Localisation précise par moyens spatiaux

Forme et déformation de la Terre

Richard Biancale / CNES

- Représentation statique (ellipsoïde, geoïde, topographie)
- Dynamique de la Terre : marées, surcharges, rebond post-glaciaire, tectonique..

Les dimensions de la Terre

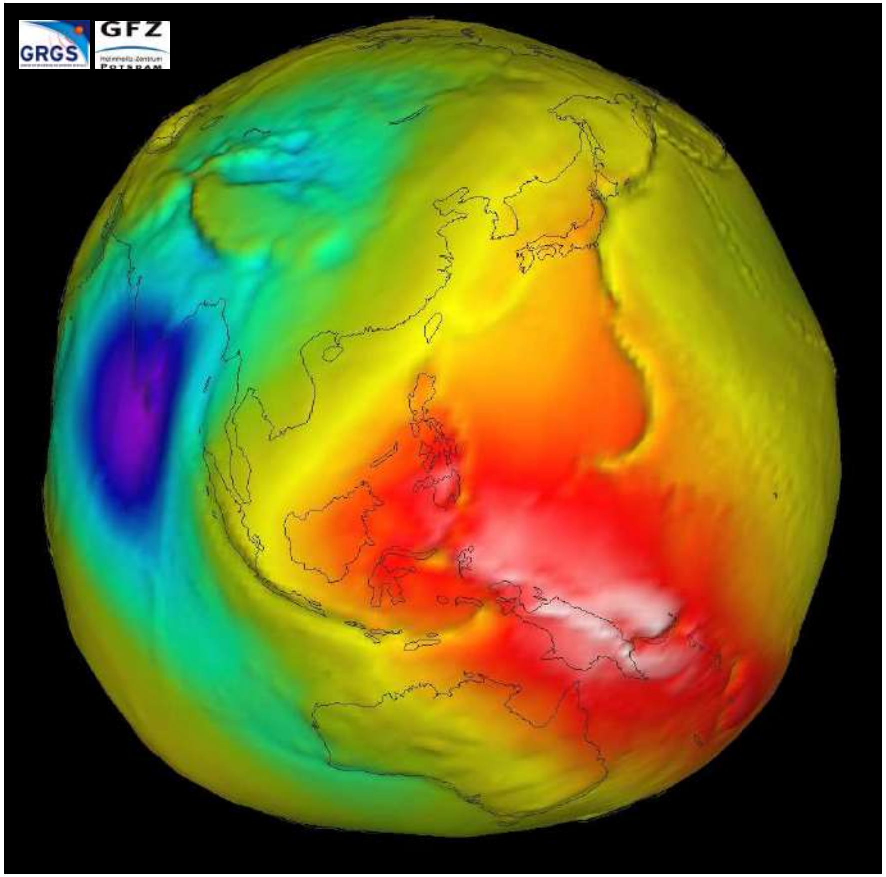
$R_{eq} - R_{pole}$

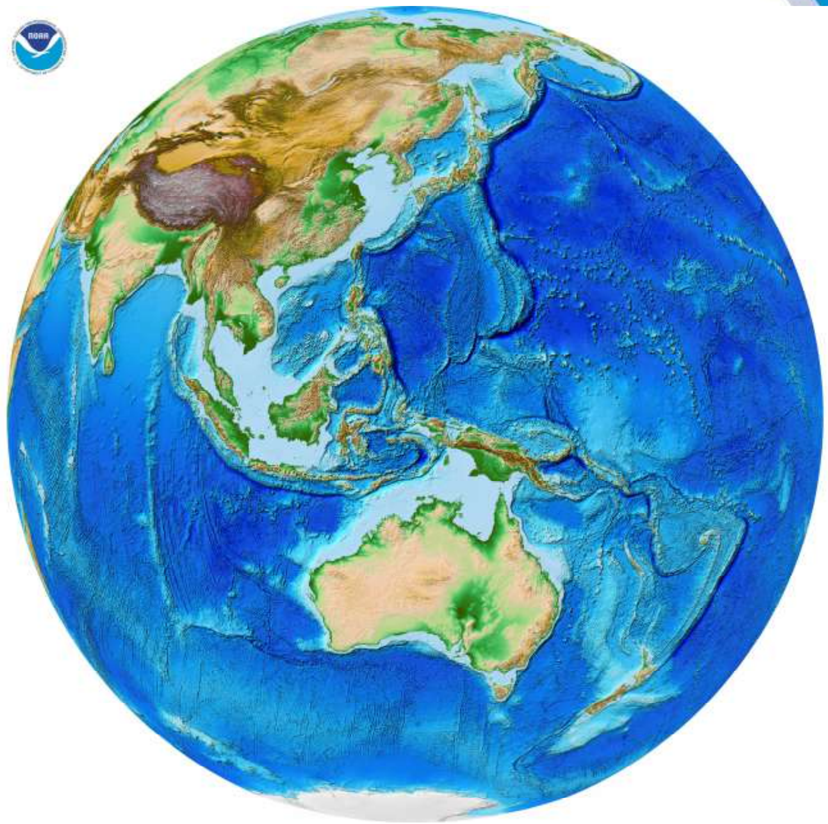
=

21 384 m

L'ellipsoïde de révolution terrestre sert de référence à la représentation du géoïde

La forme de la Terre





le géoïde (EIGEN6)
en référence à l'ellipsoïde

la topographie (ETOPO1)
en référence au géoïde

Le rayon terrestre

IERS Conventions 2010:

- a_e = 6378136,6 ± 0,1 m
- 1/f = 298,25642 ± 0,00001 => a_b=6356751,86 m

GRS80:

- a_e = 6378137 ± 3 m
- 1/f = 298,25222101 (WGS84: 298,25223563)

$$aplatissement : f = \frac{a_e - a_p}{a_e}$$

$$1^{ère}\ excentricité : e = \frac{\sqrt{a_e^2 - a_p^2}}{a_e}$$

$$2^{nd}\ excentricité : e' = \frac{\sqrt{a_e^2 - a_p^2}}{a_p}$$

Moyenne du rayon terrestre:

- arithmétique (GRS80) : $6371\,008{,}8\ m$ $\left(\frac{2a_e + a_p}{2}\right)$
- équisurfacique: $6371\,007{,}2\ m$ $\left(4\pi R^2 = 2\pi a_e^2 + \frac{\pi a_p^2}{e}\frac{ln(1+e)}{ln(1-e)}\right)$
- équivolumétrique: $6371\,000{,}3\ m$ $\left(\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a_p a_e{}^2\right)$
- radiale: $6370\,994{,}4\ m$ $\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r(\theta,\lambda)\sin\theta\, d\theta\, d\lambda = a_e\left(1 - \frac{e'^2}{6} + \frac{3e'^4}{40} - \frac{5e'^6}{112}\right)\right)$

Le potentiel gravitationnel

Selon la loi de la gravitation de Newton:: $U = G\iiint_V \frac{dm}{\Delta} = \frac{G}{r}\iiint_V \frac{r}{\Delta}\, dm$

$V = r/\Delta$ est développable dans une base de fonctions harmoniques sphériques si r'< r:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n \ avec\ \rho = \frac{r'}{r} \ et\ P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} (2-\delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin\varphi) P_{n,m}(\sin\varphi') \cos(m(\lambda-\lambda'))$$

d'où:

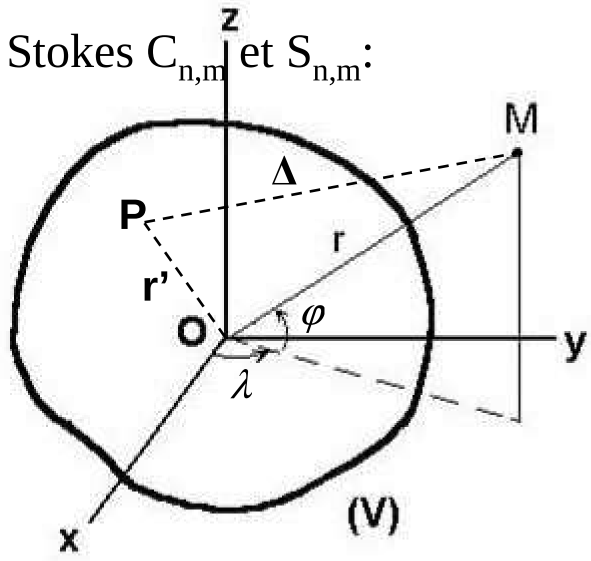
$$U = \frac{G}{r}\iiint_V \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (2-\delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi) P_{n,m}(\sin\varphi') \cos(m(\lambda-\lambda'))\, dm$$

soit en isolant la partie intégrale sous la forme de coefficients de Stokes $C_{n,m}$ et $S_{n,m}$:

$$U = \frac{GM}{a_e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}(\sin\varphi)\left(C_{n,m}\cos m\lambda + S_{n,m}\sin m\lambda\right)$$

avec:

$$Ma_e^n \begin{Bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{Bmatrix} = \iiint_V (2-\delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r'^n P_{n,m}(\sin\varphi') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm$$



$GM = 398600.4415\ km^3/s^2$

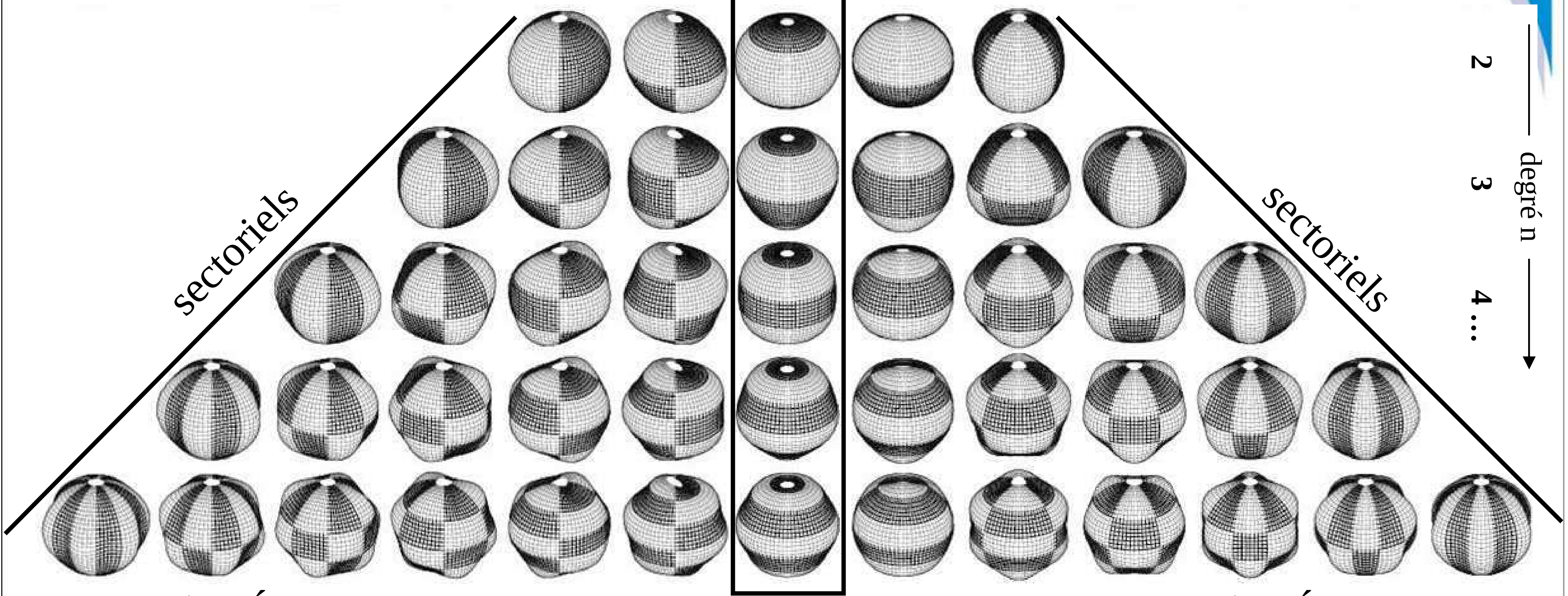
Les fonctions harmoniques sphériques

$P_{n,m}(\sin\varphi)\ \sin(m\lambda)$ $\quad$ $P_{n,0}(\sin\varphi)$ $\quad$ $P_{n,m}(\sin\varphi)\ \cos(m\lambda)$

zonaux

ordre m

degrés



tesséraux

tesséraux

ordres **3** **2** **1** **0** **1** **2** **3 …**

$$Ma_e^n \begin{Bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{Bmatrix} = \iiint_V (2-\delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r'^n P_{n,m}(\sin\varphi') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm$$

Expression du coefficient de degré 0

Le degré 0 agit comme facteur d'échelle de la masse conventionnelle M de la Terre:

$$C_{0,0} = \frac{1}{M} \iiint_V dm = 1$$

GM est défini par sa valeur en Temps Coordonné Géocentrique (TCG). Cette constante gravitationnelle géocentrique, incluant la masse de l'atmosphère, est en fait déduite de l'ajustement d'orbite des satellites Lageos-1 et -2 à partir des données de suivi laser :

$$GM = 3.986004418\ 10^{14} \pm 8\ 10^{5}\ m^3\ s^{-2}\ \text{(IERS Standards)}$$

Le TCG est une échelle de temps-coordonnée (le *t* des équations) liée au système de référence spatio-temporel géocentrique. Il diffère du Temps Terrestre (TT), temps-coordonné lié à la réalisation du Temps Atomique International (TAI, appelé temps propre mesurable) et rapporté au géoïde:

$$TT = TAI + 32.184\ s\ \ \text{(pour assurer la continuité avec le TE)}$$

Dans cette échelle rapporté à un temps mesurable, GM s'obtient par transformation:

$$GM_{TT} = GM_{TCG}\,(1 - L_G) = 3.986004415\ 10^{14}\ m^3\ s^{-2}$$

C'est la valeur adoptée dans les modèles EIGEN.

Expression du coefficient de degré 1

Degré 1 : $C_{1,0} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,0}(\sin\varphi') dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \sin\varphi' dm$

$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V z' dm = \frac{z_G}{a_e}$$

$$C_{1,1} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,1}(\sin\varphi') \cos\lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \cos\varphi' \cos\lambda' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V x' dm = \frac{x_G}{a_e}$$

$$S_{1,1} = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' P_{1,1}(\sin\varphi') \sin\lambda' dm = \frac{1}{Ma_e} \iiint_V r' \cos\varphi' \sin\lambda' dm$$

$$= \frac{1}{Ma_e} \iiint_V y' \, dm = \frac{y_G}{a_e}$$

Le degré 1 définit le centre des masses G de la Terre tel que :

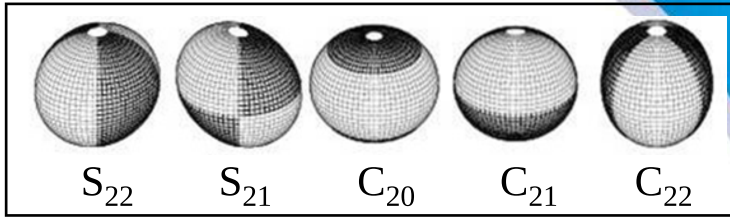
$$G \begin{cases} x_G = a_e C_{1,1} \\ y_G = a_e S_{1,1} \\ z_G = a_e C_{1,0} \end{cases}$$

Le degré 1 varie principalement en fonction du transfert saisonnier des masses fluides superficielles. Les satellites orbitant autour du centre des masses, cette variation se répercute d’autant sur l’origine du système de référence terrestre (le centre de figure) dont l’ITRF est la réalisation.

Expression du coefficient de degré 2

$$C_{2,0}=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V r'^2 P_{2,0}(\sin\varphi')dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V r'^2\,\frac{\left(3\sin\varphi'^2-1\right)}{2}dm$$

$$=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\left[z'^2-\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)\right]dm=\frac{\left(I_{xx}+I_{yy}\right)/2-I_{zz}}{Ma_e^{\,2}}$$



$$C_{2,1}=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{3}r'^2P_{2,1}(\sin\varphi')\cos\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V r'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\cos\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V x'z'dm=\frac{-I_{xz}}{Ma_e^{\,2}}$$

$$S_{2,1}=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{3}r'^2P_{2,1}(\sin\varphi')\sin\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V r'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\sin\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V y'z'dm=\frac{-I_{yz}}{Ma_e^{\,2}}$$

$$C_{2,2}=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{12}r'^2P_{2,2}(\sin\varphi')\cos 2\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{4}r'^2\cos^2\varphi'\cos 2\lambda' dm=\frac{1}{4Ma_e^{\,2}}\iiint_V\left(x'^2-y'^2\right)dm=\frac{I_{yy}-I_{xx}}{4Ma_e^{\,2}}$$

$$S_{2,2}=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{12}r'^2P_{2,2}(\sin\varphi')\sin 2\lambda' dm=\frac{1}{Ma_e^{\,2}}\iiint_V\frac{1}{4}r'^2\cos^2\varphi'\sin 2\lambda' dm=\frac{1}{2Ma_e^{\,2}}\iiint_V x'y'dm=\frac{-I_{xy}}{2Ma_e^{\,2}}$$

Le degré 2 conditionne le tenseur d'inertie *I* de la Terre :

$$I=\begin{pmatrix} I_{xx}I_{xy}I_{xz}\\ I_{yx}I_{yy}I_{yz}\\ I_{zx}I_{zy}I_{zz}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}Tr(I)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+Ma_e^2\begin{pmatrix} C_{2,0}/3-2C_{2,2} & -2S_{2,2} & -C_{2,1}\\ -2S_{2,2} & C_{2,0}/3+2C_{2,2} & -S_{2,1}\\ -C_{2,1} & -S_{2,1} & -2C_{20}/3\end{pmatrix}$$

La trace de I: Tr(I)=$I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}$, est invariante dans l'hypothèse de la conservation de la masse.

Le potentiel de pesanteur

La Terre étant en rotation, chaque point de sa surface est soumis, outre à l'attraction gravitationnelle, à la force axifuge de composantes :

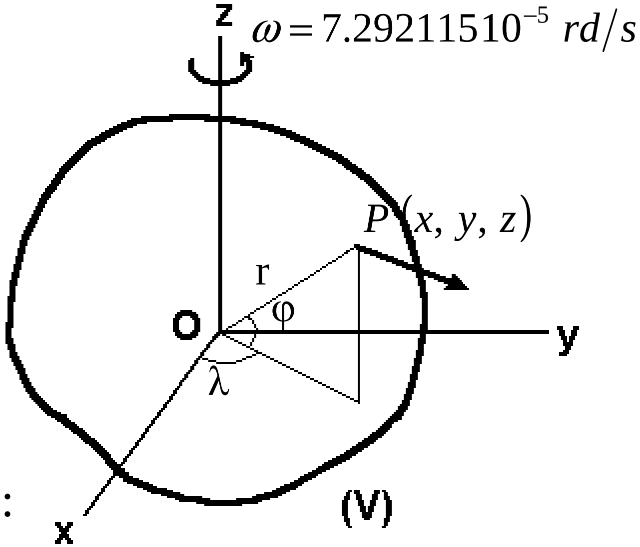
$$F_c^T\left(\omega^2 x, \omega^2 y, 0\right)$$

qui dérive du potentiel :

$$U_c = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$

Le potentiel de pesanteur est donc à la surface de la Terre :

$$W = \iiint_V \frac{G}{\Delta}dm + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$



$U_c(0) = 108\ 159.5\ m^2\ s^{-2}$

Le volume (V) est limité par la surface topographique sur laquelle sont effectuées les mesures de pesanteur. Liées à des mesures de nivellement, elles donnent accès à la forme de la Terre en terme de surface équipotentielle, ou géoïde, qui est la surface fondamentale en géodésie.

