

Aperçu des méthodes pour la détermination des harmoniques du géopotentiel

G. Balmino, CNES-GRGS

1. Rappels

2. Généralités : le problème inverse

3. Méthode directe ("brute force")

4. Méthode d'analyse de séries temporelles (méthode "time - wise")

5. Méthode d'analyse harmonique spatiale (méthode "space - wise")

1. Rappels

$$U = \frac{GM}{r} + \sum_{l>0} \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{l} \sum_{m=-l}^{+l} K_{lm} P_{lm}(\sin \mathbf{j}) e^{im\mathbf{l}}$$

$$U_{l} = \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{l} \sum_{m=0}^{+l} (C_{lm} \cos m\mathbf{l} + S_{lm} \sin m\mathbf{l}) P_{lm}(\sin \mathbf{j})$$

$$K_{lm}$$
, C_{lm} , S_{lm} and P_{lm} : normalisés

Spectre:
$$s_{l}(U) = \sum_{m=-l}^{+l} K_{lm} K_{lm}^{*} = \sum_{m=0}^{l} (C_{lm}^{2} + S_{lm}^{2})$$
 — id. avec erreurs

Variances par degré: $v_{l}(U) = \left(\frac{s_{l}}{2l+1}\right)^{1/2} = \frac{A}{l^{a}}$ $A \gg 10^{-5}$ (Terre)

 $a = 2$

$$K_{lm}$$
: ???

Si
$$/m/$$
 £ l **£** L : dim $\{K_{lm}\} = (L+1)^2$

Calcul des fonctionnelles géodésiques

$$F(U) = \sum_{l} f_{l} U_{l}$$

<u>Ex:</u>

. anomalie de gravité (à l'air libre) :
$$f_l = (l-1)/r_E^2$$
 r_E . hauteur du géoide / ellipsoide (E) : $f_l = 1/\mathbf{g}(r_E,\mathbf{j})$ $\mathbf{g}(r_E,\mathbf{j})$: sur (E)

2. GÉNÉRALITÉS : LE PROBLÈME INVERSE

L DYNAMIQUE

$$\overline{r} = \left(X_i\right) \begin{cases} \overline{r} = \sum_i \overline{\gamma}_i \left(\overline{r}, \dot{r}, t, \overline{P}\right) \\ \overline{r}(t_o), \, \dot{r}(t_o) \end{cases}$$

INTÉGRATION NUMÉRIQUE PRECISE

(vérification locale des solutions analytiques) PEU DE CONNAISSANCE DES PERTURBATIONS ORBITALES

$$\mathbf{E}_{(\alpha, \mathbf{e}, ...M)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{L} \cdot \frac{\partial \mathbb{R}(\overline{P})}{\partial \mathbf{E}} + \text{non conserv.} \\ \mathbf{E}(t_o) \end{cases}$$

SOLUTION (S) ANALYTIQUE (S) (solution linéaire parfois suffisante) MOINS PRECISE

COMPRÉHENSION DES PERTURBATIONS DE 1" ORDRE

2 OBSERVATIONS

$$q = f(\overline{r}, \overline{r}, t, \overline{Q})$$
ou
$$f(\overline{r}_1, \overline{r}_2, t_1, t_2, \overline{Q})$$

$$F(\overline{z}, \overline{P})$$

q: TOUT TYPE (range, Doppler,...) REQUIERT: linearisation ⇒ Aq

+ eq. aux variations (integ. num.)

 \bar{Z} : conditions initiales (orbite à t_s)

 $\overline{P}:$ paramètres dynamiques (physiques) $\overline{Q}:$ paramètres géométriques (e.g. stations) et autres param. phys.

 $\Delta \mathbf{q}:~\Delta ar{r}, \Delta \dot{ar{r}}~$ (dans système orbital)

$$\Delta r_{12}, \Delta \dot{r}_{12}, \left(\partial_{ij}^2 U\right)_{sat}, \Delta \|\dot{\vec{r}}\|$$

ANALYSE DE SENSIBILITÉ AISÉE

ANALYSES DE SENSIBILITÉ

Potentiel gravitationnel du corps central (Terre)

- * m = o : théories de Kozai, Brouwer, Deprit, Aksnes...
- * m≥o: théorie (linéaire) de Kaula (1963)

$$U \Longrightarrow \mathbf{R} = \frac{\mu}{a} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R}{a} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \left[\sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell m p}(I) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{\ell p q}(e) \exp\{i \psi_{\ell m p q}(\Omega, \omega, M, \theta)\} \right] K_{\ell m}$$

 $F_{\ell mp} \Leftrightarrow D_{\ell m}^{m'}$ (Allan, Jeffreys, Vilenkin,...)

