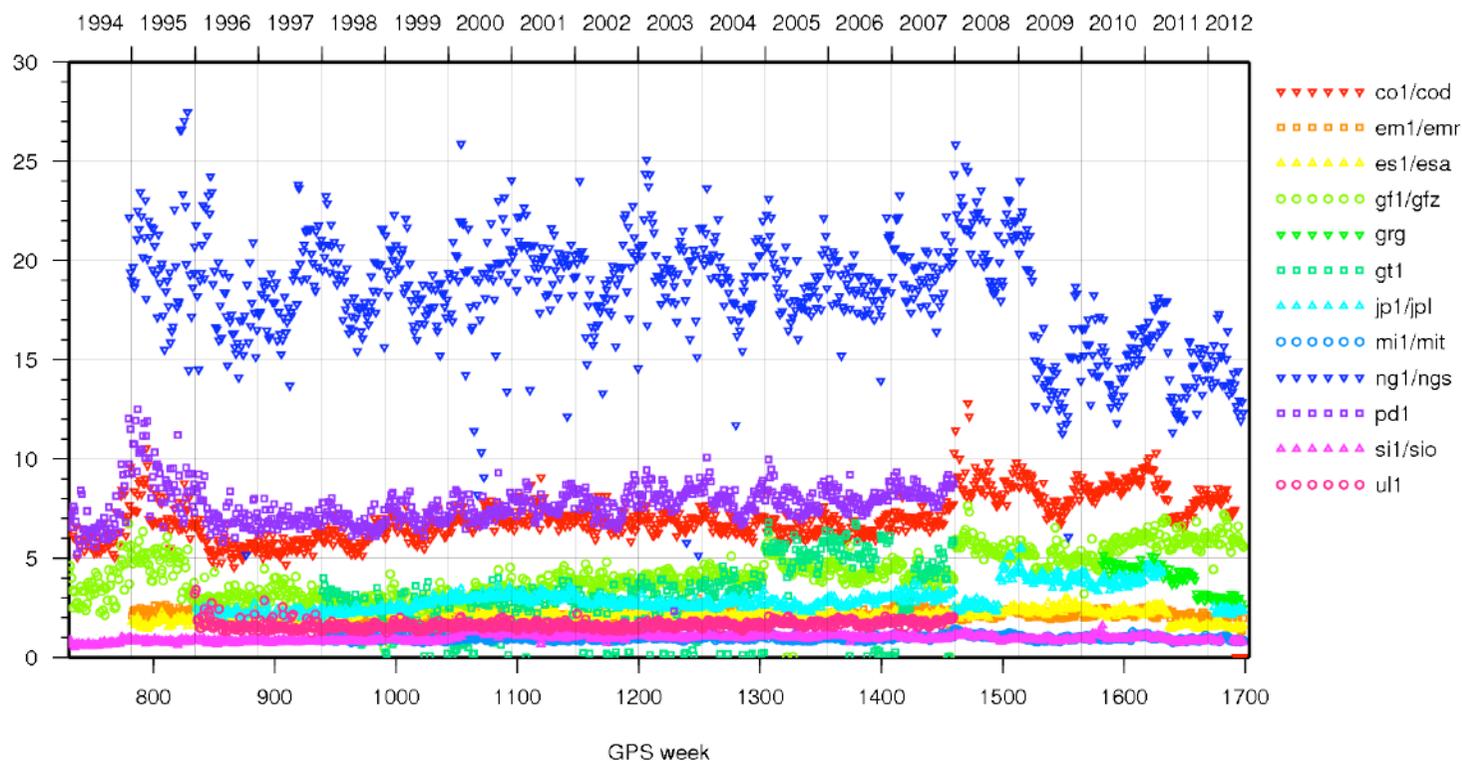
Fig. Schéma de la combinaison

Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à d'autres centres d'analyse

Facteurs de variance

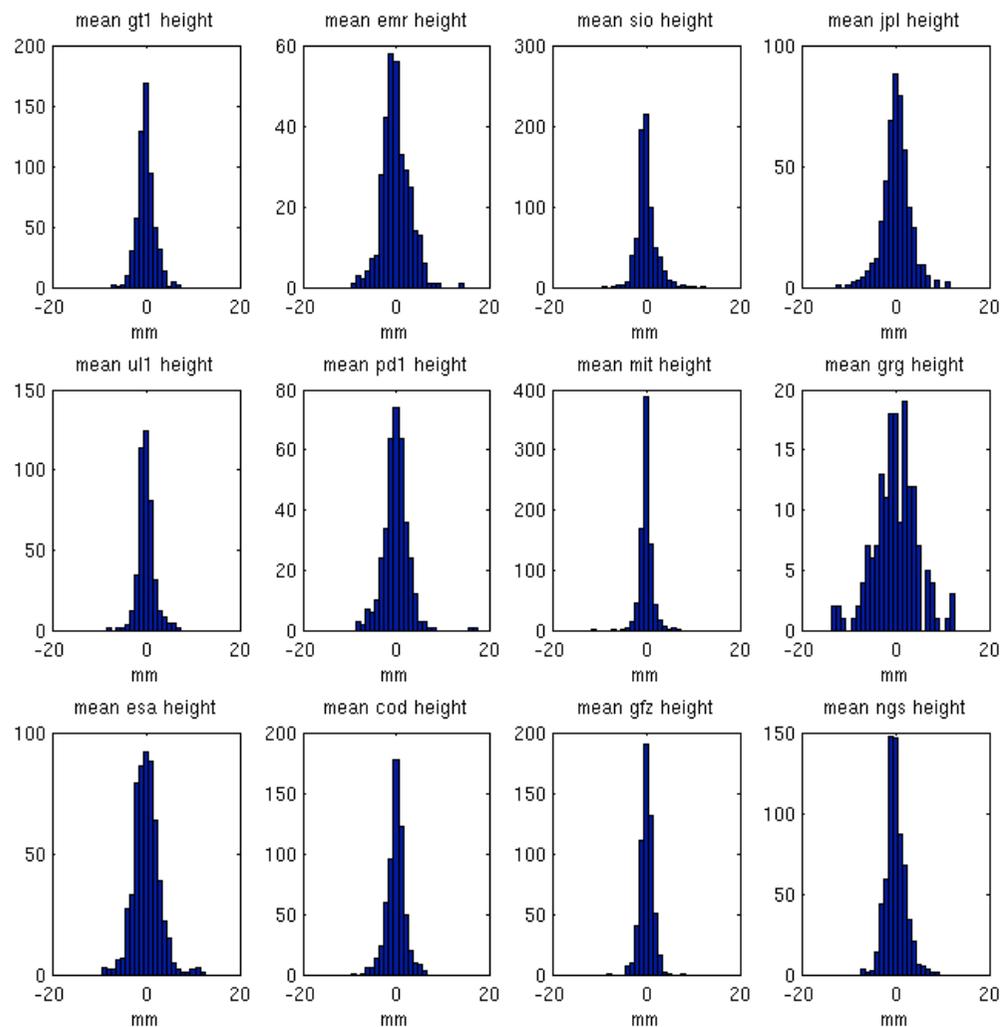
Solution variance factors



Repère de référence

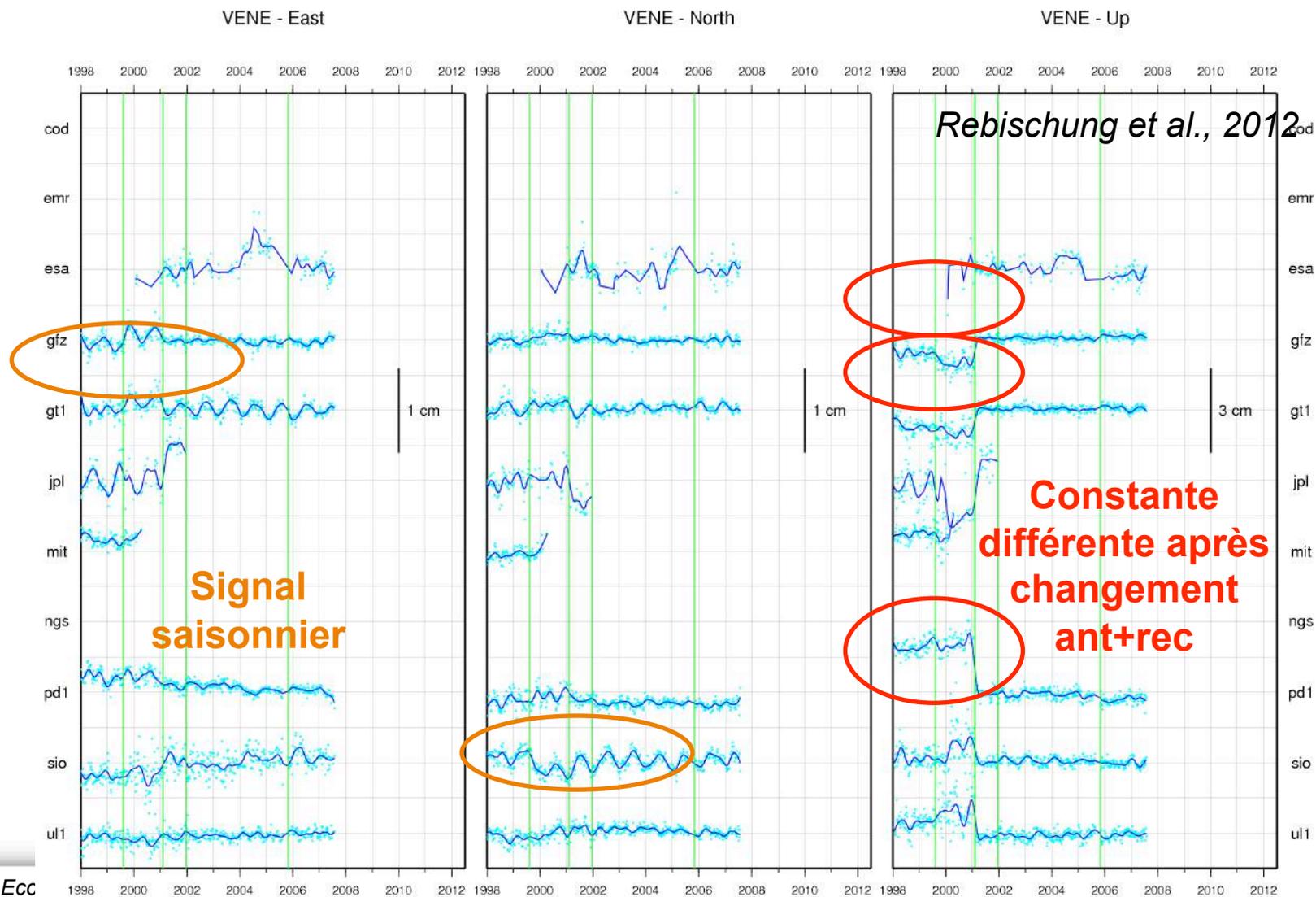
Comment vérifier? Comparaison à d'autres centres d'analyse

Ex:
Ecart-moyen sur la
composante verticale



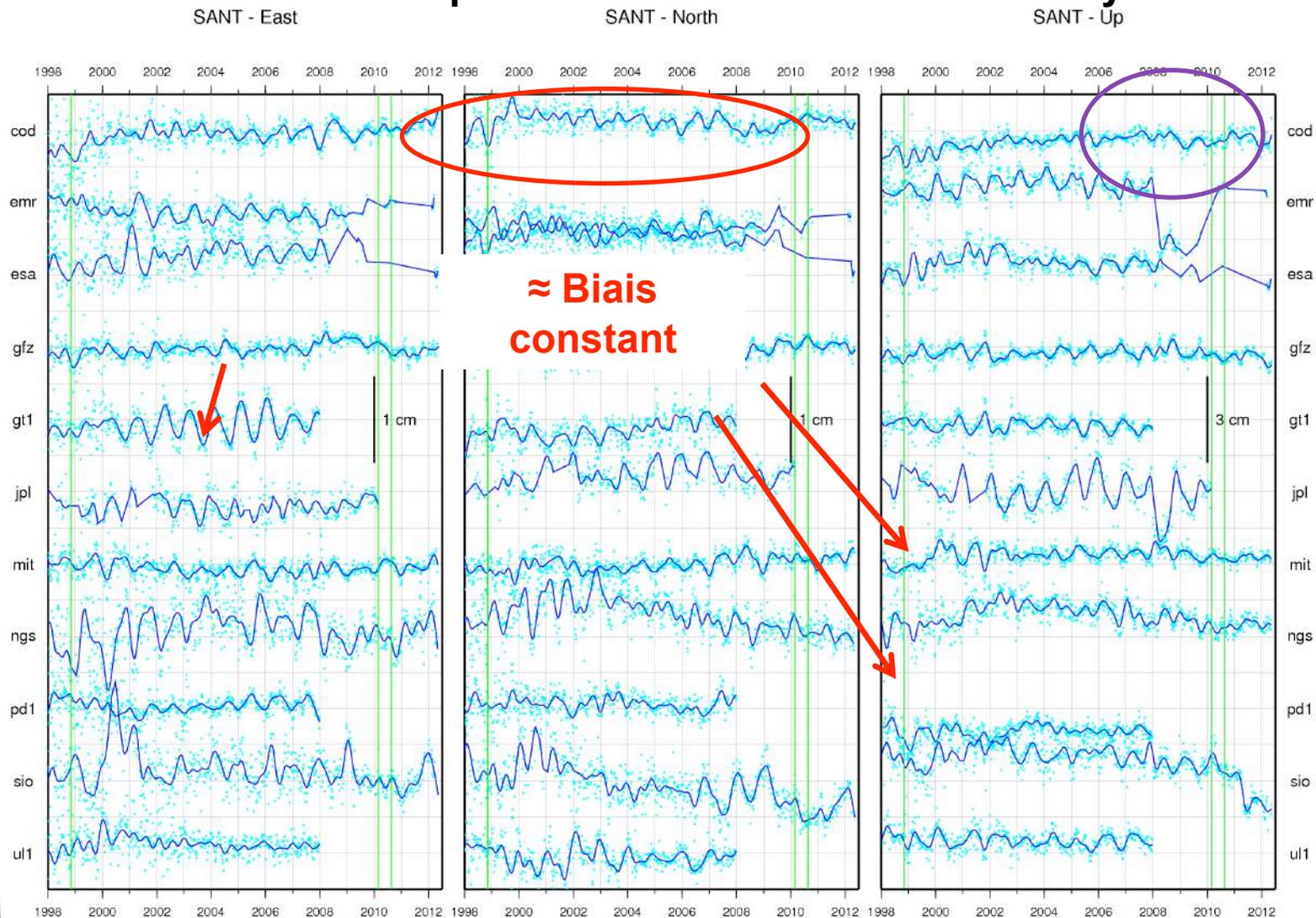
Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à d'autres centres d'analyse



Repère de référence

Comment vérifier? Comparaison à d'autres centres d'analyse



Que souhaite-t-on obtenir?

Former une série temporelle dans l'ITRF...

Former une série temporelle (1/4)

Que suis-je censé observé en plus du mouvement linéaire?

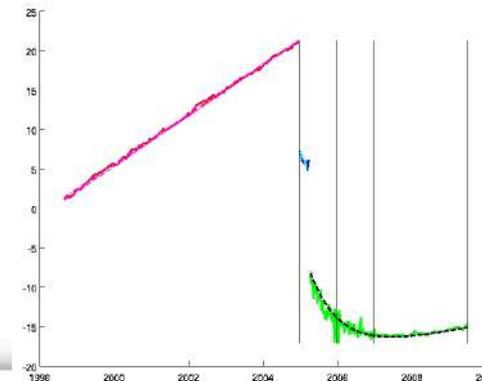
- Effets de surcharges

Principal caractéristique :
fort signal saisonnier!

Incluent les déformations de la Terre liées aux variations de pression atmosphérique, au stockage du sol en eau, à la circulation océanique



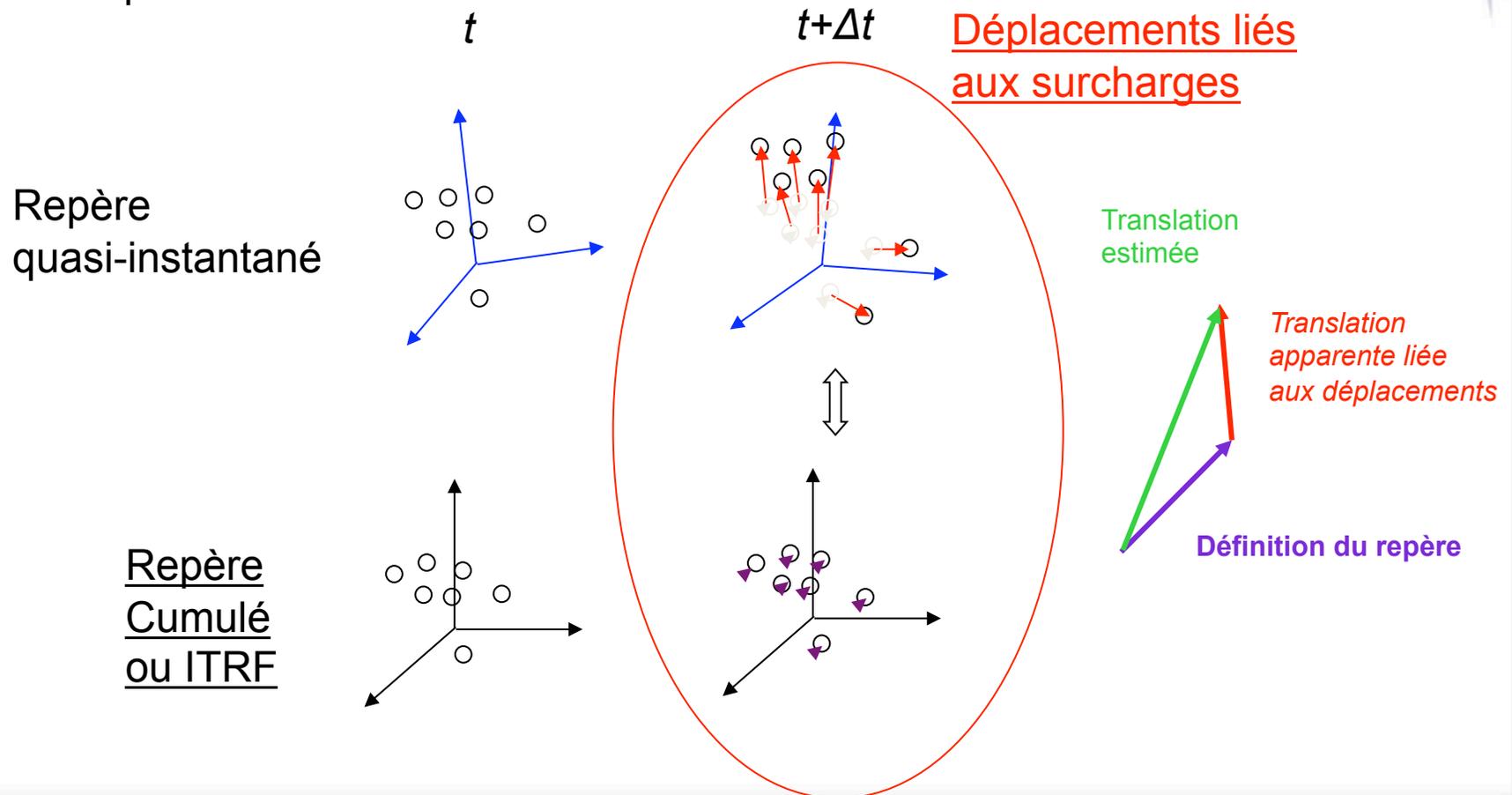
- Déformation thermique du sol (*Yan et al., JGR, 2009*)
- Déformation liée au gonflement du sol (*Nahmani et a., JGR, 2012*)
- Déplacements liés aux séismes
- Erreurs systématiques -> bruit



Former une série temporelle (2/4)

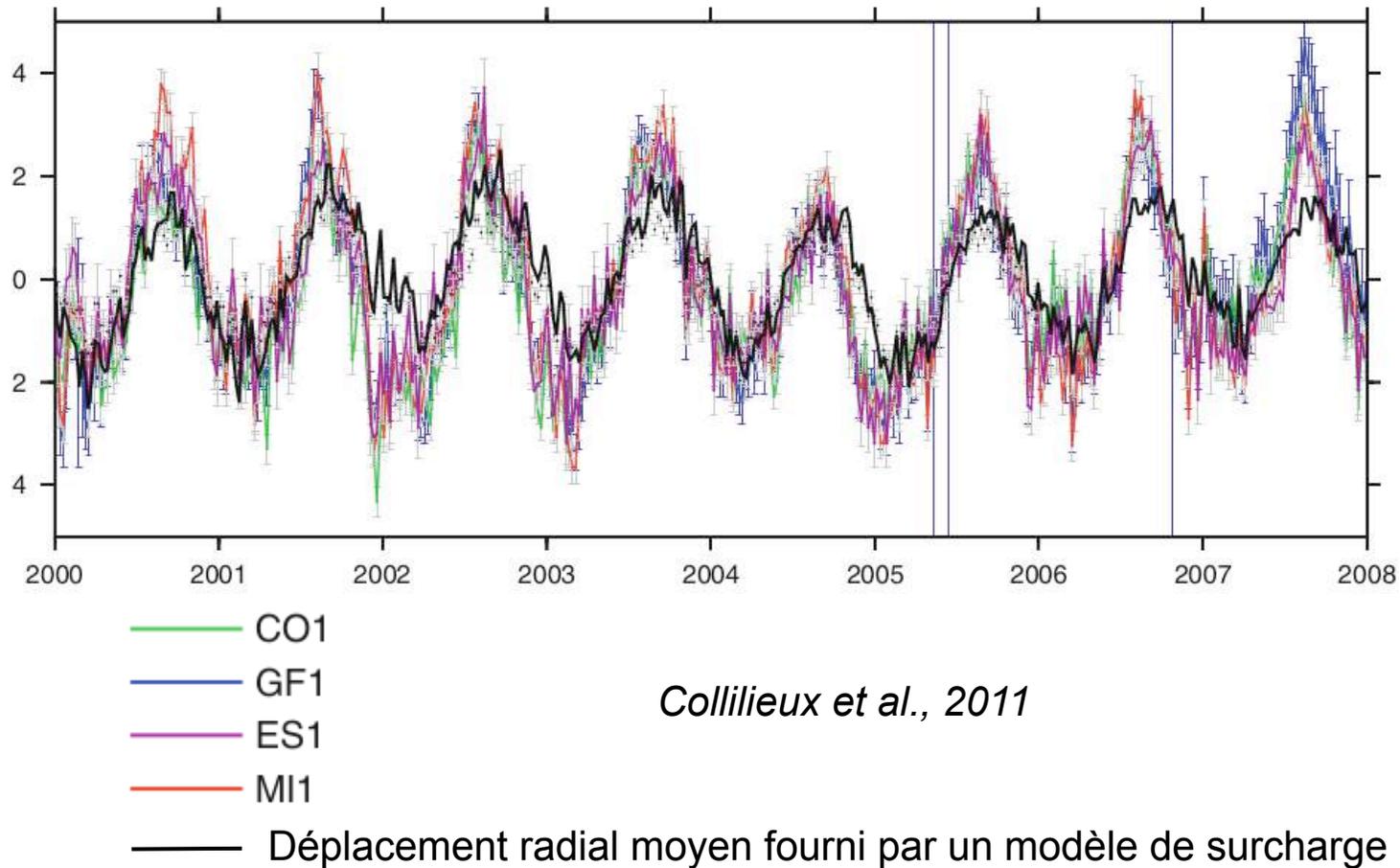
Comme l'information du géocentre GPS n'est pas parfaite (en Z), on exprime les séries GPS dans l'ITRF avec une similitude à 6 ou 7 paramètres (sans ou avec échelle)

Problème : la similitude euclidienne n'est valable que lorsque les réseaux comparés ont la même forme. EFFET DE RESEAU



Former une série temporelle (3/4)

Exemple: facteur d'échelle



Former une série temporelle (4/4)

Solution préconisée: - Ne pas estimer l'échelle (attention, cohérence z-PCO)
et/ou - Evaluer les paramètres de transformation sur un sous-réseau
- Dépondérer la composante verticale

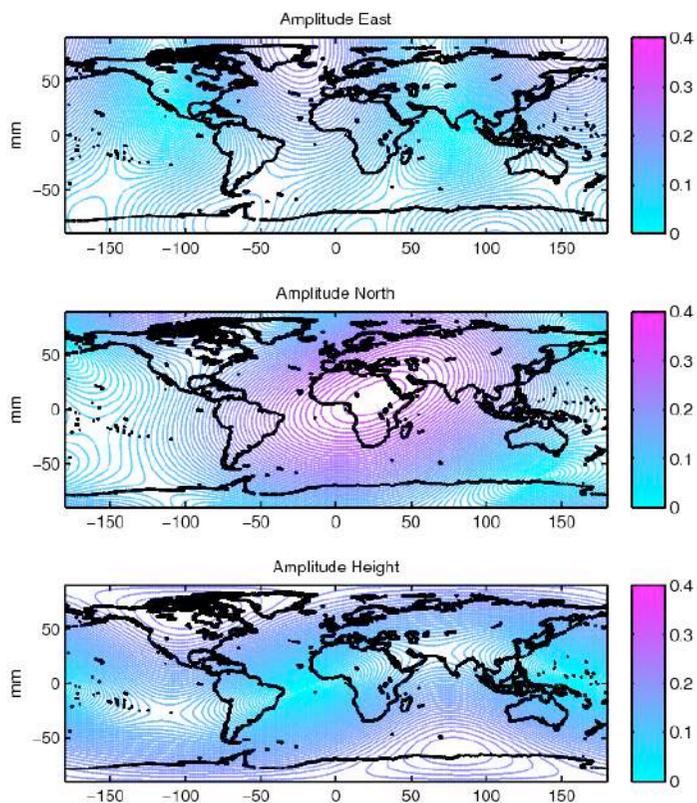


Fig. Erreur résiduelle introduite par une mise en référence soignée

Stratégie utilisée

- * Hauteur dépondérée par 3 en σ
- * Réseau bien distribué IGS08 core network (*Rebischung et al., 2011*)

Cf. Collilieux et al., Journal of geodesy 2011

Evaluation des séries temporelles

Qualité des données brutes

Intégrité des données GPS (1/8)

TEQC (Translation, editing and quality check)

<http://facility.unavco.org/software/teqc/>

Utilise/analyse/convertit des données GPS et GLONASS

Option « contrôle qualité »: `$ teqc +qc`

Génère des fichiers de statistiques et des fichiers de graphiques

Utilisation de formats natifs ou RINEX

Calcule notamment:

- « L1 pseudorange multipath » pour le C/A ou P code sur L1
- « L2 pseudorange multipath » pour le P code sur L2
- Rapport signal sur bruit
- Élévation et azimut des satellites
- Sauts d'horloge récepteur
- Sauts de cycle (perte de l'une ou l'autre des fréquences)
- Données observées vs prédites

Intégrité des données GPS (2/8)

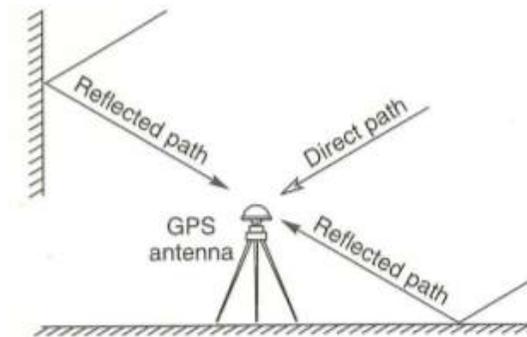
TEQC

Equations à la fréquence i : (Estey & Meertens, 1999)

$$L_i = R + c (dt_r + dt_s) - I_i + N + m_i + n_1 \lambda_1$$

$$P_i = R + c (dt_r + dt_s) + I_i + N + M_i$$

Distance rec. sat. ↑
Erreurs horloges ↑
Erreurs inosphère ↑
Délai atmosphérique ↑
Erreur lié au multi-trajet ↑
Ambiguïté entière ↑



Figs. Multi-trajet (Weill, 1997)

Intégrité des données GPS (3/8)