Le potentiel axifuge modifie l'équation de Laplace à la surface de la Terre en rotation tel que:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

L'ellipsoïde de référence

La Terre est en première approximation un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles : l'écart entre les rayons équatorial et polaire est d'environ 21,3 km, soit 0,3% du rayon :

$$a = 6378136{,}46\ m \qquad f = \frac{a-b}{a} \quad ,\ aplatissement\ (1/f = 298{,}25765)$$

$$b = 6356751{,}73\ m \qquad f \cong \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \quad ,\ formule\ de\ Clairault\ (0{,}00162 + 0{,}00173)$$

La référence du géoïde à un ellipsoïde de révolution voisin est historique, mais demeure d'un grand intérêt pour assimiler les discordances à des infiniments petits du premier ordre. Pour cela, il faut définir un ellipsoïde de référence qui satisfait à la fois à des conditions géométriques et dynamiques pour que sa surface soit équipotentielle de son propre champ :

- son centre de gravité coïncide avec celui de la Terre ;
- son axe de révolution est confondu à celui de la Terre;
- il est en rotation à la vitesse de rotation de la Terre ;
- sa masse est égale à la masse de la Terre (avec l'atmosphère);

On démontre qu'il vaut : $$V = 3GM \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{r^{2n+1}} e^{2n} \frac{1 - n\left(5C_{20}/e^2 + 1\right)}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\sin\varphi) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$

avec : $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = f(2-f)$

Le potentiel normal *V* est donc égal à celui du géoïde.

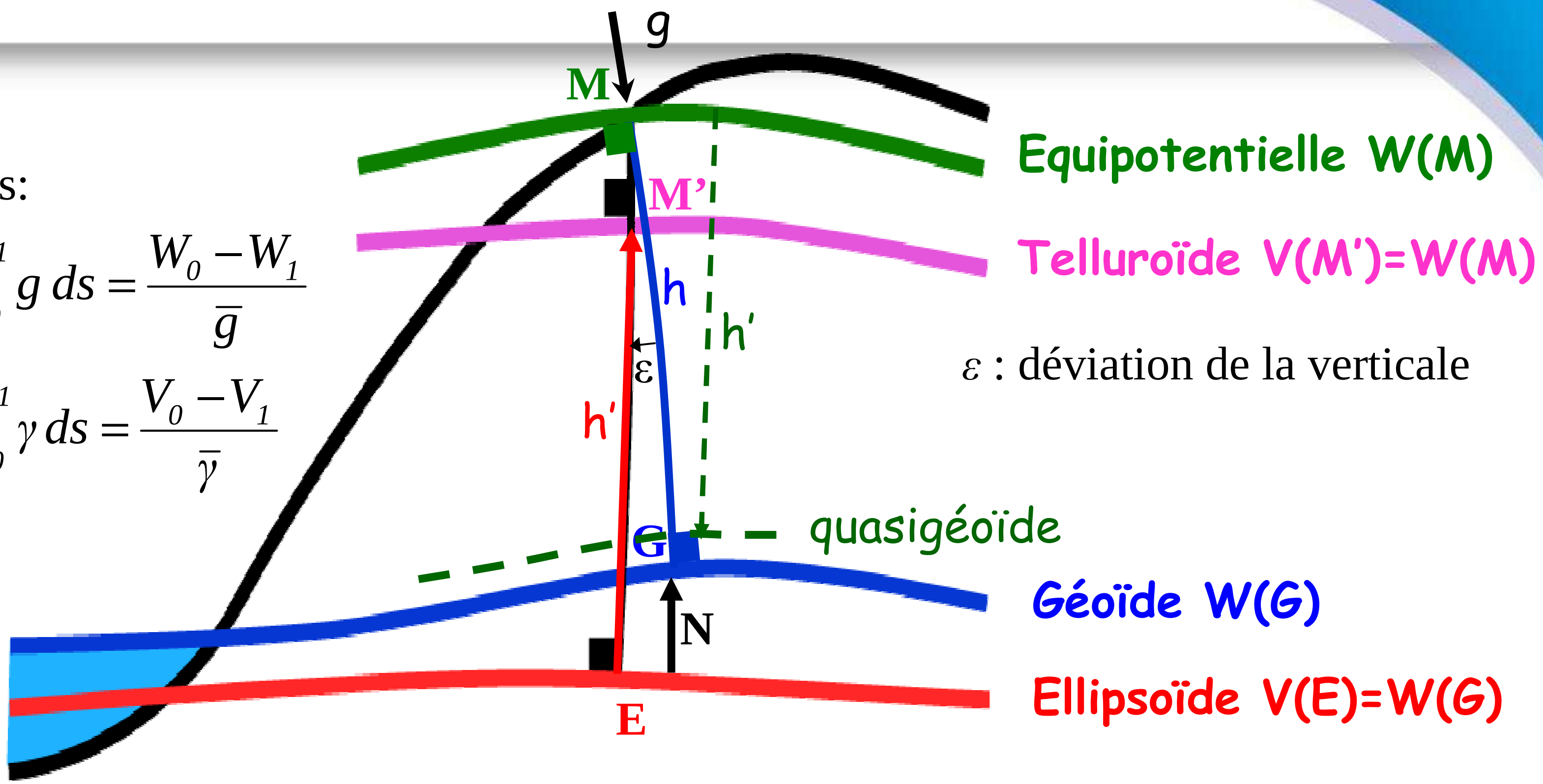
La forme ellipsoïdale correspond avec une très bonne approximation au cas d'une masse fluide homogène en rotation uniforme dont l'aplatissement hydrostatique : 1/297,3 serait toutefois légèrement différent de l'aplatissement de la Terre. Cet aplatissement hydrostatique déterminée par l'équation différentielle de Clairaut (1743) fait abstraction de la connaissance de la répartition de densité.

Les altitudes

Altitudes:

$$h = \frac{1}{\bar{g}} \int_0^1 g\, ds = \frac{W_0 - W_1}{\bar{g}}$$

$$h' = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^1 \gamma\, ds = \frac{V_0 - V_1}{\bar{\gamma}}$$



ε : déviation de la verticale

N : hauteur du géoïde / ellipsoïde

$g = -\partial W/\partial h$: accélération de la pesanteur

h : altitude orthométrique (normale au géoïde)

$\gamma = -\partial V/\partial h$: accélération normale

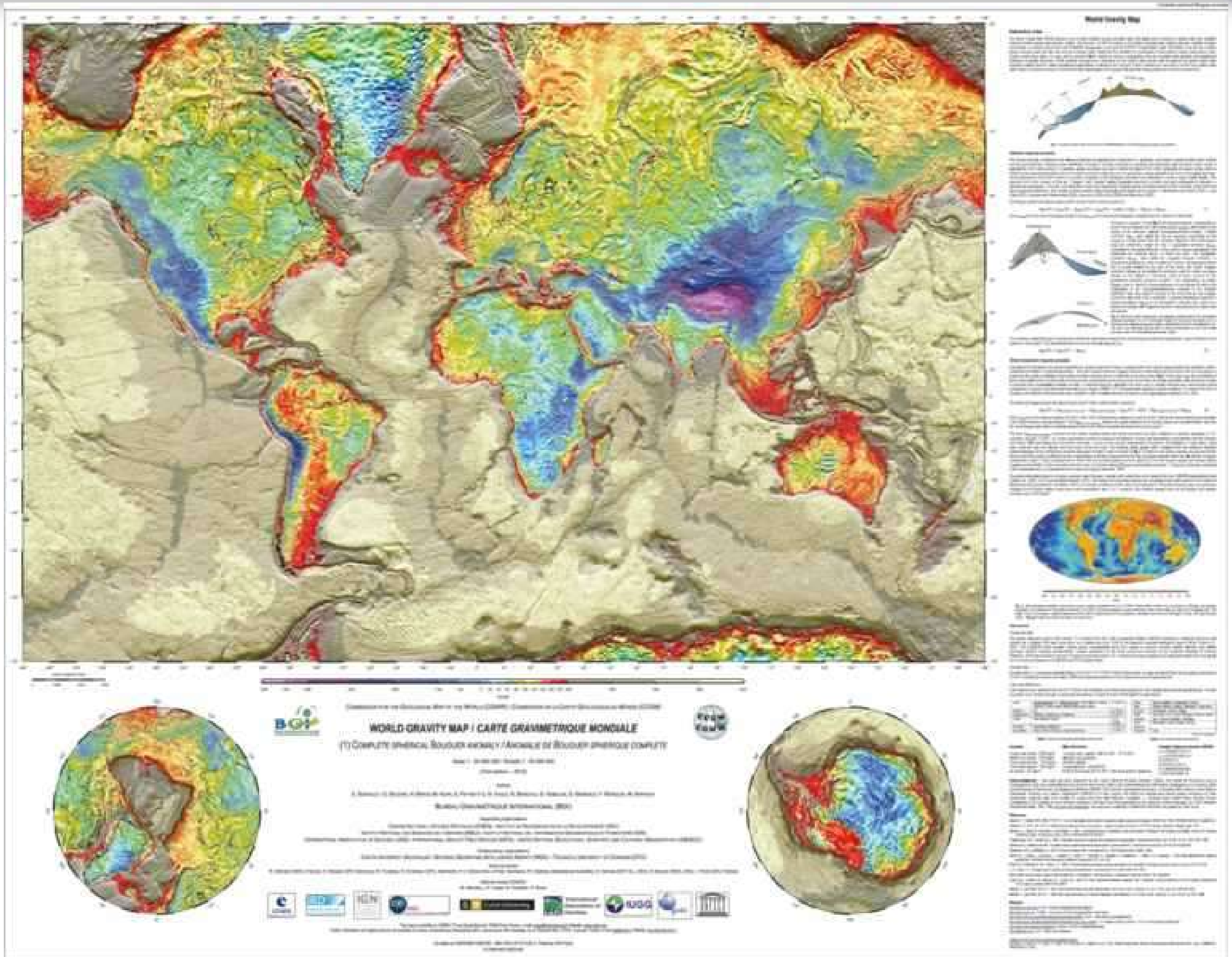
h' : altitude normale (à l'ellipsoïde)

Anomalie d'altitude: $h' - h = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} h = \frac{g - \gamma - 2\pi G\rho h + \gamma(J - J_0)h}{\bar{\gamma}} h \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} h$

(Δg_B: anomalie de Bouguer)

(soit pour $\Delta g_B \approx 100$ mGal $\rightarrow \sim 10^{-4}\, h$)

La carte BGI des anomalies de Bouguer

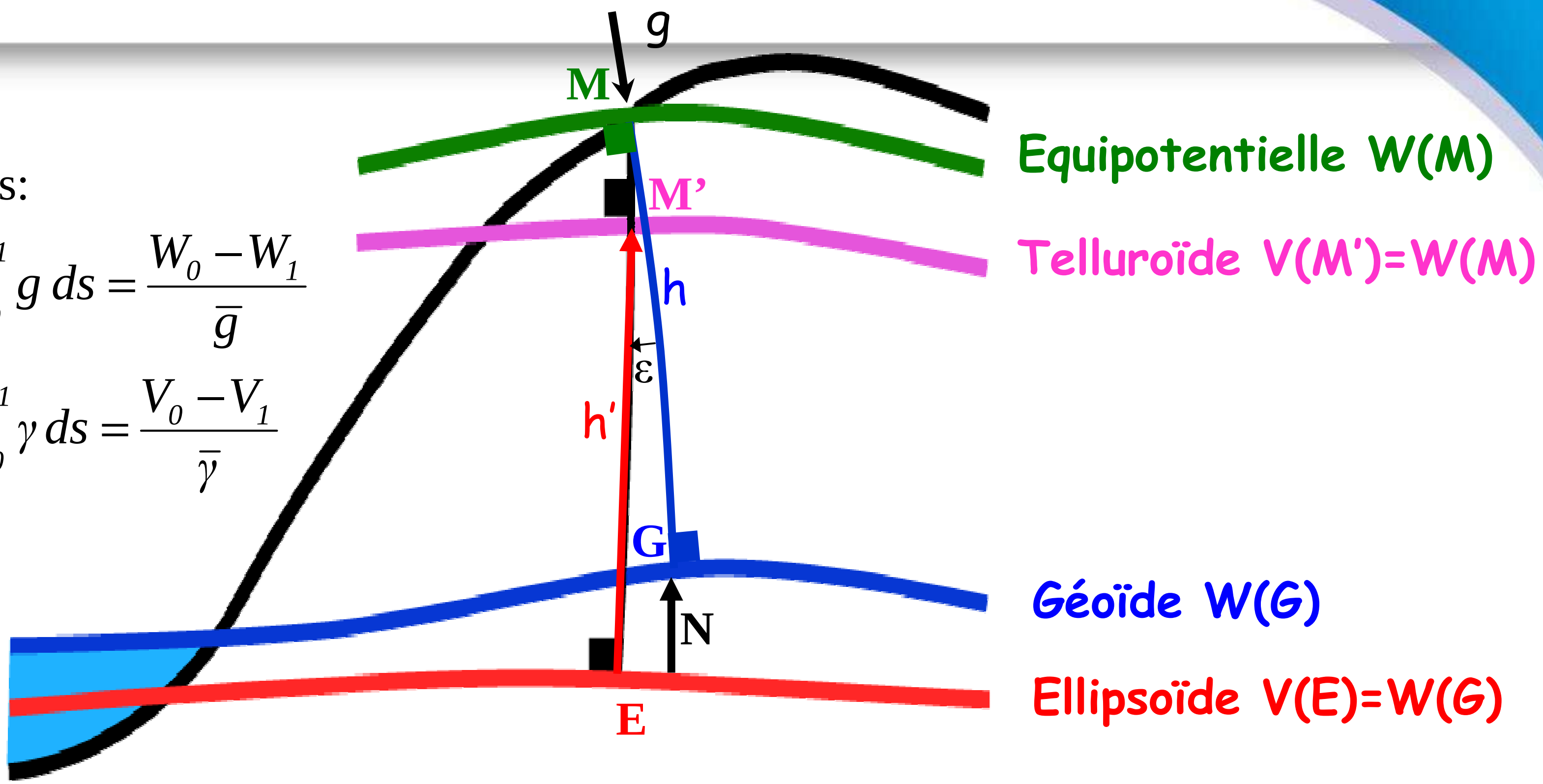


Le géoïde

Altitudes:

$$h = \frac{1}{\bar{g}}\int_0^1 g\,ds = \frac{W_0 - W_1}{\bar{g}}$$

$$h' = \frac{1}{\bar{\gamma}}\int_0^1 \gamma\,ds = \frac{V_0 - V_1}{\bar{\gamma}}$$



$W_G = U + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$: potentiel de pesanteur sur le géoïde

V_E : potentiel normal de l'ellipsoïde / $V_E = W_G$

$T_G = W_G - V_G$: potentiel perturbateur au point G

$$T_G = W_G - V_E - \left.\frac{\partial V}{\partial h}\right|_E N = W_G - V_E + \gamma N = \gamma N \Rightarrow \boxed{N = \frac{T_G}{\gamma}} \qquad \textit{(formule de Bruns)}$$

Le géoïde

T est une fonction harmonique par différence de 2 fonctions harmoniques ($\nabla^2 T=0$):

$$T = W - V = GM \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^{\,n}}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}(\sin\varphi)\left(C^*_{n,m}\cos m\lambda + S^*_{n,m}\sin m\lambda\right)$$

où les coefficients $C^*_{n,m}, S^*_{n,m}$ représentent les différences entre les coefficients du potentiel réel et ceux correspondants du potentiel de l'ellipsoïde de référence:

$$V = 3GM \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{r^{2n+1}} e^{2n} \frac{1 - n\left(5C_{20}/e^2 + 1\right)}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\sin\varphi) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi$$

pour les termes zonaux pairs:

$$\begin{bmatrix} C^*_{n,m} \\ S^*_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{bmatrix}_W - \begin{bmatrix} (-1)^{n/2}\dfrac{3}{2}e^n \dfrac{2 - n - 5nC_{20}/e^2}{(n+1)(n+3)} \\ 0 \end{bmatrix}_V$$

pour les autres termes:

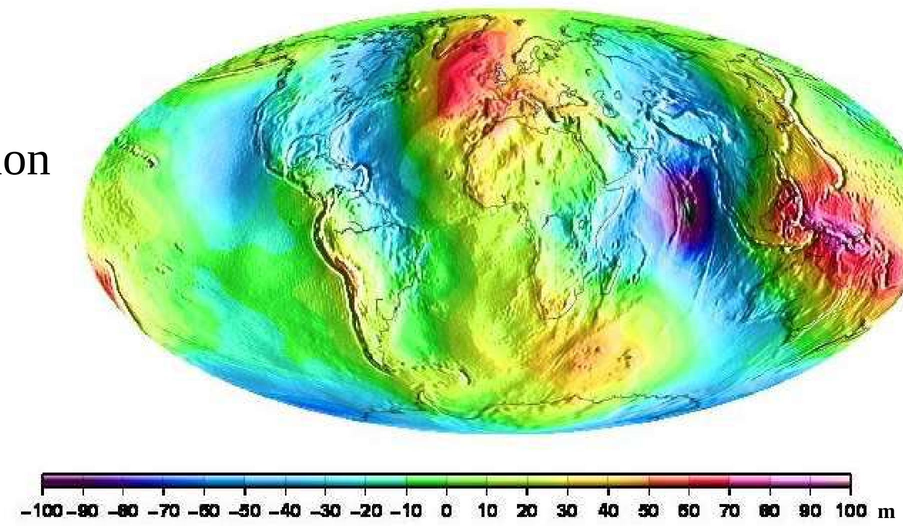
$$\begin{bmatrix} C^*_{n,m} \\ S^*_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{bmatrix}_W$$

La hauteur du géoïde se modélise alors:

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{GM}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_e^{\,n}}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_{n,m}(\sin\varphi)\left(C^*_{n,m}\cos m\lambda + S^*_{n,m}\sin m\lambda\right)$$

La correction ellipsoïdale

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{T}{\gamma_0} + e^2 N_1$$

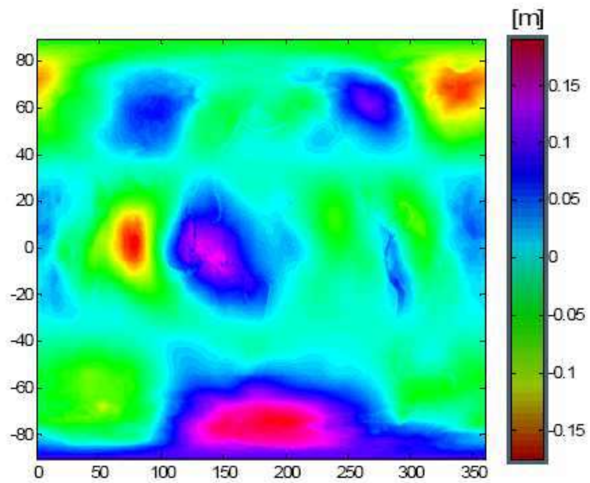


Correction ellipsoïdale due à la variation de γ en fonction de la latitude :

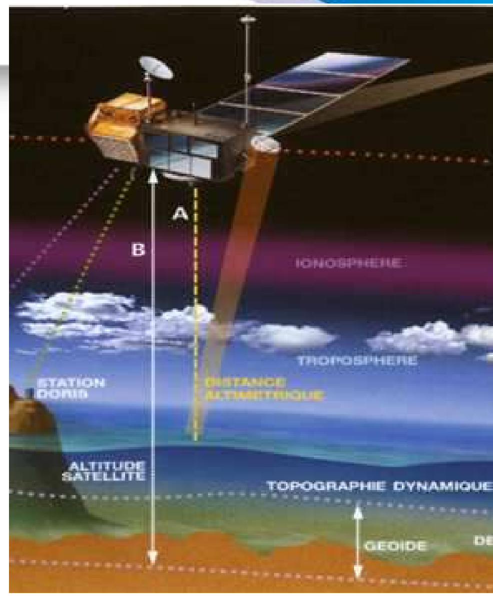
$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \varphi \right)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\gamma} = \frac{T}{\gamma_0} \left(1 + \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \varphi \right)$$

soit: $$N_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right) N_0$$



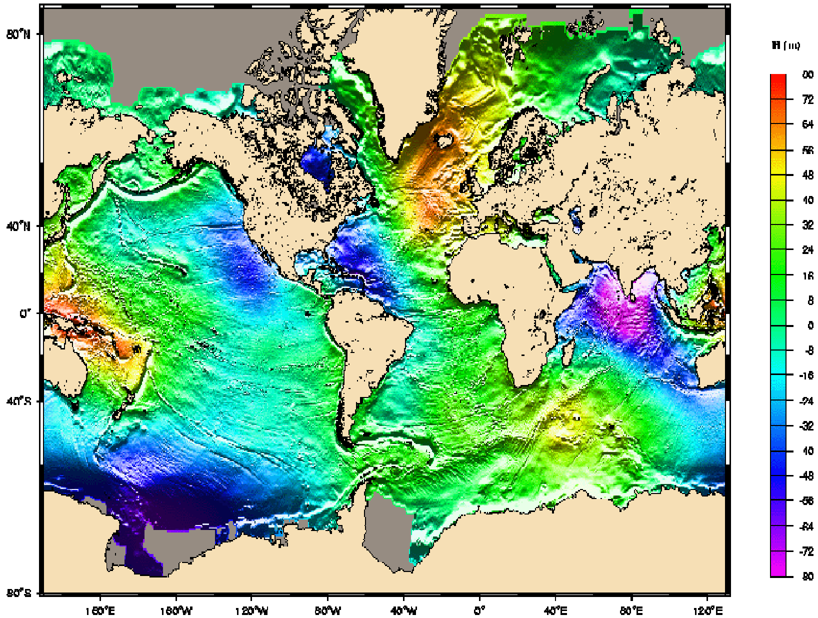
La forme des océans



L'équation de hauteur de l'orbite au-dessus de l'ellipsoïde s'écrit :

$$h_{orb} = N + \langle h \rangle + h_{alt}$$

h_{orb} : *hauteur de l'orbite au dessus de l'ellipsoïde*
N : *altitude du géoïde par rapport à l'ellipsoïde*
$\langle h \rangle$: *écart résiduel entre la surface océanique et le géoïde*
h_{alt} : *mesure altimétrique*