 $G_{\ell pq} \Leftrightarrow X_k^{nm}$ (Hansen): CV des séries tronquées : e < limite de Tisserand (0.6627... OK en géodésie)

Extensions à : . perturbations 3ème. corps

- . perturbations de marées (solides, océaniques, atmosphériques)
- \Rightarrow Perturbations radiales (Δr), tangentielles ($\Delta \tau$), normales (Δv):
 - dérivation aisée : par développement linéaire
 - pour e ≈ o : coincide avec dérivation à partir des équations de Hill (Schrama, Balmino, Sneeuw,...)

cf. Cours de P. Exertier et de G. Métris

SOLUTION DU PROBLÈME INVERSE ET ANALYSE DES COVARIANCES

EQUATIONS D'OBSERVATION

 $x : \{K_{\ell m}\}_{\ell,m \to L,L}$

A : matrice de transfert (= de sensibilité/coefficients)

b : vecteur de différences $q^{obs} - q^{calc} = \Delta q$

 \Rightarrow Ax = b avec la matrice de poids $\Pi = \text{cov}(q^{obs})^{-1}$

SOLUTION

Solution de norme L^2 minimum (moindres carrés)

$$\begin{vmatrix} Ax - b \|_{\Pi}^{2} : \underline{\min} \\ \Rightarrow Cx = d \qquad \underline{EQ NORMALE} \\ \mathbf{avec} \quad C = A^{T} \Pi A, \quad d = A^{T} \Pi b$$

cf. Cours de D. Coulot

SOLUTION DU PROBLÈME INVERSE ET ANALYSE DE COVARIANCES (suite)

$$\hat{x} = [C + R]^{-1} d$$

$$\uparrow \text{ matrice de régularisation (e.g. } \rho.I)$$

et
$$\operatorname{cov}(x) = \sigma_o^2 [C + R]^{-1}$$

avec $\sigma_o^2 = ||A\hat{x} - b||^2 / (N_{eq} - n_{par.})$

TRANSFERT DES COVARIANCES

$$y = Fx$$

$$= \cos(y) = \langle yy^T \rangle = F\cos(x)F^T$$

3. MÉTHODE DIRECTE (« BRUTE FORCE »)

$$q = f(\overline{r}, \dot{\overline{r}}, t, \overline{Q})_{\text{.....} \text{ éventuellement }} q^{obs} = r_j, \dot{r}_j$$
ou $f(\overline{r_1}, \overline{r_2}, t_1, t_2, \overline{Q})$

$$= Par intég. num (Cf. Cours de P. Exertier)$$

Par intég. num.

avec \overline{r} , \overline{r} , $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$: fonctions de \overline{P} (param. de modèles de force) et de \overline{Z} (conditions initiales)

LINÉARISATION ⇒ EQUATION D'OBSERVATION

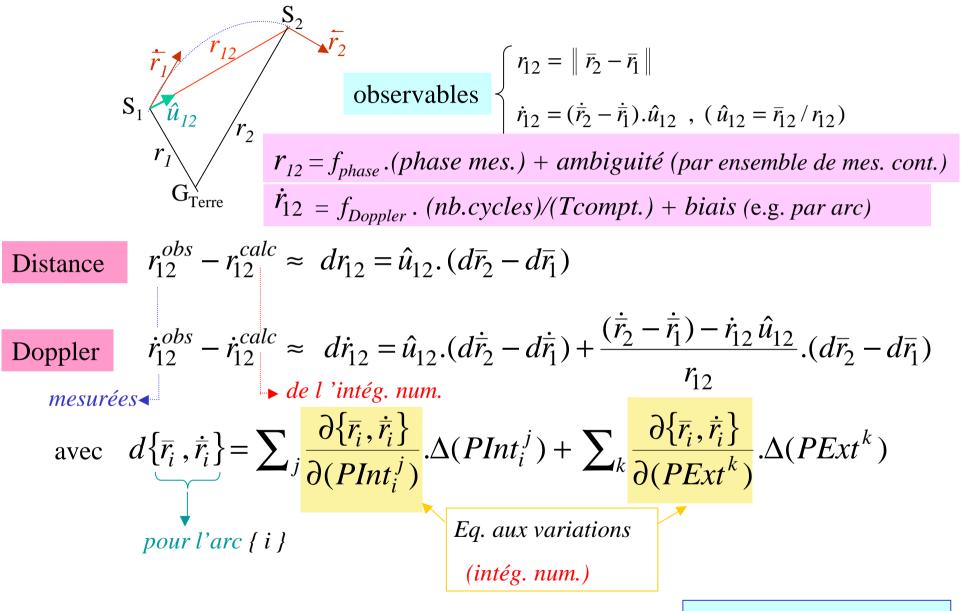
On compare q^{obs} à q^{cal} obtenu à partir d'un modèle initial $\{\overline{Z}_O, \overline{P}_O, \overline{Q}_O\}$

Au 1er ordre en $\Delta \overline{Z} = \overline{Z} - \overline{Z}_o$, $\Delta \overline{P} = \overline{P} - \overline{P}_o$, $\Delta \overline{Q} = \overline{Q} - \overline{Q}_o$:

$$\Delta q = q^{obs} - q^{cal} = \frac{\partial q^{cal}}{\partial \overline{Z}} \Delta \overline{Z} + \frac{\partial q^{cal}}{\partial \overline{P}} \Delta \overline{P} + \frac{\partial q^{cal}}{\partial \overline{Q}} \Delta \overline{Q} \dots (\text{Eq. d'obs.})$$

SOLUTION: $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_o + \Delta \overline{Z}_1, ... \Rightarrow$ ITERATIONS avec quelques $(P_k)(Q_\ell)$ en général