TEQC

$$MP1 = P_1 - (1+2/(\alpha-1)) L_1 + 2/(\alpha-1) L_2$$

$$MP2 = P_2 - (2\alpha/(\alpha-1)) L_1 + (2\alpha/(\alpha-1)-1) L_2$$

$$\text{Avec } \alpha = f_1^2 / f_2^2$$

d'où

$$MP1 = M_1 + B_1(\alpha, n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2) - (1+2/(\alpha-1)) m_1 + 2/(\alpha-1) m_2$$

petits devant M_1 et M_2

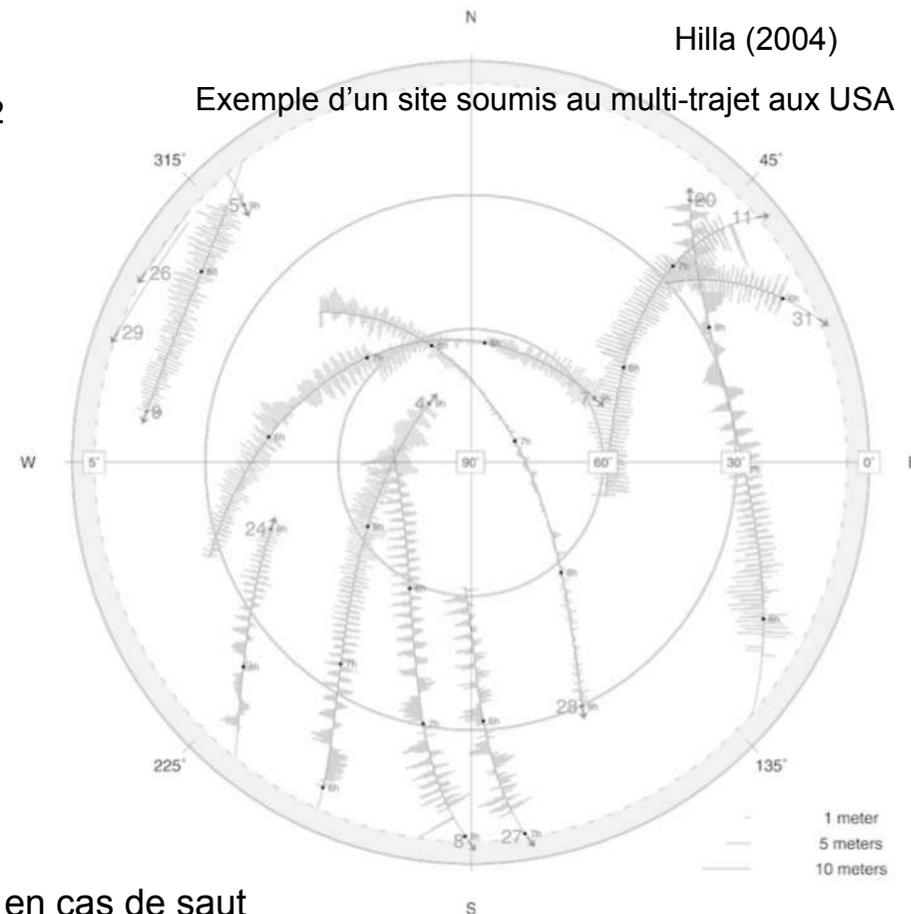
$$MP2 = M_2 + B_2(\alpha, n_1, n_2, \lambda_1, \lambda_2) - (2\alpha/(\alpha-1)) m_1 + (2\alpha/(\alpha-1)-1) m_2$$

MP1 et MP2 sont approximativement constants sauf en cas de saut de cycle. Leur variabilité est une mesure du multi-trajet

P1 Pseudorange Multipath at CHA2
 Lat: 32.7575° Lon: -79.8432° Ell Ht: -27.4 (m)
 GPS Time: Start 2002/08/05 05:00:00 Stop 2002/08/05 09:00:00

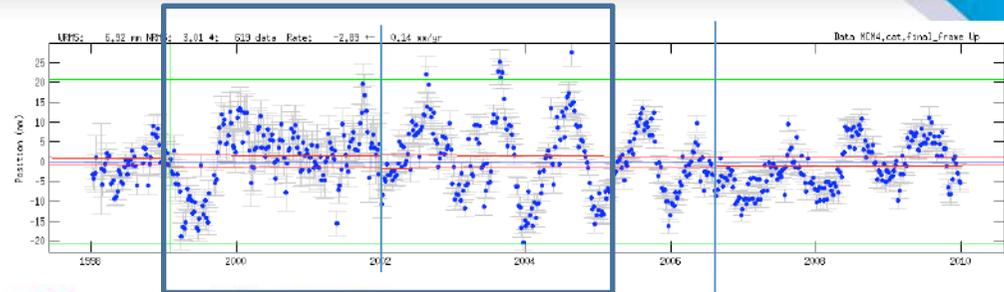
Hilla (2004)

Exemple d'un site soumis au multi-trajet aux USA



Intégrité des données GPS (4/8)

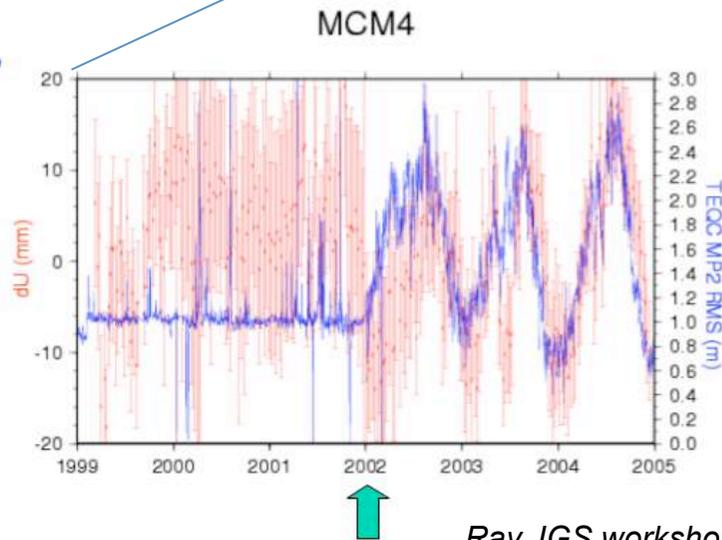
TEQC



Mai 2006: chgt récepteur

MCM4: dU versus Receiver Change & MP2

- at MCM4 (McMurdo), start of annual height & annual MP1, MP2 variations coincide
- annual signals begin with receiver swap (03 Jan 2002)
- TurboRogue SNR-8000 changed to ACT SNR-12
- strongly suggests common instrumental basis for code multipath & height changes responding to seasonal forcing



Ray, IGS workshop 2006

Reflète le multi-trajet sur le code



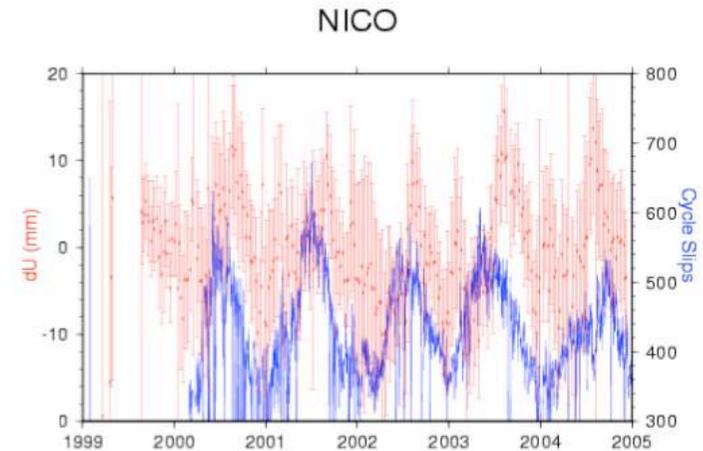
Station MCM4 ©unavco

Intégrité des données GPS (5/8)

TEQC

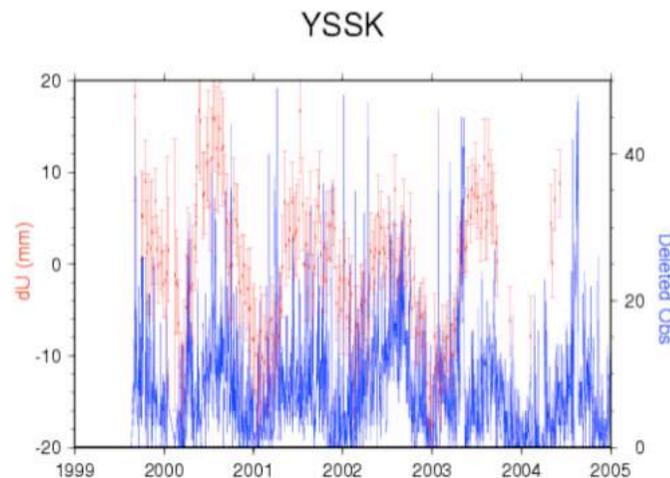
NICO: dU versus Cycle Slips

- NICO (Nicosia) dU correlates well with number of cycle slips (per day)



YSSK: dU versus Deleted Obs

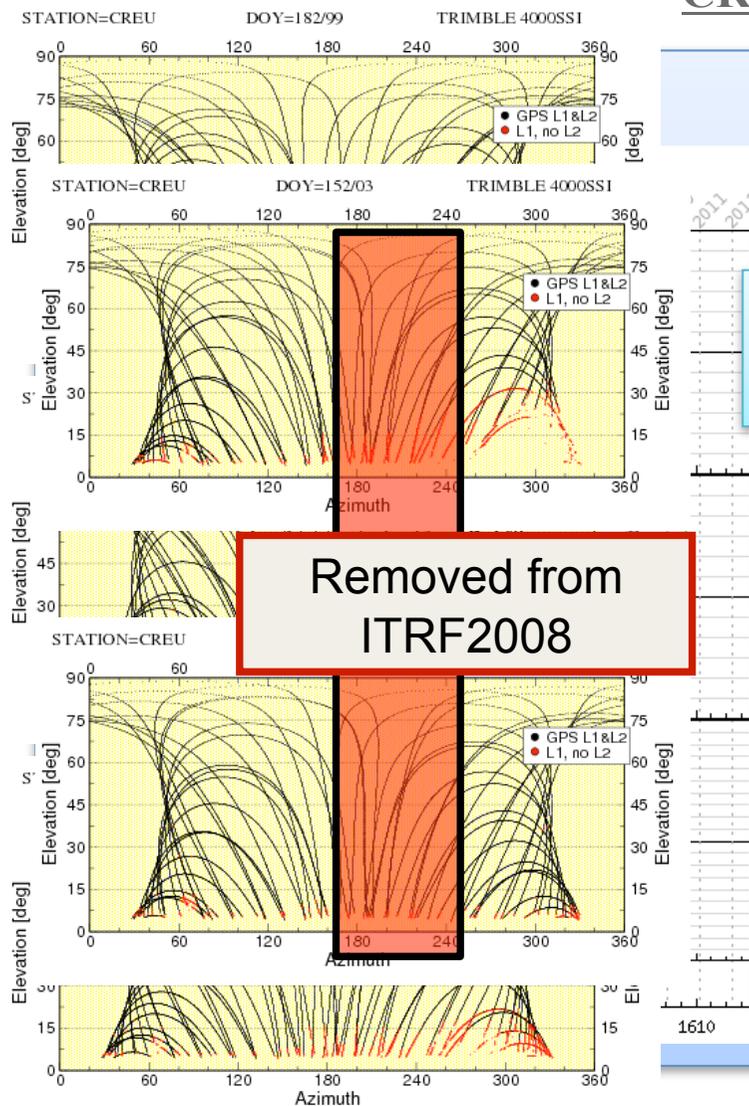
- YSSK (Yuzhno-Sakhalinsk) dU correlates well with number of deleted obs (per day)



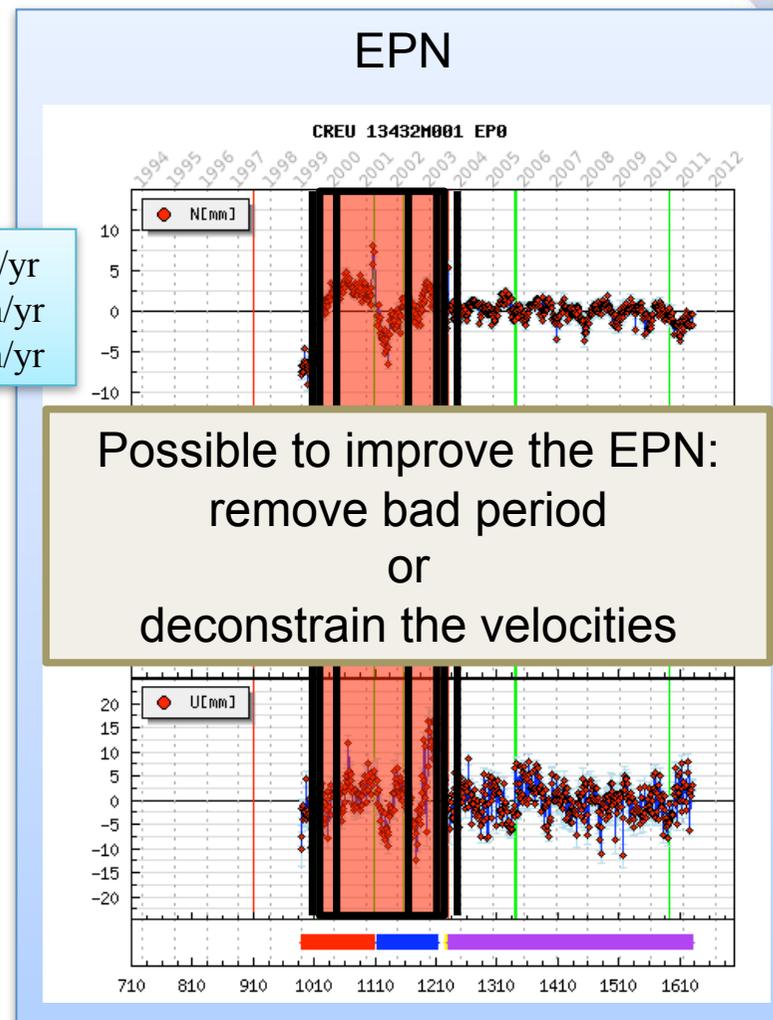
Ray, IGS workshop 2006

Intégrité des données GPS (6/8)

Illustration de l'effet de la perte de données sur la série temporelle
CREU (Cadaques, Spain)



North: -2.7 mm/yr
 East : -4.4 mm/yr
 Up : -4.8 mm/yr



Remerciement: J. Legrand, EUREF 2012

Intégrité des données GPS (7/8)

Bibliothèques de représentation des résultats:

TEQC et Matlab: - TEQC PLOT (J. Hedfors)
 - TEQC SPEC (C. Ogaja & J. Hedfors)

TEQC et GMT: - CF2PS et CF2SKY (S. Hilla)

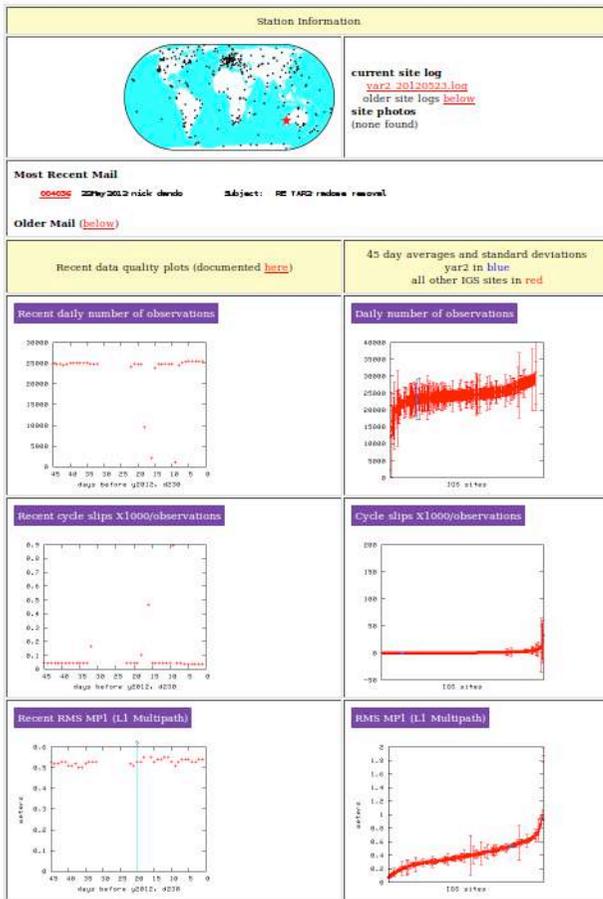
Intégrité des données GPS (8/8)

La plupart des producteurs de données applique TEQC (ou équivalent maison)

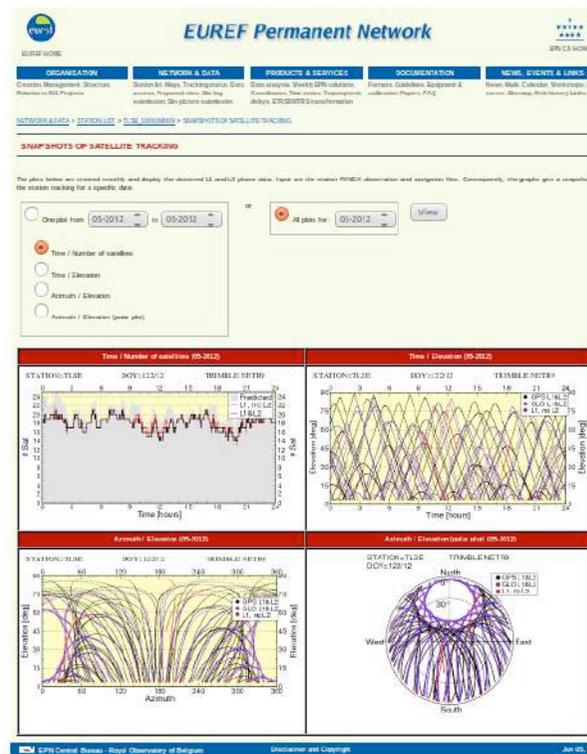


IGS Station: yar2

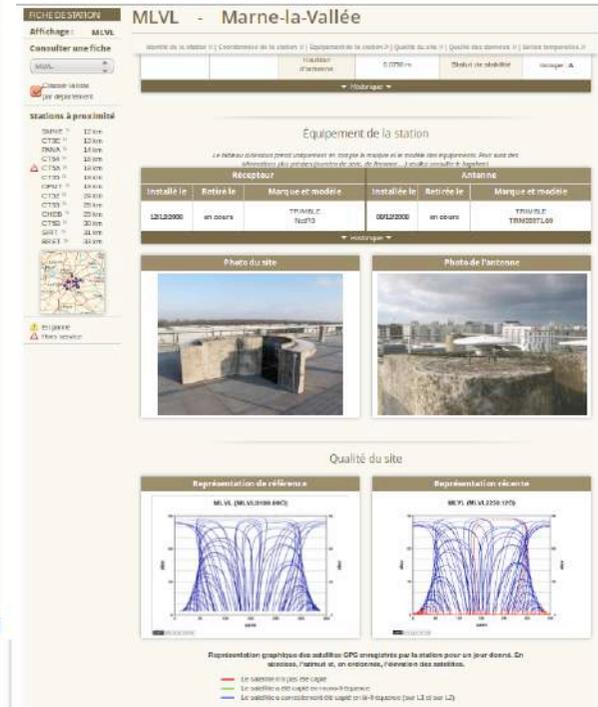
<http://igs.cb.jpl.nasa.gov>



<http://www.epncb.oma.be>



<http://rgp.ign.fr>



Evaluation des séries temporelles

Statistiques simples

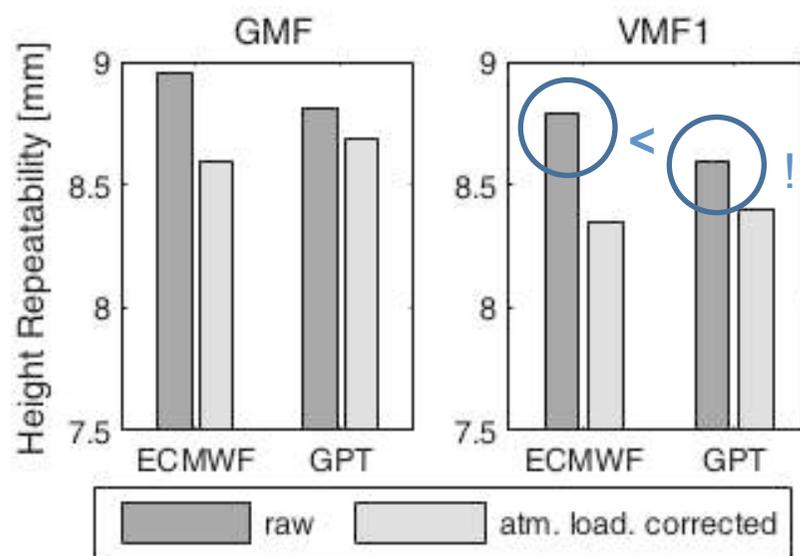
Statistiques simples (1/2)

Volatilité des séries (dispersion ou RMS)

Limitation 1:

- Le signal n'est pas de moyenne nulle (ex: surcharge)
- Le RMS peut être plus grand avec un modèle plus exact

Steigenberger et al., 2009



Le retard troposphérique a priori le moins exact conduit au plus petit RMS des séries de coordonnées!

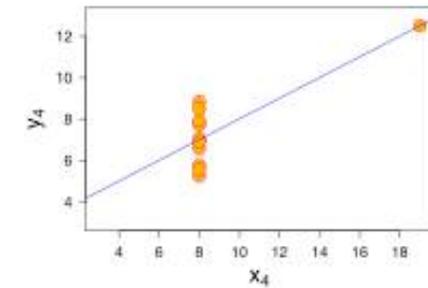
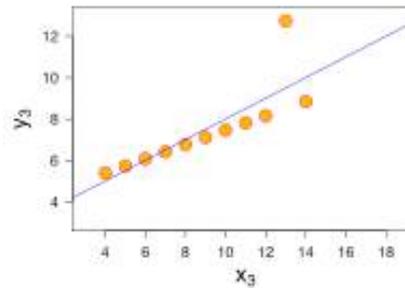
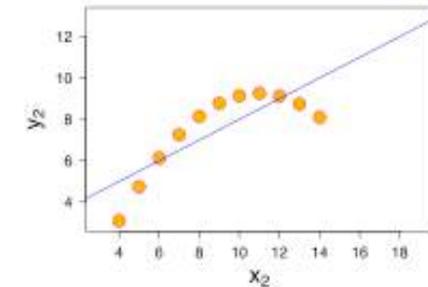
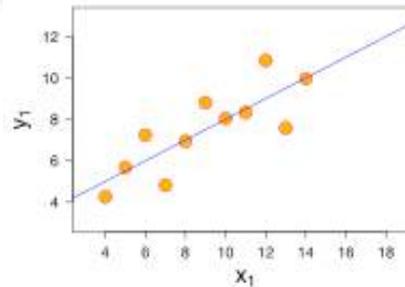
Fig. 5 Station height repeatabilities without (*raw*) and with atmospheric loading corrections

Statistiques simples (2/2)

Volatilité des séries (dispersion ou RMS)

Limitation 2:

Anscombe's quartet



Property	Value
Mean of x in each case	9 (exact)
Variance of x in each case	11 (exact)
Mean of y in each case	7.50 (to 2 decimal places)
Variance of y in each case	4.122 or 4.127 (to 3 decimal places)
Correlation between x and y in each case	0.816 (to 3 decimal places)
Linear regression line in each case	$y = 3.00 + 0.500x$ (to 2 and 3 decimal places, respectively)

Source

<http://en.wikipedia.org>



Evaluation des séries temporelles

Etude des signaux périodiques

Analyse spectrale

Transformée de Fourier

Définition mathématique

Signal continu



$$X(f) = \int x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int X(f) e^{2j\pi f t} df$$

Définition mathématique

Signal discret

τ : pas d'échantillonnage



$$X(f) = \sum x(t_k) e^{-2j\pi f t_k}$$

$$x(t_k) = \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} X(f) e^{2j\pi f t_k} df$$

Transformée discrète

Signal discret

Echantillonnage en fréquences

Calcul avec FFT



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2j\pi kn/N}$$

$$f_k = k / (N\tau)$$

Mignard, 2006

Analyse spectrale

La TF est un nombre complexe. On représente souvent l'amplitude ou la puissance.

- Spectre de puissance: $|X(f)|^2$ *Mignard, 2006*

Périodogramme:

Définition d'après Scargle (1982).

$$P_X(\omega) = \frac{1}{N_0} |\text{FT}_X(\omega)|^2$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$= \frac{1}{N_0} \left| \sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \exp(-i\omega t_j) \right|^2$$

Avec cette normalisation: $X(t_i) = X_0 \sin(\omega_0 t_i + \phi)$ $i = 1, 2, \dots, N_0$

$$P_X = N_0 (X_0/2)^2 \quad \text{à la pulsation } \omega_0$$

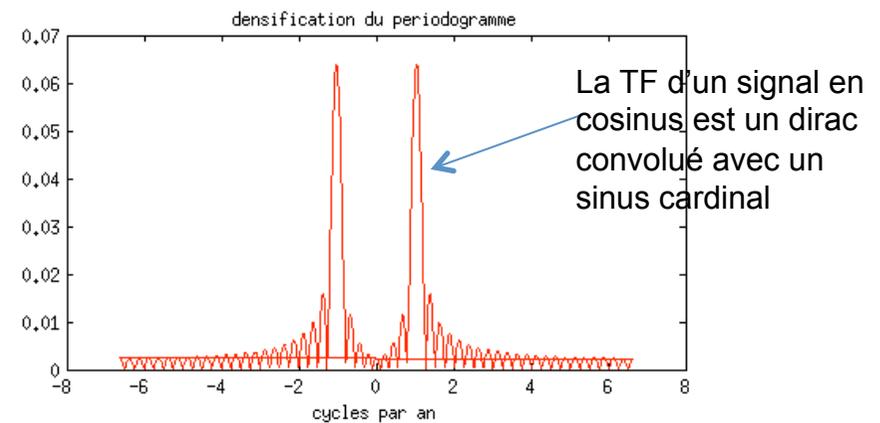
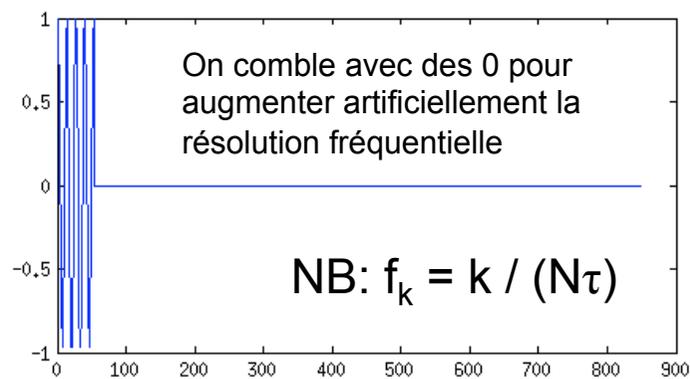
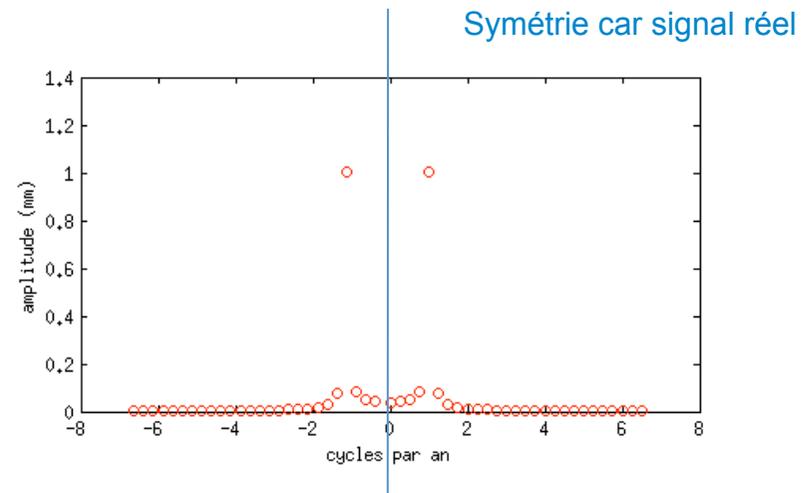
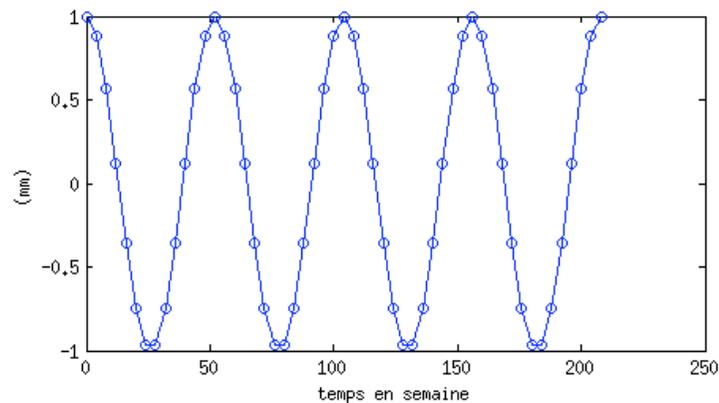
Pour un bruit blanc $R(t)$ de variance σ_0^2 , $P_R = \langle R^2 \rangle = \sigma_0^2$

D'autres formes existent ($\times \tau$, $\div N_0$ etc...) mais aussi des définitions impliquant l'autocorrélation du signal. Voir section « Analyse du bruit »

Analyse spectrale

Avec utilisation de l'algorithme FFT, le sous-ensemble des fréquence de la transformée de Fourier discrète est calculé