L'équation de surface moyenne par rapport à un ellipsoïde se réduit à :

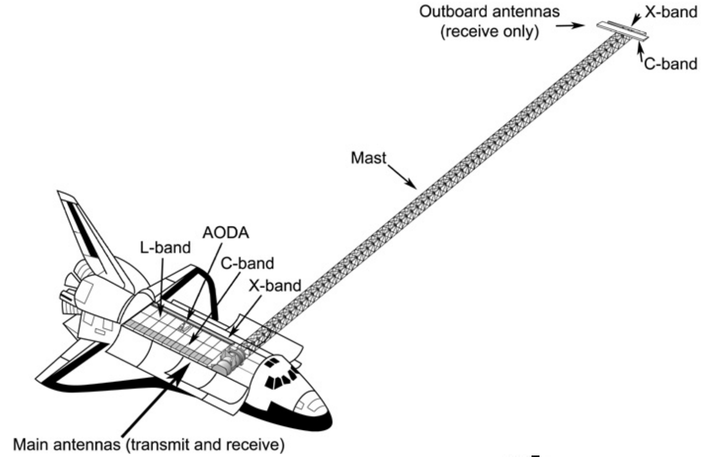
$$h_{sm} = N + \langle h \rangle$$

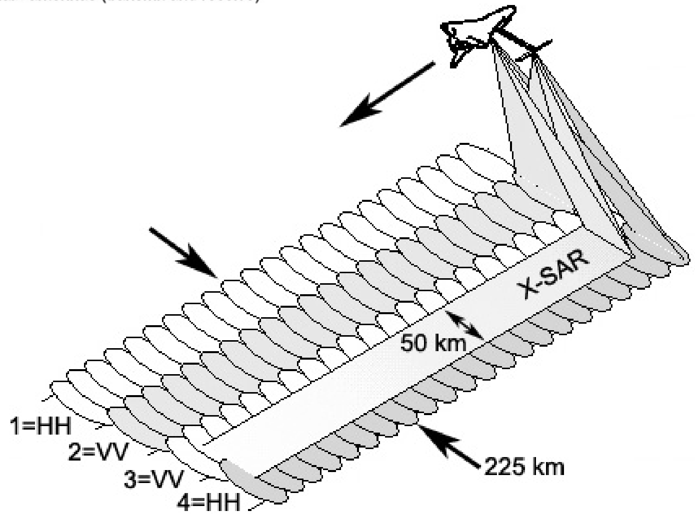
h_{sm} : *hauteur de la surface moyenne par rapport à l'ellipsoïde*

La topographie continentale

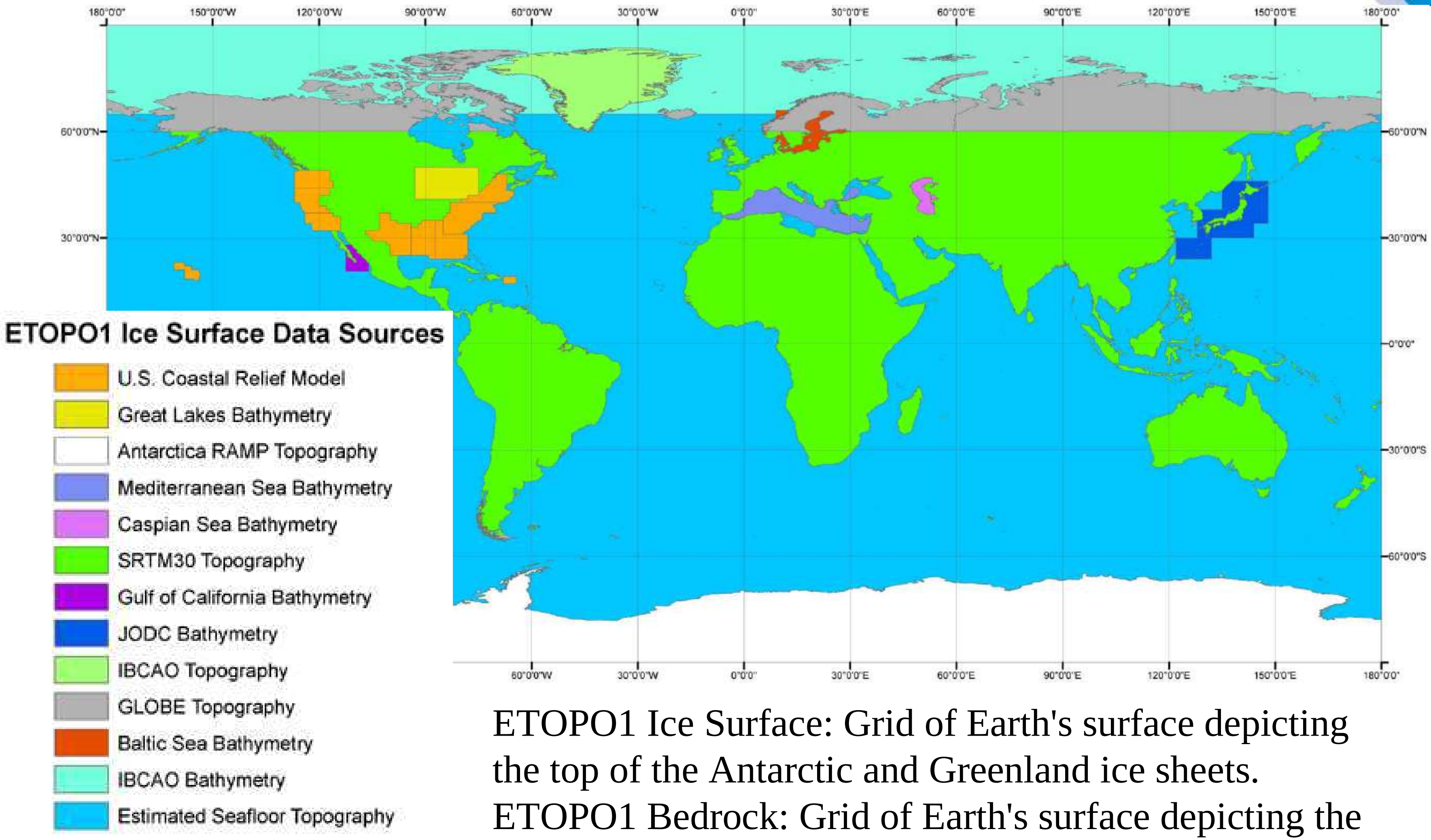
The Shuttle Radar Topography Mission collected topographic data over nearly 80% of Earth's land surfaces with a ~5m height precision and ~30m spatial resolution.

On February 11, 2000, the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) payload onboard Space Shuttle Endeavour launched into space. With its radars sweeping most of the Earth's surfaces, SRTM acquired enough data during its ten days of operation to obtain the most complete near-global high-resolution database of the Earth's topography.
To acquire topographic (elevation) data, the SRTM payload was outfitted with two radar antennas. One antenna was located in the shuttle's payload bay, the other on the end of a 60-meter mast that extended from the payload pay once the Shuttle was in space. Virtually all of the land surface between +/- 60 degrees latitude was mapped by SRTM. Processing of the C-band data took two years.





Le Modèle Numérique de Terrain



ETOPO1 Ice Surface: Grid of Earth's surface depicting the top of the Antarctic and Greenland ice sheets.
ETOPO1 Bedrock: Grid of Earth's surface depicting the bedrock underneath the ice sheets

Le Modèle Numérique de Terrain

ETOPO1 is a 1 arc-minute global relief model of Earth's surface that integrates land topography and ocean bathymetry. It was built from numerous global and regional data sets, and is available in "Ice Surface" (top of Antarctic and Greenland ice sheets) and "Bedrock" (base of the ice sheets) versions.

Le plus haut sommet du monde?

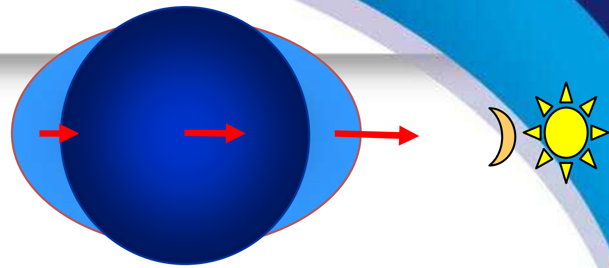
L’**Everest**, en tibétain ***Chomolungma***, en népalais ***Sagarmatha***, aussi appelé **mont Everest**, est une montagne située dans la chaîne de l'Himalaya, à la frontière entre le Népal (Sagarmatha) et la Chine (Tibet).
Latitude: 27°59′18″ N, longitude: 86°55′32″ E, altitude: **8 848 m**. Il est identifié comme le plus haut sommet du monde au-dessus du niveau de la mer (H géoïde/WGS84: -28,74 m).

distances ellipsoïde: 4665 m

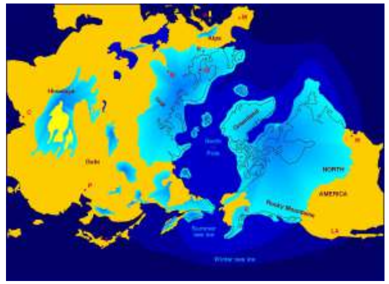
Le Chimborazo peut être défini comme le plus haut sommet du monde, en le considérant comme le sommet le plus éloigné du centre de la Terre. Le **Chimborazo** est un volcan d’Équateur situé près de Riobamba, à environ 180 km au sud de Quito.
Latitude: 1° 28' 1" S, longitude: 78° 49' 3" W, altitude: **6 268 m**. C’est le sommet le plus haut des Andes équatoriennes (H géoïde/WGS84: +25,93 m).

distances sommets: 2140 m

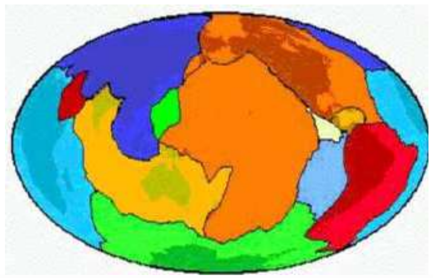
Les déformations de la Terre



- marées terrestres (→ 30 cm)
- effets de charge (→ 10 cm)
  - marées océaniques
  - courants océaniques
  - pression atmosphérique
  - hydrologie
  - rebond post-glaciaire
- marée polaire (→ 2 cm)
- tectonique (→ 10 cm)
- tremblements de Terre (→ 2 m)

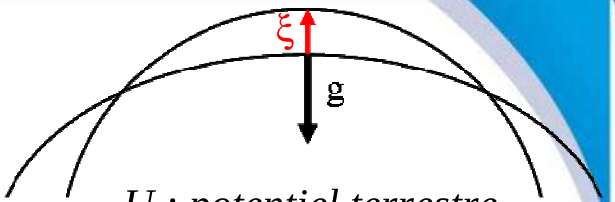


(fin du Pléistocène)



La marée terrestre : théorie de Love (1909)

Equipotentielle de surface : $U(r,\varphi,\lambda)=C$



Le potentiel de marée introduit une ***déformation de l'équipotentielle***

telle que : $U(r+\xi,\varphi,\lambda)+U_P(r,\varphi,\lambda)=C$

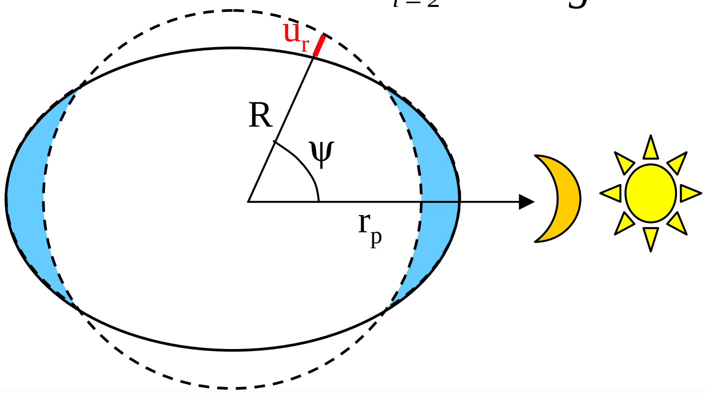
U : potentiel terrestre
U_P : potentiel excitateur

soit: $U(r,\varphi,\lambda)+\dfrac{\partial U}{\partial r}\xi+U_P(r,\varphi,\lambda)=C$ *d'où* $\xi=-\dfrac{U_P}{\dfrac{\partial U}{\partial r}}=\dfrac{U_P}{g}$

Dans une hypothèse de Terre élastique, le déplacement de la croûte terrestre doit être proportionnel à l'excitation.

Excitation : $U_P=\dfrac{Gm_P}{R}\sum_{l=2}^{3}\left(\dfrac{R}{r_P}\right)^{l+1}P_{l0}(\cos\psi)$

Déplacement : $u_r=\sum_{l=2}^{3}\boxed{h_l}\dfrac{U_{P_l}}{g}$ **, h_l : nombre de Love (sans dimension) de déformation verticale**

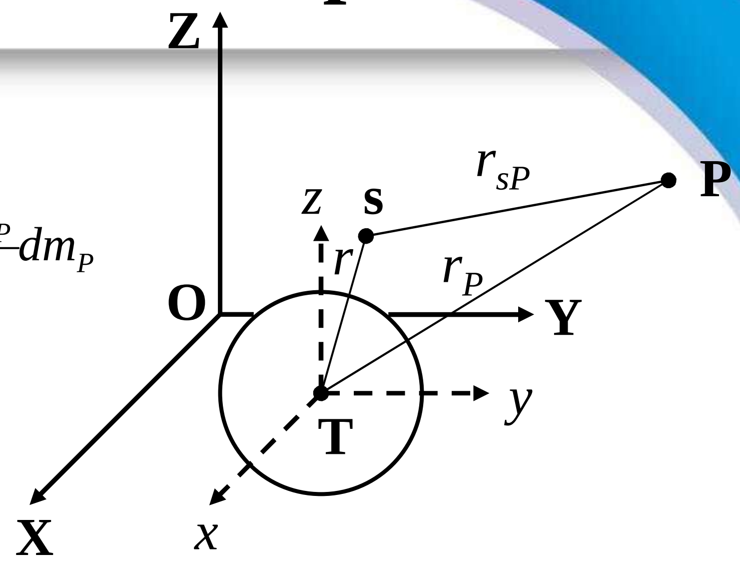


L'incrément de potentiel externe engendré par la déformation élastique de la Terre est porportionnel au potentiel d'excitation et vérifie le principe de Dirichlet. C'est le ***potentiel de marée terrestre :***

$$\Delta U=\sum_{l=2}^{3}\boxed{k_l}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}U_{P_l}(r)$$

k_l : nombre de Love (sans dimension) de potentiel

Attraction gravitationnelle de 3éme corps



Dans un repère inertiel :

$$m\frac{d^2X_s}{dt^2} = -Gm\int_M \frac{X_s - X_T}{r_{sT}^3}\,dM - Gm\int_{M_p}\frac{X_s - X_P}{r_{sP}^3}\,dm_P$$

Dans un repère géocentrique :

$$x = X_S - X_T\,,\qquad x_p = X_P - X_T$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-G\left(1+\frac{m}{M}\right)\int_M \frac{x}{r^3}\,dM}_{corps\ central} \underbrace{-\,G\int_{m_p}\frac{x - x_p}{r_{sP}^3}\,dm_p}_{3ème\ corps} \underbrace{-\,\frac{G}{M}\iint_{M,m_p}\frac{x_p}{r_p^3}\,dM\,dm_p}_{couplage}$$

soit en approximant le 3ème corps à une masse ponctuelle, l'accélération due au 3ème corps s'écrit (par composante) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Gm_P\left[\frac{x - x_p}{r_{sP}^3} + \frac{x_p}{r_P^3}\right] + \frac{m_P}{M}\frac{\partial U_2}{\partial x_P}$$

avec : $U_2 = \dfrac{GM}{a_e}\left(\dfrac{a_e}{r_P}\right)^3 C_{20}P_{20}(\sin\varphi_P)$

(potentiel terrestre de degré 2)

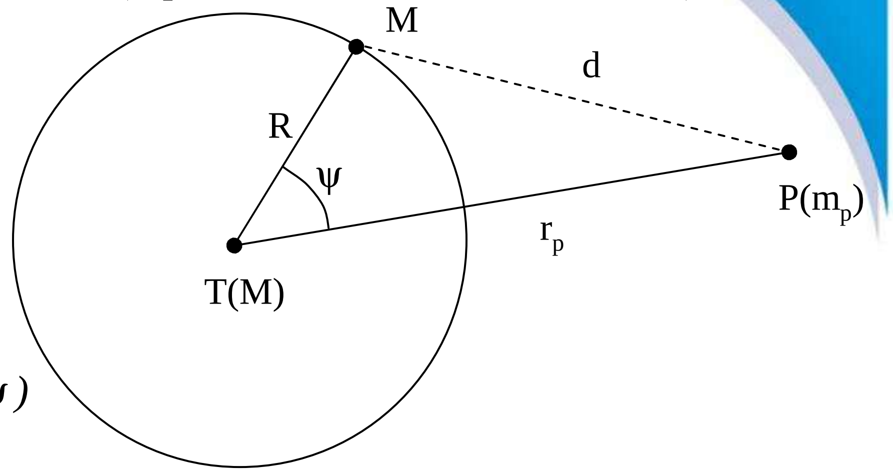
dérivant du potentiel perturbateur :

$$U_P = Gm_p\left[\frac{1}{r_{sP}} - \frac{\bar{r}.\bar{r}_P}{r_p^3}\right] + \frac{m_p}{M}\frac{\partial U_2}{\partial \bar{r}_p}.\bar{r}$$

Le potentiel de marée terrestre

En repère géocentrique, le potentiel d'un corps perturbateur P (représentant la Lune ou le Soleil) s'exprime en M à la surface de la Terre par :

$$U_P = Gm_P\left(\frac{1}{d} - \frac{\overline{R}\cdot\overline{r}_P}{r_P^3}\right)$$



L'inverse de la distance (d^{-1}) se développe en séries de polynômes de Legendre telle que :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_P}\left(1+\left(\frac{R}{r_P}\right)^2 - \frac{2R}{r_P}cos\psi\right)^{-1/2} = \frac{1}{r_P}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{R}{r_P}\right)^n P_n(cos\psi)$$

Si bien que le potentiel perturbateur tronqué au degré 3 se réduit à :

$$U_P = \frac{Gm_P}{r_P}\left(1+\left(\frac{R}{r_P}\right)^2 P_{20}(cos\psi)+\left(\frac{R}{r_P}\right)^3 P_{30}(cos\psi)\right) = U_o + U_2 + U_3$$