Exemple d'équations d'observation pour GRACE



cf. Cours de R. Biancale

CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES

$$\frac{\partial q^{cal}}{\partial \overline{\mathcal{Q}}} = \frac{\partial}{\partial \overline{\mathcal{Q}}}$$

$$\frac{\partial q^{cal}}{\partial (\overline{Z}, \overline{P})} = \frac{\partial}{\partial \overline{r}} \frac{\partial \overline{r}}{\partial (\overline{Z}, \overline{P})} + \frac{\partial}{\partial \overline{r}} \frac{\partial \overline{r}}{\partial (\overline{Z}, \overline{P})}$$

$$\text{ou} \frac{\partial}{\partial \overline{r}_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2}, \dots$$

$$\text{Soit } \mathcal{W} = Z_i \text{ ou } P_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} + \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial}{\partial \overline{r}_2} \frac{\partial}{\partial \overline{r$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{Q}}, \frac{\partial}{\partial \overline{r}},$$
... simples à calculer

(1)

soit
$$w = Z_j$$
 ou P_k

$$ar{ar{r}}, \dot{ar{r}}: ext{ solution de } egin{aligned} ar{ar{r}} &= ar{ar{\gamma}}ig(ar{r}, \dot{ar{r}}, t, ar{P}ig) \ ig(ar{r}, \dot{ar{r}}ig)_{t_o} &= ar{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{r}, \dot{\overline{r}} = \text{fonct. de}(t, t_o, w)$$

$$\overline{g} = \frac{\mathcal{O}r}{\partial w}$$
 vérifie donc le système linéaire:

$$\ddot{\overline{g}} = \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \overline{r}} \overline{g} + \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \dot{r}} \dot{\overline{g}} + \begin{cases} 0 \\ \partial \overline{\gamma} / \partial w \end{cases}_{w=P_k}^{w=Z_j} \qquad -----$$

avec:

$$g_{i}(t_{o}), \dot{g}_{i}(t_{o}) = \overline{O} \text{ si } w = 1 \text{ un des } P_{k}$$

$$= \delta_{ij} \text{ si } w = Z_{j}$$

$$\text{car c'est} \left[\frac{D(r_{i}, \dot{r}_{i})}{D(r_{i}(t_{o}), \dot{r}_{i}(t_{o}))} \right]_{t}$$

(2) est le système d'équations aux variations de (1).

- $\partial \overline{\gamma} / \partial (\overline{r}, \dot{\overline{r}})$ est commun à tous les systèmes $(\forall w)$
- Intégration numérique accélérée : prédicteur seulement ⇔ quadrature

Pour les P_k , se fait <u>après</u> convergence sur les Z_j (cond. init.) + quelques P_k

cf. Cours de J.C. Marty

(ex . coeff. forces de surf.)

RÉSOLUTION PAR ETAPES – PARAMÈTRES INTERNES ET EXTERNES

- 1. DECOUPAGE EN: SATELLITES (un seul, ou plusieurs si SST)
 - ARCS: évènements (e.g. manoeuvres)

modèles \overline{P}_o trop imparfaits pour longs arcs (... pb. forces de surface)

• parfois types de mesures, si couverture satisfaisante pour chaque type (...ou pour tests,

validations)

2. INCONNUES : • Internes : \overline{Z} : cond. init. (du satellite, de chaque satellite...)

 $\overline{P} \subset \overline{P}$: certains paramètres de forces (e.g. param. empiriques)

 $\overline{\mathcal{Q}}'\subseteq\overline{\mathcal{Q}}$: certains paramètres géométriques d'horloge, de système (e.g. biais, dérive de l'instrument, par arc)

- Externes : $\overline{P} \overline{P}'$, $\overline{Q} \overline{Q}'$ communs à tous les arcs, satellites... et significatifs
- ⇒ SYSTÈME D'EQUATIONS D'OBSERVATION

$$A_{\alpha}x = b_{\alpha}\left(\Pi_{\alpha}\right)$$

SYSTÈME D'ÉQUATIONS NORMALES

PAR ARC α (... SAT., TYPE)

EQUATION NORMALE PAR « ARC » α :

$$\begin{bmatrix} C_{ii} & C_{ie} \\ C_{ie}^T & C_{ee} \end{bmatrix}_{\alpha} \begin{bmatrix} x_{i,\alpha} \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i \\ d_e \end{bmatrix}_{\alpha}$$

 $\exists \ C_{ii}^{-1}$: la détermination d'orbite (+ autres paramètres internes) est possible $(\hat{X}_{i,\alpha}:$ solution à CV)

$$\Rightarrow \left(C_{ee} - C_{ie}^T C_{ii}^{-1} C_{ie}\right)_{\alpha} x_e = \left(d_e - C_{ie}^T C_{ii}^{-1} d_i\right)_{\alpha}$$

$$\mathbf{ou} : C_{\alpha}^* x_e = d_{\alpha}^*$$

EQUATION NORMALE TOTALE

$$\left(\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{*}\right) x_{e} = \sum_{\alpha} d_{\alpha}^{*} \quad \text{ou} \quad C_{e}^{*} x_{e} = d_{e}^{*}$$