Exemples:



Analyse spectrale

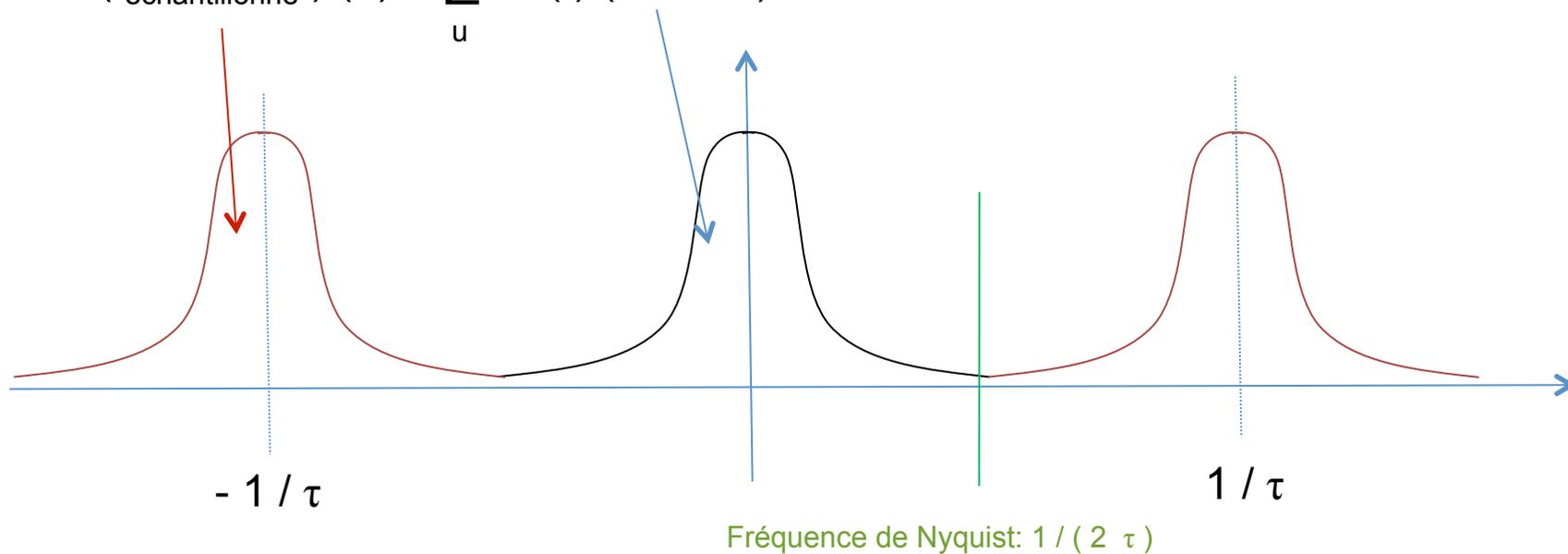
Pourquoi le signal se réplique –t-il?

$$f_{\text{échantillonné}}(t) = f(t) \cdot P(f / \tau)$$

$$\text{avec } P(t) = \sum_{i = -\infty}^{i = +\infty} \delta(t - i)$$

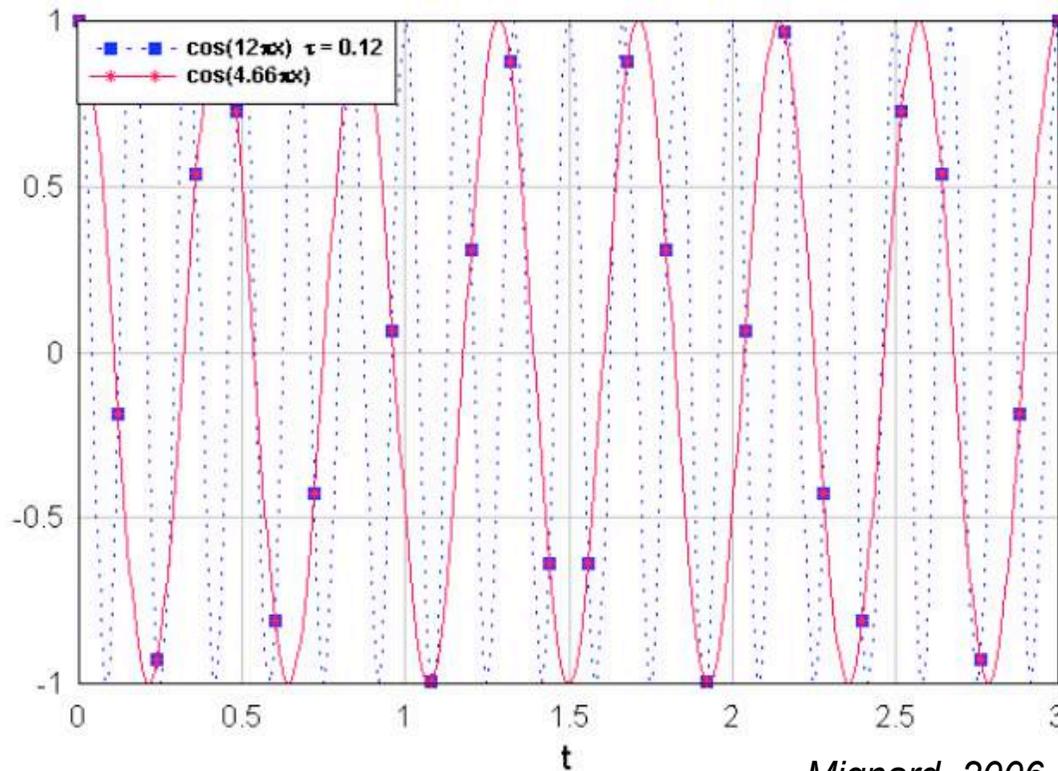
Fonction peigne: permet de passer d'un signal continu à un signal échantillonné

$$TF(f_{\text{échantillonné}})(u) = \sum_u TF(f)(u - n / \tau)$$



Analyse spectrale

Repliement (répliques)



Mignard, 2006

Fréquence de Nyquist

$$f_c = 1 / (2 \cdot \tau)$$

Si le signal échantillonné avec un pas τ comprend un signal de fréquence supérieure à f_c , il ne pourra être détecté. De plus un pic à basse fréquence apparaîtra!

Analyse spectrale

Calcul du périodogramme

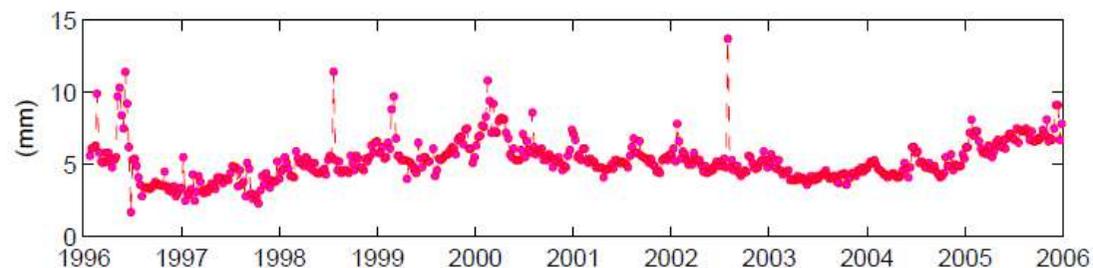
- Périodogramme basé sur la FFT (formule ci-dessus)
- Périodogramme de Lomb si les données ne sont pas échantillonnées régulièrement (*Scargle, 1982*). Equivalent à une estimation par moindres carrés de chaque fréquence

$$P(f) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\sum_{j=1}^N x_j \cos 2\pi(t_j - r)f \right]^2}{\sum_{j=1}^N \cos^2 2\pi(t_j - \tau)f} + \frac{\left[\sum_{j=1}^N x_j \cos 2\pi(t_j - r)f \right]^2}{\sum_{j=1}^N \sin^2 2\pi(t_j - \tau)f} \right\}$$

avec
$$\tan(4\pi f\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \sin 4\pi_j f}{\sum_{j=1}^N \cos 4\pi_j f}$$

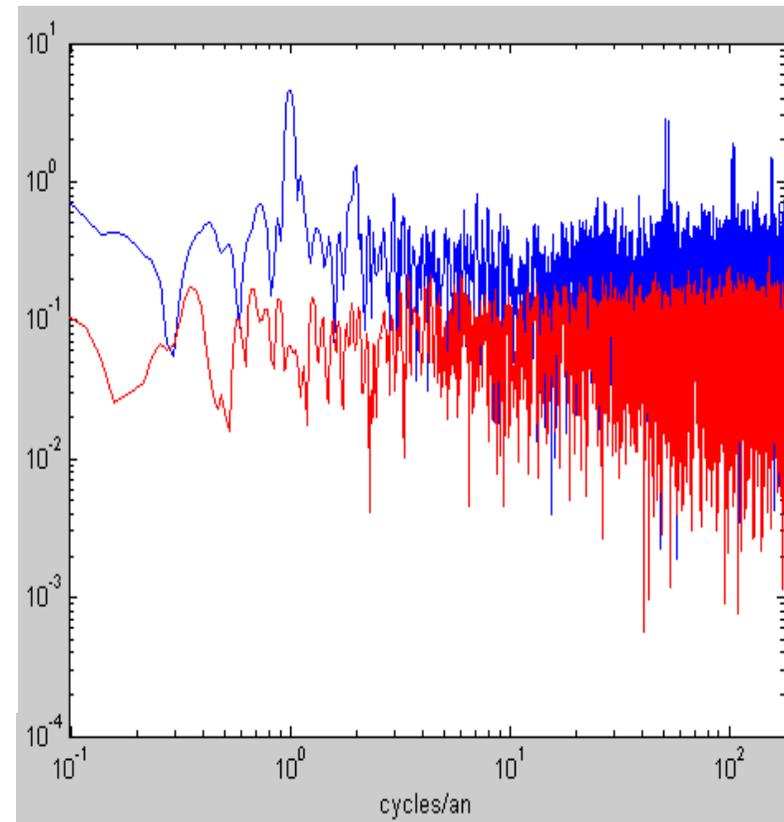
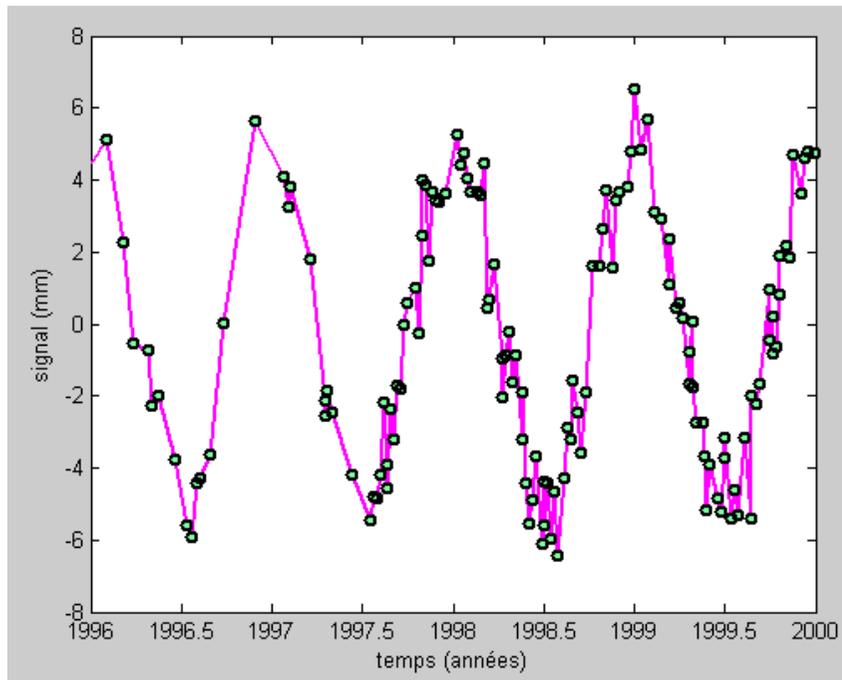
Possibilité de pondérer (*Scargle, 1989*).

Erreur formelle sur la composante verticale d'une série temporelle



Analyse spectrale

Problème: échantillon non régulier. Attention !

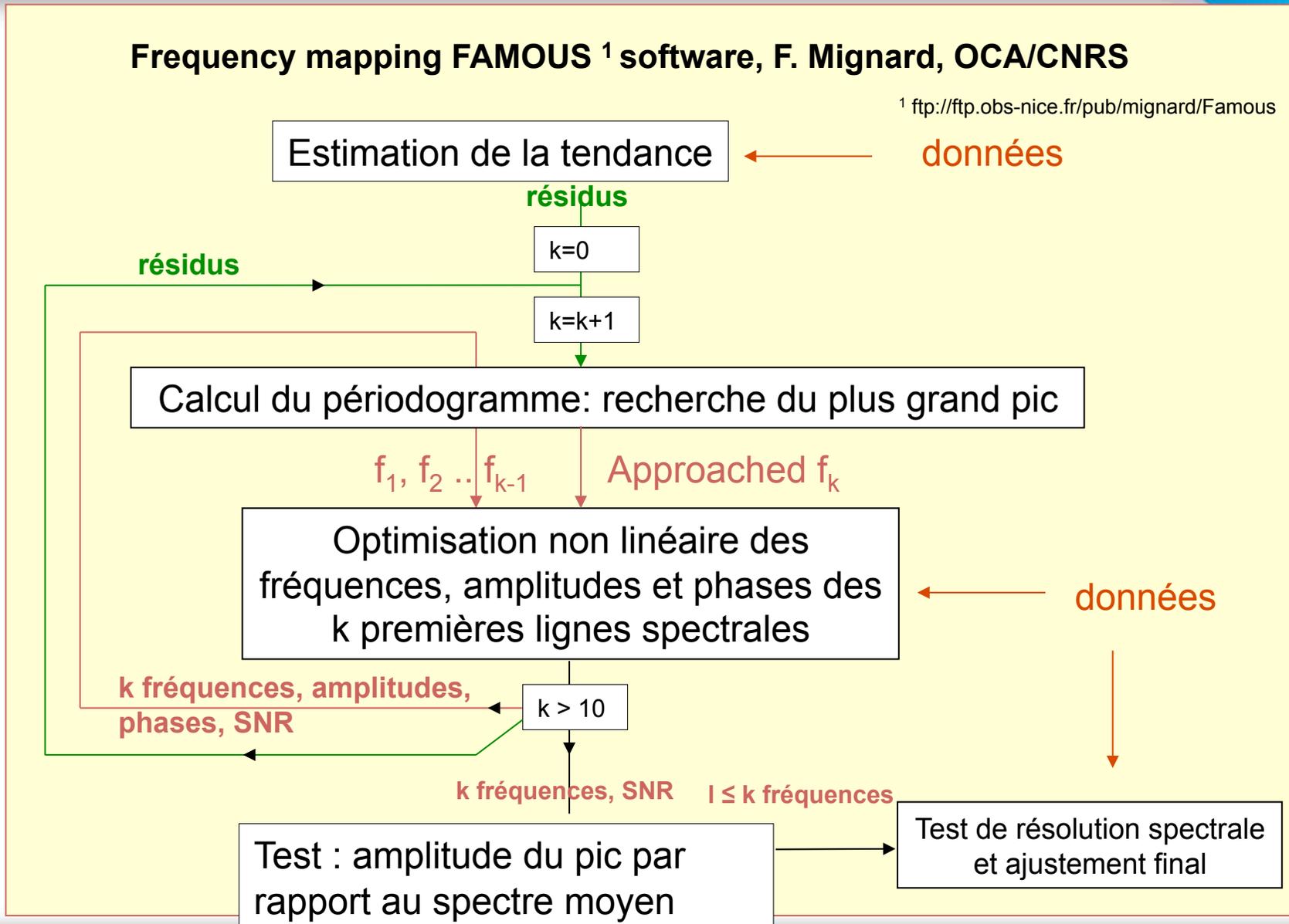


Simulation : 1 sinusoïde + bruit, échantillonnage temporel tiré de la série temporelle de la station VLBI Algonquin

Analyse spectrale

Frequency mapping FAMOUS¹ software, F. Mignard, OCA/CNRS

¹ <ftp://ftp.obs-nice.fr/pub/mignard/Famous>

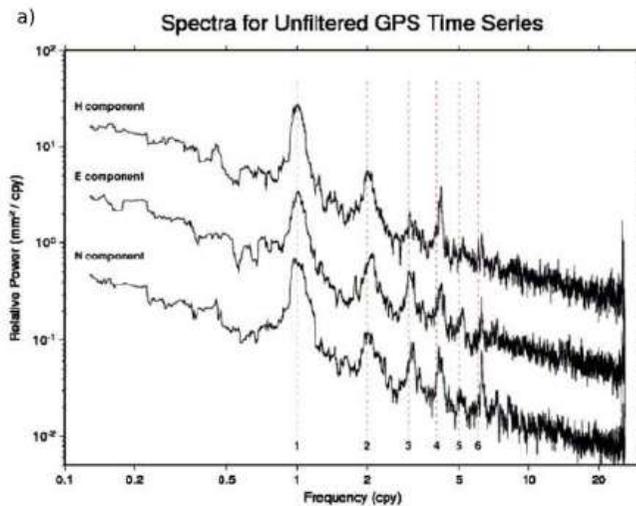


Analyse spectrale

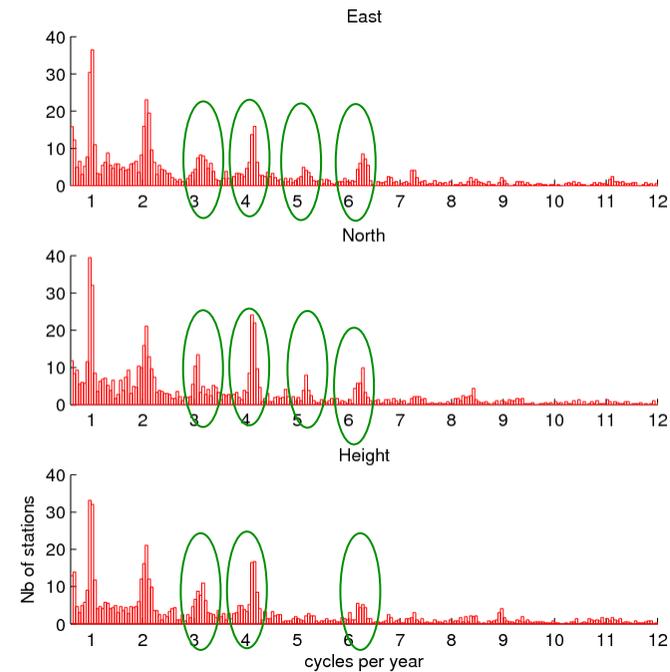
Applications aux séries temporelles de positions GPS

Harmoniques de la période
« draconitique » des satellites GPS :
351,5 jours

Détectée sur + de 300 séries analysées



*Périodogrammes de Lomb cumulés
(Ray et al., 2008)*



*Fréquence détectées par FAMOUS
(Collilieux et al., 2007)*

Analyse spectrale

NB: Période draconitique

Précession du nœud ascendant de l'orbite

$$\dot{\Omega} = -3\pi \frac{J_2}{T} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \cdot \cos i = -14.1^\circ/\text{year}$$

Période pour laquelle un plan orbital reprend sa même configuration par rapport au soleil!

$$T_R = \frac{2\pi}{2\pi - \dot{\Omega}_{\text{GPS}} \cdot 1 \text{ year}} \cdot 365.25 \text{ days} \approx 351.5 \text{ days}$$

Schmid et al., (2007)

Mais aussi visible dans les séries du mouvement du géocentre apparent, dérivées des EOPs (5th et 7th), LOD (6th), écarts des orbites (3rd) (Griffith et Ray, 2011)

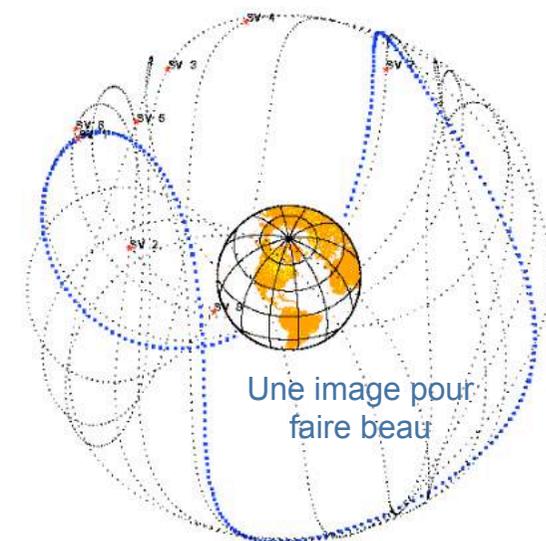


Fig. T. Herring (MIT)

GPS orbit, Earth-fixed frame

© E. Calais

Analyse spectrale

Représentation des résultats: Images amplitudes et phase (vecteur)

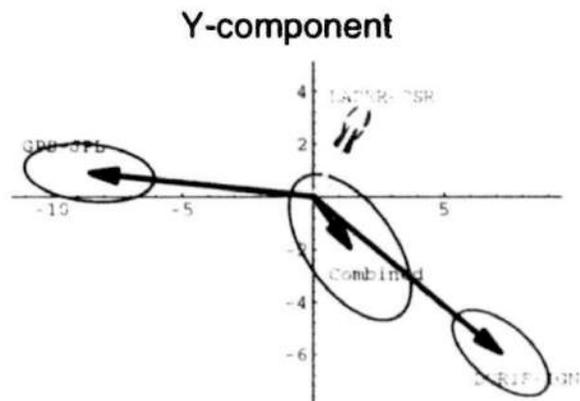


Fig: Sillard 1999. Mouvement du géocentre par GPS, SLR, DORIS et combinée DORIS/SLR

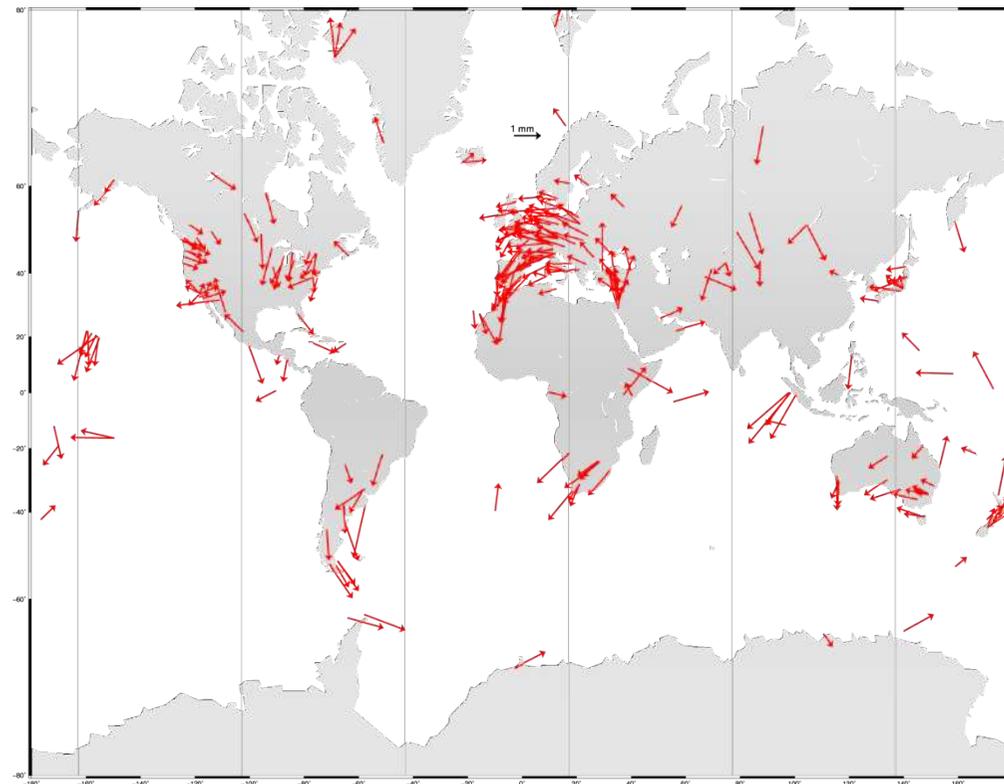
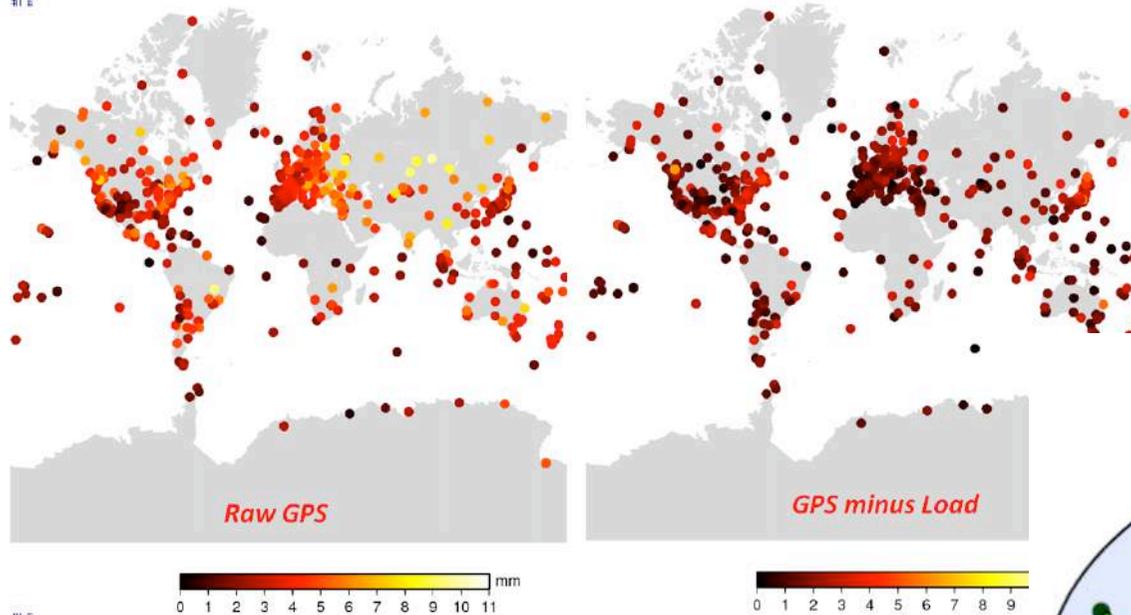


Fig. Distribution de la 4ieme harmonique (hauteur) (Ray et al., 2011)

Analyse spectrale

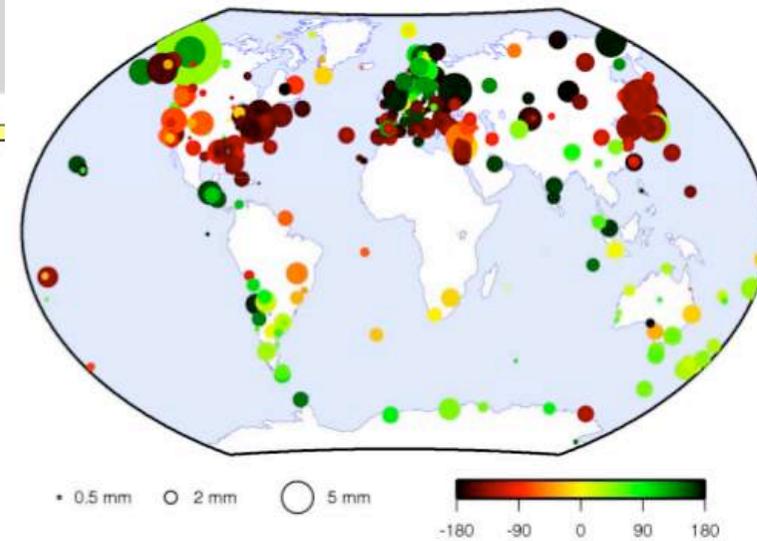
Représentation des résultats: Images amplitudes et phase (couleur)

Amplitude of the vertical annual displacement



Collilieux et al., AGU 2011
Avec et sans correction de modèle de surcharge!