$U_o = \frac{Gm_P}{r_P}$ cause l'attraction centrale, U_1 n'existe pas, U_2 et U_3 produisent les déformations de marée terrestre (respectivement de l'ordre de 30 cm et 3 mm), qui, dans la théorie de Love, sont proportionnelles au potentiel perturbateur luni-solaire :

$$u_r = \sum_{\ell=2}^{3}\frac{h_\ell}{g}\Delta U_\ell\ , u_\varphi = \sum_{\ell=2}^{3}\frac{\ell_\ell}{g}\frac{\partial\Delta U_\ell}{\partial\varphi}\ , u_\lambda = \sum_{\ell=2}^{3}\frac{\ell_\ell}{g\cos\varphi}\frac{\partial\Delta U_\ell}{\partial\lambda}$$

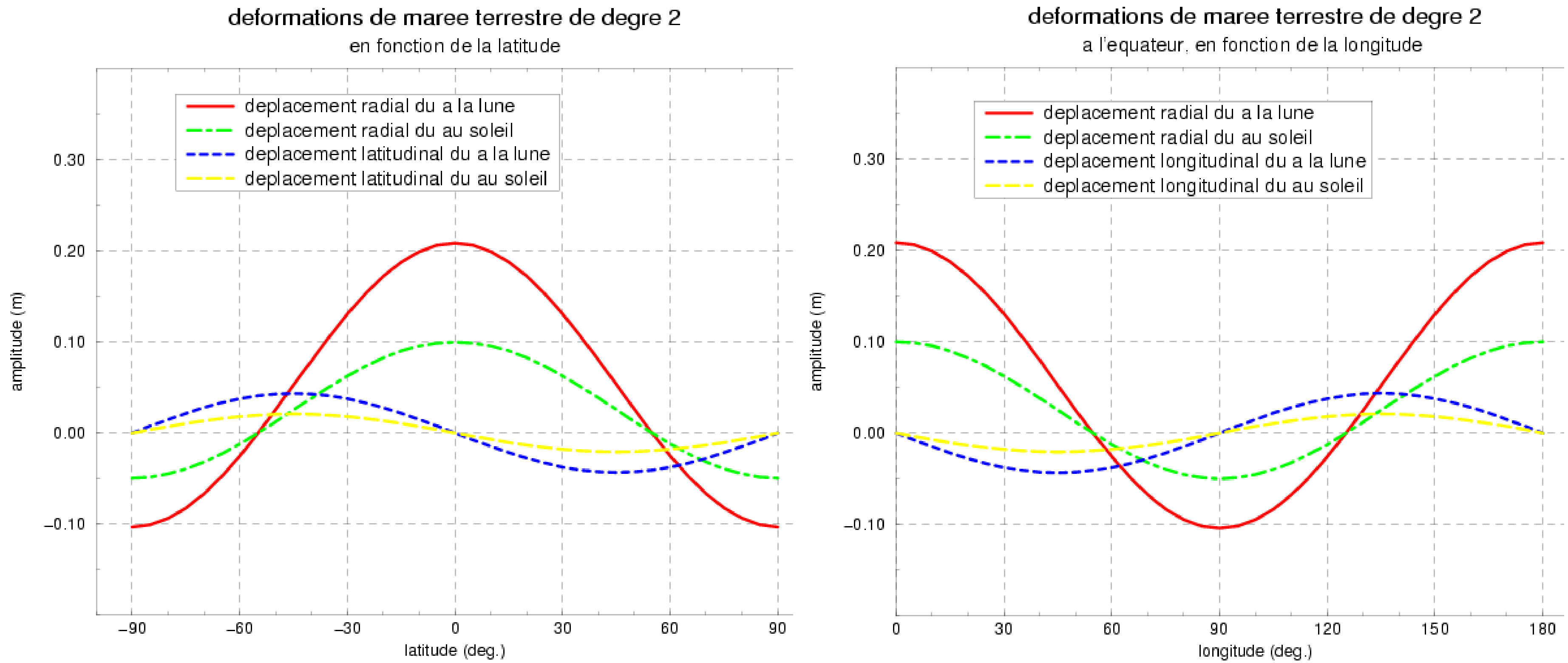
Conformément à la théorie de Love et au principe de Dirichlet, ces déformations génèrent un potentiel perturbateur en un point extérieur à la Terre tel que :

$$\Delta U = \sum_{l=2}^{3}k_\ell\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}U_l = \frac{Gm_p}{r_p}\sum_{l=2}^{3}k_\ell\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1}\left(\frac{R}{r_p}\right)^{\ell}P_{l0}(\cos\psi)$$

Le déplacement de marée solide

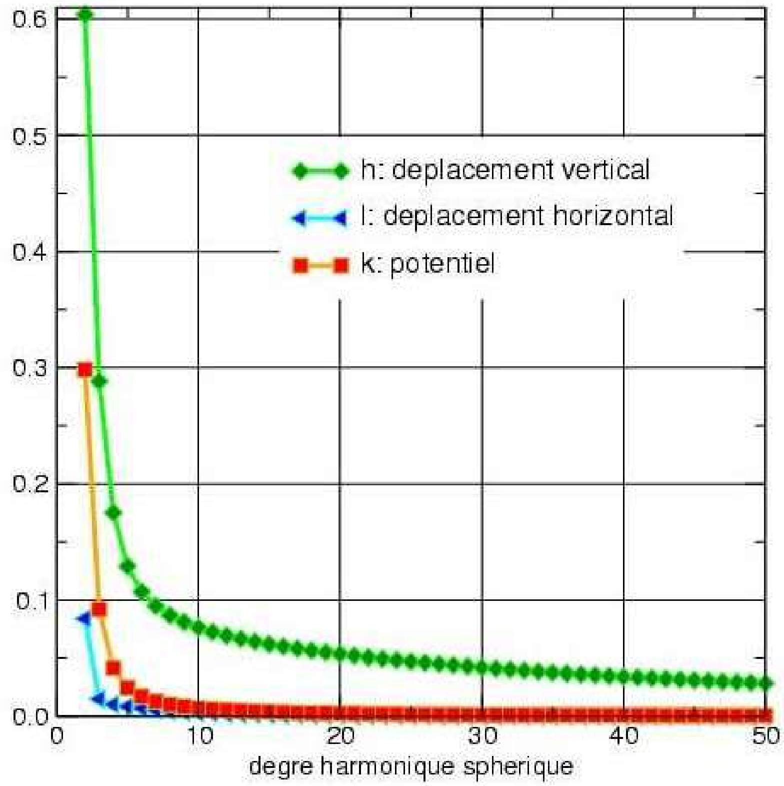
Le déplacement élastique vertical est atténué par le nombre de Love h_l de déplacement élastique vertical. Vers 1912, Toshi Shida ajouta au nombre de Love de déplacement vertical le nombre l_2 (de Shida) de déplacement élastique latéral tel que :

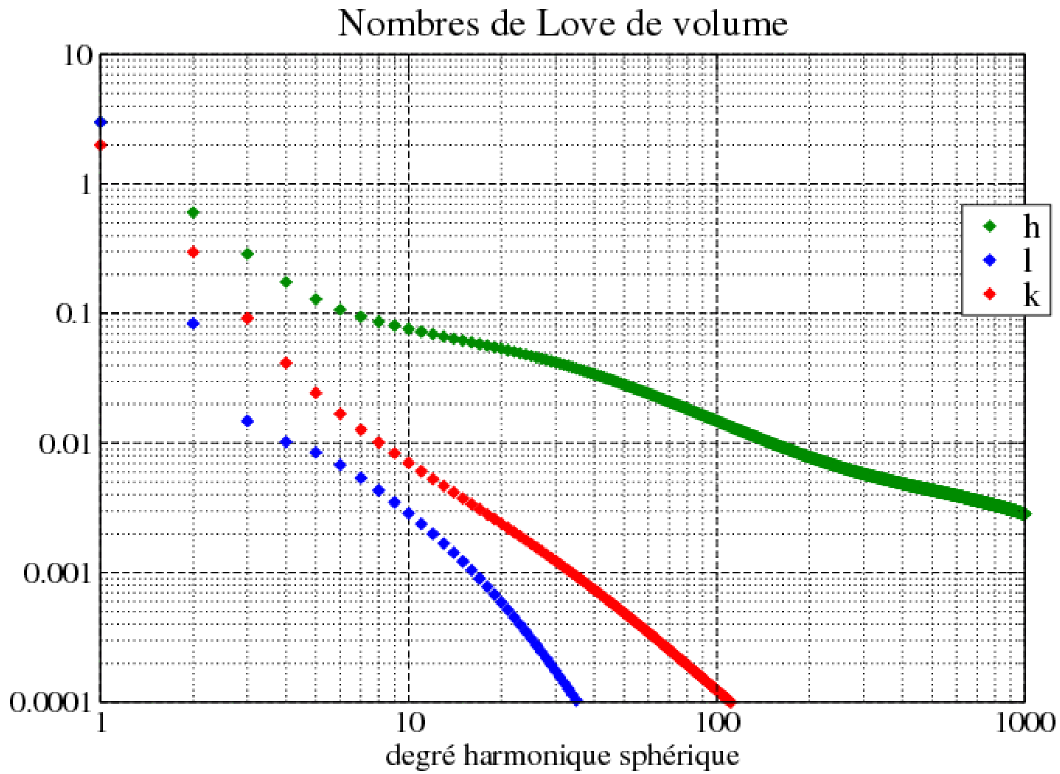
$$u_r = \sum_{l=2}^{\infty} h_l \frac{U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{g}; \quad u_\varphi = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{l_l}{g} \frac{\partial U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{\partial \varphi}; \quad u_\lambda = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{l_l}{g \cos\varphi} \frac{\partial U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{\partial \lambda}$$



(déplacement de degré 3: 1,7 mm en radial et 0,2 mm en perpendiculaire)

Les nombres de Love/Shida





La gravito-élasticité

Les équations de la gravito-élasticité permettent de calculer les nombres de Love de réponse élastique de la Terre (compte tenu de la perturbation gravitationnelle induite), soit à un potentiel gravifique excitateur, soit à une charge surfacique.

La déformation est fondée sur une loi rhéologique (de Maxwell) - qui traduit la relation entre les contraintes à l'intérieur du corps et les déformations - et doit satisfaire différentes conditions, telles la conservation de la masse, la quantité de mouvement ainsi que la loi de Poisson $\left(\nabla^2 U = 4\pi G\rho\right)$.

Le système d'équations différentielles obtenu est développé dans une base harmonique sphérique (*dx/dr=Ax*, avec $x=u_l,v_l,U_l\ldots$) et intégré numériquement depuis le centre en fonction des paramètres provenant d'un modèle de Terre (ex.: PREM, hétérogène et compressible).

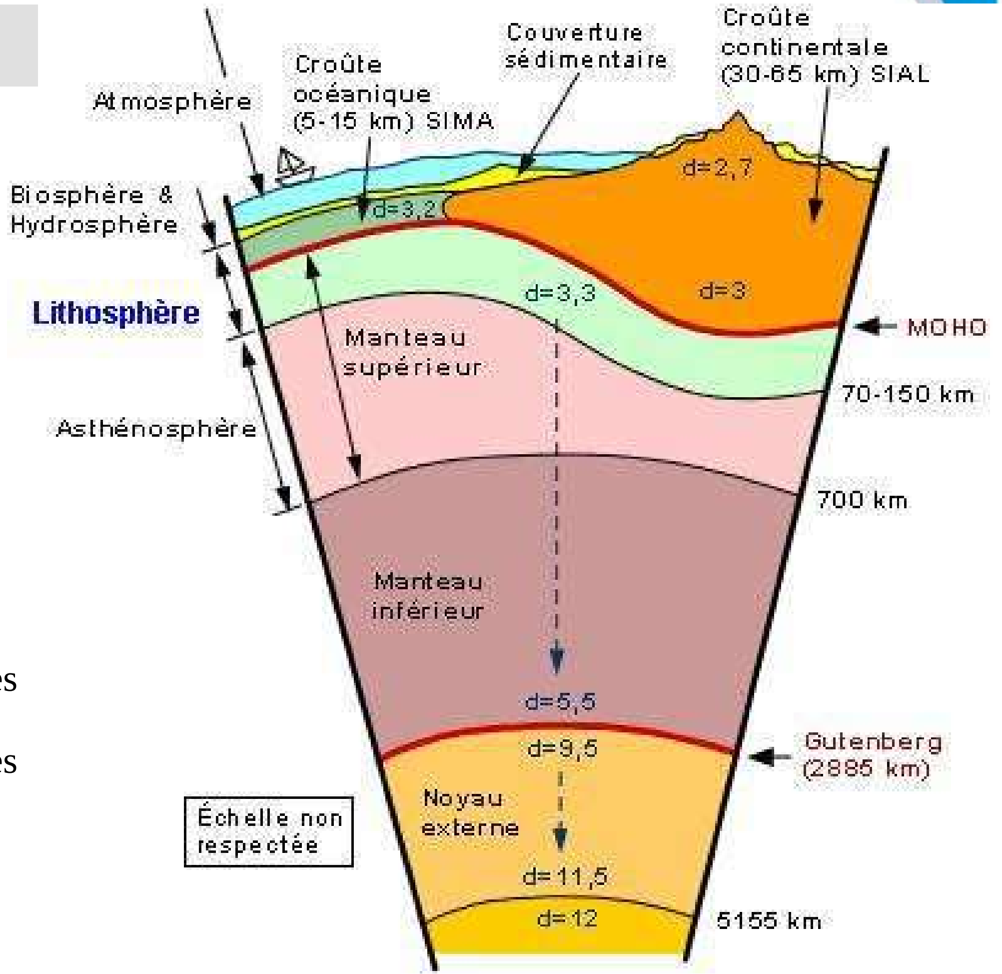
Paramètres de volume:
$$\begin{cases} u_l = h_l \dfrac{U_{p_l}}{g} \\ v_l = l_l \dfrac{U_{p_l}}{g} \\ U_l = \left(1+k_l\right)U_{p_l} \end{cases}$$

de surface:
$$\begin{cases} u_l = h'_l \dfrac{3}{2l+1}\dfrac{q_l}{\overline{\rho}} \\ v_l = l'_l \dfrac{3}{2l+1}\dfrac{q_l}{\overline{\rho}} \\ U_l = \left(1+k'_l\right)\dfrac{3g}{2l+1}\dfrac{q_l}{\overline{\rho}} \end{cases}$$

Le modèle PREM

Preliminary Reference Earth Model fondé sur la sismologie

Région	Sous-région	Épaisseur (km)	Caractérisation
Océan mondial		3,0	1 couche liquide
Croûte		**21,4**	2 couches solides
	croûte supérieure	12,0	type granitique
	croûte inférieure	9,4	type basaltique
Manteau		**2866,6**	8 couches solides
	LID	55,6	solide aléotrope
	LVZ	140,0	solide anisotrope
	zone de transition	450,0	3 couches isotropes
	manteau inférieur	2221,0	3 couches isotropes
Noyau		**3480,0**	2 couches
	noyau externe	2258,5	liquide
	graine	1221,5	solide



L’expression des déplacements

En coordonnées polaires (sphériques):

$$u_r = \sum_{l=2}^{3} h_l \frac{U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{g}; \quad u_\varphi = \sum_{l=2}^{3} \frac{l_l}{g} \frac{\partial U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{\partial\varphi}; \quad u_\lambda = \sum_{l=2}^{3} \frac{l_l}{g\cos\varphi} \frac{\partial U_{P_l}(R,\varphi,\lambda)}{\partial\lambda}$$

$$avec \quad U_P = Gm_P\left(\frac{R^2}{r_p^3}P_{20}(\cos\psi) + \frac{R^3}{r_p^4}P_{30}(\cos\psi)\right); \quad \cos\psi = \frac{\bar{r}_p.\bar{r}}{\|\bar{r}_p\|\|\bar{r}\|}, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_\lambda \end{pmatrix}$$

En coordonnées rectangulaires:

$$\Delta\bar{r} = \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM}\frac{R_e^4}{r_p^3}\left\{h_2\bar{r}\left(\frac{3(\bar{r}_p.\bar{r})^2-1}{2}\right) + 3l_2(\bar{r}_p.\bar{r})\left[\bar{r}_p - (\bar{r}_p.\bar{r})\bar{r}\right]\right\} \qquad [7.5]$$

$$\sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM}\frac{R_e^5}{r_p^4}\left\{h_3\bar{r}\left(\frac{5}{2}(\bar{r}_p.\bar{r})^3 - \frac{3}{2}(\bar{r}_p.\bar{r})\right) + l_3\left(\frac{15}{2}(\bar{r}_p.\bar{r})^2 - \frac{3}{2}\right)\left[\bar{r}_p - (\bar{r}_p.\bar{r})\bar{r}\right]\right\} \qquad [7.6]$$

Correction d’ellipticité: $h_2 = h^{(0)} + h^{(2)}P_{20}(\sin\varphi); \quad l_2 = l^{(0)} + l^{(2)}P_{20}(\sin\varphi)$ $(0.4;\ 0.2\ mm)$

La décomposition fréquentielle

Par trigonométrie sphérique entre P(r_p,δ_p,α_p) et M(r,φ,λ), on établit la relation:

$$cos\psi = sin\varphi\, sin\varphi_p + cos\varphi\, cos\varphi_p\, cos(\lambda-\lambda_p)$$

et $P_{20}(cos\psi)$ s'explicite: $P_{20}(cos\psi) = P_{20}(sin\varphi)P_{20}(sin\varphi_p)$

$$+\frac{1}{3}P_{21}(sin\varphi)P_{21}(sin\varphi_p)cos(\lambda-\lambda_p)$$

$$+\frac{1}{12}P_{22}(sin\varphi)P_{22}(sin\varphi_p)cos(2(\lambda-\lambda_p))$$

soit: $P_{20}(cos\psi) = \frac{1}{4}(3\,sin^2\varphi - 1)(3\,sin^2\varphi_p - 1)$ dans la bande longue période:

$+\frac{3}{4}sin\,2\varphi\; sin\,2\varphi_p\; cos(\lambda-\lambda_p)$ dans la bande diurne

$+\frac{3}{4}cos^2\varphi\; cos^2\varphi_p\; cos(2(\lambda-\lambda_p))$ dans la bande semi-diurne

La Terre est soumise à des petites oscillations (Nearly Diurnal Free Wooble compatibles avec la Free Core Nutation de 430 j) qui entrainent des résonances des nombres de Love aux différentes fréquences (notamment dans la bande diurne) et dont il faut tenir pour une précision millimétrique. La force de Coriolis génère en outre une petite correction latitudinale (Mathews & al., 1995)

La viscoélasticité

La déformation est fonction de la longueur d'onde, mais elle peut subir un léger retard due à la viscosité du manteau principalement.

Dans ce cas, les nombres de Love/Shida sont exprimés en parties réelles (in-phase) et imaginaires (out-of-phase).