$$+ R x_{e} = 0 \quad \text{(régularisation)}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x}_e = (C^* + R)^{-1} d_e^* \\ \operatorname{cov}(x_e) = \sigma_o^2 (C^* + R)^{-1} \\ \operatorname{avec} \sigma_o^2 = \left[\sum_{\alpha} (b_{\alpha}^T \Pi_{\alpha} b_{\alpha} - d_{i,\alpha}^T \hat{x}_{i,\alpha}) - d_e^T \hat{x}_e \right] / (N_{eq} - n_{par})$$

cf. Cours de J.M. Lemoine sur DYNAMO

4. MÉTHODE D'ANALYSE DE SÉRIES TEMPORELLES (méthode « time-wise »)

Basée sur une théorie analytique linéaire

GRAVITÉ

$$\Delta E(t) = \Delta \dot{E}_{o}(t - t_{o}) + \sum_{\ell,m} g_{\ell m}(E_{o}, t_{o}, t) K_{\ell m}$$

$$g_{em} = \sum_{h,j,k} \gamma_{emhjk}(a_{o}, e_{o}, I_{o}) \exp i[h(\Omega - \theta) + j \omega + k M]$$

$$\psi_{hjk}$$
Cf. Cours de
P. Exertier
G. Métris

AUTRES FORCES PERTURBATRICES CONSERVATIVES: expressions similaires

EQUATIONS D' OBSERVATION:

(i) $\Delta q = \Delta \bar{r}, \ \Delta \dot{\bar{r}}, \ \Delta \|\dot{\bar{r}}\|, \ \Delta r_{12}, \ \Delta \dot{r}_{12}, \ \partial_{ij}^2 U :$

alors
$$\Delta q = \sum_{\ell m} \left[\sum_{hjk} Q_{\ell mhjk} \exp i \psi_{hjk} \right] K_{\ell m}$$

... à condition d'avoir soustrait les effets dynamiques (sauf $\partial^2_{ii} U$) des <u>autres fo</u>rces

(ii) q = distance, Doppler, angle,...:

alors
$$\Delta q = \wp(t) J(t) \sum_{\ell m} g_{\ell m} K_{\ell m}$$
 ou
$$\wp_{12}(t) \sum_{\ell m} \left(J_1(t) g_{\ell m}^1 - J_2(t) g_{\ell m}^2 \right) K_{\ell m}$$

 \wp : opérateur de projection , J : jacobien $\bar{r}(\dot{\bar{r}})/ \Box$

PARTICULARITÉS DE LA MÉTHODE POUR LES ORBITES QUASI-CIRCULAIRES (1)

"Observable" =
$$\Delta r$$
, $\Delta \tau$, $\Delta \nu$, $\Delta \dot{r}_{12}$, $\partial^2 U / \partial r^2$,...

1. EQUATION D'OBSERVATION

$$\Delta q = \sum_{m=o}^{L} \sum_{\ell=m}^{L} \left\{ \sum_{k} H_{\ell m k}^{(q)} e^{i[X_{km} + \Phi_{\ell m}(q)]} \right\} K_{\ell m}$$

avec $X_{km} = \psi_{\ell mpq}$ (Kaula)+ $k\alpha / 2$, $\alpha \neq o$ pour $\Delta \dot{r}_{12}$ (... et l-2p = k)

$$k \in \left[-\ell + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \ell - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right], \mod(\ell - k, 2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{(q)}$$

 $H_{\ell mk}^{(q)}$: fonction des $F_{\ell,m,(\ell-k)/2}$ et dérivées (fonctions de l'inclinaison de Kaula) (cf. Schrama, et plusieurs autres auteurs...)

{...} : séries de Fourier du temps ⇒ MÉTHODES « TIME-WISE »

COEFFICIENTS

$$H_{lmk}^{\;\{oldsymbol{q}\}}$$



$$\Delta r : a \left(\frac{R}{a}\right)^l \overline{F}_{lm,\frac{l-k}{2}} \frac{\boldsymbol{b}_{km}(l+1) - 2k}{\boldsymbol{b}_{km}(\boldsymbol{b}_{km}^2 - 1)}$$

$$\Delta \boldsymbol{t} : a \left(\frac{R}{a}\right)^{l} \overline{F}_{lm,\frac{l-k}{2}} \frac{2\boldsymbol{b}_{km}(l+1) - k(3 + \boldsymbol{b}_{km}^{2})}{\boldsymbol{b}_{km}^{2}(\boldsymbol{b}_{km}^{2} - 1)}$$

$$\Delta \mathbf{n} : a \left(\frac{R}{a}\right)^{l} \frac{(1+\mathbf{b}_{km})(E_{lm,k-1}-D_{lm,k-1})+(1-\mathbf{b}_{km})(D_{lm,k+1}+E_{lm,k+1})}{2(1-\mathbf{b}_{km}^{2})}$$

- . radial (r)
- . tangentiel (t)
- . normal (**n**)

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 : 2a \left(\frac{R}{a}\right)^l \overline{F}_{lm,\frac{l-k}{2}} \sin \frac{ka}{2} \frac{-2b_{km}(l+1) + k(3+b_{km}^2)}{b_{km}^2(b_{km}^2-1)}$$

$$\mathbf{d}V = \mathbf{d} \dot{r}_{12} : 2n a \left(\frac{R}{a}\right)^{l} \overline{F}_{lm,\frac{l-k}{2}} \sin \frac{k\mathbf{a}}{2} \frac{k(1+\mathbf{b}_{km}^{2}) - (l+1)\mathbf{b}_{km}}{\mathbf{b}_{km}(\mathbf{b}_{km}^{2}-1)}$$