Annual – Up



Rebischung et al., IGS, 2012
La phase est représentée en couleur et l'amplitude
avec la taille du symbole

Cartes réalisées avec GMT

http://gmt.soest.hawaii.edu/gmt/html/gmt_man.html

Analyse spectrale

Signaux variables et lignes spectrales proches

Famous (Mignard, 2004) permet d'estimer des séries de Poisson

$$y(t) = C_0(t) + \sum_k [C_k(t) \cdot \cos(2\pi \cdot n u_k \cdot t) + S_k(t) \cdot \sin(2\pi \cdot n u_k \cdot t)] \quad (1)$$

avec $C_0(t)$, $C_k(t)$, $S_k(t)$ comme polynôme: $a + b \cdot t + c \cdot t^2 + \dots + d \cdot t^{\text{degmax}}$

Exemple: Séries de translations GPS. Annuel variable (polynôme de degré 2 contre annuel+draconitique)

(van Dam et al., 2012)

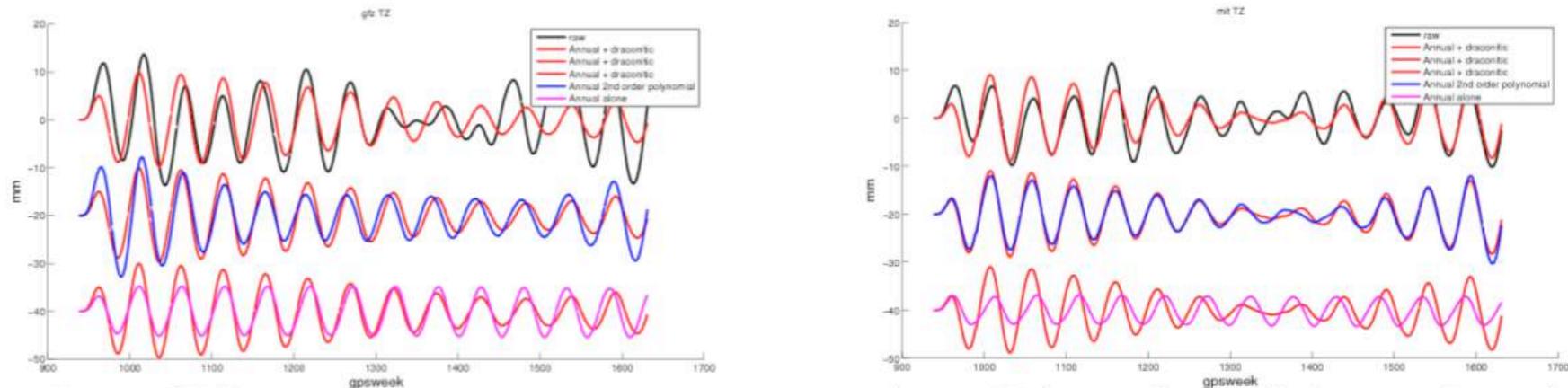


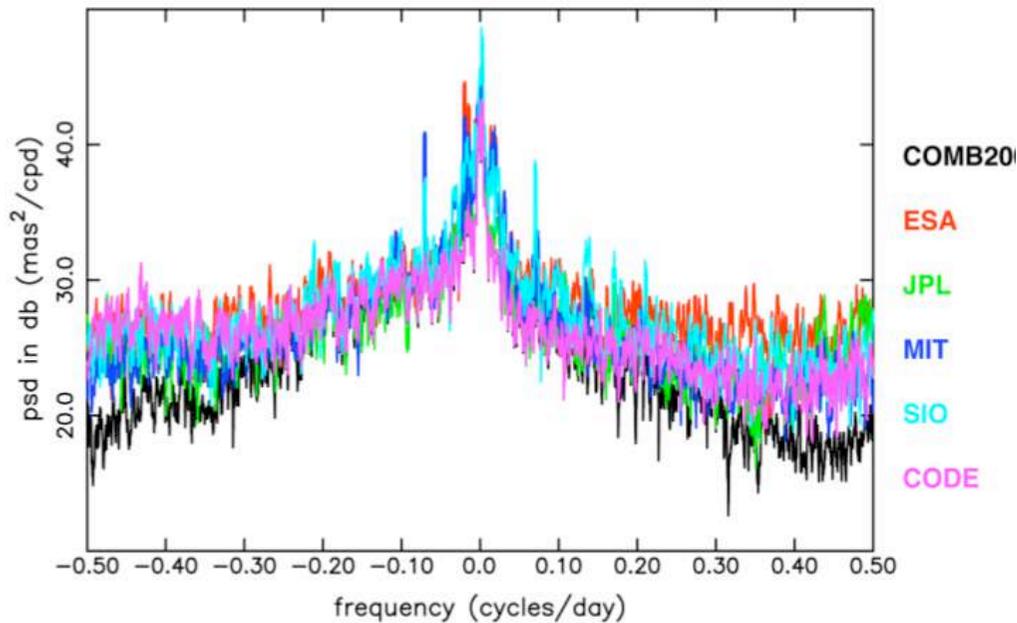
Fig.2 Raw GPS geocenter motion time series along Z (translation) from *gfz* and *mit* time series and fitted models. A butterworth low pass filter has been applied for clarity.

Analyse spectrale

Spectre de la rotation de la Terre, **exemple de séries complexes**

$$p = x_p - i y_p$$

PM Exc – Tides – (AAM+OAM)



Period of Spectral Peaks (PM Exc)

Analysis Center	Aliased O1				
COMB2008	---	---	---	---	---
ESA	---	---	---	---	---
CODE	---	---	---	---	---
JPL	± 14.2	9.3	7.1	5.8	4.7
MIT	-14.2, 13.7	-9.3	---	---	---
SIO	±14.2	---	±7.2	5.8	±4.7

(period given in solar days)

Gross, 2009

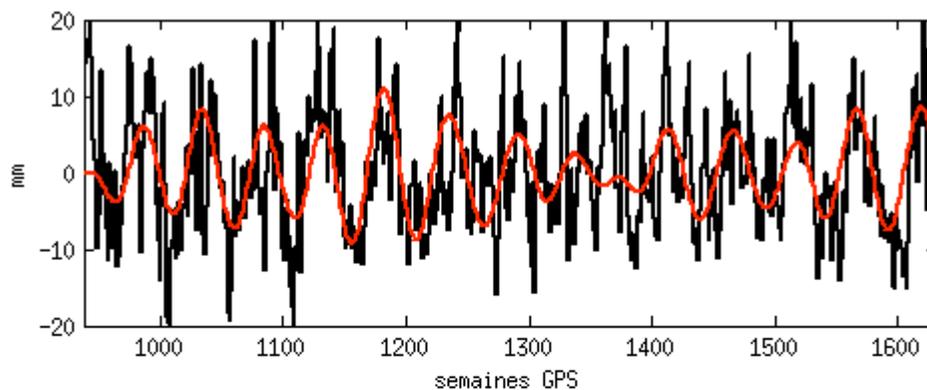
Evaluation des séries temporelles

Filtrage (temporel)

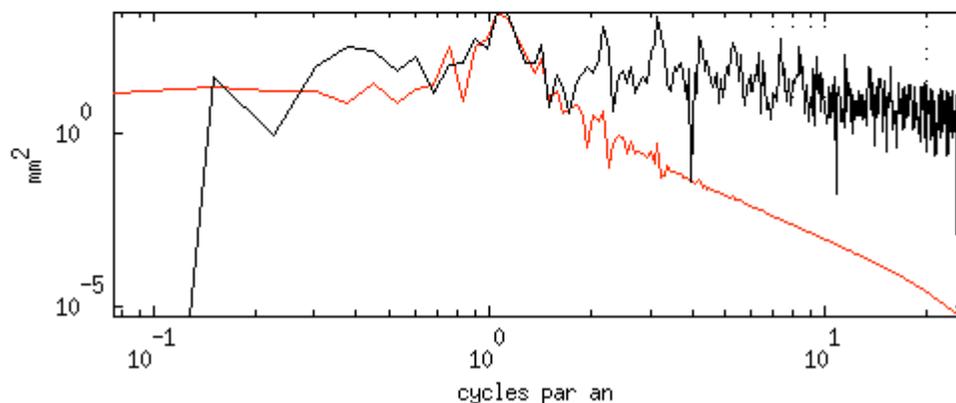
Filtrage (1/11)

Idée

Exemple: translation composante Z (mit)



— Série brute
— Série filtrée



Pour une revue du problème, voir le cours de Bério (2006)

Filtrage (2/11)

Domaine spectral: multiplication par la fonction de transfert du filtre
Domaine temporel: convolution du signal par une fonction

Filtre linéaire:

$$y_n = \sum_{k=0}^M c_k x_{n-k} + \sum_{j=1}^N d_j y_{n-j}$$

↑ en sortie

↑ en entrée

Fct de transfert
dans le domaine spectral

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\sum_{k=0}^M c_k e^{-2\pi i k (f \Delta)}}{1 - \sum_{j=1}^N d_j e^{-2\pi i j (f \Delta)}}$$

Press et al. (1992)

Δ : pas d'échantillonnage

Parcours inverse ?

Filtrage (3/11)

Moyenne mobile:

$$y_n = \sum_{i=-m_1}^{i=m_2} \alpha_i x_{n+i}$$

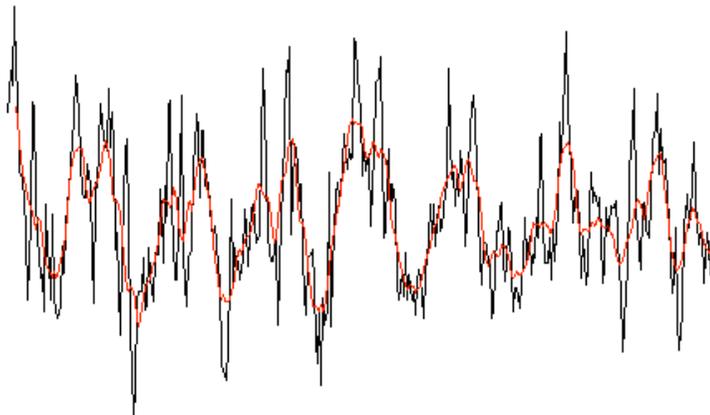
Moyenne arithmétique (moyenne glissante)

$$m_1 = m_2 = m$$

$$\alpha_i = 1 / (2m + 1)$$

- Éléments du noyau: les séries périodiques de période $(2m+1)/k$ avec $k=1, 2$ etc...
- Séries invariantes: polynômes de degré 0 et 1 + certaines séries obtenues en résolvant une équation aux différences (Gourieroux et Monfort, 1997).

Ex: pour $2m+1 = 5$. $x_t = ((-3+\sqrt{5}) / 2)^t$



Ex: moyenne glissante sur 10 valeurs, translation MIT

Filtrage (4/11)

Moyenne mobile:

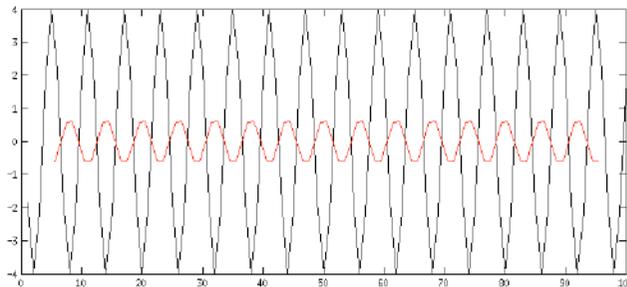
$$y_n = \sum_{i=-m_1}^{i=m_2} \alpha_i x_{n+i}$$

Moyenne arithmétique (moyenne glissante)

$$m_1 = m_2 = m$$

$$\alpha_i = 1 / (2m + 1)$$

- Déphasage des signaux à certaines fréquences (Gourieroux et Monfort, 1997)
Ex: $m=2$ les phases signaux de périodes comprises entre $5/2$ et 5 sont inversés.



— Signal de période 6

— Moyenne glissante sur 10 valeurs

- Lorsque l'on veut moyenner un nombre pairs p de valeurs, moyenner $p+1$ valeurs mais multiplier par $1/2$ la première et dernière.

Exemple avec Gmt:

```
> cat data.txt | filter1d -Fb10 > data.run10
```

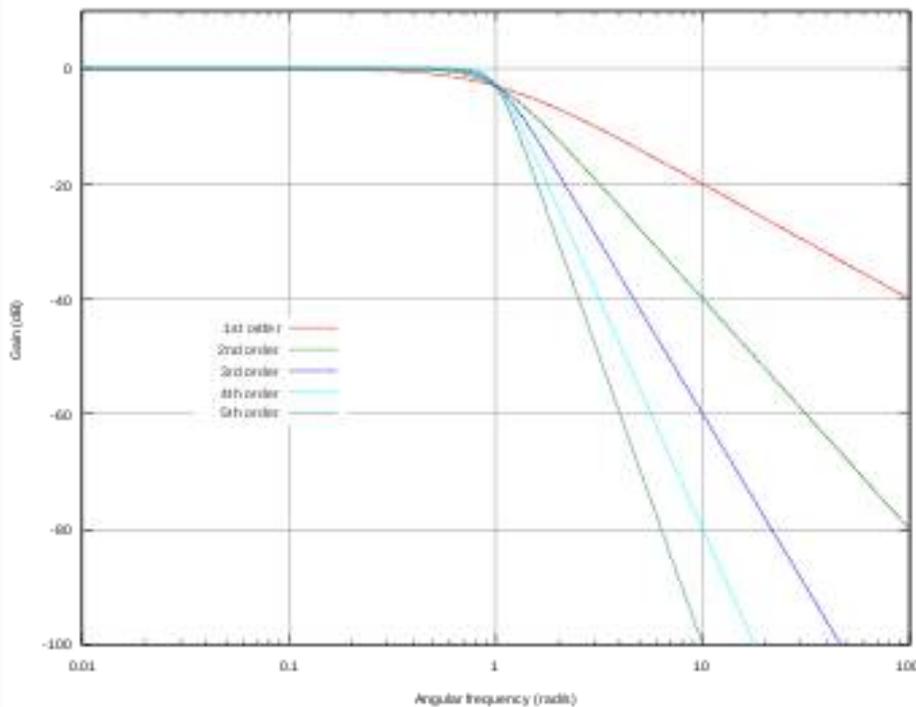
Filtrage (5/11)

Passe-bas: filtre de Butterworth d'ordre n (voir Berio, 2006)

Filtre passe-bas idéal:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f| > f_c \\ 1 & \text{si } |f| \leq f_c \end{cases}$$

Approximation par le filtre de Butterworth d'ordre n.
Quand n tend vers l'infini, le filtre tend vers le filtre idéal (Mallat, 1998)



Gain des filtres de Butterworth passe-bas d'ordre 1 à 5 (module de la fonction de transfert)

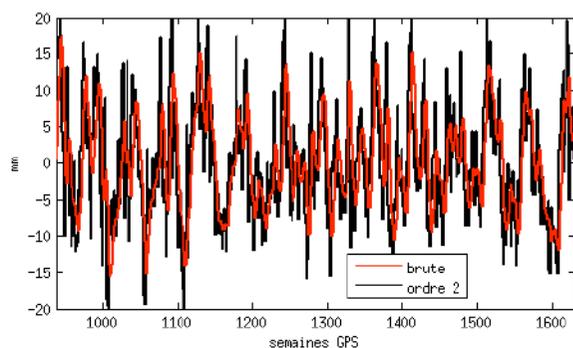
Source : wikipedia

Filtrage (6/11)

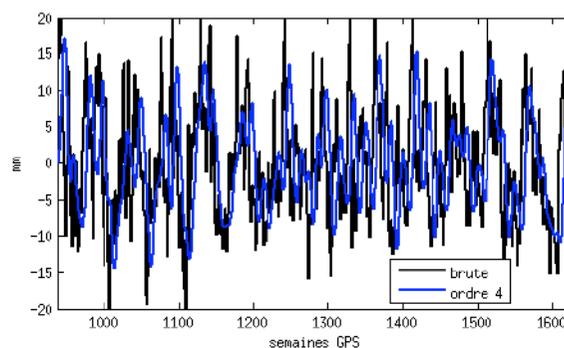
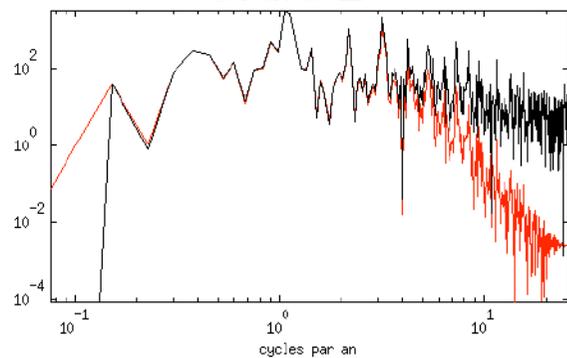
Passe-bas: filtre de Butterworth d'ordre n

```
% Exemple de code matlab  
[b,a] = butter(n,fc/fn,'low'); % Fn: fréquence de Nyquist  
xout = filter(b,a,x);
```

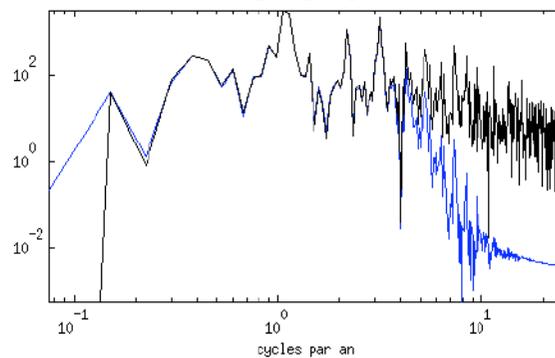
Application: translation GPS Z (mit)



Ordre 2



Ordre 4



Attention au déphasage!

Filtrage (7/11)

Que faire en cas de données manquantes et des données de précisions différentes?

Filtrage de Vondrák (Vondrák, 1976)

Minimisation de Q :

$$Q = F + \frac{S}{\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon > 0$$

$F = (n-3)^{-1} \sum_{i=1}^n p_i (x[i] - y[i])^2$

Poids des mesures
Signal original

Signal filtré : $\Phi(t_i)$

$$S = \frac{1}{T} \int_T [\Phi'''(t)] dt$$

Fonction spline cubique ajustée sur les points voisins

Berio, 2006

Comment régler la fréquence de coupure?

Filtrage (8/11)

Comment régler la fréquence de coupure? **Filtrage de Vondrák (Vondrák, 1976)**

Rapport de l'amplitude du signal lissé sur le signal original

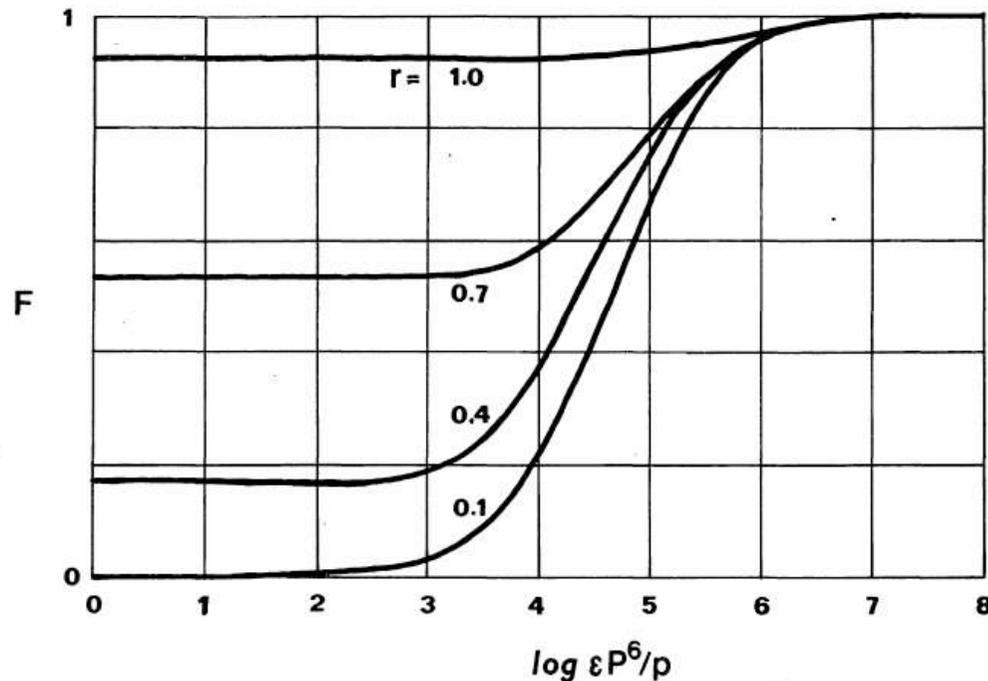


Fig. 2. Frequency characteristics as functions of $\varepsilon P^6/p, r$.

P: période du signal
p : poids moyen
r : rapport période sur intervalle des données

On choisit ε à l'aide de ces courbes.

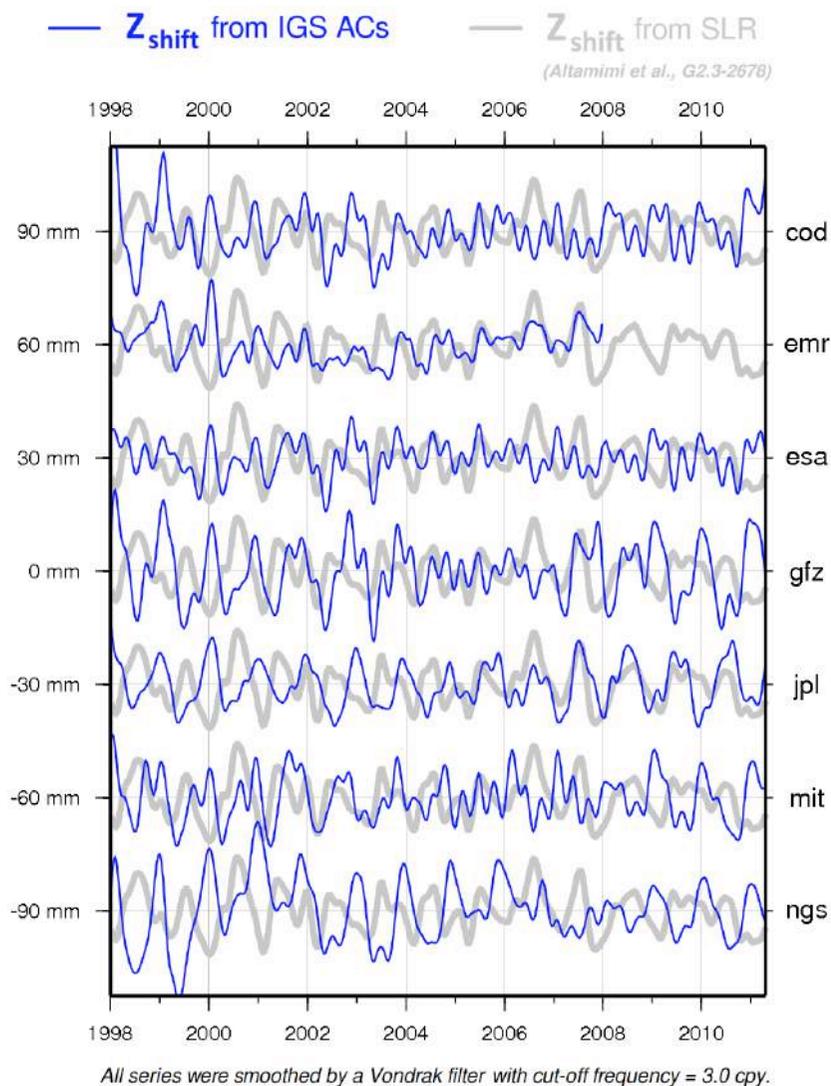
$$\log P_1 = 0.40 - \frac{1}{6} \log \varepsilon_1/p$$

$$\text{tel que } F(P_1, \varepsilon_1) = 0.01$$

Filtrage (9/11)

Ex: filtrage de Vondrák
Série temporelle du mouvement
du géocentre apparent par
GPS et SLR (composante Z)

Rebischung et al., 2012



Filtrage (10/11)

Filtrage sidéral (1/2)

Géométrie de la constellation par rapport à l'antenne de la station: les surfaces réfléchissantes à peu près à une géométrie identique au bout d'un peu moins d'un jour sidéral (~23h55m54s) à quelques secondes près en fonction du satellite (Agnew et Larson, 2007)

- Les erreurs se moyennent sur des calculs de 24h
- Pas sur les séries sub-diurnes!

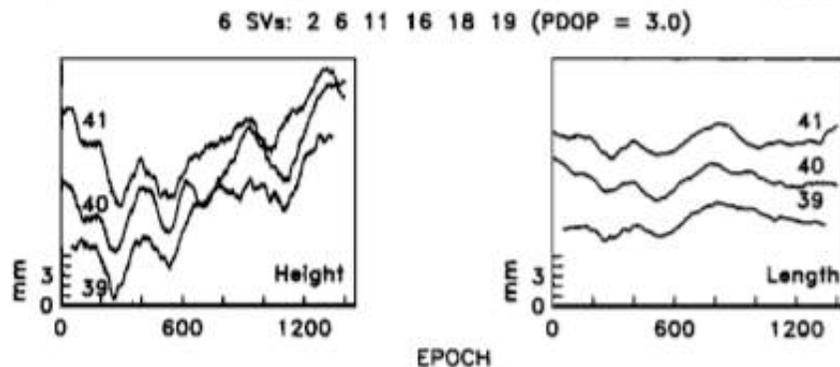


Fig. 9. Low-pass-filtered 1-s six-satellite epoch-by-epoch solutions for baseline between array endpoints as observed on February 8, 9, and 10, 1991. Epochs have been adjusted for a daily 4-min advance.

Fig. Genrich & Bock 1992

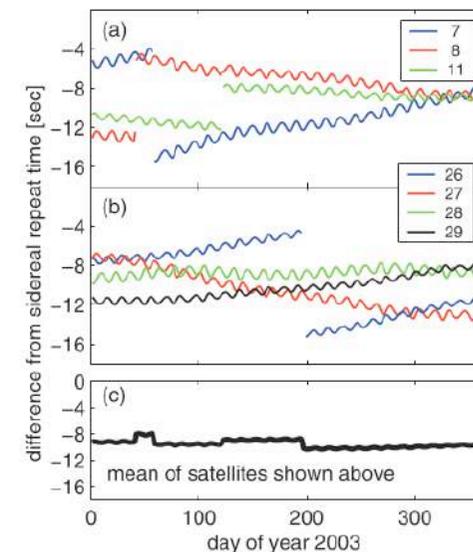


Figure 1. (a–b) Orbit repeat times for GPS (PRN) satellites for the year 2003. Only those satellites that can be viewed from Parkfield at 19:15 UTC, 22 December 2003 are shown. (c) Mean orbit repeat time for satellites shown in Figures 1a and 1b. Choi et al., 2004

Filtrage (11/11)

Filtrage sidéral (2/2)

- Retrait d'un signal moyen (Genrich et Bock, 1992)

$$mp(t_i) = 1/(2 \cdot d + 1) \sum_{k=-d}^{k=d} x(t_i + k \cdot 4min)$$

Avec $d=1$

- Filtre sidéral modifié. L'intervalle de temps est la moyenne de la période de répétitivité de chaque satellite (Choi et al., 2004)
- Correction des mesures de phases et pseudo-distances (calcul PPP) (Reuveni et al. 2012):

Même principe: calcul des résidus de phase à la date t_i en moyennant les résidus de jour consécutifs à la même date décalée de la période propre à chaque satellite.

$$X_{\text{filtré}}(t_i) = x(t_i) - mp(t_i)$$

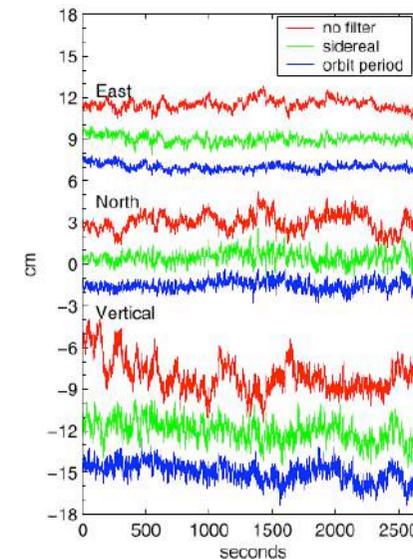


Figure 2. East, north, and vertical position estimates for Parkfield station HUNT. Filtered results are also shown for a sidereal and orbit repeat period. The time period shown is 18:30–19:15 UTC 22 December 2003.

Choi et al., 2004

Evaluation des séries temporelles

Etude des signaux variables

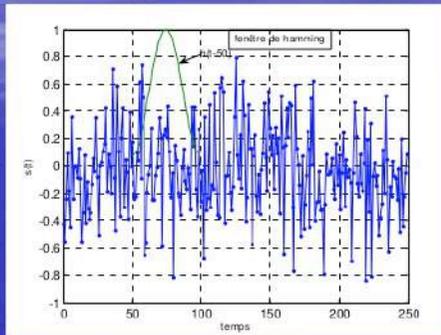
- Ondelettes
- SSA

Ondelettes (1/10)

Les signaux de période variable?