CORRECTIONS FOR THE STATION TIDAL DISPLACEMENTS

Step 1: Corrections to be computed in the time domain

in-phase	for degree 2 and 3	Nominal values
	. for degree 2 $\rightarrow$ eq (7.5)	$h_2 \rightarrow h(\phi) = h^{(0)} + h^{(2)}[(3\sin^2\phi - 1)/2]$ $l_2 \rightarrow l(\phi) = l^{(0)} + l^{(2)}[(3\sin^2\phi - 1)/2]$ $h^{(0)} = 0.6078,\ h^{(2)} = -0.0006;\ l^{(0)} = 0.0847,\ l^{(2)} = 0.0002$
	. for degree 3 $\rightarrow$ eq (7.6)	$h_3 = 0.292$ and $l_3 = 0.015$
out-of-phase	for degree 2 only	Nominal values
	. diurnal tides $\rightarrow$ eq (7.10)	$h^I = -0.0025$ and $l^I = -0.0007$
	. semidiurnal tides $\rightarrow$ eq (7.11)	$h^I = -0.0022$ and $l^I = -0.0007$
contribution	from latitude dependence	Nominal values
	. diurnal tides $\rightarrow$ eq (7.8)	$l^{(1)} = 0.0012$
	. semidiurnal tides $\rightarrow$ eq (7.9)	$l^{(1)} = 0.0024$

Les corrections out-of-phase et latitudinales

Contribution out-of-phase dans la bande diurne [7.10]:

$$\delta r = -\frac{3}{4} h^I \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^4}{r_p^3} \sin 2\varphi_p \sin 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_p)$$

$$\delta t = -\frac{3}{2} l^I \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^5}{r_p^4} \sin 2\varphi_p \left[\cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_p)\bar{n} + \sin\varphi \cos(\lambda - \lambda_p)\bar{e}\right]$$

Contribution out-of-phase dans la bande semi-diurne [7.11]:

$$\delta r = -\frac{3}{4} h^I \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^4}{r_p^3} \cos^2\varphi_p \cos^2\varphi \sin 2(\lambda - \lambda_p)$$

$$\delta t = -\frac{3}{4} l^I \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^5}{r_p^4} \cos^2\varphi_p \left[\sin 2\varphi \sin 2(\lambda - \lambda_p)\bar{n} + 2\cos\varphi \cos 2(\lambda - \lambda_p)\bar{e}\right]$$

Contribution latitudinale dans la bande diurne (*0.8 mm*) [7.8]:

$$\delta t = -l^{(1)} \sin\varphi \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^5}{r_p^4} P_{21}(\sin\varphi_p)\left[\sin\varphi \cos(\lambda - \lambda_p)\bar{n} + \cos 2\varphi \sin(\lambda - \lambda_p)\bar{e}\right]$$

Contribution latitudinale dans la bande semi-diurne (*1 mm*) [7.9]:

$$\delta t = -\frac{1}{2} l^{(1)} \sin\varphi \cos\varphi \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{GM} \frac{R_e^5}{r_p^4} P_{22}(\sin\varphi_p)\left[\cos 2(\lambda - \lambda_p)\bar{n} + \sin\varphi \sin 2(\lambda - \lambda_p)\bar{e}\right]$$

Les corrections fréquentielles

La déformation est fonction de la longueur d'onde, mais elle peut différer également selon la fréquence.

On applique de préférence une correction au nombres nominaux tels que donnés dans les "IERS Conventions 2010":

Step 2: Corrections to be computed in the frequency domain and to be added to the results of Step 1

in-phase	for degree 2	
	. diurnal tides → eqs ($\boxed{7.12}$)	→ Sum over all the components of Table $\boxed{7.3a}$
	. semidiurnal tides	→ negligible
in-phase	and out-of-phase for degree 2	
	. long-period tides → eqs ($\boxed{7.13}$)	→ Sum over all the components of Table $\boxed{7.3b}$

Les corrections de marées diurnes et zonales

Table 7.3a: Corrections due to the frequency dependence of Love and Shida numbers for diurnal tides. Units: mm. All terms with radial correction $\geq$ 0.05 mm are shown. Nominal values are $h_2 = 0.6078$ and $l_2 = 0.0847$ for the real parts, and $h^I = -0.0025$ and $l^I = -0.0007$ for the imaginary parts. Frequencies are given in degrees per hour.

Name	Frequency	Doodson	τ	s	h	p	N'	p_s	ℓ	ℓ'	F	D	Ω	$\Delta R_f^{(ip)}$	$\Delta R_f^{(op)}$	$\Delta T_f^{(ip)}$	$\Delta T_f^{(op)}$
Q_1	13.39866	135,655	1	-2	0	1	0	0	1	0	2	0	2	-0.08	0.00	-0.01	0.01
	13.94083	145,545	1	-1	0	0	-1	0	0	0	2	0	1	-0.10	0.00	0.00	0.00
O_1	13.94303	145,555	1	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	-0.51	0.00	-0.02	0.03
No_1	14.49669	155,655	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0.06	0.00	0.00	0.00
π_1	14.91787	162,556	1	1	-3	0	0	1	0	1	2	-2	2	-0.06	0.00	0.00	0.00
P_1	14.95893	163,555	1	1	-2	0	0	0	0	0	2	-2	2	-1.23	-0.07	0.06	0.01
	15.03886	165,545	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-0.22	0.01	0.01	0.00
K_1	15.04107	165,555	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12.00	-0.78	-0.67	-0.03
	15.04328	165,565	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1.73	-0.12	-0.10	0.00
ψ_1	15.08214	166,554	1	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-0.50	-0.01	0.03	0.00
ϕ_1	15.12321	167,555	1	1	2	0	0	0	0	0	-2	2	-2	-0.11	0.01	0.01	0.00

Table 7.3b: Corrections due to the frequency dependence of Love and Shida numbers for zonal tides. Units: mm. All terms with radial correction $\geq$ 0.05 mm are shown. Nominal values are $h = 0.6078$ and $l = 0.0847$. Frequencies are given in degrees per hour.

Name	Frequency	Doodson	τ	s	h	p	N'	p_s	ℓ	ℓ'	F	D	Ω	$\Delta R_f^{(ip)}$	$\Delta R_f^{(op)}$	$\Delta T_f^{(ip)}$	$\Delta T_f^{(op)}$
	0.00221	55,565	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0.47	0.16	0.23	0.07
S_{sa}	0.08214	57,555	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	2	-2	-0.20	-0.11	-0.12	-0.05
M_m	0.54438	65,455	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	-0.11	-0.09	-0.08	-0.04
M_f	1.09804	75,555	0	2	0	0	0	0	0	0	-2	0	-2	-0.13	-0.15	-0.11	-0.07
	1.10024	75,565	0	2	0	0	1	0	0	0	-2	0	-1	-0.05	-0.06	-0.05	-0.03

Les corrections de marées diurnes et zonales

Contribution fréquentielle dans la bande diurne [7.12]:

$$\begin{cases} \delta r = \left[\delta R_f^{(ip)} \sin(\theta_f + \lambda) + \delta R_f^{(op)} \cos(\theta_f + \lambda)\right] \sin 2\varphi \\ \delta \bar{t} = \left[\delta T_f^{(ip)} \cos(\theta_f + \lambda) - \delta T_f^{(op)} \sin(\theta_f + \lambda)\right] \sin\varphi\, \bar{e} \\ \quad + \left[\delta T_f^{(ip)} \sin(\theta_f + \lambda) + \delta T_f^{(op)} \cos(\theta_f + \lambda)\right] \cos 2\varphi\, \bar{n} \end{cases}$$

avec: $$\begin{pmatrix} \delta R_f^{(ip)} \\ \delta R_f^{(op)} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{24\pi}} H_f \begin{pmatrix} \delta h_f^R \\ \delta h_f^I \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \delta T_f^{(ip)} \\ \delta T_f^{(op)} \end{pmatrix} = -3\sqrt{\frac{5}{24\pi}} H_f \begin{pmatrix} \delta l_f^R \\ \delta l_f^I \end{pmatrix}$$

Contribution fréquentielle dans la bande semi-diurne [7.13]:

$$\begin{cases} \delta r = \left(\frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right)\left(\delta R_f^{(ip)} \cos\theta_f + \delta R_f^{(op)} \sin\theta_f\right) \\ \delta \bar{t} = \left(\delta T_f^{(ip)} \cos\theta_f + \delta T_f^{(op)} \sin\theta_f\right) \sin 2\varphi\, \bar{n} \end{cases}$$

avec: $$\begin{pmatrix} \delta R_f^{(ip)} \\ \delta R_f^{(op)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} H_f \begin{pmatrix} \delta h_f^R \\ -\delta h_f^I \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \delta T_f^{(ip)} \\ \delta T_f^{(op)} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} H_f \begin{pmatrix} \delta l_f^R \\ -\delta l_f^I \end{pmatrix}$$

La marée permanente

Par trigonométrie sphérique entre P(r_p,φ_p,λ_p) et M(r,φ,λ), on établit la relation:

$$\cos\psi = \sin\varphi \sin\varphi_p + \cos\varphi \cos\varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p)$$

et $P_{20}(\cos\psi)$ s'explicite:

$$P_{20}(\cos\psi) = P_{20}(\sin\varphi) P_{20}(\sin\varphi_p) + \frac{1}{3} P_{21}(\sin\varphi) P_{21}(\sin\varphi_p) \cos(\lambda - \lambda_p) + \frac{1}{12} P_{22}(\sin\varphi) P_{22}(\sin\varphi_p) \cos(2(\lambda - \lambda_p))$$

soit:

$$P_{20}(\cos\psi) = \frac{1}{4}(3\sin^2\varphi - 1)(3\sin^2\varphi_p - 1) + \frac{3}{4}\sin 2\varphi \sin 2\varphi_p \cos(\lambda - \lambda_p) + \frac{3}{4}\cos^2\varphi \cos^2\varphi_p \cos(2(\lambda - \lambda_p))$$

Dans le cas de la lune ou du soleil, la moyenne de $P_{20}(\sin\varphi_p)$ s'exprime:

$$[P_{20}(\sin\varphi_p)]_{mean} \approx \frac{3}{4}\sin^2\varepsilon_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(P_{20}(\sin\varepsilon_0) - \frac{1}{2}\right)$$, ε_0 = *23°26'21.4", inclinaison de l'écliptique*

D'où: $$[\Delta U_2]_{perm.} = \sum_{p=L,S} \frac{Gm_p}{R} k_2 \left(\frac{R}{r_p}\right)^3 P_{20}(\cos\psi) \approx R^2 \left(\frac{Gm_L}{r_L^3} + \frac{Gm_S}{r_S^3}\right) k_2 P_{20}(\sin\varphi) \left(\frac{3}{4}\sin^2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad [\Delta C_{20}]_{perm.} \approx \frac{R^3}{GM}\left(\frac{Gm_L}{r_L^3} + \frac{Gm_S}{r_S^3}\right) k_2 \left(\frac{3}{4}\sin^2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\right)$$

Le potentiel de marée permanente

Par analogie au potentiel terrestre, la marée terrestre modifie les coefficients de Stokes de :

$$\left[\Delta C_{20}\right]_{perm.} = k_s \frac{Gm_S}{GM}\left(\frac{\overline{R}}{r_S}\right)^3 \left(\frac{\overline{R}}{a_0}\right)^2 \left(\left(\frac{3}{4}\sin^2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}e_S^2\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon_0\right)\right)$$

$$+ k_s \frac{Gm_L}{GM}\left(\frac{\overline{R}}{r_L}\right)^3 \left(\frac{\overline{R}}{a_0}\right)^2 \left(\left(\frac{3}{4}\sin^2\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(e_L^2 - \sin^2 i_L\right) + \frac{9}{8}e_L^2\left(\sin^2 i_L - \sin^2\varepsilon_0\right)\right)$$

GM_S = 13 271 244.0 10^{13} m^3s^{-2}

GM_L = 4 902.799 10^9 m^3s^{-2}

r_S = 149 597 870 691 m (distance moyenne du soleil)

r_L = 384 400 103 m (distance moyenne de la lune)

ε_0 = 23°26'21.4" (obliquité de l'écliptique)

a_0 = 6 378 137 m (demi-grand axe terrestre)

W_0 = 62 636 855.611 m^2s^{-2} (potentiel du géoïde)

R_0 =GM/W_0= 6 363 672.6 m (facteur d'échelle géopotentiel)

i_L = 5°.9' (inclinaison de l'orbite lunaire sur écliptique)

e_L = 0.05490 (excentricité de l'orbite lunaire)

e_S = 0.01671 (excentricité de l'orbite terrestre)

k_s = 0.9383 (nombre de Love séculaire)

$$\overline{R} = R_0\left(1 + \frac{25}{21}v^3 q + \frac{10}{7}v^2 C_{20}\right)$$

$$v = \frac{a_0}{R_0} = 1.0022729$$

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{GM} = 3.461\,391\;10^{-3}$$

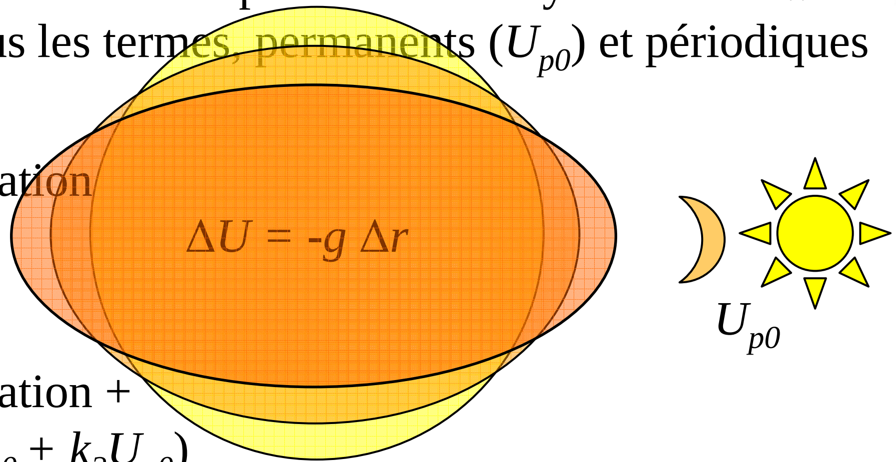
La déformation de marée permanente

La lune et le soleil exercent une attraction gravitationnelle dont une composante dans le développement harmonique est constante. C'est le terme de marée permanente.

Modèle "Tide Free"
néglige tout impact de la lune et du soleil, comme si ces corps étaient renvoyés à l'infini..
Le potentiel de marée terrestre doit contenir tous les termes, permanents (U_{p0}) et périodiques

Modèle "Zero Tide"
Le potentiel terrestre tient compte de la déformation géométrique de marée permanente ($-h_2 U_{p0}$)

Modèle "Mean Tide"
Le potentiel terrestre tient compte de la déformation + du potentiel induit de marée permanente ($-h_2 U_{p0} + k_2 U_{p0}$)



Resolution 16 of the 18th General Assembly of the IAG (1984) recommends the use of "zero-tide" values for quantities associated with the geopotential and "mean-tide" values for quantities associated with station displacements (or SSH). This recommendation, however, has not been implemented in the algorithms used for tide modeling by the geodesy community in the analysis of space geodetic data in general. As a consequence, the station coordinates that go with such analyses are conventional "tide free" values.

La déformation de marée permanente

In tide free system:

a_e = 6 378 136.57 m

1/f = 298.25767

b = 6 356 751.92 m

In zero tide system:

a_e = 6 378 136.60 m

1/f = 298.25642

b = 6 356 751.86 m

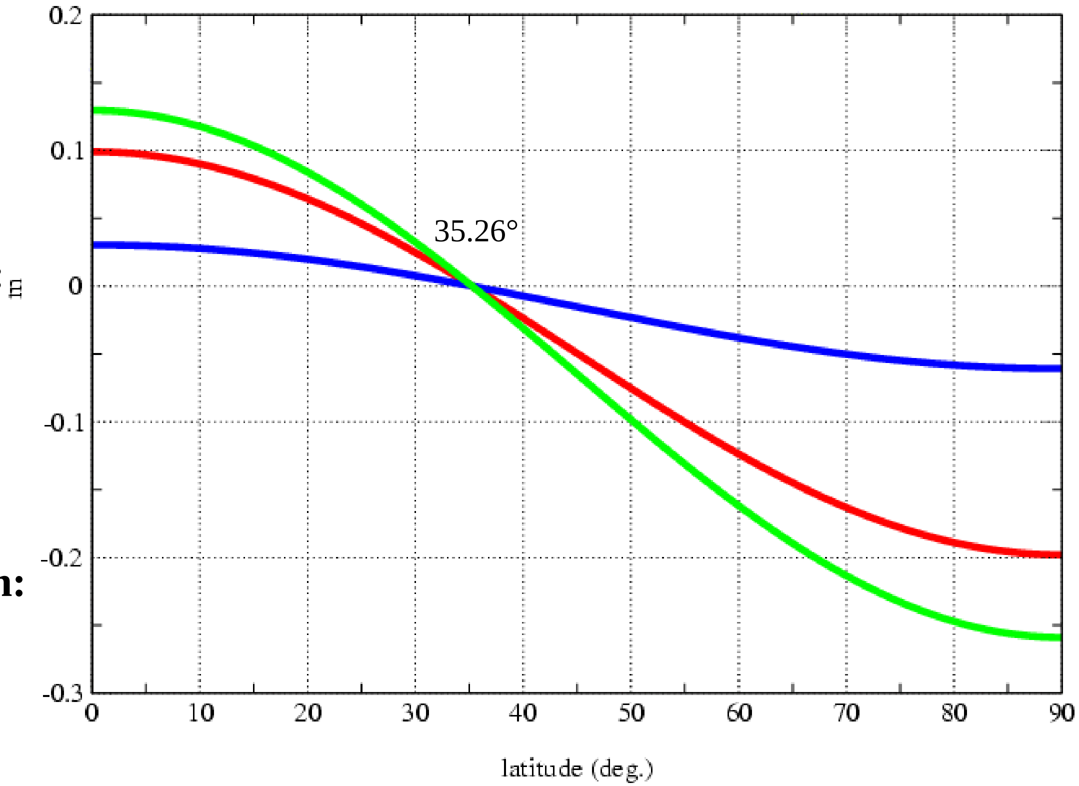
In mean tide system:

a_e = 6 378 136.70 m

1/f = 298.25227

b = 6 356 751.66 m

sur le géoïde



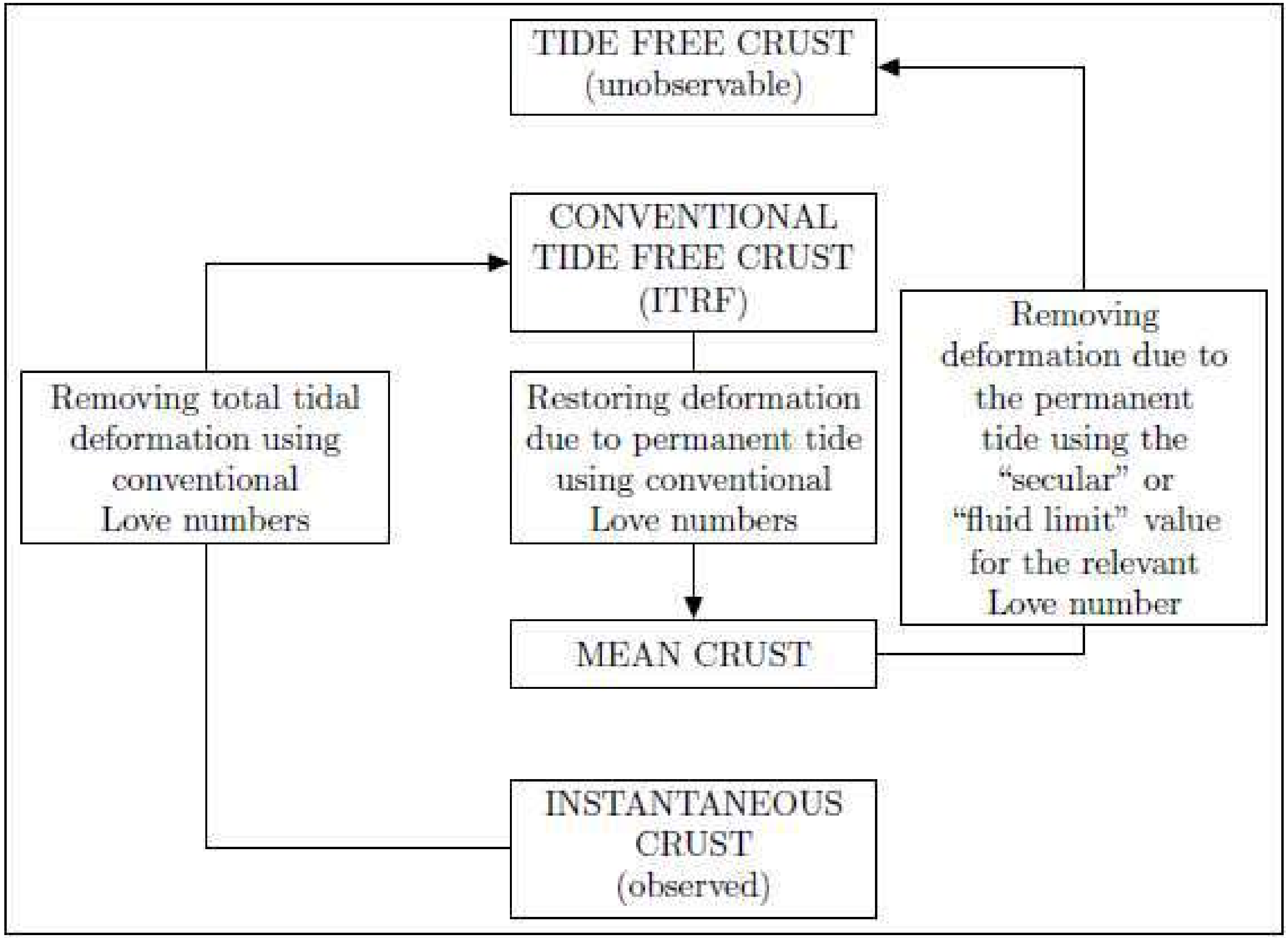
zero tide - tide free

mean tide – zero tide

mean tide - free tide

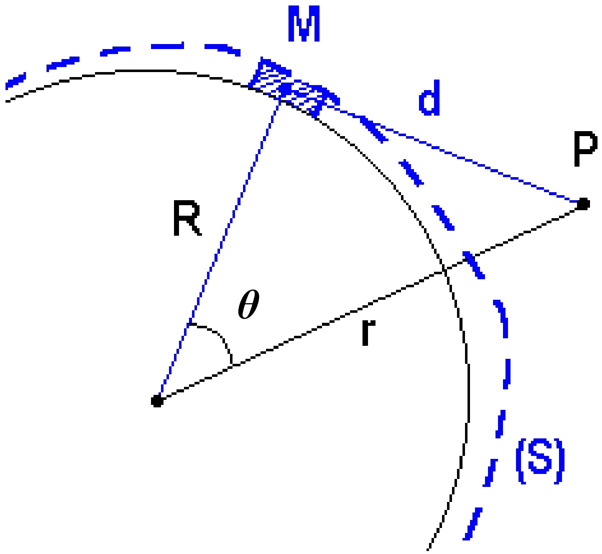
$$R[\Delta C_{20}]_{perm} = -.198\ m \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} N_{mean} - N_{zero} = -.198\,(1.5 \sin^2\varphi - .5) \\ N_{zero} - N_{free} = -.198\, k_2\,(1.5 \sin^2\varphi - .5) \\ \hline N_{mean} - N_{free} = -.198\,(1+k_2)\,(1.5 \sin^2\varphi - .5) \end{cases}$$