Perturbations de distance et de vitesse relatives entre 2 satellites S_1 et S_2

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{rr} \\ \Gamma_{tt} \\ \Gamma_{nn} \end{bmatrix} : n^2 \left(\frac{R}{a} \right)^l \overline{F}_{lm, \frac{l-k}{2}} \begin{bmatrix} (l+1)(l+2) \\ -(l+1+k^2) \\ k^2 - (l+1)^2 \end{bmatrix}$$

Termes diagonaux du tenseur gradient de gravité (composantes sur r, t, n)

$$\underline{Avec}: \begin{cases} \mathbf{b}_{km} = \dot{X}_{km} / n &, D_{lmk} = \frac{d}{dI} \overline{F}_{lm, \frac{l-k}{2}}(I) &, et E_{lmk} = \frac{k \cos I - m}{\sin I} \overline{F}_{lm, \frac{l-k}{2}}(I) \\ l-k: pair dans tous les cas, sauf pour Dn où l-k est impair \end{cases}$$

PARTICULARITÉS... SI e ≈ o (2)

2. MATRICE NORMALE:

$$N \frac{\binom{C/S}{(\ell_1 m_1)(\ell_2 m_2)}}{\binom{\ell_1 m_1}{(\ell_2 m_2)}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t_j (obs)} \left[\sum_{k_1} H_{\ell_1 m_1 k_1} \binom{\cos}{\sin} X_{k_1 m_1} (t_j) \right] \left[\sum_{k_2} H_{\ell_2 m_2 k_2} \binom{\cos}{\sin} X_{k_2 m_2} (t_j) \right]$$

N EST BLOC-DIAGONALE (NEUMANN, 1798-1895)...

- $K_{\ell m}$ est ordonné: par C's, par S's (i.e. $Re\ K$'s, $Im\ K$'s)

 par m, par ℓ pair/puis ℓ impair

 orbite répétitive à T_{rep} jours: $T_{rep} = N \frac{2\pi}{\dot{\Omega} \dot{\theta}} = N_{rep} \frac{2\pi}{\dot{\omega} + \dot{M}} \begin{vmatrix} N_{rep} \in N; (N_{rep}, |N|) = 1 \\ N \in Z, (\text{sgn de } \dot{\Omega} \dot{\theta}) \end{vmatrix}$
 - mesures équidistantes en temps : pas Δt , et $N_p = \left(T_{rep} / \Delta t\right)$ * n cycles Ainsi "bloc-C" = "bloc-S" (sauf m = 0)

... PROPRIÉTÉ RE-DÉCOUVERTE ~ 150 ANS PLUS TARD PAR PLUSIEURS AUTEURS (O. Colombo, E.J.O. Schrama, N. Sneeuw, G. Balmino,...)

 \Rightarrow N formée analytiquement, et facile à inverser ! (inversible si $N_{\it rep} > 2~L_{
m max}$)

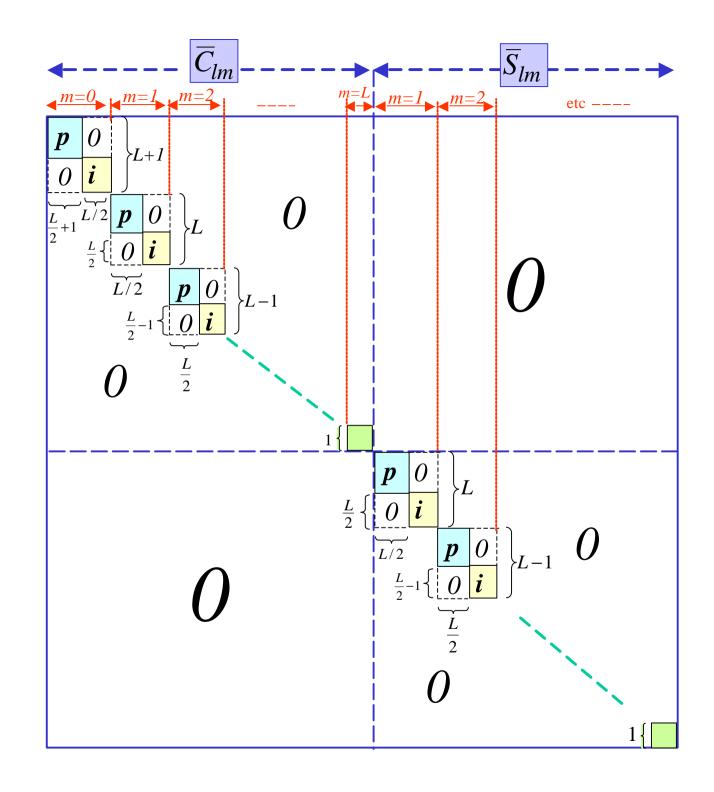
Structure de la matrice normale N

- p blocs avec l pair
- *i* blocs avec *l* impair

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{l_1 l_2 m}^{CC} &= \mathbf{N} \left(\overline{C}_{l_1 m} \,\middle|\, \overline{C}_{l_2 m} \right) \\ &\quad \left(\,l_1 \,,\, l_2 \,:\, \text{même parité} \,\right) \end{aligned}$$

$$N_{l_1 l_2 m}^{SS} = N(\overline{S}_{l_1 m} | \overline{S}_{l_2 m})$$
(id.)