Spectrogramme : Transformation de Fourier à court terme

Analyse de Fourier sur une partie du signal délimitée par une fenêtre continue $h(t)$ que l'on glisse sur l'axe temporel

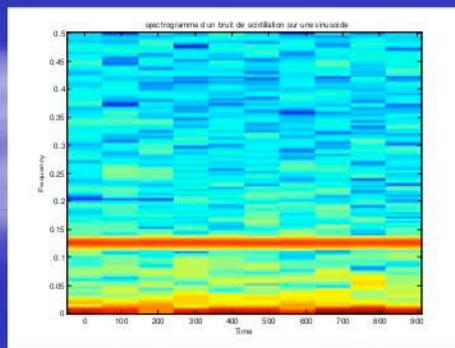


$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot h(t - \tau) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \langle s, h(t - \tau) \cdot e^{i2\pi ft} \rangle$$

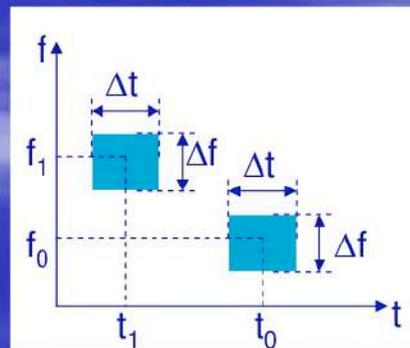
$|S(f, \tau)|^2$ Spectrogramme de $s(t)$: calcule la quantité d'énergie présente autour de la fréquence f et de l'instant τ

La fonction $h(t - \tau) \cdot e^{i2\pi ft}$ réalise un pavage du plan temps fréquence localisant temporellement un évènement fréquentiel

Principe d'indétermination de Heisenberg $\Delta(E) \Delta(t) \geq \frac{h}{2} \rightarrow$ localisation parfaite impossible



(voir programme « spectrogramme.m »)



Richard, cours GRGS (2006)

Ondelettes (2/10)

Les différents types de fonctions ondelette

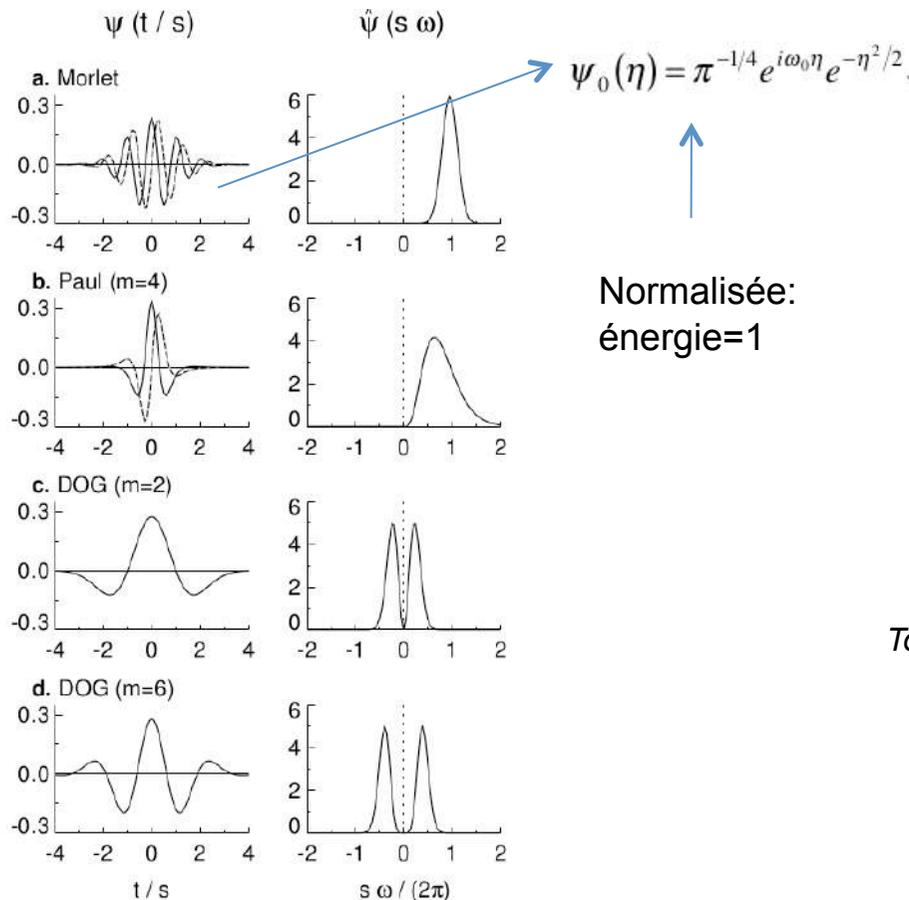


FIG. 2. Four different wavelet bases, from Table 1. The plots on the left give the real part (solid) and imaginary part (dashed) for the wavelets in the time domain. The plots on the right give the corresponding wavelets in the frequency domain. For plotting purposes, the scale was chosen to be $s = 10\delta t$. (a) Morlet, (b) Paul ($m = 4$), (c) Mexican hat (DOG $m = 2$), and (d) DOG ($m = 6$).

Ondelette: moyenne nulle, énergie finie, localisée dans l'espace et le temps

Transformée en ondelette d'un signal discret

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \cdot \psi^* \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right]$$

Torrence et Compo (1998)

avec une normalisation de l'ondelette

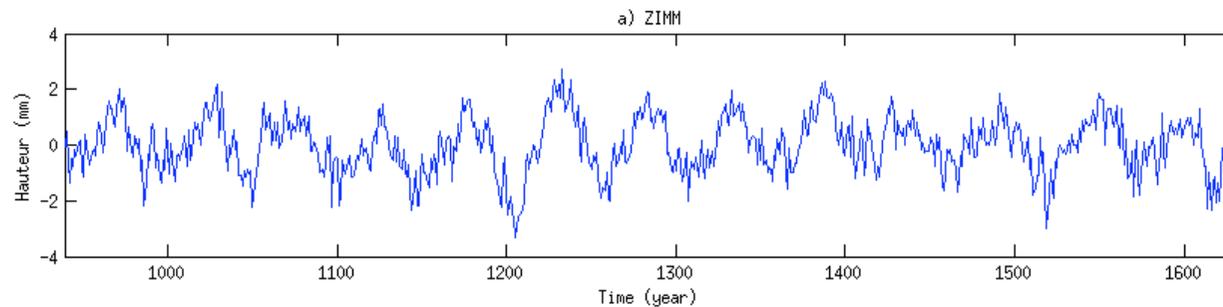
$$\psi \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right] = \left(\frac{\delta t}{s} \right)^{1/2} \psi_0 \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right]$$

C'est un nombre complexe!

NB: l'étoile signifie ici le conjugué

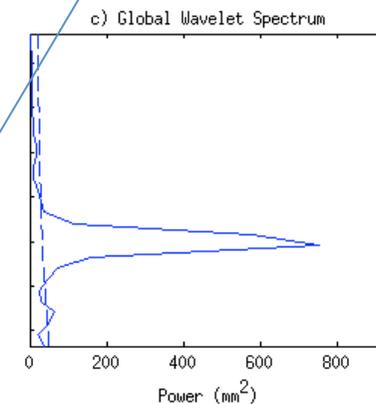
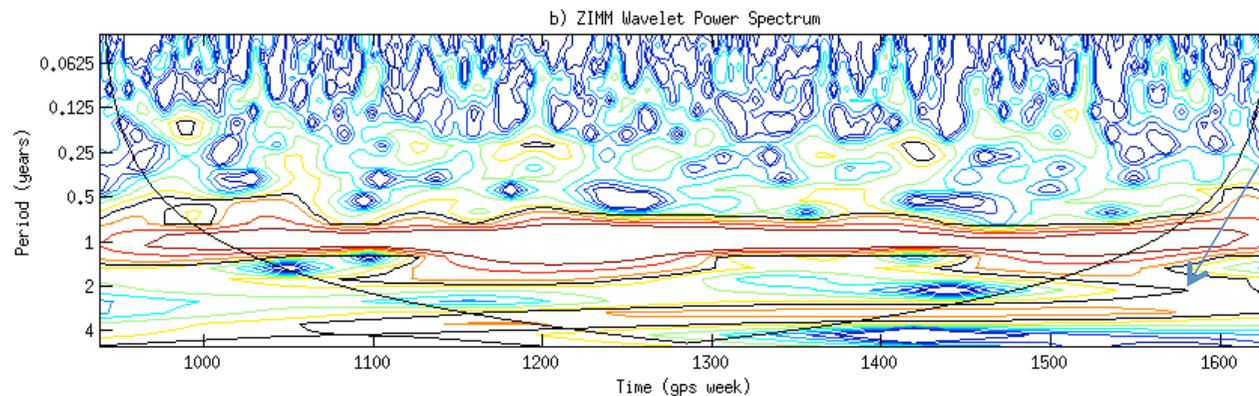
Ondelettes (3/10)

Hauteur GPS



Ondelettes de Morlet

Cône d'influence
Effet de bord



Spectre de puissance: $|W_n(s)|^2$

Pour un bruit blanc, le spectre de puissance est égal à la variance avec la normalisation ci-dessus (Torrence et Compo 1998)

Ondelettes (4/10)

Il existe une relation entre échelle (ondelette) et période (Fourier)
 Elle est fonction de l'ondelette (*Torrence et Compo, 1998*)

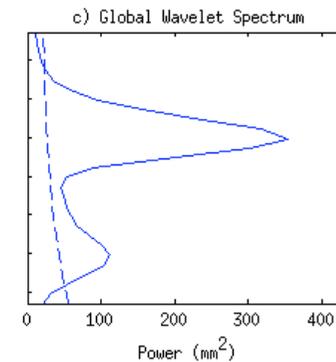
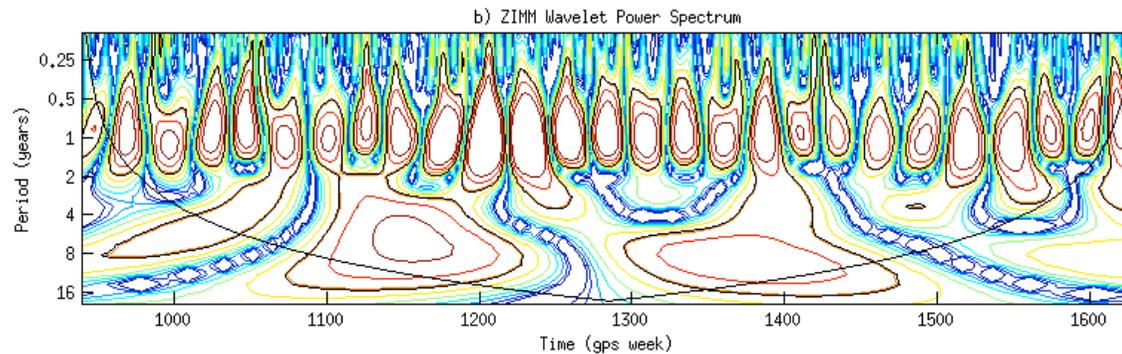
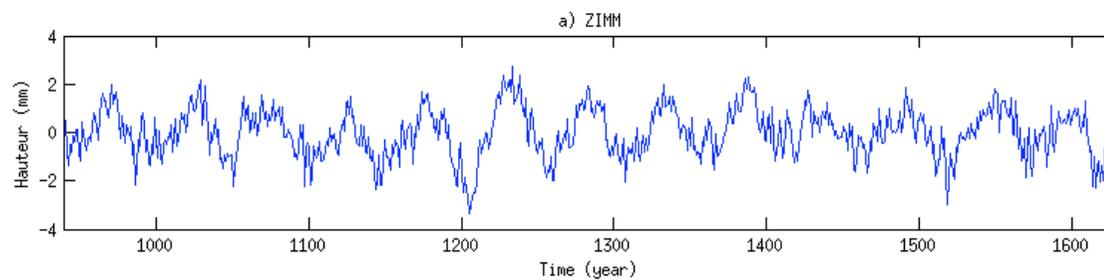
	$\psi_0(\eta)$	Fourier wavelength λ	
Morlet (ω_0 = frequency)	$\pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}$	$\frac{4\pi s}{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}$	≈ 1.03 pour $\omega_0=6$
DOG (m = derivative)	$\frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \frac{d^m}{d\eta^m} (e^{-\eta^2/2})$	$\frac{2\pi s}{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}$	

Les ondelettes permettent des analyses quantitatives:

- Test de significativité des coefficients des ondelettes par rapport à un spectre de fond. Voir *Torrence et Compo (1998)*
- Filtrage en reconstruisant le signal à l'aide d'un sous-ensemble des coefficients d'ondelettes (ex: grandes échelles pour un passe-bas, ou niveau d'énergie (filtrage dans l'espace et le temps!))

Ondelettes (5/10)

Changer d'ondelette permet d'identifier d'autres structures dans le signal



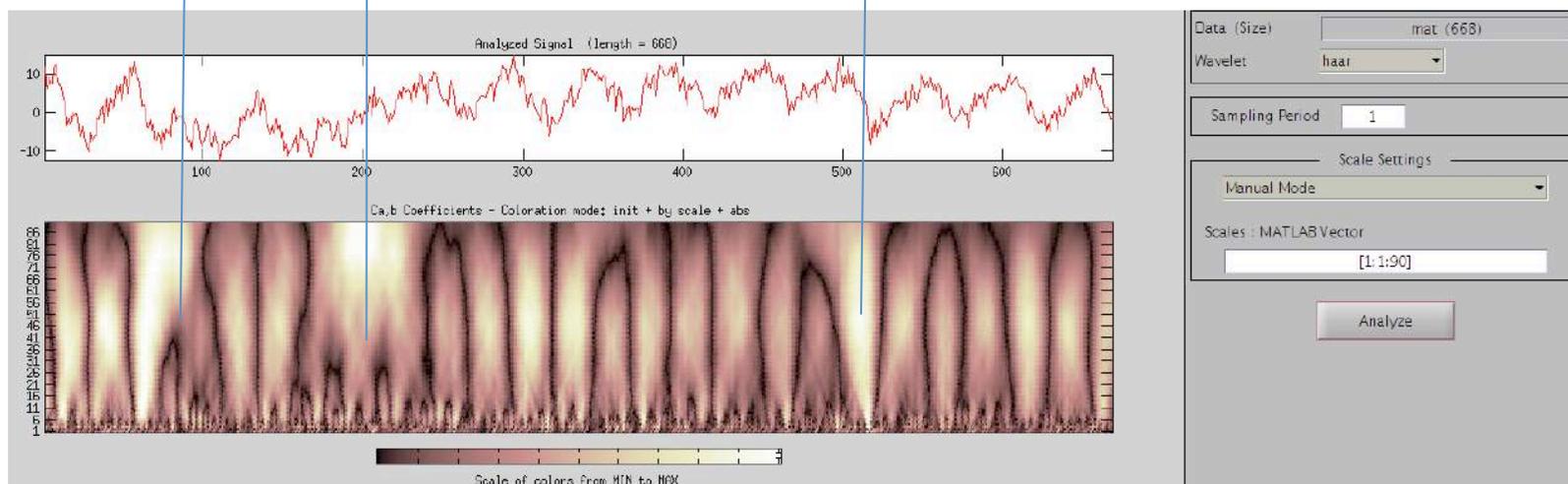
Ondelettes réelles : DOG (m=2)

Ondelettes (6/10)

Ondelettes réelles pour identifier les discontinuités

ex: ondelette de Harr $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Changement matériel (Yarragadee, hauteur)



Toolbox matlab « wavelet »

Remerciement: J-Y Richard

Ondelettes (7/10)

Les signaux de période variable?

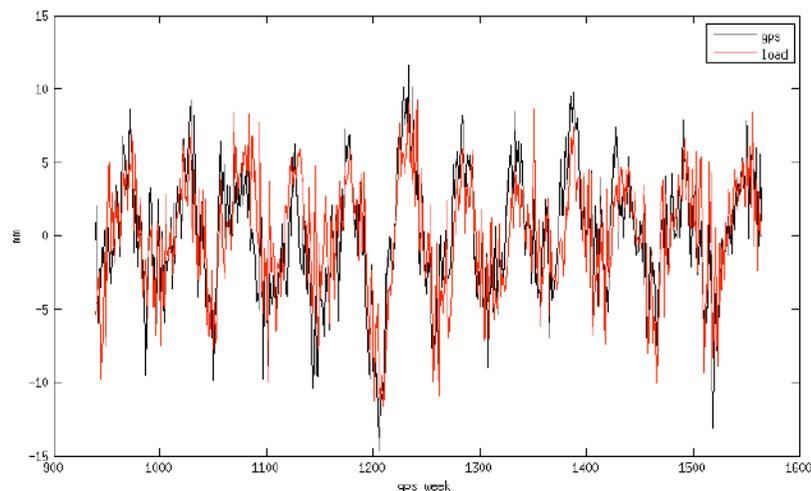
$$W_n^{XY}(s) = W_n^X(s)W_n^{Y*}(s)$$

↗ Spectre de puissance croisé $|W_n^{XY}(s)|$
↘ Phase $\arg(W_n^{XY}(s))$

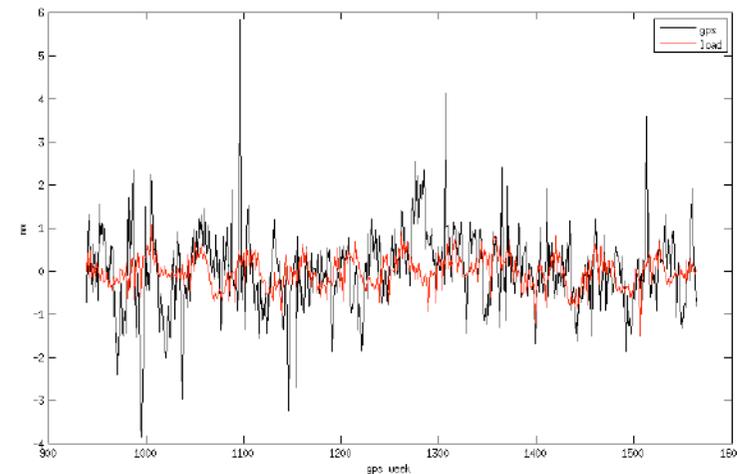
Test de significativité possible lorsque l'on connaît le gabarit de bruit de chaque série (Torrence et Compo, 1998)

Application: comparaison d'une série GPS à un modèle de déplacement lié aux effets de surcharge (Remerciement: T. van Dam, Luxembourg)

Hauteur ZIMM

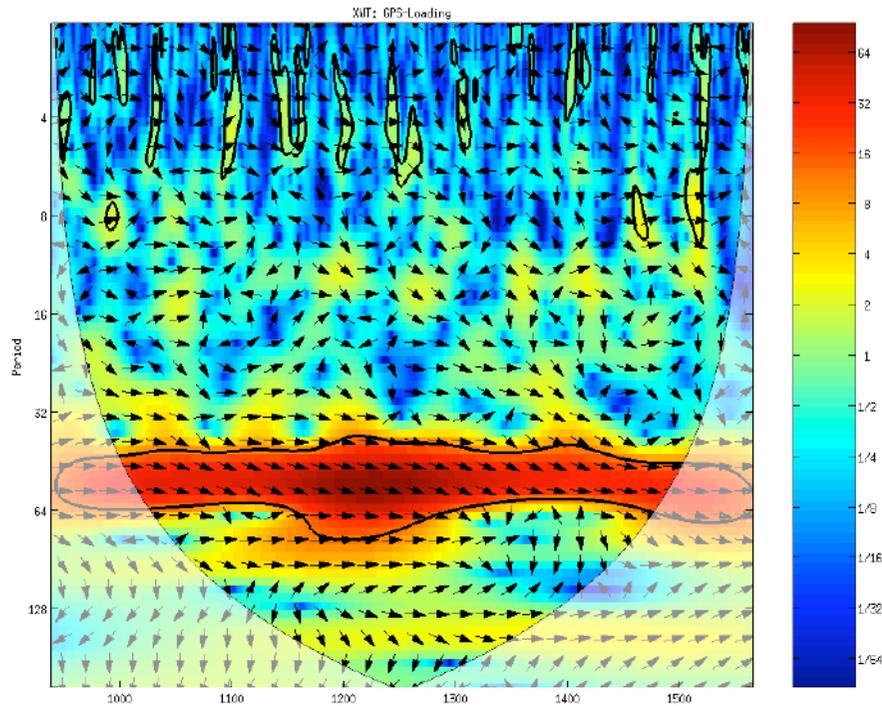


Est ZIMM



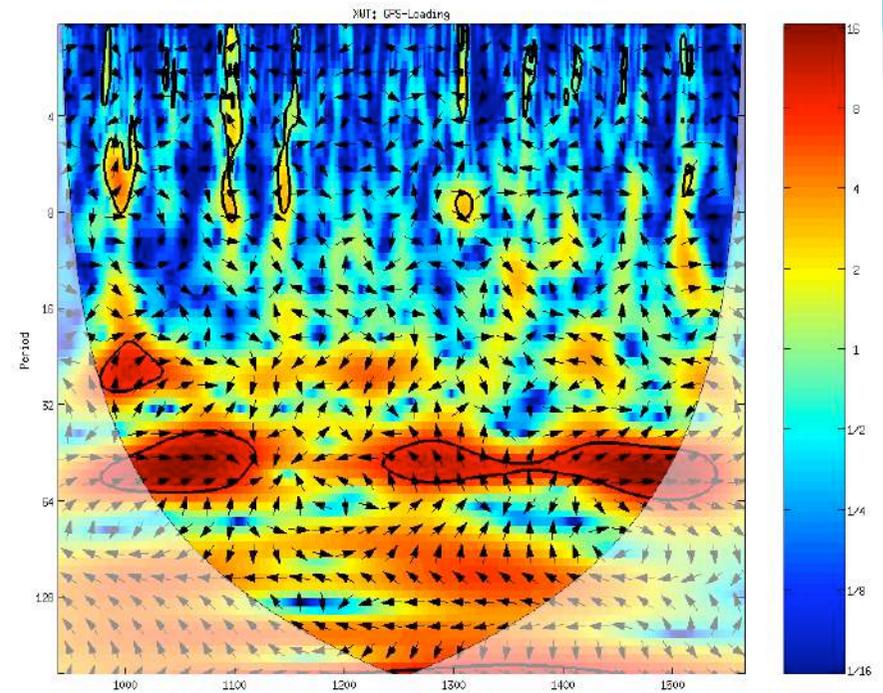
Ondelettes (8/10)

Hauteur ZIMM



semaines GPS

Est ZIMM



semaines GPS

Spectre croisé (Morlet)

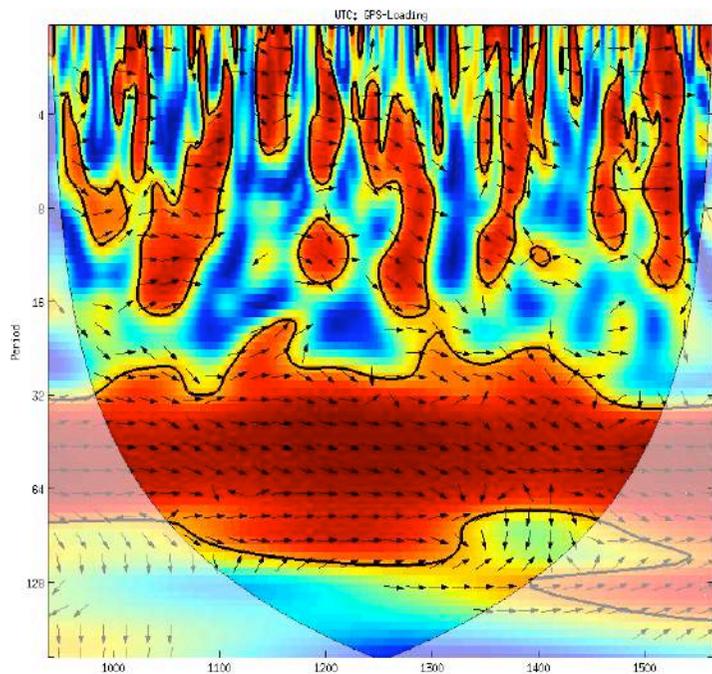
Flèches: phase (droite: en phase)

Couleur: puissance

Routines de Aslak Grinsted (2002-2004)

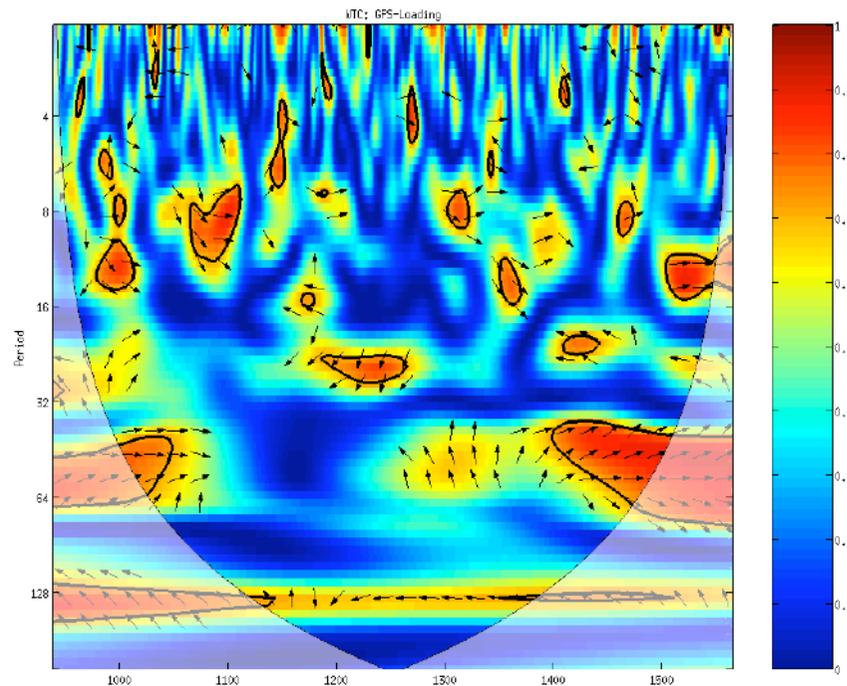
Ondelettes (9/10)

Hauteur ZIMM



semaines GPS

Est ZIMM



semaines GPS

Spectre de cohérence d'ondelettes (Morlet): voir *Grinsted et al. (2004)*
pour la définition

Flèches: phase (droite: en phase)

Couleur: puissance

Routines de Aslak Grinsted (2002-2004)

Ondelettes (10/10)

Bibliothèques

- Codes Torrence et Compo (fortran, idl, matlab)
<http://paos.colorado.edu/research/wavelets/software.html>
- Spectre de cohérence Grinsted et al. (matlab)
<http://www.pol.ac.uk/home/research/waveletcoherence/>
- Wavelab (matlab) (non testé ici)
<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/>
- Wavelets (paquet R) (non testé ici)

NB: il semble que la majorité des paquets (ceux testés ici, les 2 premiers) suppose des séries continues et régulièrement échantillonnées. Pas de pondération possible.

Remerciement: I. Panet

SSA (1/3)

SSA: « singular spectrum analysis »

- Permet d'extraire la variabilité temporelle des oscillations
- Analyse en composante principale dans le domaine temporel
- méthode adéquate quand le signal contient des trous de données (Schoellhamer, 2001)

On choisit une taille de fenêtre M:

1)
$$\bar{c}_j = \frac{1}{N_l} \sum_{l \leq N-j} \bar{x}_l \bar{x}_{l+j}$$

 $0 \leq j \leq M - 1$, for N_l pairs with no missing data.

Matrice d'autocorrélation empirique pour les retards 0 -> M-1 (stationnarité?)

- 2) Diagonalisation de cette matrice. M Valeurs propres (ordonnées par valeurs) et M séries temporelles de longueur M (vecteurs propres associés appelé EOF). La k^{ième} composante principale (k entre 0 et M-1) du signal est

$$\bar{a}_i^k = \frac{M}{N_l} \sum_{l \leq M} \bar{x}_{i+l} \bar{E}_l^k$$

 $0 \leq i \leq N - M$, for $N_l x_{i+1}$ with no missing data.

SSA (2/3)

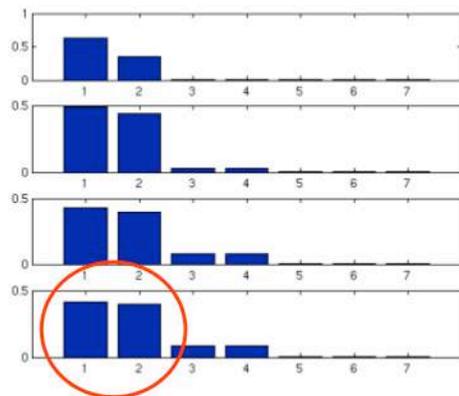
3) On peut reconstruire le signal sur chaque composante (Vautard et al. 1992)

$$x_i^k = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M a_{i-j}^k E_j^k \quad M \leq i \leq N - M + 1$$

(formule extraite de Schoellhamer, 2001)

Application: mouvement du pôle (extrait cours Lambert, GRGS, 2006)

Exemple: cours Lambert GRGS, 2006. Application au mouvement du pôle

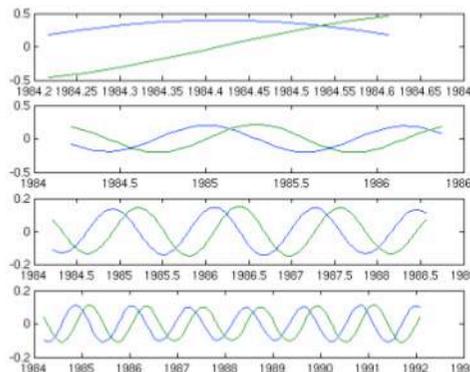


M=10

M=50

M=100

M=180

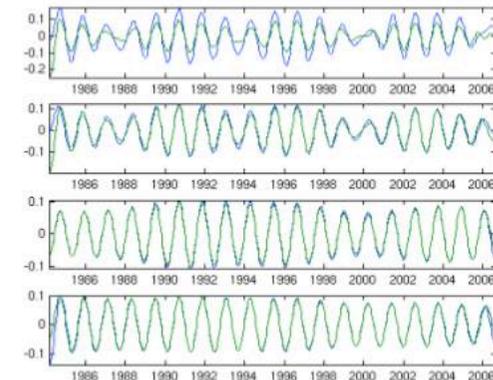


M=10

M=50

M=100

M=180



2 valeurs propres de même hauteur = 2
vecteurs propres de même période et en
quadrature = signal du type $a \sin + b \cos$

vecteurs propres 1 et 2

composantes reconstruites 1 et 2

SSA (3/3)

Quel choix pour M ?