Le traitement ITRF



Treatment of observations to account for tidal deformations in terrestrial reference systems

Le potentiel de simple couche



Charge de surface (densité surfacique) : $q(\varphi',\lambda')$

Potentiel en P : $U_p = G\iiint_V \frac{dm}{d} = G\iint_S \frac{q}{d}\,ds$

avec : $ds = R^2 \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi$

On développe :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=0}^{l}(2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_{lm}(\sin\varphi)P_{lm}(\sin\varphi')\cos m(\lambda-\lambda')$$

$$et \quad q(\varphi',\lambda') = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}P_{lm}(\sin\varphi')\left(q_{lm}^{c}\cos m\lambda' + q_{lm}^{s}\sin m\lambda'\right)$$

Dû à l'orthogonalité des fonctions de Legendre :

$$\iint_S P_{lm}(\sin\varphi')P_{l'm'}(\sin\varphi')e^{im\lambda}\,e^{im\lambda'}ds = \frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{1}{2-\delta_{0m}}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

on a : $$\iint_S \frac{q}{d}ds = \frac{4\pi R^2}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^l\sum_{m=0}^{l}P_{lm}(\sin\varphi)\left(q_{lm}^{c}\cos m\lambda + q_{lm}^{s}\sin m\lambda\right)$$

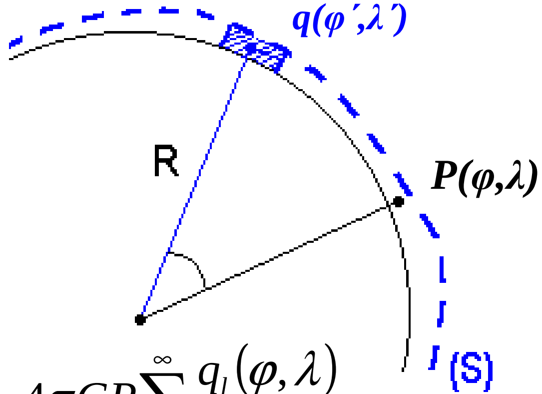
d'où : $$U_p = 4\pi G R\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=0}^{l}P_{lm}(\sin\varphi)\left(q_{lm}^{c}\cos m\lambda + q_{lm}^{s}\sin m\lambda\right)$$

Potentiel et déformation de charge

Soit les *charges q de:*

marée océanique: $q = \xi_w \rho_w$ $\qquad (\rho_w = 1025\ kg/m^3)$

pression atmosphérique: $q = \Delta P_a / g$



Le potentiel de simple couche généré par cette charge s'exprime en P à la surface *(S):*

$$U_p(\varphi,\lambda) = 4\pi G R \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} P_{lm}(\sin\varphi)\left(q_{lm}^{c} \cos m\lambda + q_{lm}^{s} \sin m\lambda\right) = 4\pi G R \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q_l(\varphi,\lambda)}{2l+1}$$

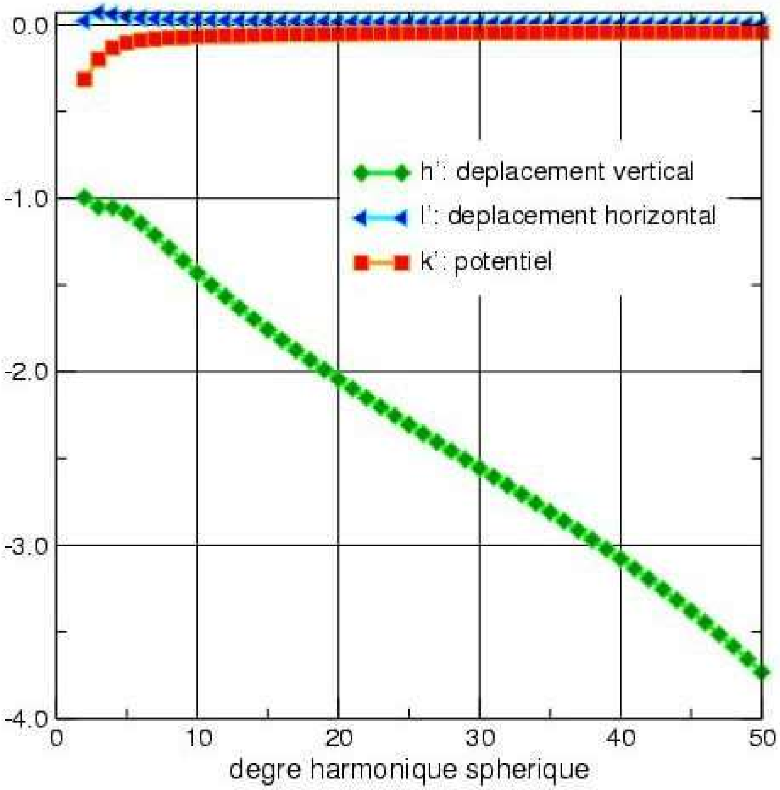
Soit en posant: $g = \dfrac{GM}{R^2}$ *et* $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_e$, d'où $4\pi G R = \dfrac{3g}{\rho_e}$ $\quad$ *avec* $\rho_e = 5520\ kg\ m^{-3}$

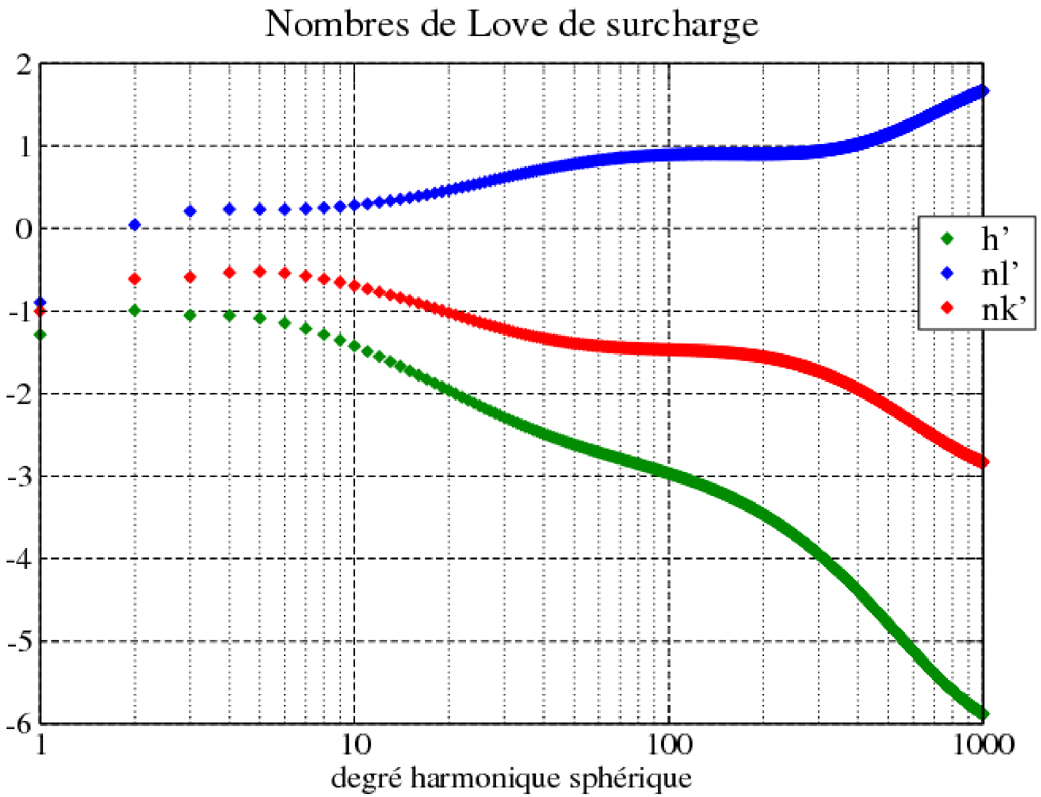
$$U_p(\varphi,\lambda) = \frac{3g}{\rho_e} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} q_{lm}(\varphi,\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l$$

D'après la première hypothèse de Love, le **déplacement** de la croûte élastique est proportionnel au potentiel de charge :

$$h(\varphi,\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l' \frac{U_l}{g} = 4\pi G R \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h_l'}{2l+1} q_l(\varphi,\lambda) = \frac{3}{\rho_e} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h_l'}{2l+1} q_l(\varphi,\lambda)$$

Les nombres de Love de charge





Remarque: la valeur des nombres stagne à partir du degré ~1300

Les marées océaniques (I)

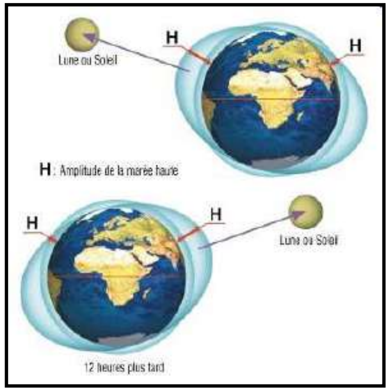
La hauteur globale des marées océaniques s'exprime classiquement par une sommation sur n ondes :

$$\xi(\varphi,\lambda,t)=\sum_n Z_n(\varphi,\lambda)\cos\left(\theta_n(t)-\psi_n(\varphi,\lambda)\right)$$

Z_n: amplitude de l'onde n
ψ_n: phase exprimée à l'instant de passage du corps perturbateur au méridien origine
θ_n: argument de Doodson qui, dans la théorie de Doodson, s'exprime en combinaison linéaire de 6 variables :

$$\theta_n(t)=n_1\tau+(n_2-5)s+(n_3-5)h+(n_4-5)p+(n_5-5)N'+(n_6-5)p_s$$

Ces 6 variables de fréquences décroissantes représentent les arguments fondamentaux liés aux mouvements de la Lune et du Soleil :



- τ : *angle du jour lunaire moyen (1.03505 j)*
- s : *angle du mois tropique moyen (27.32158 j)*
- h : *angle de l'année tropique moyenne (365.2422 j)*
- p : *angle du périgée lunaire moyen (8.8473 ans)*
- N' : *angle du noeud lunaire moyen (18.6129 ans)*
- p_s : *angle du périhélie (20940.28 ans)*

n_1 (= 0, 1, 2, 3...) définit l'espèce (longue période, diurne, semi-diurne, ter-diurne...), n_2 le groupe (en général :$1 \leq n_2 \leq 9$) et n_3 le constituant ($1 \leq n_3 \leq 9$). Par exemple, l'onde lunaire principale dénotée M_2 en symbole de Darwin s'exprime par le numéro de Doodson : $n_1n_2n_3.n_4n_5n_6 = 255.555$ (M_2 n'est fonction que du jour lunaire moyen : τ).

Les variables de Doodson

- **Calcul des arguments fondamentaux caractérisant les positions de la lune et du soleil:**
  - f(1): anomalie moyenne de la lune (s-p)
  - f(2): anomalie moyenne du soleil (h-ps)
  - f(3): longitude de la lune a partir du noeud ascendant (s-n)
  - f(4): angle horaire de la lune au soleil (s-h)
  - f(5): longitude du noeud ascendant de la lune (n)

t = date_j2000 / 36525.
f(1)=2.3555483935439+.22802714367923e+00*t+.11378302752169e-12*t2 +.63677230576821e-20*t3
f(2)=6.2400359393260+.17201970048574e-01*t-.2096863841585e-14*t2 -.11939480733154e-20*t3
f(3)=1.6279019339720+.23089571959804e+00*t-.48176991244174e-13*t2+.10944524005391e-20*t3
f(4)=5.1984695135799+.21276871036744e+00*t-.25042441477227e-13*t2+.18904177827494e-20*t3
f(5)=2.1824386243610-.92421754780981e-03*t+.27092062285986e-13*t2+.79596538221026e-21*t3

- valeurs en radian d'après les conventions IERS 1996

- **Calcul des variables de Doodson**:
  - b(1): angle de temps en jours lunaires a partir du transit inférieur
  - b(2): longitude moyenne de la lune
  - b(3): longitude moyenne du soleil
  - b(4): longitude moyenne du périgée lunaire
  - b(5): opposé de la longitude moyenne du noeud ascendant lunaire
  - b(6): longitude moyenne du périgée solaire

b(2) = f(3) + f(5)
b(3) = b(2) - f(4)
b(4) = b(2) - f(1)
b(5) = -f(5)
b(6) = b(3) - f(2)
b(1) = $\theta_m + \pi$ - b(2)

Les marées océaniques (II)

L'amplitude (Z_n) et la phase (ψ_n) des différentes ondes de marée représentées par les **cartes cotidales** peuvent se développer en fonctions harmoniques sphériques de $Z_n \cos\psi_n$ et $Z_n \sin\psi_n$:

$$\begin{cases} Z_n \cos\psi_n = \sum_l \sum_m \left(a_{n,lm} \cos m\lambda + b_{n,lm} \sin m\lambda \right) P_{lm}(\sin\varphi) \\ Z_n \sin\psi_n = \sum_l \sum_m \left(c_{n,lm} \cos m\lambda + d_{n,lm} \sin m\lambda \right) P_{lm}(\sin\varphi) \end{cases}$$

Ainsi, la hauteur de marée s'explicite :

$$\xi(\varphi,\lambda,t) = \sum_n \left(Z_n \cos\psi_n \cos\theta_n + Z_n \sin\psi_n \sin\theta_n \right) = \sum_n \sum_l \sum_m \begin{bmatrix} \frac{a_{n,lm} - d_{n,lm}}{2} \left(\cos m\lambda \cos\theta_n - \sin m\lambda \sin\theta_n \right) \\ + \frac{a_{n,lm} + d_{n,lm}}{2} \left(\cos m\lambda \cos\theta_n + \sin m\lambda \sin\theta_n \right) \\ + \frac{c_{n,lm} + b_{n,lm}}{2} \left(\cos m\lambda \sin\theta_n + \sin m\lambda \cos\theta_n \right) \\ + \frac{c_{n,lm} - b_{n,lm}}{2} \left(\cos m\lambda \sin\theta_n - \sin m\lambda \cos\theta_n \right) \end{bmatrix} P_{lm}(\sin\varphi)$$

Soit en posant:

$$C^+_{n,lm} = \frac{a_{n,lm} - d_{n,lm}}{2} \quad , \quad C^-_{n,lm} = \frac{a_{n,lm} + d_{n,lm}}{2} \qquad et \qquad S^+_{n,lm} = \frac{c_{n,lm} + b_{n,lm}}{2} \quad , \quad S^-_{n,lm} = \frac{c_{n,lm} - b_{n,lm}}{2}$$

La hauteur de marée devient:

$$\boxed{\xi(\varphi,\lambda,t) = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{+}^{-} \left[C^{\pm}_{n,lm} \cos(\theta_n \pm m\lambda) + S^{\pm}_{n,lm} \sin(\theta_n \pm m\lambda) \right] P_{lm}(\sin\varphi)}$$

Les marées océaniques (III)

ou encore en introduisant amplitude et phase :

$$\begin{cases} C^{\pm}_{n,lm} = \hat{C}^{\pm}_{n,lm} \sin\left(\varepsilon^{\pm}_{n,lm} + \chi_n\right) \\ S^{\pm}_{n,lm} = \hat{C}^{\pm}_{n,lm} \cos\left(\varepsilon^{\pm}_{n,lm} + \chi_n\right) \end{cases}$$

où χ_n (0, -π/2, π/2 ou π) représente la **convention de phase de Doodson-Warburg** :

$$\xi(\varphi,\lambda,t) = \sum_n \sum_l \sum_m \sum_{\overset{-}{+}} \hat{C}^{\pm}_{n,lm} \sin\left(\theta_n \pm m\lambda + \varepsilon^{\pm}_{n,lm} + \chi_n\right) P_{lm}(\sin\varphi)$$

de telle sorte que l'amplitude de la marée d'équilibre (Hn) est un coefficient positif d'un terme cosinus dans l'expression du potentiel générateur de marée.
La charge de surface créée par les marées océaniques est le produit de la hauteur d'eau déplacée par sa densité:

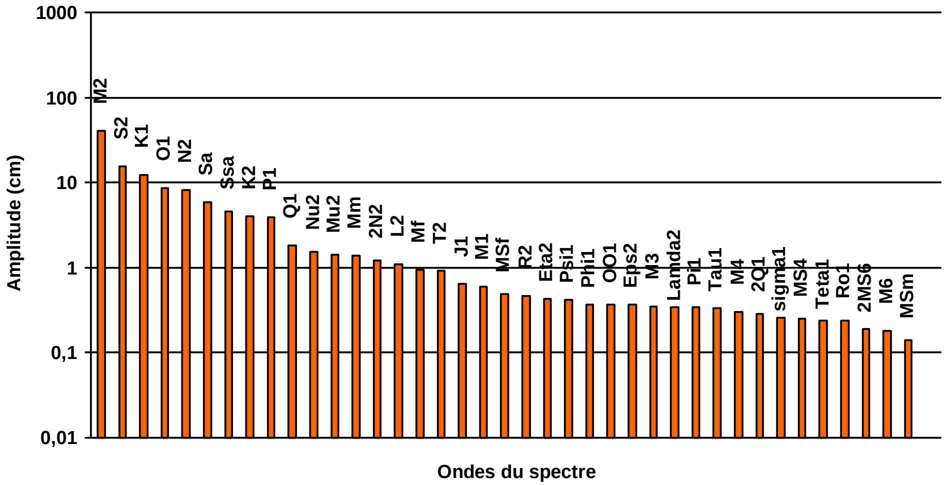
$$q_n(\varphi,\lambda,t) = \xi_n \cdot \rho_w \qquad \text{en } kg/m^2 \qquad (\rho_w \approx 1025\ kg/m^3)$$

Selon la première hypothèse de Love, pour chaque onde de marée, elle crée un effet de charge tel que :

$$u'_r = \frac{4\pi G R \rho_w}{g} \sum_{l=2}^{L} \frac{h'_l}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} \sum_n \sum_{\overset{-}{+}} \xi^{\pm}_{n,lm}$$

+ représente les ondes progrades, les principales qui accompagnent le mouvement des astres perturbateurs (vers l'Ouest),
- représente les ondes rétrogrades (vers l'Est)