Chaque (sous-)bloc est évidemment symétrique



Formation analytique directe des termes non nuls

$$N_{l_1 l_2 0}^{CC} = \frac{N_P}{2} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{1}{\mathbf{s}_{(km)}^2} \left[H_{l_1 0 k} H_{l_2 0 k} + (-1)^{l+\mathbf{e}(q)} H_{l_1 0 k} H_{l_2 0,-k} \right]$$

$$N_{l_1 l_2 m}^{CC} = N_{l_1 l_2 m}^{SS} = \frac{N_P}{2} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{1}{\mathbf{s}_{(km)}^2} [H_{l_1 mk} H_{l_2 mk}]$$

 $\begin{array}{c|c} \underline{k_{\min}}, k_{\max} : & -\inf(l_1, l_2) \leq k \leq \inf(l_1, l_2) \\ & l_1 - k \;, l_2 - k \; : \; pairs \; pour \quad \Delta r, \Delta t, \Delta t_2 - \Delta t_1, \textit{dV}, \Gamma_{rr}, \Gamma_{\textit{tt}}, \Gamma_{\textit{nn}} \\ & impairs \; pour \quad \Delta \textbf{n} \\ & \boldsymbol{b}_{MIN} \leq \boldsymbol{b}_{km} \leq \boldsymbol{b}_{MAX} \quad \Rightarrow limitations \; supplémentaires \; sur \; k \\ & & \bullet \; (\textit{dans les } H_{lmk}) \end{array}$

 $oldsymbol{S}_{(km)}$: souvent pris constant (logique dans cette formulation) peut en fait dépendre de la fréquence (i.e. de $oldsymbol{b}_{km}$) dans une formulation frequence cf. planche suivante une formulation fréquentielle

- cf. planche suivante

PARTICULARITÉS... SI e ≈ o (3)

3. UNE AUTRE MANIÈRE DE VOIR LA MÉTHODE « TIME-WISE »

$$\Delta q = \sum_{k,m} A_{km}^{(q)} e^{iX_{\ell m}}$$

$$A_{km}^{(q)} = \sum_{\ell[2]} H_{\ell mk}^{(q)} e^{i\phi_{\ell m}(q)} K_{\ell m} \qquad ... \quad [2] : sommation \ par \ 2$$
 Les $A_{km}^{(q)}$ peuvent etre pris pour observables avec le bruit (coloré) σ_{km}

ſŀ.

EQUATIONS NORMALES: IDENTIQUES À L'APPROCHE PRÉCÉDENTE,

MAIS AVEC
$$\sigma_{km} = \sigma$$
 (frequence)
$$= F \text{ (erreur de mes. PSD)}$$

RESOLUTION : Avec régularisation éventuelle (e.g. loi en K/l^2) Inversion par blocs

PARTICULARITÉS... SI e ≈ o (4)

4. AVANTAGES

- Simplicité
- Rapidité ⇒ solutions « quick-look »

5. INCONVÉNIENTS

- Linéarisation
- Hypothèses non satisfaites (e ≈ o, couverture, géométrie,...)
- Autres effets

ORBITE DE RÉF. DÉFINITIVE ITÉRATIONS

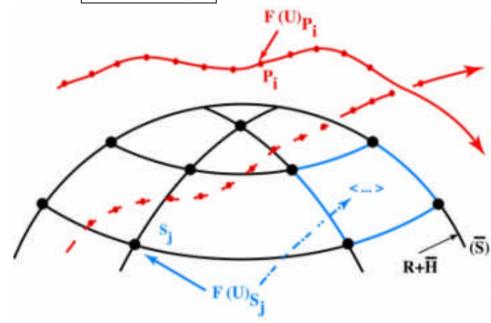
Pb. encore ouverts, sauf $\partial_{ij}^2 U$

5. MÉTHODE D'ANALYSE HARMONIQUE SPATIALE (« SPACE-WISE »)

PRINCIPE

Reconstituer une fonction du notentiel nerturbateur. F(U) , sur une sphère (\overline{S}^-) de ravon $R+\overline{H}$, \overline{H}^- : altitude

$$F(U) = \partial_{ij}^2 U$$



$$S_{j} \begin{cases} P_{i} \in \left\{ \text{voisinage de } S_{j} \right\} \\ F(U)_{P_{i}} \xrightarrow{colloc.} F(U)_{S_{j}} \text{ ou } < \cdots > \\ \downarrow \\ f_{P_{i}} : \text{résidus/modèle} : f_{S_{j}} \\ \downarrow \\ K_{\ell m}^{o} + \text{m.n.t. (topo) éventuellement} \end{cases}$$

Prédiction de quantités résiduelles

$$\hat{f}_{S_j} = \sum \; \pmb{lpha}_{S_j}^i f_{P_i}$$

$$igspace \left(\hat{f} - oldsymbol{lpha}^T f_P
ight)$$
 min.

espérance math. (f : processus stochastique)

erreurs (diag.)