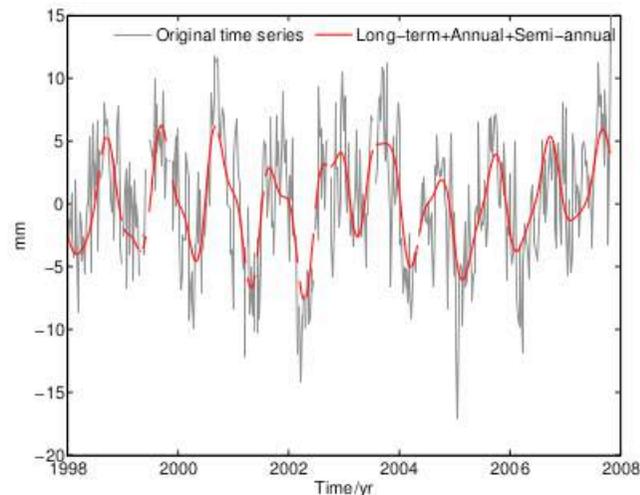
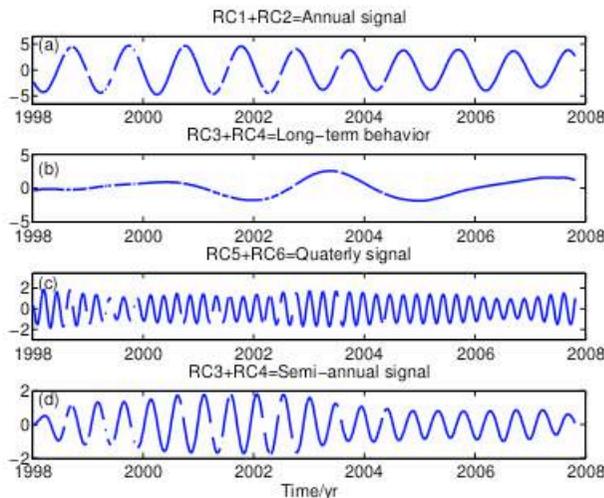
D'après Chen et al., AOGS (2012), $M \approx 2-3$ ans permet de bien résoudre l'annuel et semi-annuel dans le cas de séries GPS hebdomadaires.

Height direction of WIS1 station (window size $M = 157$)

RCs

Chen et al., AOGS (2012)

Comparison



Voir le cours de S. Lambert (2006) pour plus de détails.

Remerciements: Qiang Chen (Université de Stuttgart)

Evaluation des séries temporelles

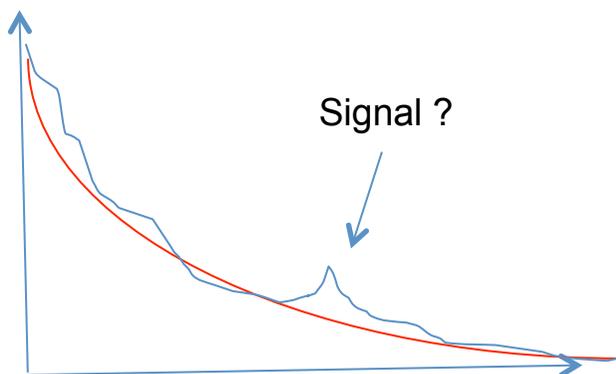
Etude du bruit de fond

Analyse du bruit (1/12)

Introduction: signal et bruit

- Le signal des uns est le bruit des autres (citation Martine Feissel-Vernier)
Il faut donc définir le signal

Spectre de puissance



En géophysique, les bruits ont souvent plus de puissance à basse fréquence (bruit coloré) (Agnew, 1992)

Le plus souvent, le bruit est défini avec un **gabarit** (spectre de fond)

Analyse du bruit (2/12)

Introduction: pourquoi le périodogramme permet-il de mesurer le bruit?

Les grandeurs statistiques sont caractérisées par leur distribution.

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{ x(t_1) \leq x_1, \dots, x(t_n) \leq x_n \}$$

On définit l'auto-corrélation par

$$R(t_1, t_2) = \int \int x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) = E(x_1 x_2)$$

Stationnarité

$$E(x_i) = \text{cst}$$

$$R(t_1, t_1 + \Delta t) = R(\Delta t)$$

Exemple: bruit blanc $R(\Delta t) = \sigma^2 \delta(\Delta t)$

Définition de la densité spectrale de puissance (DSP) (Kay et Marple, 1981)

$$S(f) = \int R(t) e^{-j 2\pi f t} dt$$

Analyse du bruit (3/12)

Introduction: pourquoi le périodogramme permet-il de mesurer le bruit?

Si x_t est ergodique pour les premiers et second moments

$$R_T(\lambda) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\lambda) x(t) dt \quad \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \quad R(\lambda) \quad \begin{array}{l} \text{(Kay et Marple, 1981)} \\ \text{(Papoulis, 1965)} \end{array}$$

TF

$$S_T(f) = \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \quad \downarrow \quad S(f)$$

Estimateur empirique: périodogramme (Kay et Marple, 1981)

$$\frac{1}{N\tau} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi f \tau k} \right|^2$$

Analyse du bruit (4/12)

Relation entre autocorrélation et DSP pour les bruits en loi puissance:

1) Bruit en loi puissance: $S(f)$ proportionnelle à f^k avec k l'indice spectral

2) Sa covariance s'écrit

D'après Williams 2003:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{T}\mathbf{T}^T \quad \text{avec}$$

Covariance du vecteur

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \psi_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1 & \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n & \psi_{n-1} & \psi_{n-2} & \dots & \psi_0 \end{bmatrix}$$

Indice spectral

and

$$\psi_n = \frac{-\frac{\kappa}{2}(1-\frac{\kappa}{2}) \dots (n-1-\frac{\kappa}{2})}{n!} = \frac{\Gamma(n-\frac{\kappa}{2})}{n! \Gamma(-\frac{\kappa}{2})}$$

As $n \rightarrow \infty$, $\psi_n \sim \frac{n^{-\frac{\kappa}{2}-1}}{\Gamma(-\frac{\kappa}{2})}$

→ The transformation matrix \mathbf{T} is scaled by $\Delta T^{-\kappa/4}$, where ΔT is the sampling interval, before forming the covariance matrix by $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$.

- Voir aussi Bos et al., (2008) une expression directe de J_k quand $\alpha < 1$
- D'autres formes de covariance existe dans la littérature pour les mêmes bruits (Zhang et al., 1997)

Analyse du bruit (5/12)

Les différents modèles de bruit utilisés en analyse de séries GPS

Lois puissance:

- $k = 0$: bruit blanc
- $k = -1$: bruit de scintillation
- $k = -2$: marche aléatoire
- $-2 < k < 0$

Gauss-Markov de 1^{er} ordre (AR(1))

- Autocorrélation à décroissance exponentielle

Processus saisonniers

- Les amplitudes (cos et sin) suivent une loi ci-dessus

Nombre de paramètres

1
1
1
2

2

Au moins 2 ou 3 selon la loi si la période est connue

NB: pour les données journalières, présence d'une corrélation additionnelle que l'on peut modéliser par un Gauss-Markov avec un temps de relaxation de 4 jours environ (Amiri-Simlooei, 2009)

Analyse du bruit (6/12)

Comparaison des différents modèles:

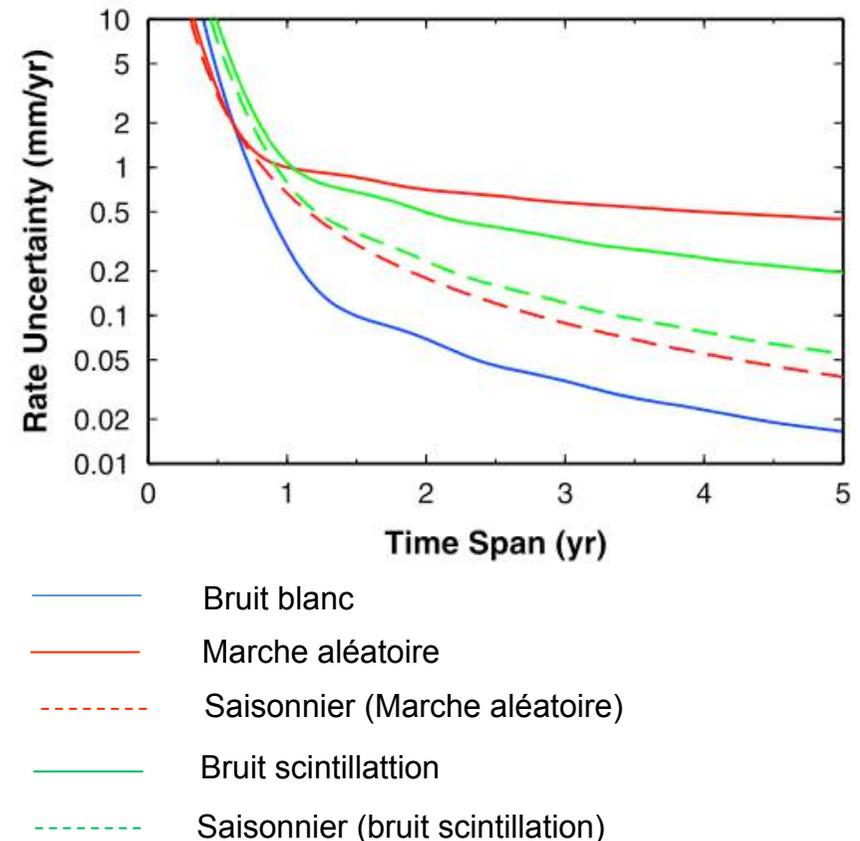
incertitude sur la vitesse de déplacement en fct du modèle de bruit (Davis et al., 2012)

Incetitude sur la vitesse verticale en fonction de la durée des données (T) (Santamaria et al., 2011)

$$\sigma_r^{older} = 3.38 \cdot T^{-1.10}$$
$$\sigma_r^{newer} = 1.79 \cdot T^{-0.96}$$

Comment estimer ce bruit?

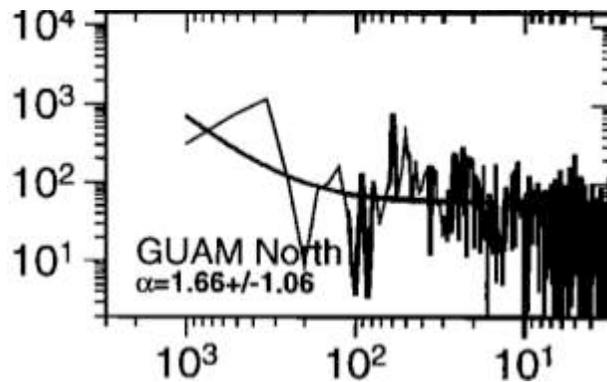
- Périodogrammes
- Variance d'Allan
- Estimation par maximum de vraisemblance
- Estimation par moindres carrés



Analyse du bruit (7/12)

Estimation: périodogramme (Zhang et al., 1997; Mao et al., 1999)

Représentation loglog du périodogramme!



$$P(f) = P_0(f^{-\alpha} + f_0^{-\alpha})$$

↑ ↑
Bruit en loi puissance Bruit blanc

Ex: périodogramme et modèle estimé.
Ajustement par moindres carrés (Mao et al., 1999)

Analyse du bruit (8/12)

Estimation par variance d'Allan (d'après le cours Le Bail (2006))

$$\bar{X}_{l,M} = \frac{1}{M} \sum_{i=l}^{l+M-1} X_i \quad \text{Série moyenne mobile} \quad M = \frac{\tau}{\tau_0}$$

Variance d'Allan: $\sigma_X^2(\tau) = \frac{1}{2} E[(\bar{X}_{k+M,M} - \bar{X}_{k,M})^2]$

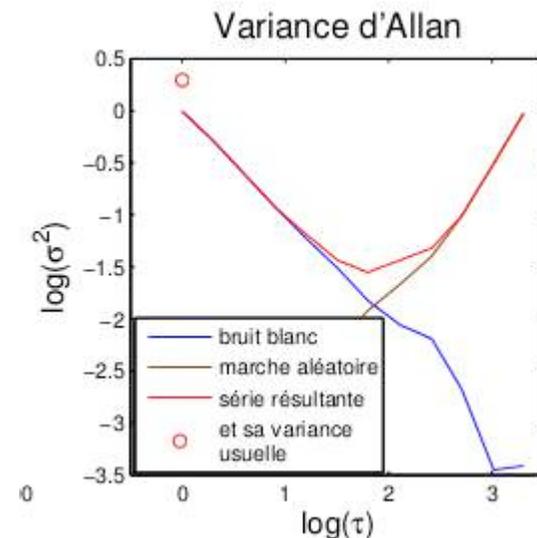
Estimateur empirique à l'aide de moyennes

Equivalence avec le formalisme précédent:

$$\log[\hat{\sigma}_X^2(\tau)] = \mu \log(\tau) + \text{constante}$$

- si $\mu = -1$, $\alpha = 0$: on a un bruit blanc
- si $\mu = 0$, $\alpha = -1$: on a un bruit de scintillation ;
- si $\mu = 1$, $\alpha = -2$: on a une marche aléatoire.

NB: *Malkin (2008)* propose d'utiliser les incertitudes sur les données dans le calcul de la variance d'Allan



Le Bail (2006)

Analyse du bruit (9/12)

Estimation par maximum de vraisemblance

Vraisemblance de l'échantillon : v résidus après retrait de termes déterministes (pente, saisonniers etc...)

$$\text{lik}(\hat{v}, C) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det C)^{1/2}} \exp\left(-0.5 \hat{v}^T C^{-1} \hat{v}\right)$$

Avec:

$$C = \sigma_w^2 I + \sigma_s^2 J_s,$$

2 paramètres

Bruit blanc ou bruit décorrélé si on utilise les erreurs formelles au lieu de l'identité

Bruit de scintillation par exemple

On maximise généralement la log-vraisemblance.

Implémenté dans le logiciel CATS (*Williams, 2008*)

Analyse du bruit (10/12)

NB: si le processus de bruit prend la forme d'un modèle espace/état, un filtre de Kalman peut aider à calculer la log-vraisemblance

Filtre de Kalman

$$\begin{cases} Z_{t+1} = A_t Z_t + \varepsilon_t \\ Y_t = C_t Z_t + \eta_t \end{cases}$$

Log-vraisemblance

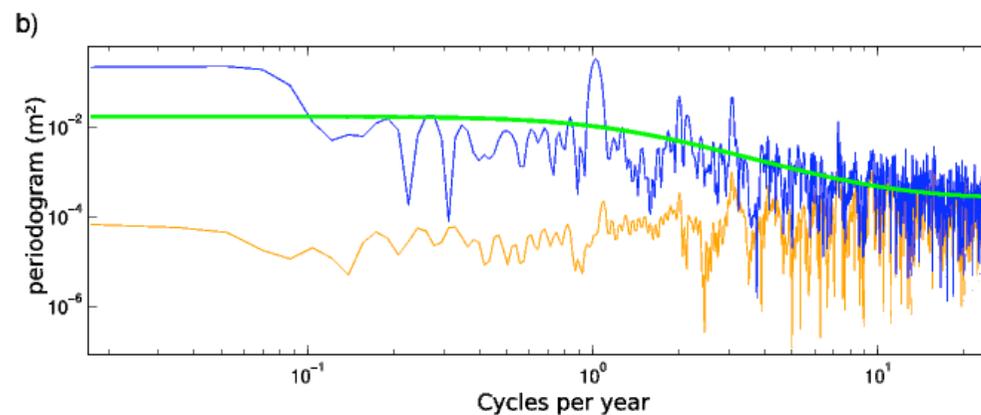
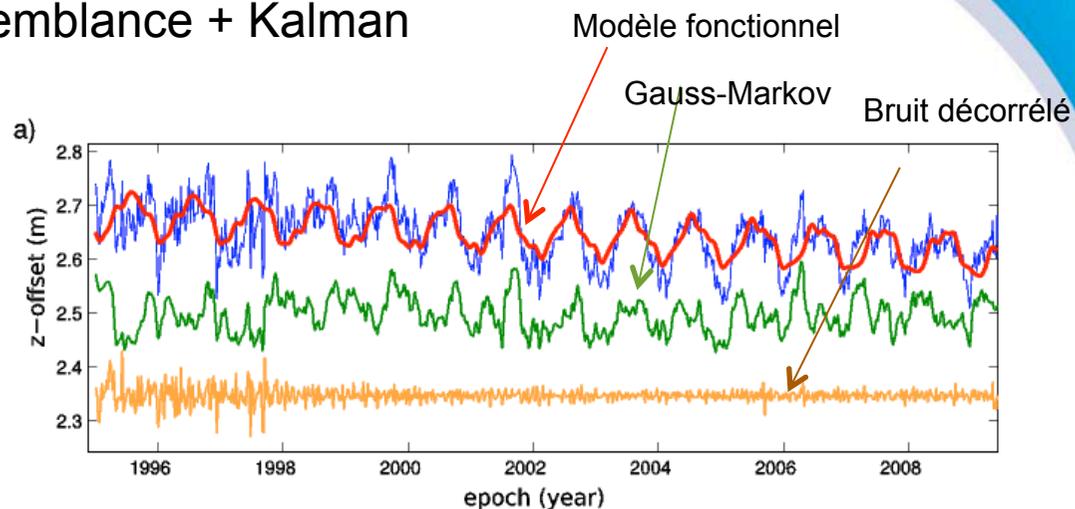
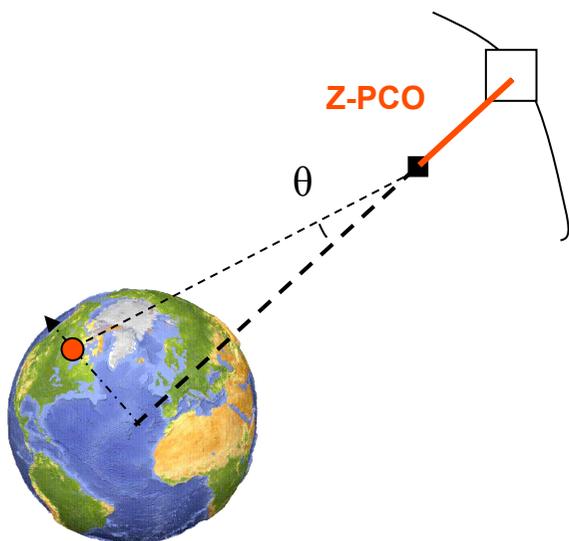
$$\begin{aligned} \log(L_H)(H_t; \underline{\theta}) = & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log \left(\det \{ \text{var}(\hat{H}_{t+1|t})(\underline{\theta}) \} \right) \right] \\ & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [\text{dim}(H_t) \cdot \log(2\pi)] \\ & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(H_t - \hat{H}_{t+1|t}(\underline{\theta}) \right)^T \cdot \\ & \text{var}(\hat{H}_{t+1|t}(\underline{\theta}))^{-1} \left(H_t - \hat{H}_{t+1|t}(\underline{\theta}) \right) \end{aligned}$$

Gourieroux et Monford (1997)

Analyse du bruit (11/12)

Estimation par maximum de vraisemblance + Kalman

Ex: détermination de la tendance de séries de z-PCO



Collilieux et Schmid (2012)

Analyse du bruit (12/12)

Estimation par moindres carrés

Estimation par moindres carrés des paramètres déterministes et algorithme itératif d'estimation des composantes de la variance. Avantage : estimateur non biaisé et de variance minimale (*Amiri-Simkooei et al., 2007*)

Commentaire final

- De tels modèles sont souvent utilisés pour ré-évaluer les incertitudes a posteriori
- Les covariance spatiales du bruit (erreur formelles) sont négligées
- Attention au modèle de bruit utilisé mais aussi attention au modèle fonctionnel (ex: harmoniques de la période draconitique)

Evaluation des séries temporelles

Analyse spatiale

Estimation d'harmonique sphérique (1/2)

Estimation d'harmoniques sphériques

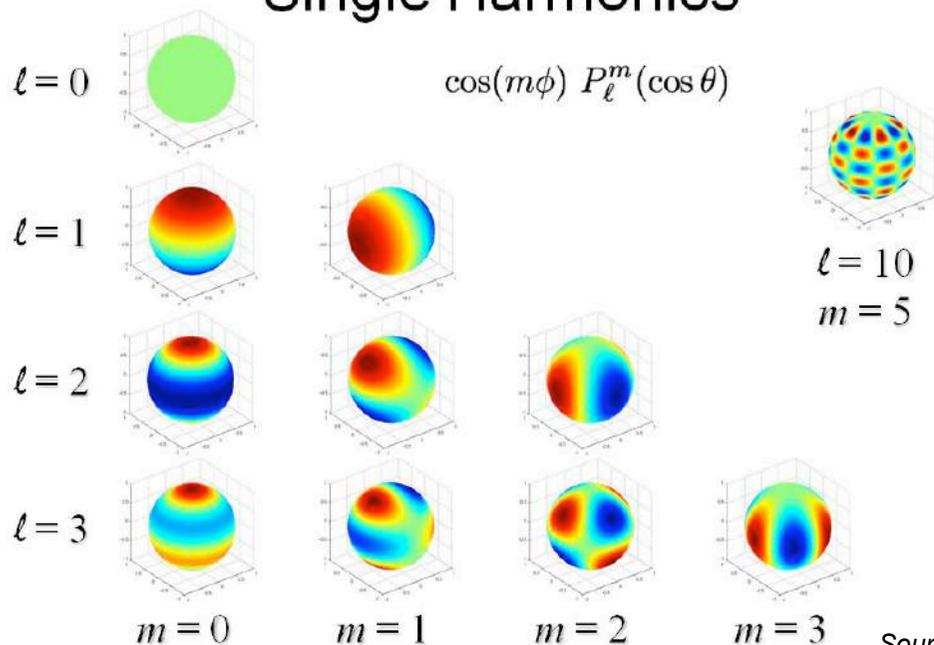
$$\phi(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n (\phi_{n,m}^c R_{n,m}(\lambda, \theta) + \phi_{n,m}^s S_{n,m}(\lambda, \theta))$$

Par exemple, déplacement vertical

$$R_{n,m}(\lambda, \theta) = P_{n,m}(\cos \theta) \cos(m\lambda)$$

$$S_{n,m}(\lambda, \theta) = P_{n,m}(\cos \theta) \sin(m\lambda)$$

Single Harmonics



Rappel:

$$P_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

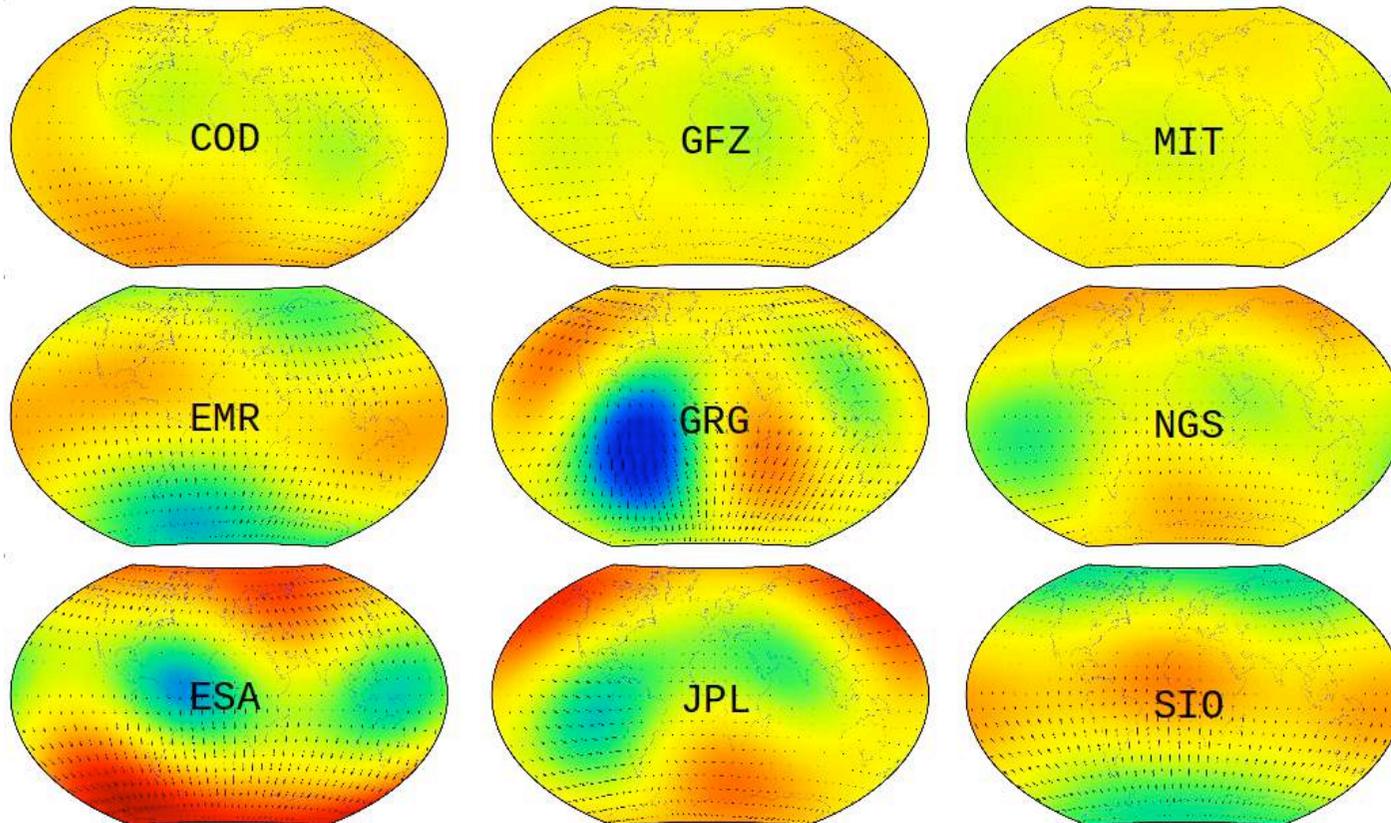
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Source image: <http://principles.ou.edu/>

Estimation d'harmonique sphérique (2/2)

Estimation d'harmoniques sphériques par moindres carrés. Ici degré de troncature = 2

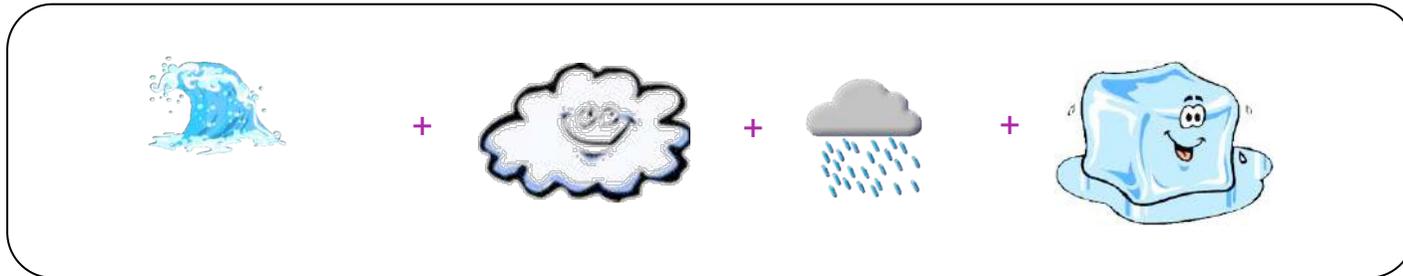
Mean SH fits of « AC-igs » residuals over weeks 1548-1599



Rebischung et al., 2010

Déformations de surcharge (1/4)

Quel est le champ de déformation attendu?



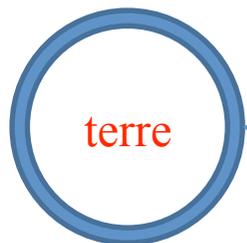
Méthode d'inversions de la masse provoquant les déplacements.

Il serait pertinent de regarder les résidus d'estimation!

Un point sur les méthodes existantes.

Déformations de surcharge (2/4)

Quel est le champ de déformation attendu?