L’amplitude des marées



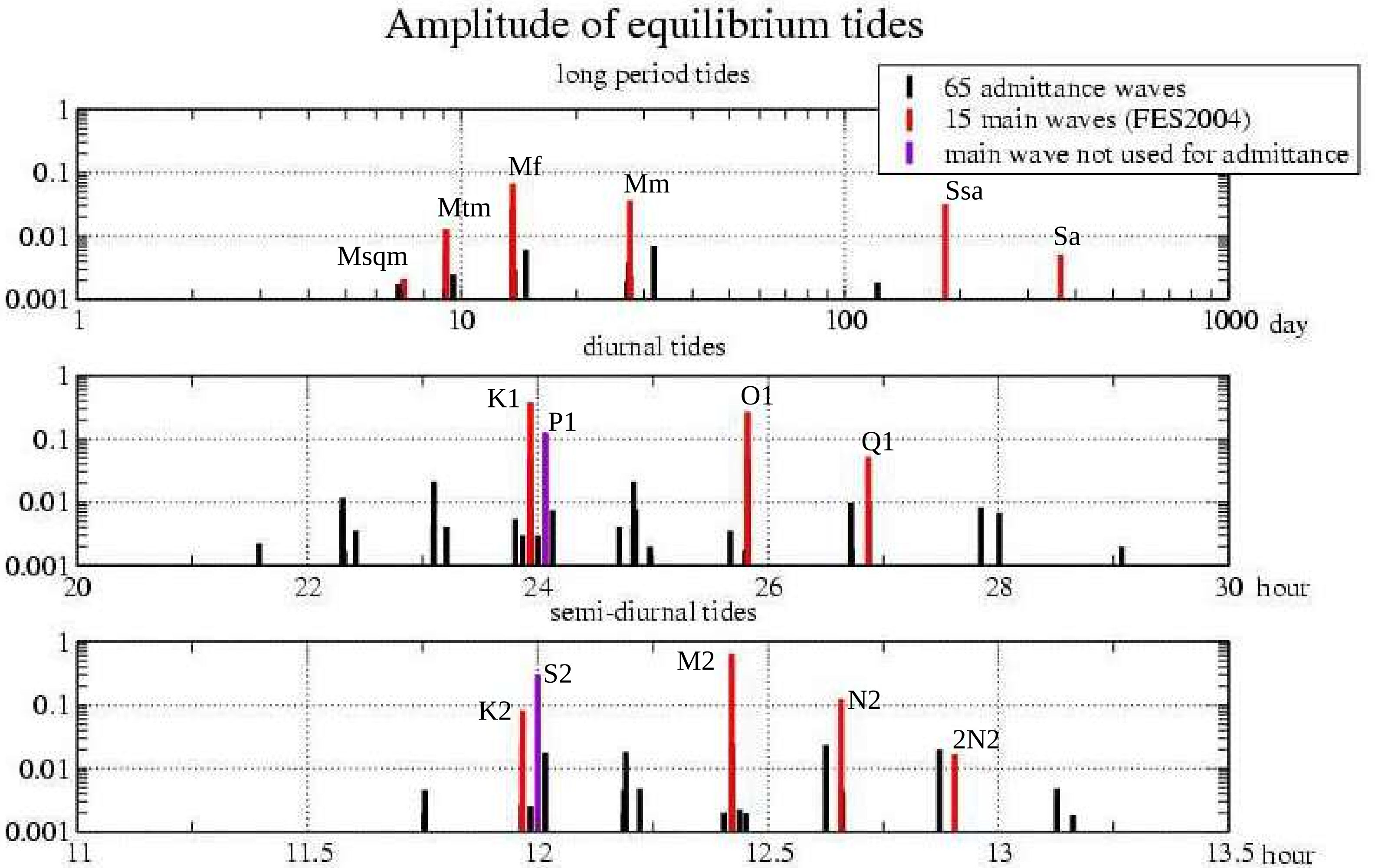
Décomposition harmonique du spectre de marée (pour la base de données pélagiques ST95)

Onde	Pourcentage d’importance
M_2	33,5%
S_2	12,6%
K_1	10,1%
O_1	7,0%
N_2	6,8%
K_2	3,3%
Q_1	1,5%
$2N_2$	1,0%
Total	75,9%

Pourcentage d’importance des principales ondes du spectre (source : thèse F. Lefèvre)

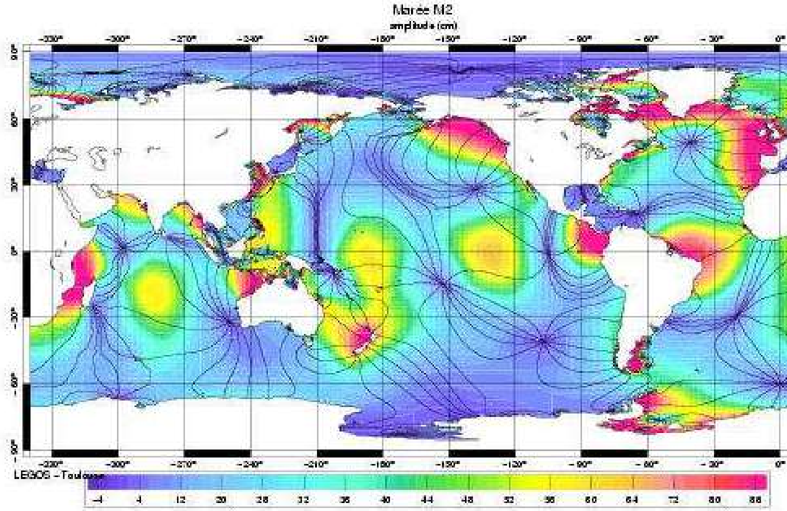
Nom de Darwin	Nombre de Doodson	Argument de Doodson	Coef. harm. α_i	Fréquence (°/h)	Fréquence (rad/s)	Période (jours)	Origine
M_0	055.555	-	0,50458	0		-	L
S_0	055.555	-	0,23411	0		-	S
S_a	056.554	$h - p_1$	0,01176	0,0410667	0,0000001991	365,2594	S
S_{sa}	057.555	$2h$	0,07287	0,0821373	0,0000003982	182,6211	S
S_{ta}	058.554	$3h - p_1$	0,00427	0,1232040	0,0000005973	121,7493	S
M_{sm}	063.655	$s - 2h + p$	0,01578	0,4715211	0,0000022860	31,8119	L
M_m	065.455	$s - p$	0,08254	0,5443747	0,0000026392	27,5546	L
M_{sf}	073.555	$2s - 2h$	0,01370	1,0158958	0,0000049252	14,7653	L
M_f	075.555	$2s$	0,15642	1,0980331	0,0000053234	13,6608	L
M_{stm}	083.655	$3s - 2h + p$	0,00569	1,5695548	0,0000076094	9,5569	L
M_{tm}	085.455	$3s - p$	0,02995	1,6424078	0,0000079626	9,1329	L
M_{sqm}	093.555	$4s - 2h$	0,00478	2,1139288	0,0000102486	7,0958	L
$2Q_1$	125.755	$\tau - 3s + 2p$	0,00955	12,8442862	0,0000622709	1,1678	S
σ_1	127.555	$\tau - 3s + 2h$	0,01153	12,9271398	0,0000626725	1,1603	L
Q_1	135.655	$\tau - 2s + p$	0,07216	13,3986609	0,0000649585	1,1195	S
ρ_1	137.455	$\tau - 2s + 2h + p$	0,01371	13,4715145	0,0000653117	1,1135	L
O_1	145.555	$\tau - s$	0,37689	13,9430356	0,0000675977	1,0758	L
τ_1	147.555	$\tau - s + 2h$	0,00491	14,0251729	0,0000679960	1,0695	
M_{11}	155.655	$\tau + p$	0,02964	14,4966939	0,0000702820	1,0347	L
M_{12}	155.655	$\tau + p$	0,01040	14,4874103	0,0000702369	1,0295	L
χ_1	157.455	$\tau + 2h - p$	0,00566	14,5695476	0,0000706352	1,0295	L
π_1	162.556	$\tau + s - 3h + p_1$	0,01029	14,9178647	0,0000723238	1,0055	S
P_1	163.555	$\tau + s - 2h$	0,17554	14,9589314	0,0000725229	1,0027	S
K_1^L	165.555	$\tau + s$	0,36233	15,0410686	0,0000729212	0,9973	L
K_1^S	165.555	$\tau + s$	0,16817	15,0410686	0,0000729212	0,9973	S
ψ_1	166.554	$\tau + s + h + p_1$	0,00423	15,0821353	0,0000731203	0,9946	S
φ_1	167.555	$\tau + s + 2h$	0,00756	15,1232059	0,0000733194	0,9919	S
θ_1	173.655	$\tau + 2s - 2h + p$	0,00566	15,5125897	0,0000752072	0,9670	L
J_1	175.455	$\tau + 2s - p$	0,02954	15,5854433	0,0000755604	0,9624	L
SO_1	183.455	$\tau + 3s - 2h$	0,00492	16,0569644	0,0000778464	0,9342	L
OO_1	185.655	$\tau + 3s + N'$	0,01623	16,1391017	0,0000782446	0,9294	L
ν_1	195.455	$\tau + 4s - p$	0,00311	16,6834764	0,0000808838	0,8991	L
ε_2	227.655	$2\tau - 2s + 2p + N'$	0,00671	27,3416964	0,0001325563	0,5486	L
$2N_2$	235.755	$2\tau - 2s + 2p$	0,02301	27,8953548	0,0001352405	0,5363	L
μ_2	237.555	$2\tau - 4s + 4h$	0,02777	27,9682084	0,0001355937	0,5363	L
N_2	245.655	$2\tau - s + p$	0,17387	28,4397295	0,0001378797	0,5274	L
ν_2	247.455	$2\tau - s + 2h - p$	0,03303	28,512583	0,0001382329	0,5261	L
M_2	255.555	2τ	0,90812	28,9841042	0,0001405189	0,5175	L
λ_2	263.655	$2\tau - s - 2h + p$	0,00670	29,4556253	0,0001428049	0,5092	L
L_2	265.455	$2\tau + s - p$	0,02567	29,5284700	0,0001431580	0,5078	L
T_2	272.556	$2\tau + 2s - 3h + p_1$	0,02479	29,5589333	0,0001433058	0,5075	S
S_2	273.555	$2\tau + 2s - 2h$	0,42286	30,0000000	0,0001454441	0,5000	S
R_2	274.554	$2\tau + 2s - h - p_1$	0,00354	30,0410667	0,0001456432	0,4993	S
K_2^S	275.555	$2\tau + 2s$	0,03648	30,0821373	0,0001458423	0,4986	S
K_2^L	275.555	$2\tau + 2s$	0,07858	30,0821373	0,0001458423	0,4986	L

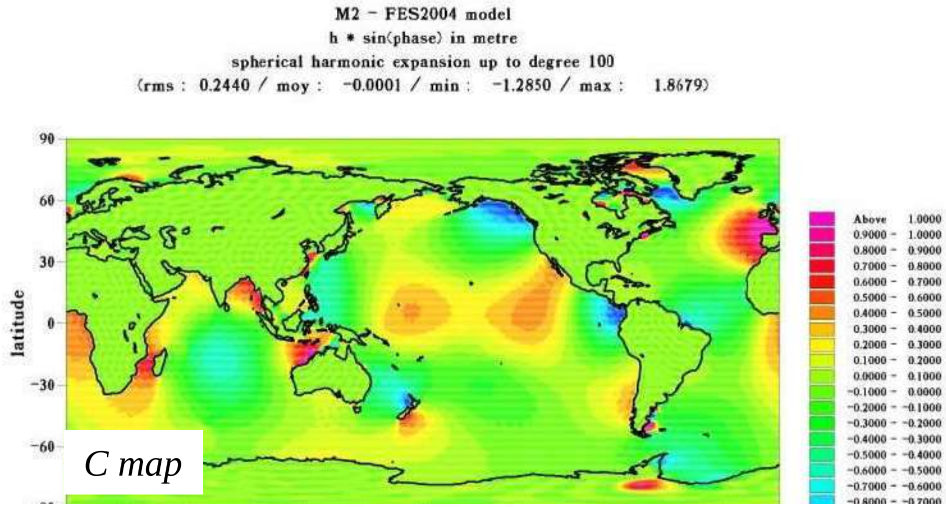
La complétion par admittance

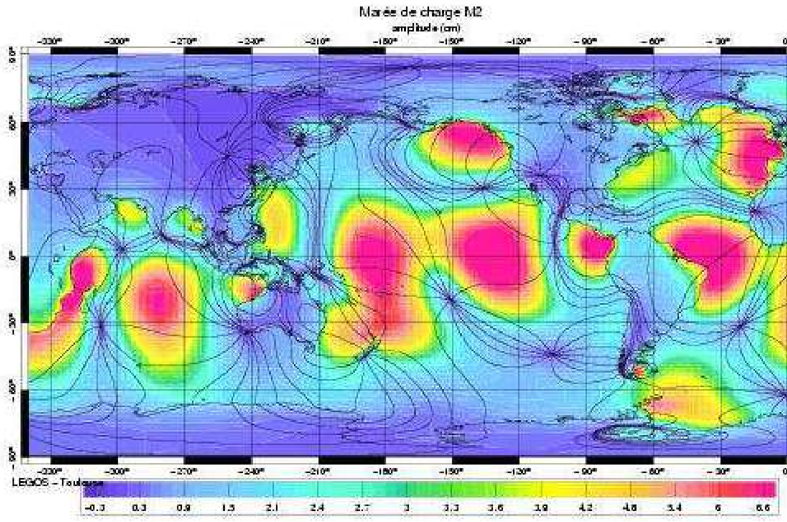


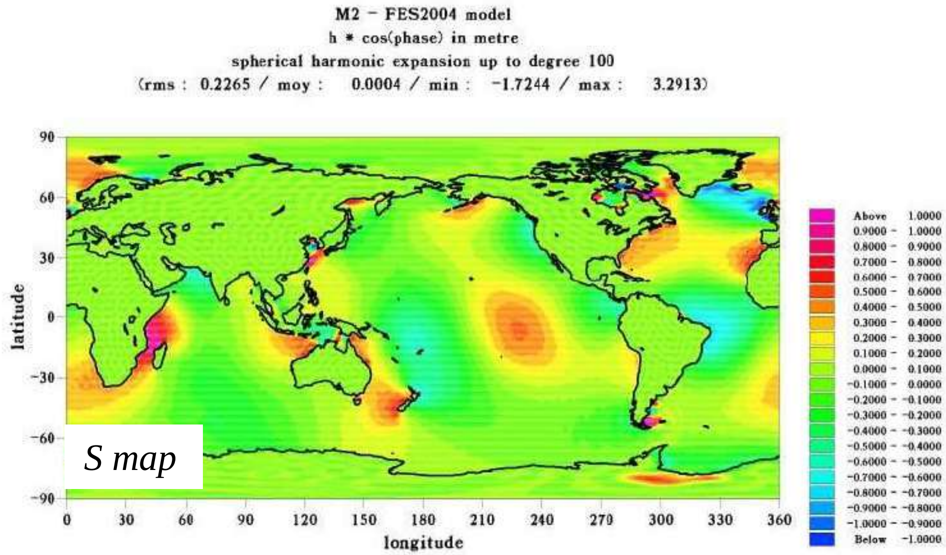
$$G_n(\varphi,\lambda)=\frac{\xi_n(\varphi,\lambda,t)}{U_n(\varphi,\lambda,t)}$$