$$\alpha_{S_j}^i = \left[\cot \left(f_{S_j}, f_{P_i} \right) \right]^T \left[\cot \left(f_{P_k}, f_{P_l} \right) + \Gamma_{ik} \right]^{-1}$$

cov : fonction de covariance dépend du modèle initial $\left(U_{o}\right)$ et des mesures

$$F(U)_{S_j} = \hat{f}_{S_j} + F(U_o)_{S_j}$$

F(U) = perturbation d'orbite

Plusieurs approches:

- Pb. aux limites, mixte (Sanso et al.)
- $(\Delta \bar{r}, \Delta \dot{\bar{r}}) \rightarrow \Delta \ddot{\bar{r}}$ par dérivation \rightarrow potentiel perturbateur (Tscherning, Grafarend,...)
- Intégrale de l'énergie :

$$T - (U + \delta U) -$$
terme dissipatif + var. temp. $((U + \delta U) =$ const.

† †

énergie tous les cinétique termes conserv.

- \Rightarrow . traitement « time-wise » (séries de U)
 - . traitement « space-wise » : U= fonctionnelle sur $\left(\overline{S}
 ight)$

Possibilité aussi de résolution directe : éq. d'obs. en chaque point (sans éq. aux variations) ... ® éq. normales (matrice pleine)

INTÉ GRALE DE L'ÉNER GIE

En repère inertiel: $\bar{r} \to X = (X_k)$

$$\ddot{X} = \frac{d}{dt}(\dot{X}) = \nabla[U(X,t) + \delta U(X,t)] + F$$
pot. terrestre
non conserv.
moyen
(forces de surface)

 $\delta U = 3^{im}$ corps (Soleil, Lune, planètes)

marées solides, océaniques, atmosphériques (+ effets de charge)

autres variations temporelles (redistribution de masses)

$$T = \frac{1}{2} \left| \dot{X}^2 \right| = \frac{1}{2} \dot{X}_k \dot{X}_k \longrightarrow \partial T / \partial \dot{X}_k = \dot{X}_k$$
 (2)

$$H = T - (U + \delta U)$$
: hamiltonien si $f = 0$

$$\begin{split} \Rightarrow & \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X_k} \dot{X}_k + \frac{\partial H}{\partial \dot{X}_k} \ddot{X}_k + \frac{\partial H}{\partial t} \\ & = -\frac{\partial (U + \delta U)}{\partial X_k} \dot{X}_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{X}_k} \ddot{X}_k - \frac{\partial (U + \delta U)}{\partial t} \\ & \qquad \qquad (2) \ \ \, \downarrow \quad \ \, \downarrow (1) \\ & = F_k \dot{X}_k - \frac{\partial (U + \delta U)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_o}^t \dots \end{split}$$

$$T - (U + \delta U) = \sum_{k} \int_{t_o}^{t} F_k \dot{X}_k d\tau - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial (U + \delta U)}{\partial t} d\tau + E_o$$
 (3)

Incomnues: $K_{\ell m}(U)$, E_o (arc)

méridien central (Greenwhich)

... si orbite pré-déterminée (par ex. : méthode dynamique réduite)

SIMPLIFICATIONS

(i) $\overline{\omega} \text{ (ITRF/ICRF)} \approx \dot{\theta} \, \hat{x}_3 \, \left(t - t_o \right) \quad \text{si} \quad \left| t - t_o \right| \quad \text{petit (ex:1 jour)}$ $\downarrow \approx \omega_o \text{ (constant)}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \text{avec: } \lambda = \alpha - \omega_o(t - t_o) \\ X_1 = r \cos \varphi \cos \alpha \\ X_2 = r \cos \varphi \sin \alpha \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ = \left[\frac{\partial U}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial U}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial \lambda}\right] \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ = \omega_o \left(X_2 \frac{\partial U}{\partial X_1} - X_1 \frac{\partial U}{\partial X_2}\right)$$

(ii)
$$\partial U/\partial (X_1, X_2) = \ddot{X}_{1,2} - \underbrace{\partial (\partial U)/\partial (X_1, X_2)}_{\approx 10^{-7} \ddot{X}_{1,2}} - F_{1,2} \approx \ddot{X}_{1,2}$$

- (iii) $|\partial(\delta U)/\partial t| << |\partial U/\partial t|$ (10.6 À 10.8 fois plus petit) ... mais par contre $\delta U < U$
- (3) se réduit donc à :

$$U + E_O = \frac{1}{2} \left| \dot{X} \right|^2 - \delta U - \sum_k \int_{t_o}^t F_k \dot{X}_k d\tau + \underbrace{\omega_o \int_{t_o}^t \left(X_2 \ddot{X}_1 - X_1 \ddot{X}_2 \right) d\tau}_{= \omega_o \left(\dot{X}_1 X_2 - \dot{X}_2 X_1 \right)}$$

(4)

$$\longrightarrow U + E_{\mathcal{O}} = \frac{1}{2} |\dot{X}|^2 + \omega_o (\dot{X}_1 X_2 - \dot{X}_2 X_1) - \delta U - \sum_k \int_{t_o}^t F_k \dot{X}_k d\tau$$

- (4) est écrit en chaque point, dans le repère inertiel.
 - $(X_k)(\dot{X}_k)$ proviennent de la D.O.P.
 - ... ainsi que F_k (ou mesuré par accélérométrie et calibré)
- On peut également déterminer δU