1) Masse en surface de densité surfacique (kg/m²) σ

$$\sigma(\Omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{l,m}^c R_{n,m}(\Omega) + \sigma_{l,m}^s S_{n,m}(\Omega)$$

Ex: pression de fond de mer estimé

2) Modèle de Terre (caractérisé par ses nombre de Love de charge l'_n , h'_n et k'_n).
Pour $n=1$, on choisit le repère (CM ou CF)

Ex: déplacement résiduel GPS

3) Déformation engendrée

Verticale

$$u_l(\Omega) = \frac{4\pi R^3}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n}{2n+1} \sum_{m=0}^n \sigma_{l,m}^c R_{n,m}(\Omega) + \sigma_{l,m}^s S_{n,m}(\Omega)$$

Horizontale

$$\vec{v}_l(\Omega) = \frac{4\pi R^3}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l'_n}{2n+1} \sum_{m=0}^n \sigma_{l,m}^c \vec{\nabla} R_{n,m}(\Omega) + \sigma_{l,m}^s \vec{\nabla} S_{n,m}(\Omega)$$

Différence de potentiel générée

$$V_p(\Omega) = \frac{4\pi R^3}{M} g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+k'_n)}{2n+1} \sum_{m=0}^n \sigma_{l,m}^c R_{n,m}(\Omega) + \sigma_{l,m}^s S_{n,m}(\Omega)$$

Ex: Différence potentiel moyen GRACE

R: rayon moyen de la Terre de masse M

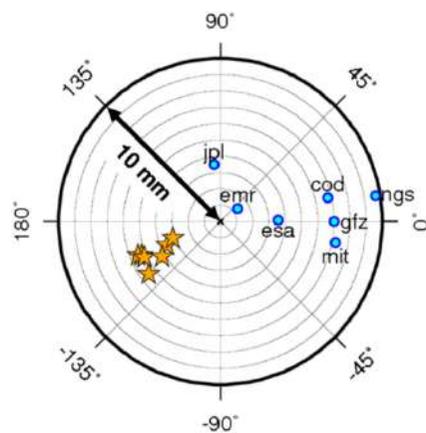
Déformations de surcharge (3/4)

Estimation non contrainte (degré de troncature < 6 généralement)

- Blewitt et al. (2001)
- Wu et al. (2003) mettent en garde contre l'aliasing et les problèmes d'origine du champ de déformation (centre des figures (CF) ou CM contre le « centre du réseau » (CN))

NB: le degré 1 (3 coefficients) est proportionnel au déplacement CF / CM (Blewitt 2003). Les degrés inférieurs à 2 sont pas trop mal estimés (Gross et al., 2004; Lavallée et al. 2006)

Translations

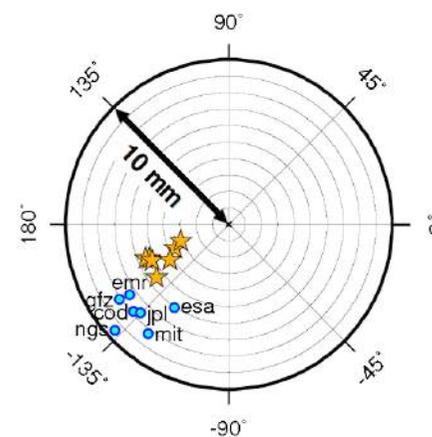


Rebischung et al. (2012)

Annual signal in Z:

- ★ Selection of recent geodetic estimates from Ries, 2011
- IGS ACs: network shift approach

Degré-1 converti



Annual signal in Z:

- ★ Selection of recent geodetic estimates from Ries, 2011
- IGS ACs: CF approach

Déformations de surcharge (4/4)

Ajout de données externes

GRACE + pression de fond de mer sur les océans (Wu et al., 2006)

Contrainte sur les océans

Kusche et Schrama (2005)

On minimise la variabilité sur les océans.
Fonction de coût à minimiser:

$$\mathcal{J}_\alpha = \|y - \mathbf{Ax}\|_{C^{-1}}^2 + \alpha \int_O \Delta \sigma^2 d\omega$$

Nouvelles fonctions de base

Clarke et al. (2007)

$$B_{nm}^\Phi(\Omega) = B_{nm}^{\text{ref}}(\Omega) + S_{nm}^\Phi(\Omega)$$

au point de coordonnées Ω

$$B_{nm}^\Phi(\Omega) = \{1 - C(\Omega)\} \cdot Y_{nm}^\Phi(\Omega) \approx \sum_{n'=0}^{N'} \sum_{m'=0}^{n'} \sum_{\Phi'}^{[C,S]} a_{nm,n'm'}^{r\Phi,\Phi'} Y_{n'm'}^{\Phi'}(\Omega).$$

et

$$S_{nm}^\Phi(\Omega) = C(\Omega) \cdot \{[V(\Omega) + \Delta V]/g - H(\Omega)\}$$

Masque océanique (1 sur les océans)

Harmoniques sphériques

↑
potentiel

↑
Correction de potentiel

↑
hauteur

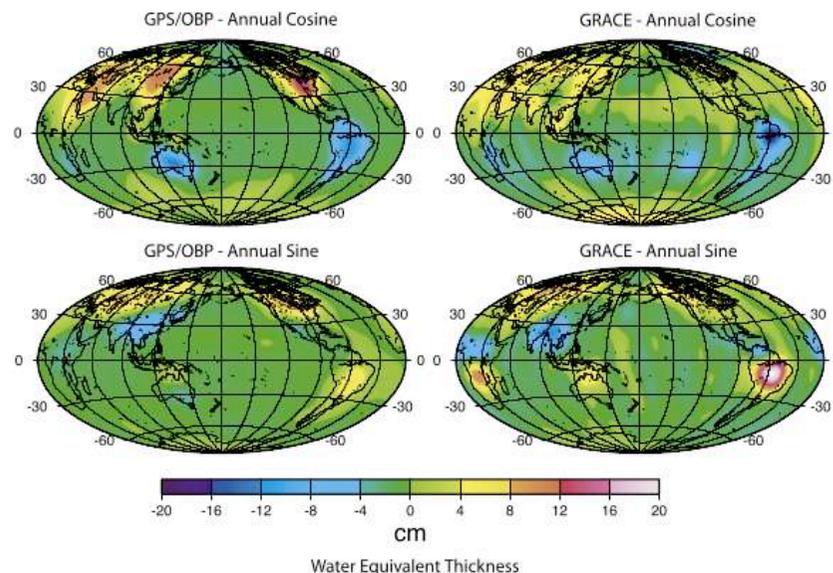


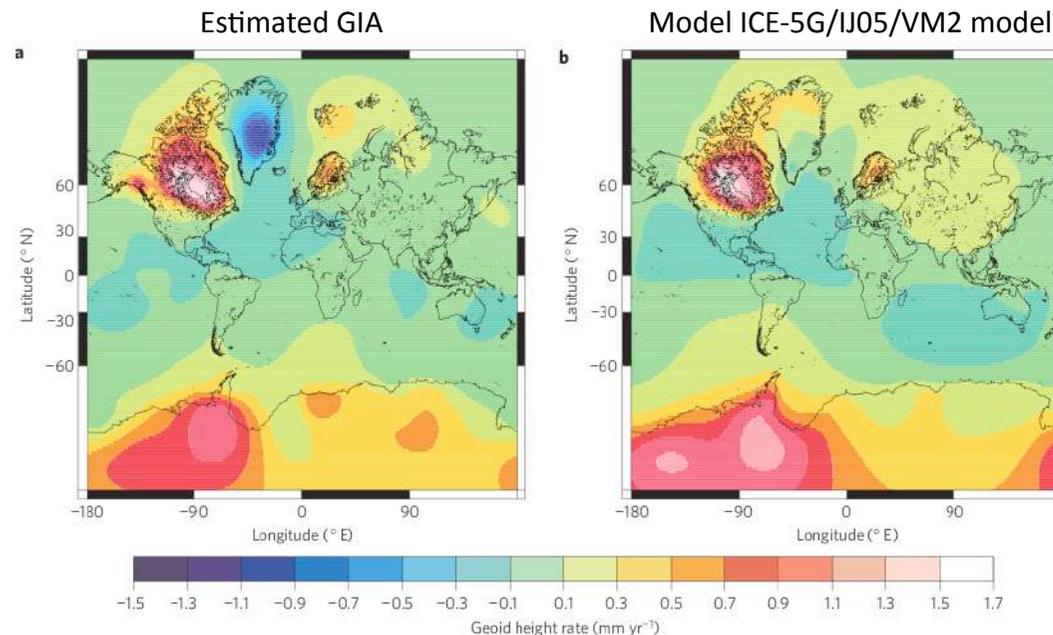
Figure 5. Annual in- and out-of-phase surface mass variation (including the atmosphere) amplitudes derived from GPS/OBP and from GRACE after a Gaussian filter with half wavelength at 800 km is applied to both; $t = 0$ at 1 January. The same degree-1 and zonal degree-2 coefficients derived from GPS/OBP/GRACE inversion are also used to replace those in the GPS/OBP results and to supplement the GRACE results.

Déformations de surcharge: vitesses

NB: Inversions également possible à partir des vitesses + GRACE + pression de fond de mer issues de modèles

On estime simultanément:

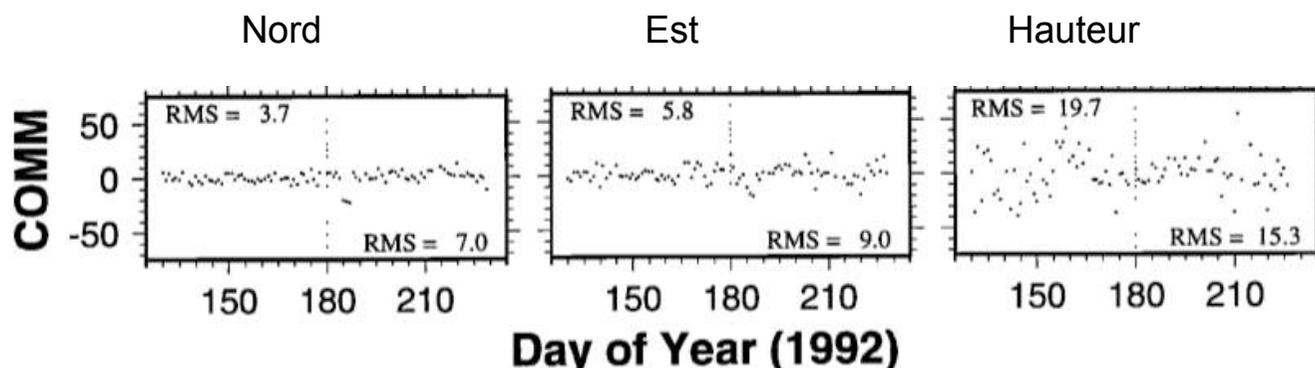
- Rebond postglaciaire
- Changement de masses dans les enveloppes fluides



Wu et al. (2010)

Filtrage spatial (1/1)

La moyenne des déplacements sur une région témoigne d'un mode commun de déplacement!
En gros, les erreurs sont corrélées spatialement, on en fait une estimation grossière par la moyenne et on la retire aux coordonnées



Wdowinski et al. (1997)

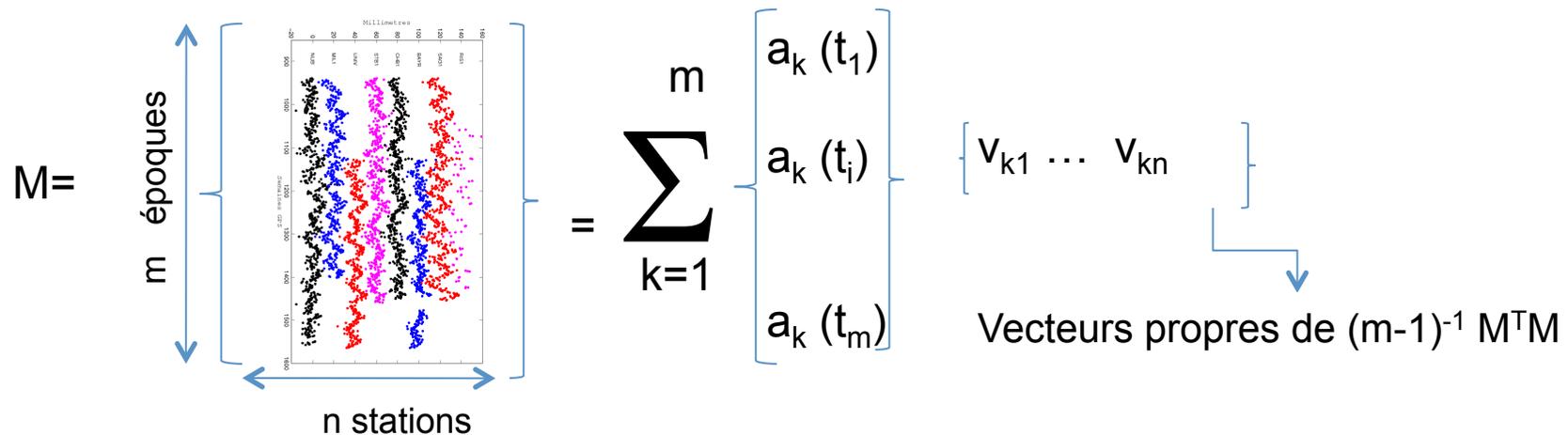
Analyse en composantes principales (1/4)

Dong et al. (2006) propose un filtrage spatial plus adapté.

Décomposition des séries temporelles en une somme de modes spatiaux dont les amplitudes varient avec le temps.

-> Mise en évidence d'une variation spatiale qui représente 78% de la variance (composante verticale) sur un calcul GPS régional (*Dong et al., 2006*).

Méthode:



Analyse en composantes principales (2/4)

Méthode (suite):

Composante principale k:

$$a_k(t_i) = \sum_{j=1}^n M(i,j) v_{kj}$$

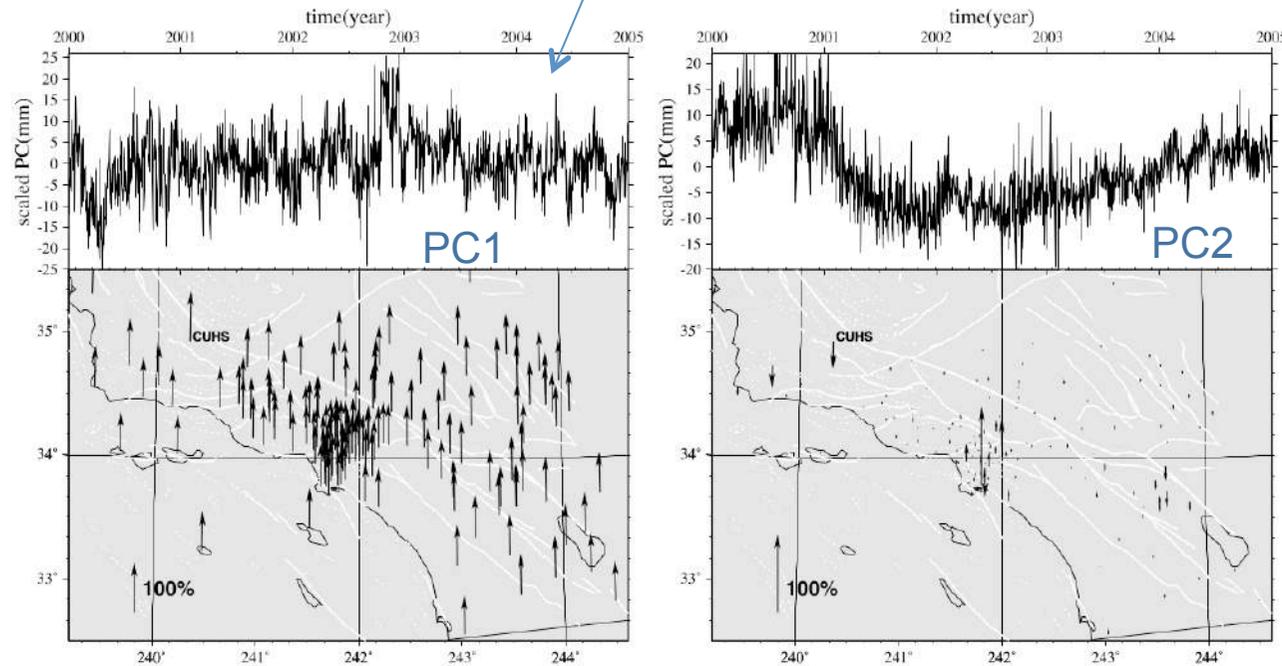
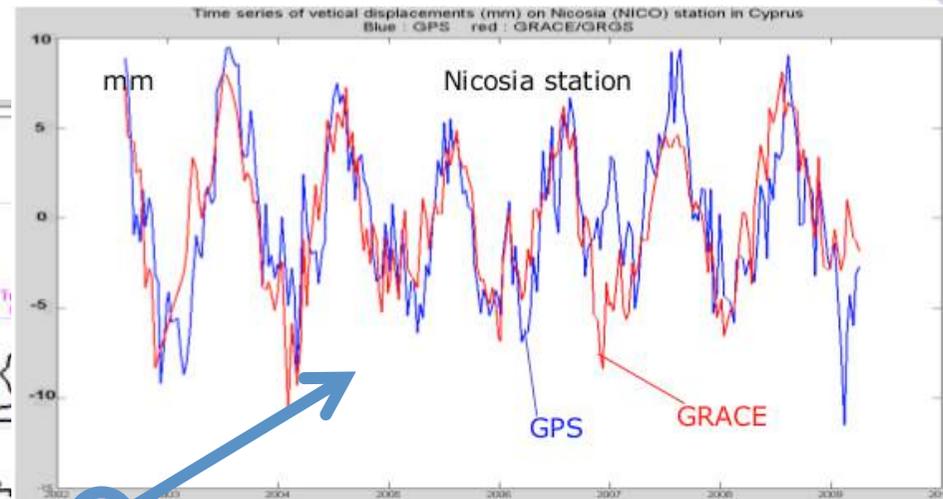
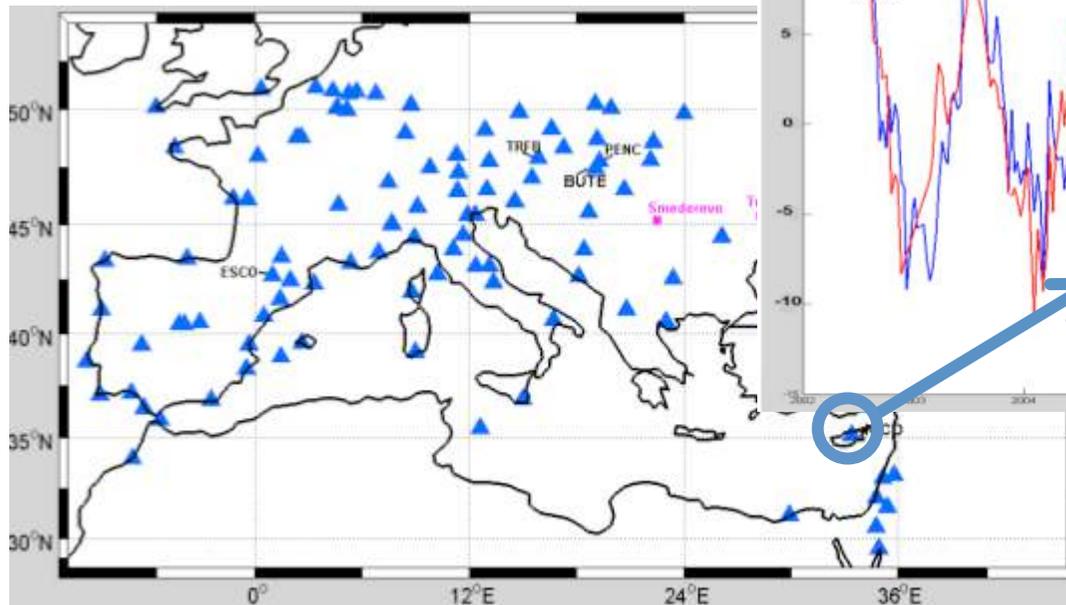


Figure 4. Vertical component of PCA solution. The arrows are defined as in Figure 2. (left) (top) First scaled PC (solid line) and (bottom) its normalized spatial eigenvectors. The grey dot series (offset by -0.020 m) in Figure 4 (top) represent the east displacement time series at USC1 caused by atmospheric mass loading. (right) (top) Second scaled PC and (bottom) its normalized spatial eigenvectors.

Dong et al. (2006)

Analyse en composantes principales (3/4)

Une variante: recherche de signaux communs entre différentes sources de données: GPS et GRACE (2003-2011)



Déplacement vertical (mm)
(Pierre Valtý et al. IGN/IPGP)

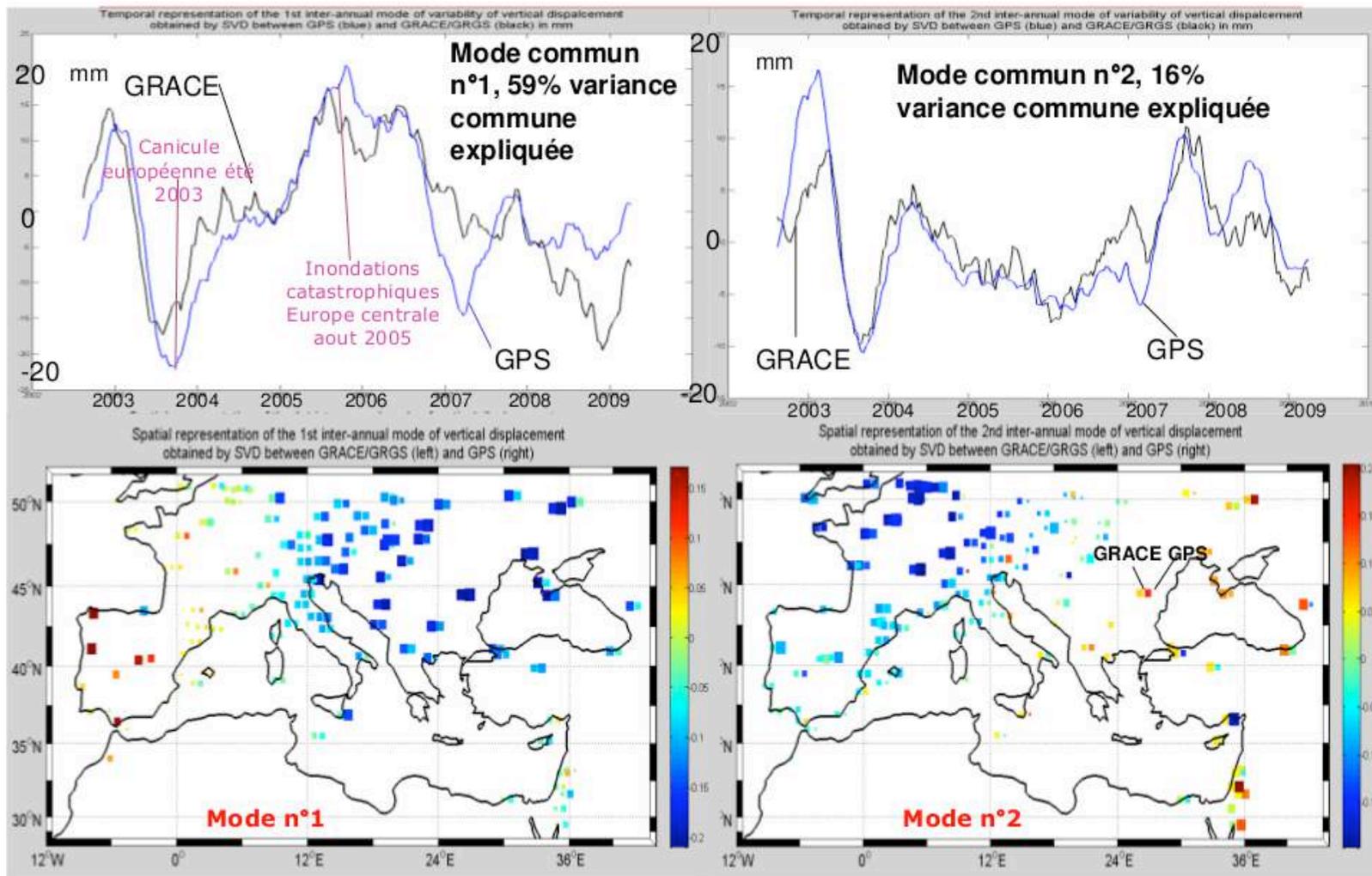
Mise en évidence de signaux réels à basses fréquences dans les données GPS

- 1) Filtre passe-bas appliqué à chaque série
- 2) Approche similaire à l'ACP mais décomposition en valeur singulière de la matrice de covariance croisée

Analyse en composantes principales (4/4)

Résultats sur la Méditerranée
Signal inter-annuels

(Pierre Valty et al. IGN/IPGP)

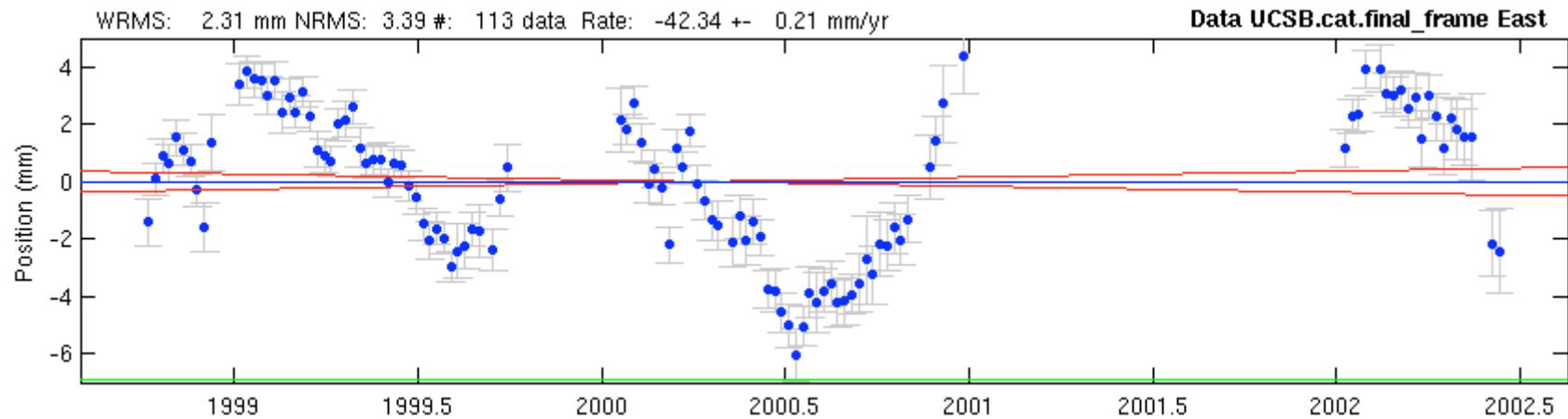


Détection des ruptures

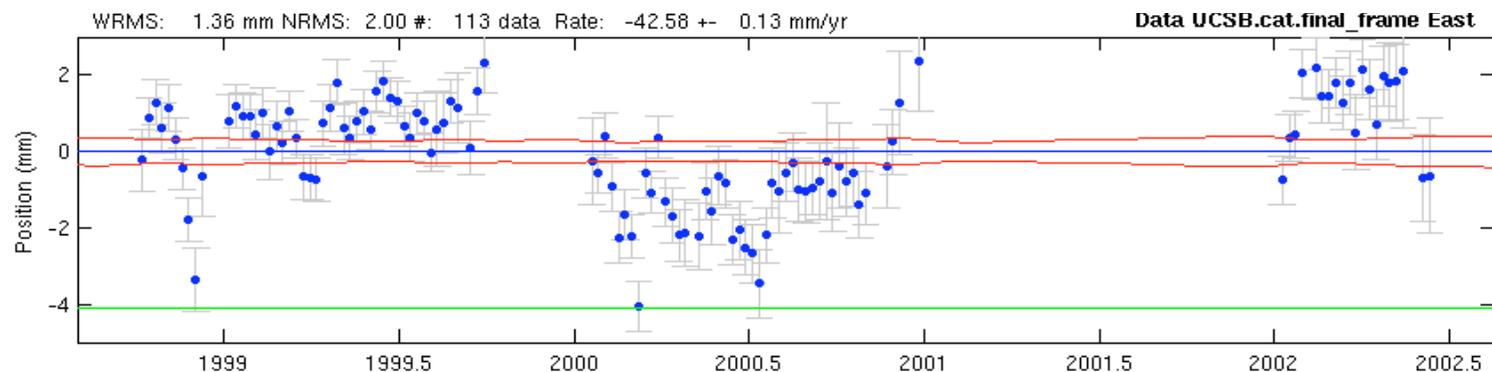
Ruptures (1/8)

Faisons-nous la main à travers quelques exemples!

Y-a-t-il une discontinuité?



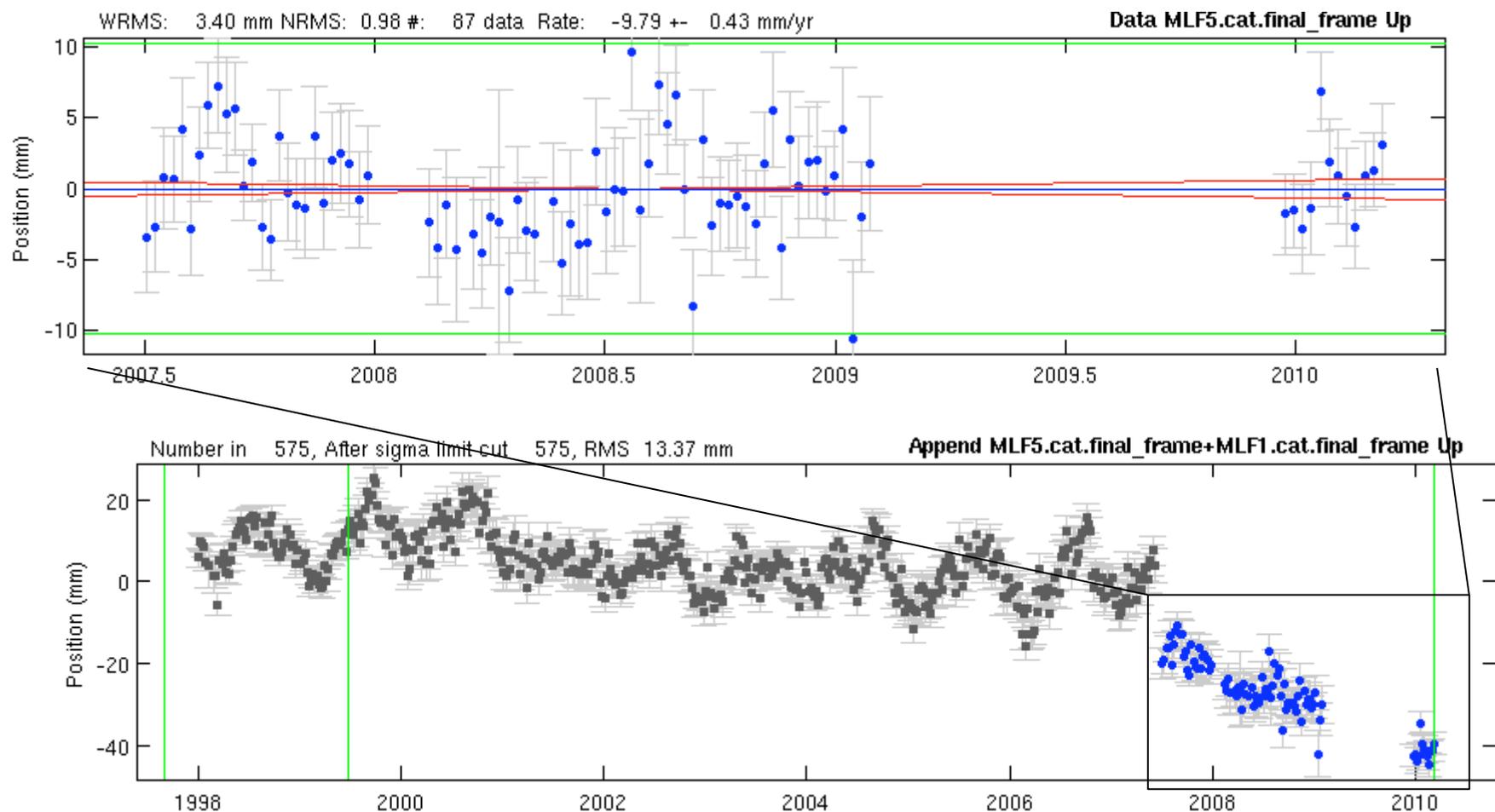
Retrait du signal saisonnier



Ruptures (2/8)

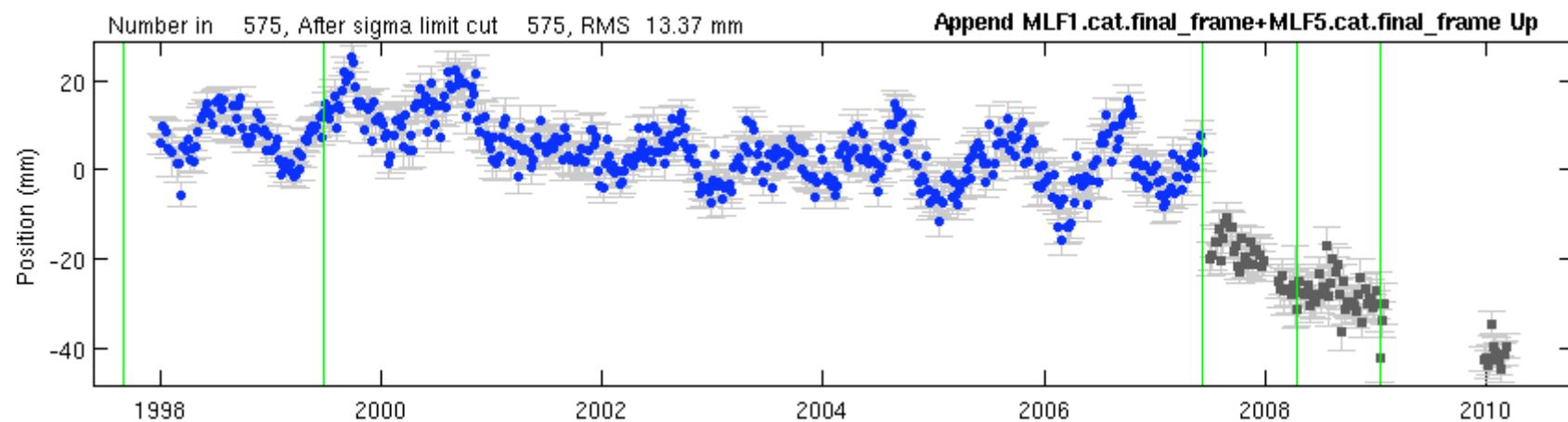
Faisons-nous la main à travers quelques exemples!

Y-a-t-il une discontinuité?



Ruptures (3/8)

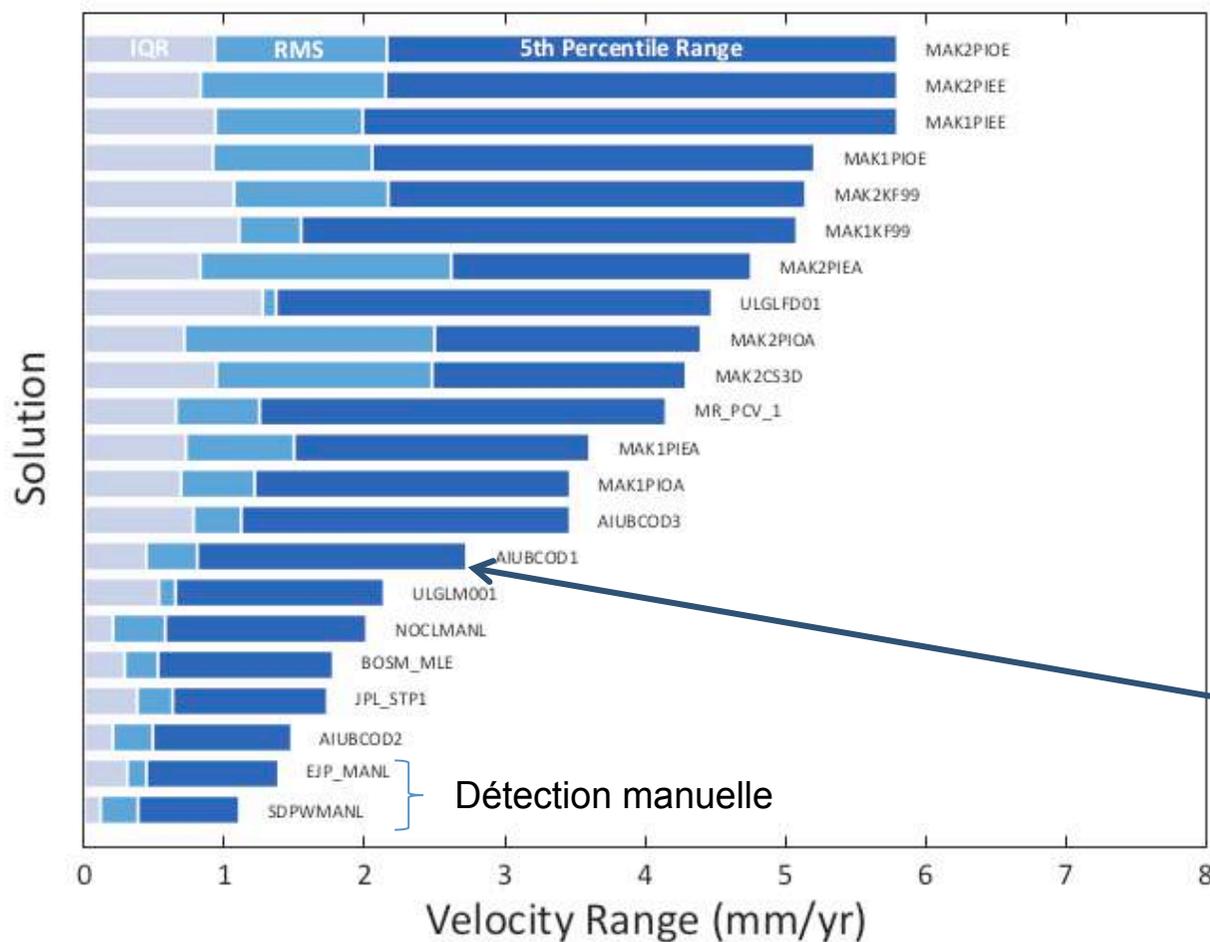
Faisons-nous la main à travers quelques exemples!



Ruptures (4/8)

Détection automatique: campagne DOGEx

King et Williams, 2011



Différence en terme de vitesses dans 95% des cas

Ruptures (5/8)

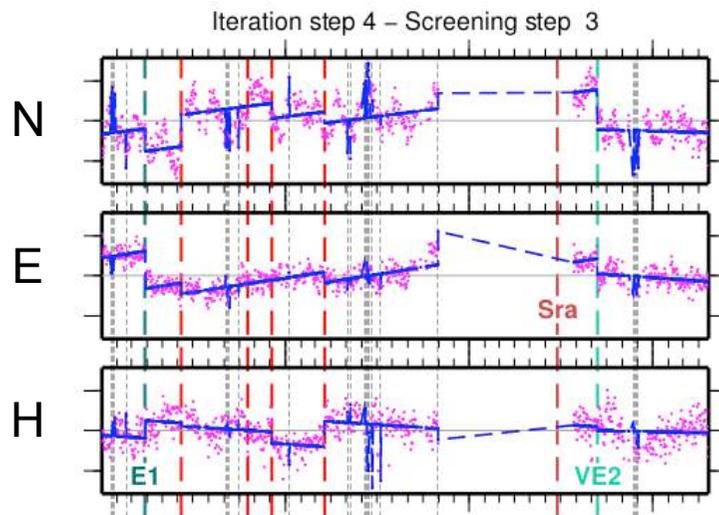
Méthode automatique.

Exemple 1: FODITS (Ostini et al., 2009)

Composantes E,N et H adressée en même temps.

Méthode

Modèle fonctionnel: positions, vitesses, discontinuités, termes périodiques



Ostini et al.

- 0) Choix a priori du modèle (métadonnées)
- 1) Estimation par moindres carrés
- 2) Test de significativité des paramètres. (retrait des non significatifs)
- 3) Recherche de discontinuité dans les résidus de l'ajustement (instant qui maximise la valeur absolue de la somme cumulée)

On itère!

Ruptures (6/8)

Méthode automatique (détection de discontinuités en pos. ET vit. dans les séries régulièrement échantillonnées)
 Exemple 2: *Vitti (2012)*

Approximation des données par des fonctions discontinues mais variant lentement sur chaque morceau

u : signal lissé
 σ, s : fonctions auxiliaires (fonctions discontinuités)

$$BZ_{\varepsilon}(u, \sigma, s) = \int_{\Omega} (u - g) dx - \gamma \int_{\Omega} (s^2 - \lambda_{\varepsilon}) u''^2 dx + \mu_{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma^2 (u')^2 dx + (\alpha - \beta) \int_{\Omega} M_{\varepsilon}(\sigma) dx - \beta \int_{\Omega} M_{\varepsilon}(s) dx \quad (3)$$

Paramètres:
 Contrôle l'écart entre u et g
 Borne le nombre de discontinuités

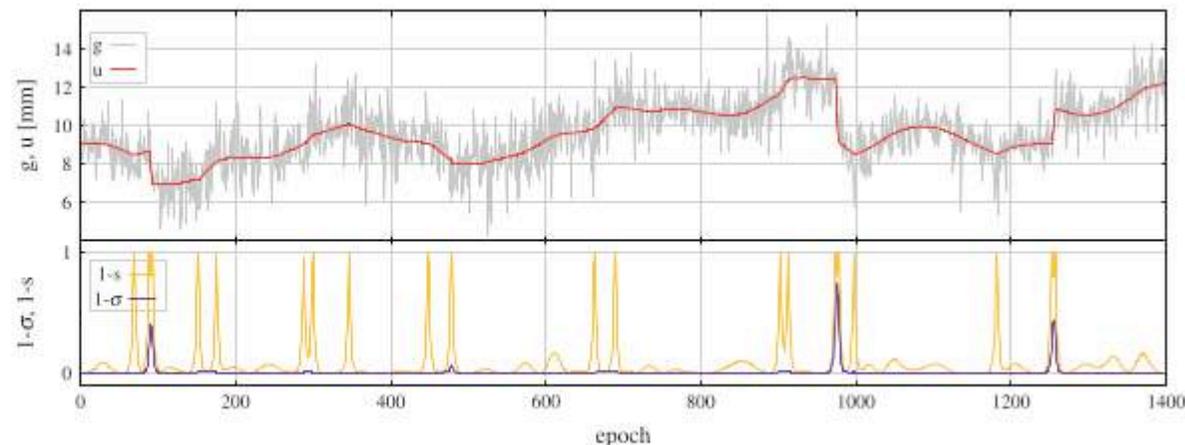
Approche variationnelle

where

$$M_{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t)^2 + (1 - t)^2 / 4\varepsilon \quad (4)$$

Contrôle la régularité de u

Fig. 3 Results of the Blake-Zisserman model applied to a real GPS residuals time-series (gray line) with the smooth approximation u plotted in red (top). At the bottom, the plot of $(1-\sigma)$ and $(1-s)$, where σ and s are the discontinuity functions

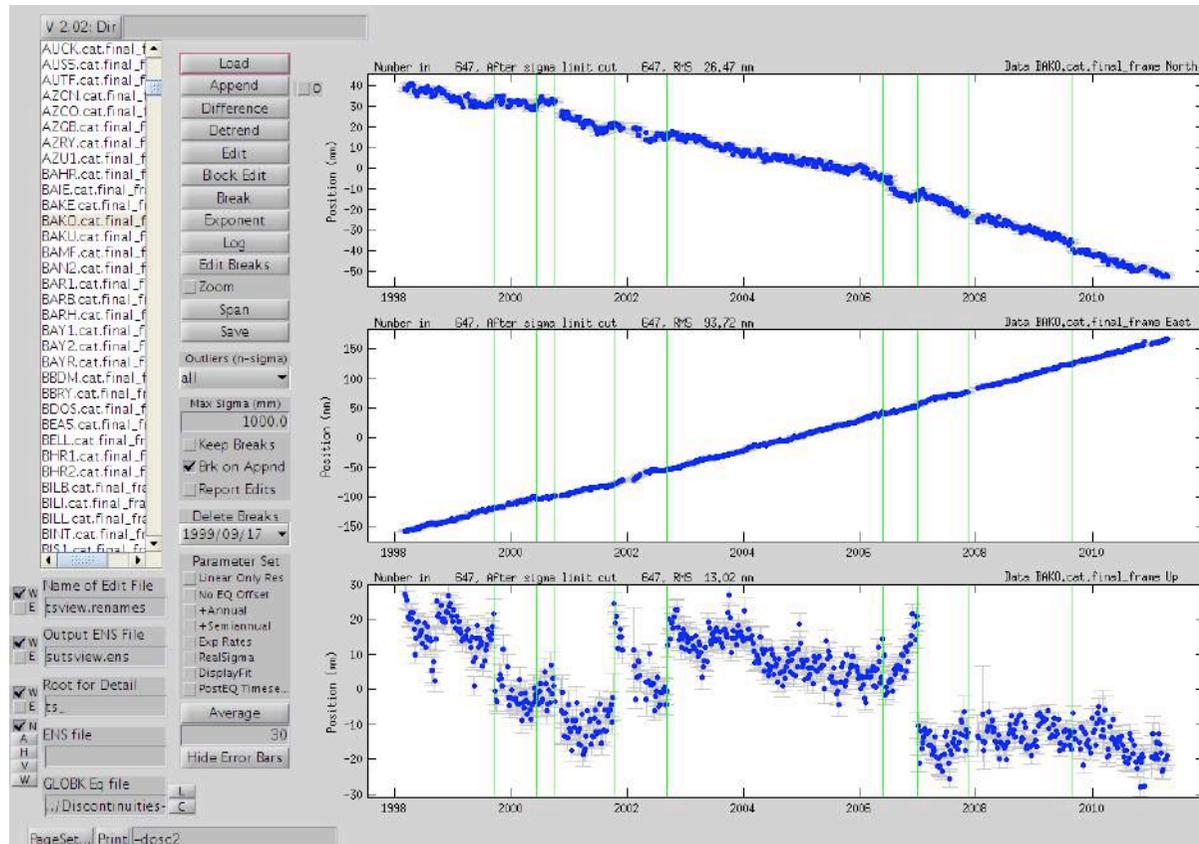


Programme « sigseg »: le manuel aide à choisir les valeurs des paramètres

Ruptures (7/8)

Détection manuelle: TSVIEW

http://www-gpsg.mit.edu/~tah/GGMatlab/#_tsview



Ex: capture écran tsview

Ruptures (8/8)

Ruptures en vitesses?

Thomas et al., GRL, 2011

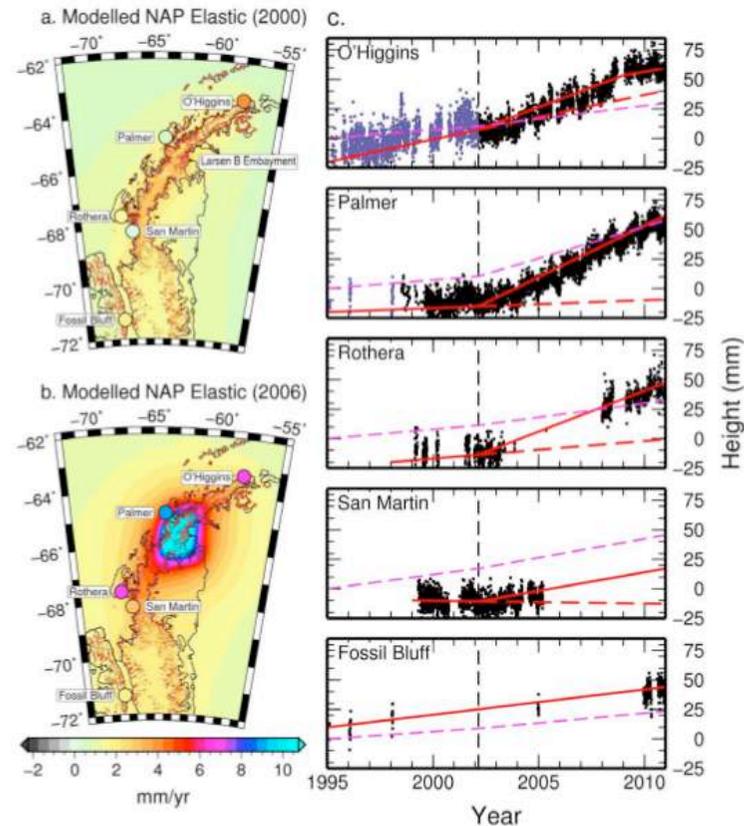


Figure 2. (a) Map of modeled elastic signal (background) and GPS observations (filled circles) for NAP before and (b) after the breakup of Larsen B Ice Shelf in March 2002 dashed vertical line in (c) site time series (without elastic correction) showing mean vertical velocities (red) and modeled elastic signal (magenta). O'Higgins, Rothera, and Palmer are a compilation of two records each and these are shown in blue and black. Neither modeled elastic signal is applied to these sites' velocities, other than Fossil Bluff, where the model (Figure 2b) was subtracted (see main text).

Synthèse

Synthèse (1/4)

Comment tester la pertinence d'une nouvelle stratégie de calcul?

- Statistiques simples
- Repère de référence (origine, échelle)
- Signaux périodiques. Ex: l'amplitude des signaux draconitiques a-t-elle diminuée?
- Analyse de bruit
- Réduction du nombre de discontinuités

Synthèse (2/4)

Exemple 1: Pression de radiation solaire

Appliquer un modèle de pression de radiation solaire dans les calculs GPS (i.e. utiliser une acc. a priori liée à la pression de radiation solaire) modifie l'origine du repère de référence.

Les 5^{ème} et 7^{ème} harmoniques sont réduites.

Rodriguez-Solano et al. (2012)

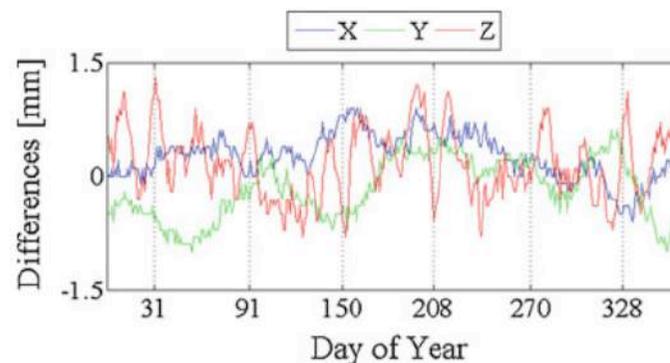


Fig. 9 Geocenter differences between solutions with and without Earth radiation pressure for year 2007

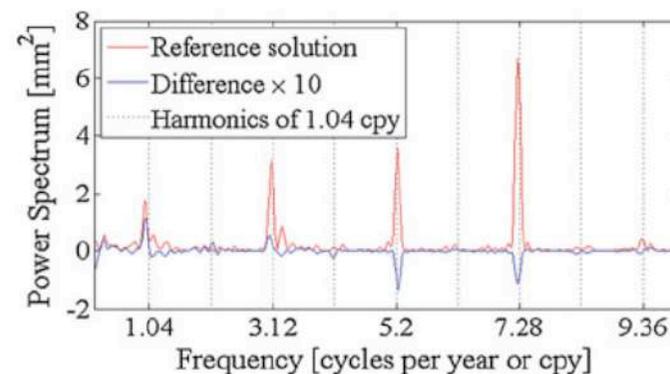
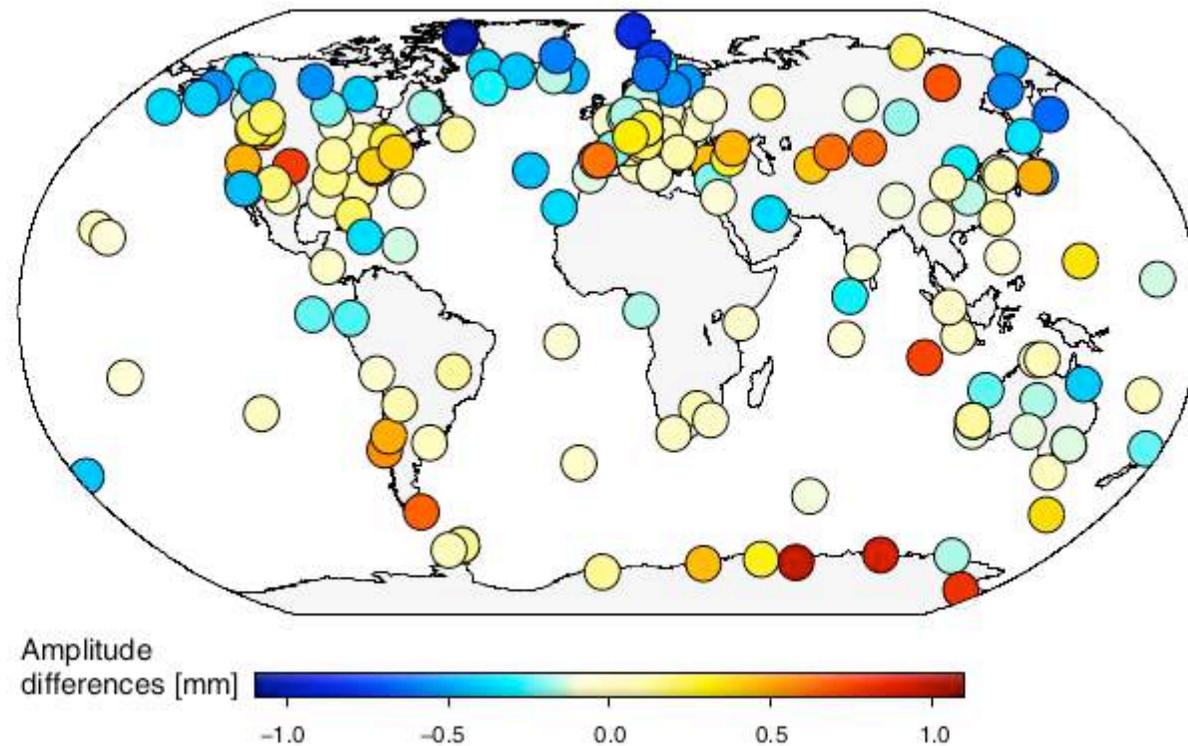


Fig. 10 Power spectrum of the Z-component of the GPS-derived geocenter from 2000 to 2008. The power spectrum difference between the reference solution minus the one including Earth radiation pressure multiplied by ten is shown in blue

Synthèse (3/4)

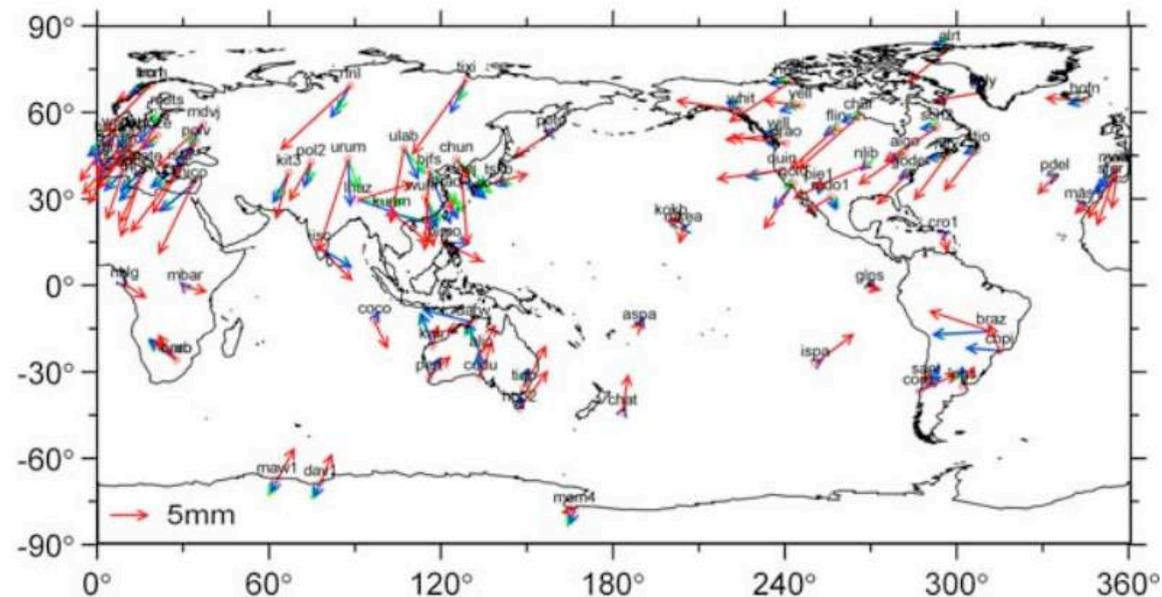
Exemple 2: Différence d'amplitude du déplacement annuel apparent entre deux modèles de retard troposphérique (ZTD a priori+fonction de rabattement)

Fig. 2 Amplitude differences between annual signals determined from GMF/GPT and VMF1/ECMWF station height time series



Synthèse (4/4)

Exemple 5: Déformation thermique du sol et du monument supportant l'antenne



Yan et al. (2009)

Figure 2. Comparison of annual vertical displacements among the mass contributions (green vectors), the summations of thermal model predictions and mass contributions (blue vectors), and the observed GPS height changes (red vectors) for the 86 IGS stations. The amplitudes and phases are defined the same way as in Figure 1.