REMARQUE : Ecriture de l'intégrale en repère terrestre

(Préférée par certains auteurs)

$$\bar{r} \rightarrow x = (x_k)$$

$$\dot{X} = \dot{x} + \mathbf{w} \wedge x$$

$$U(X) \rightarrow U(x)$$

$$\mathbf{d}U(X) \rightarrow \mathbf{d}U(x)$$

$$\bar{F} \rightarrow f = (f_k)$$
• $\mathbf{u}(\dot{X}_1 \dot{X}_2 - \dot{X}_2 \dot{X}_1) = -(\mathbf{w}, X, \dot{X}) \quad avec \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{w}_0 \end{pmatrix}$

$$= -(\mathbf{w}, x, \dot{x} + \mathbf{w} \wedge x) = -(\mathbf{w}, x, \dot{x}) - \mathbf{w}.[x \wedge (\mathbf{w} \wedge x)]$$

$$\Rightarrow U + E_0 = \frac{1}{2} \left| \dot{x}^2 \right| - \frac{1}{2} (\mathbf{w} \wedge x)^2 - \mathbf{d}U - \int_{t_0}^t \left[f \cdot (\dot{x} + \mathbf{w} \wedge x) \right] d\mathbf{t}$$
 (4 bis)

N.B.
$$Ici: \frac{1}{2} (\mathbf{w} \wedge x)^2 = \frac{1}{2} \mathbf{w}_0 (x_1^2 + x_2^2)$$

ANALYSE HARMONIQUE SUR UNE SPHÈRE

- On se donne sur la sphère unité une grille régulière de valeurs ${\cal F}_{_{\cal S}}$.

En projection sur la base des fonstions harmoniques sphériques de surface, on écrit :

$$F_{kj}(S) \cong \sum_{\ell,m} f_{\ell m} < P_{\ell m} \left(\sin \varphi_k \right) e^{im\lambda j} > ; f, P : \text{normalisés}$$

$$1 \le k \le K = \pi / \Delta \varphi \quad (= \ell_{\text{max}})$$

$$1 \le j \le J = 2\pi / \Delta \lambda, \Delta \lambda = \Delta \varphi \quad \text{ou } \Delta \lambda (\overline{\varphi}_k) = \Delta \varphi^2 / (\sin \varphi_{k+1} - \sin \varphi_k)$$

• On cherche les coefficients f_{ba} :

$$f_{\ell m} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} F(\varphi, \lambda) P_{\ell m}(\sin \varphi) e^{-im\lambda} d\sigma_1$$
$$\approx \frac{1}{4\pi} \frac{\theta_m}{q_\ell} \sum_{k=1}^K I_{\ell m}(k) \sum_{j=1}^J \alpha_{k_j}^m \sigma_{k_j}$$

$$\underline{\text{valeurs moyennes}} \quad F_{_{\mathcal{B}}} = < F >_{_{\mathcal{B}}} :$$

$$\theta_m = (2/m)\sin m\Delta\lambda/2$$
 si $m > 0, \theta_m = \Delta\lambda\sin m = 0$

 q_{ϵ} : facteur de dé-lissage, entre 1 et eta_{ℓ}^2 , avec

$$\beta_{o} = 1$$

$$\beta_{\ell} = [p_{\ell-1}(\cos\psi) - p_{\ell+1}(\cos\psi)]/(2\ell+1)/(1-\cos\psi)$$

p: polynôme usuel de Legendre

$$\cos \psi = 1 - \Delta \varphi \cdot \Delta \lambda / 2\pi$$

$$\cos \psi = 1 - \Delta \varphi . \Delta \lambda / 2\pi$$
 $I_{\ell m} = \int_{arphi_k - \Delta arphi / 2}^{arphi_k + \Delta arphi / 2} P_{\ell m} (\sin arphi) \cos arphi darphi$ (par récurrences stables) $\sigma_{kj} = 1$

$$\sigma_{kj}$$
 =1

valeurs ponctuelles

$$\theta_{m} = 1$$

$$q_{\ell} = 1$$

$$egin{aligned} & heta_m=1\ &q_\ell=1\ &I_{\ell m}=P_{\ell m}\left(\sin\overline{arphi}_k
ight)\ &\sigma_{kj}= ext{ aire de la cellule }(k,j) \end{aligned}$$

$$\sigma_{kj} = ext{aire de la cellule } (k,j)$$

<u>Calcul de</u> $lpha_{kj}^m$: Par récurrence à partir des F_{kj} :

$$egin{aligned} oldsymbol{lpha}_{kj}^o &= F_{kj} \ oldsymbol{lpha}_{kj}^1 &= F_{kj} e^{-i \lambda_j} \ & ext{avec}: \lambda_j &= \lambda_o + (j-1/2) \Delta \lambda \ oldsymbol{lpha}_{kj}^m &= 2 \cos \! \lambda_j lpha_{kj}^{m-1} - lpha_{kj}^{m-2} \end{aligned}$$

Logiciel: ANALHS

- Cf. Cours de J.M. Lemoine
 - Polycopié (distribué en cours): "HARMONIQUES SPHERIQUES ANALYSE HARMONIQUE ET SYNTHESE HARMONIQUE SUR UNE SPHERE"; G. Balmino (Mars 1991)