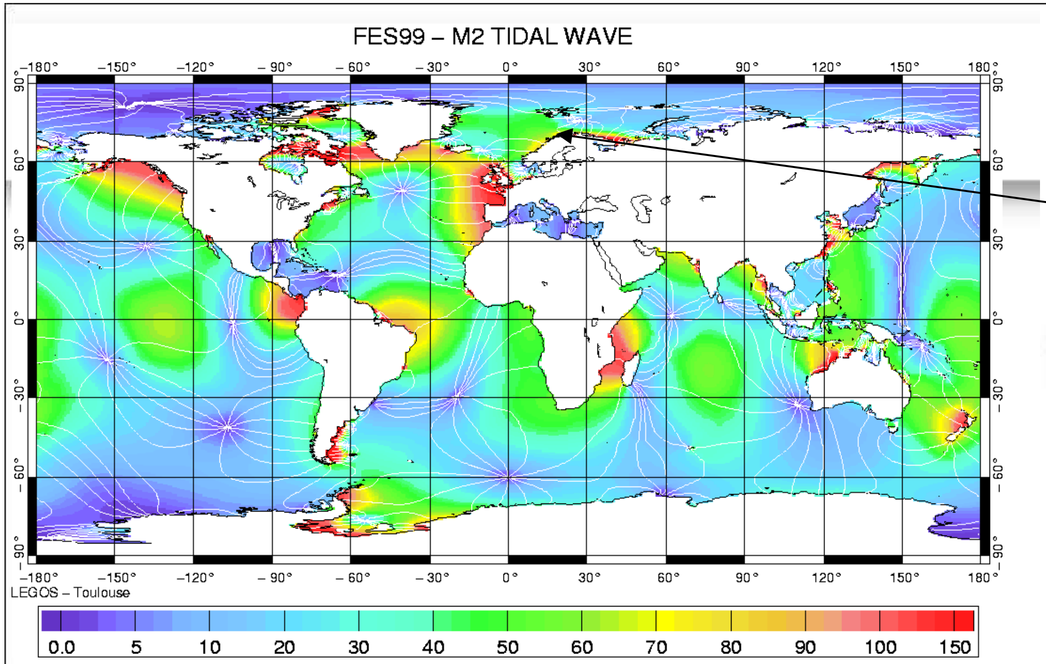
Le calcul de la charge



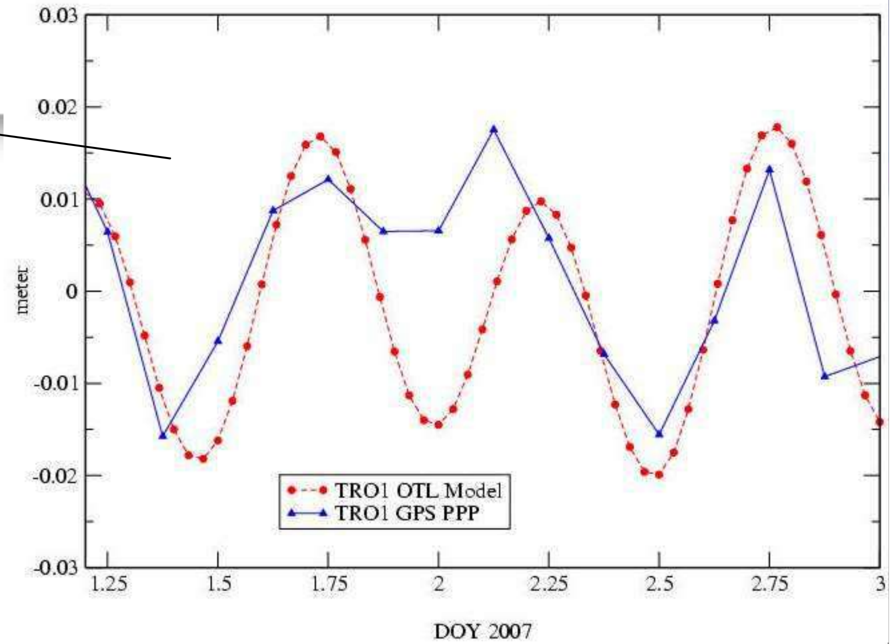


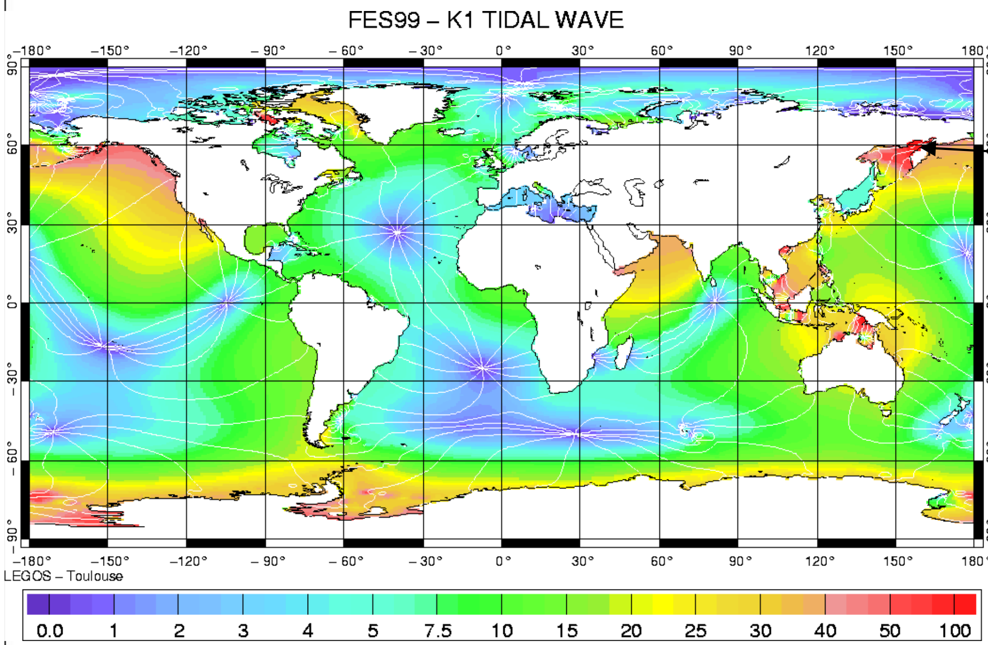


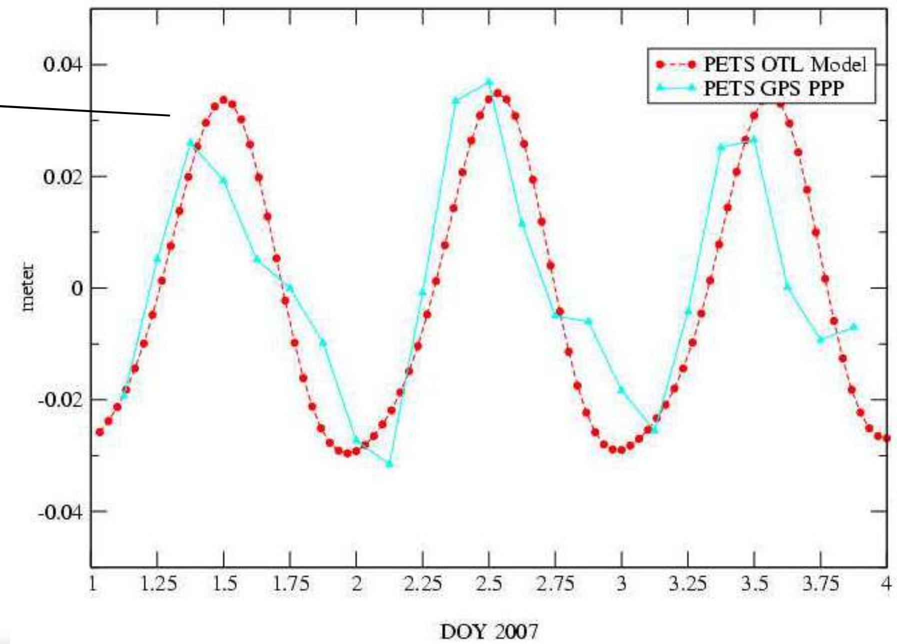




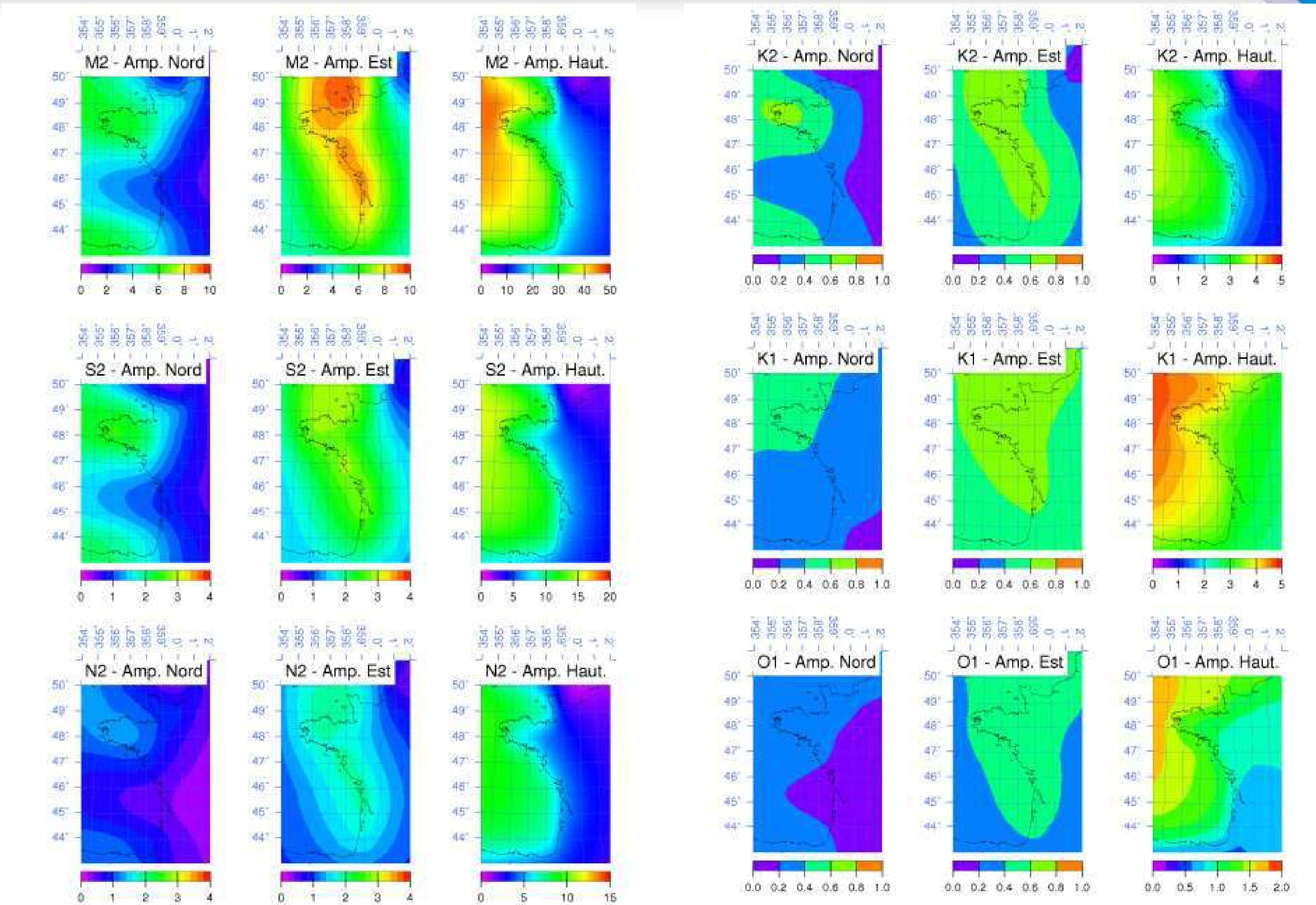
Semi-diurnal dominant





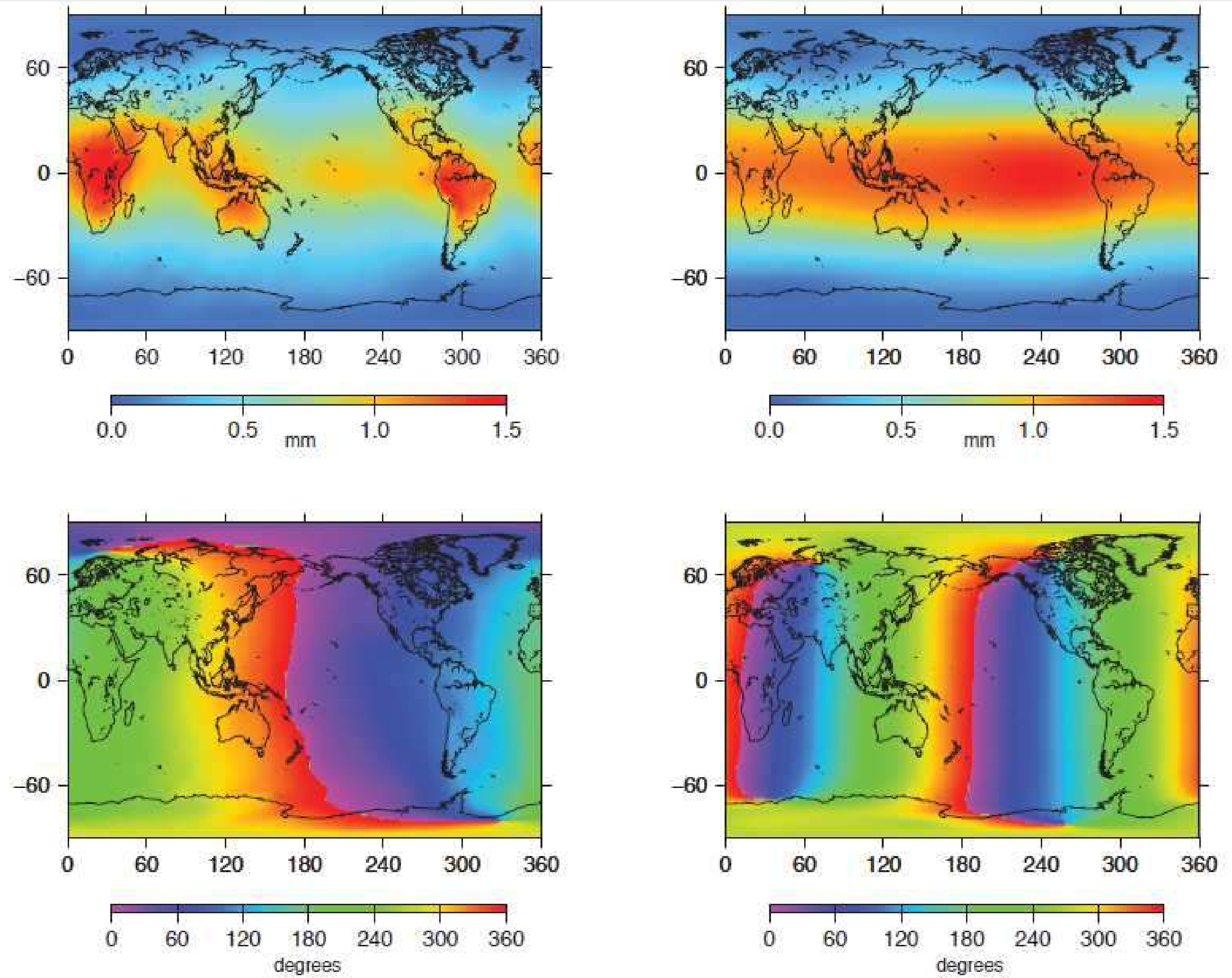


Le déplacement de charge (ouest France)



Amplitudes Nord, Est et de hauteur en mm d'ondes de marées d'après FES2004

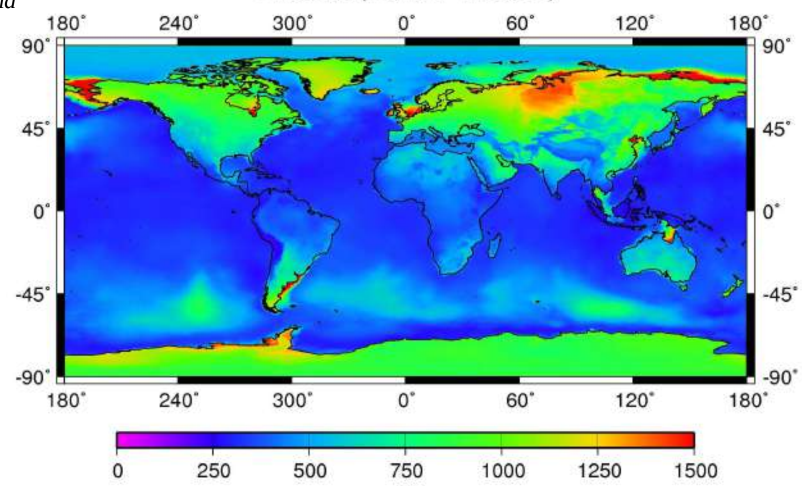
Les marées atmosphériques



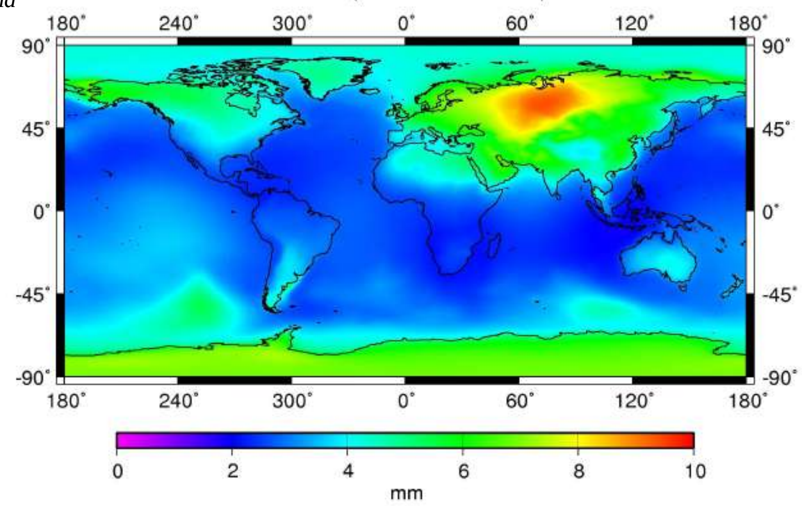
Amplitude (in mm) and phase (in degrees) of the predicted vertical surface displacement from the S1 and S2 atmospheric tides from the model by Ray and Ponte (2003)

La charge de pression atmosphérique

RMS_{Global} = 556. Pa
RMS_{Land} = 795. Pa



RMS_{Global} = 4.0 mm
RMS_{Land} = 5.3 mm



Développement de la pression sur les continents en harmoniques spheriques:

$$\Delta P = \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l} P_{l,m}(\sin\varphi)\left(\Delta P_{l,m}^{C}\cos m\lambda + \Delta P_{l,m}^{S}\sin m\lambda\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l} \Delta P_{l,m}(\varphi,\lambda)$$

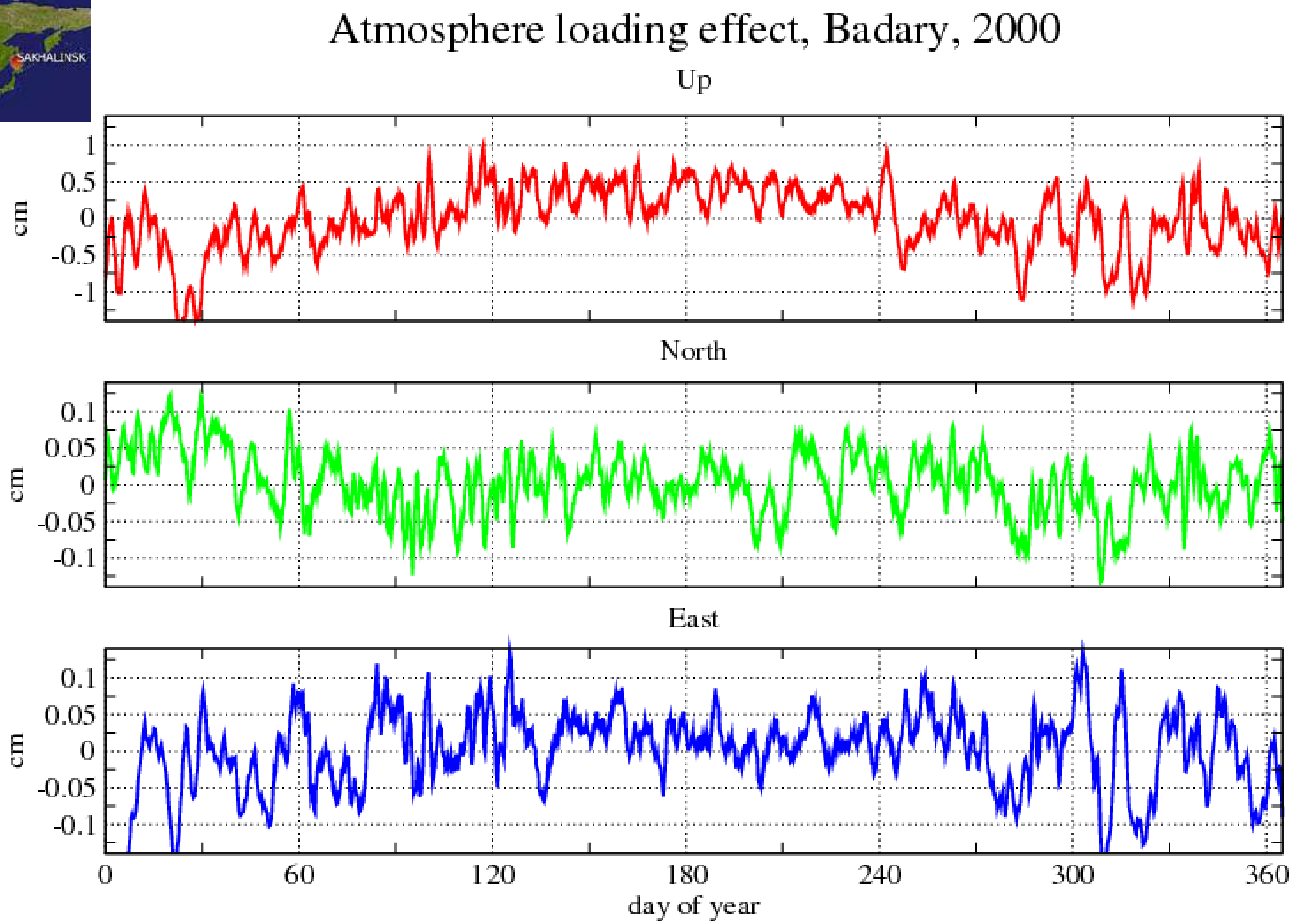
Déformation de charge à partir de la pression atmospherique sur les continents:

$$u_r' = \frac{4\pi G R}{g^2}\sum_{l=2}^{L}\frac{h_l'}{2l+1}\sum_{m=0}^{l}\Delta P_{l,m}(\varphi,\lambda)$$

La charge sur les océans est compensée par le principe hydrostatique (baromètre-inverse) ou corrigée d'un modèle de circulation océanique:

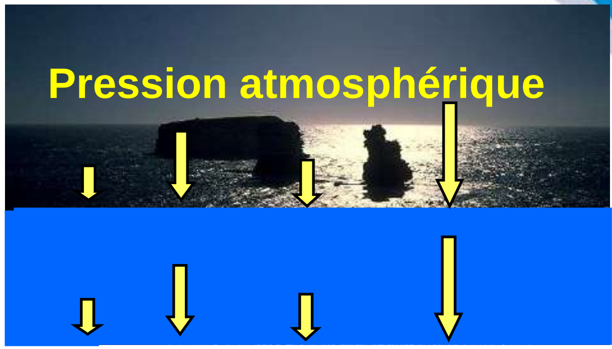
$$q = \frac{\Delta P}{g} = \rho_w\, h \quad (1\,mb \Leftrightarrow 1\,cm)$$

L'effet continental



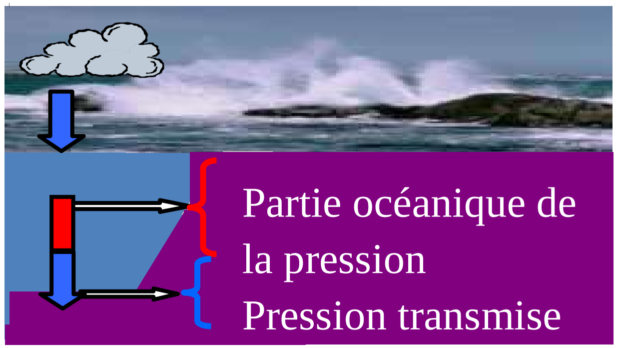
Atmosphère/océan: réaction des océans

Modèle "non-baromètre inversé" :
la surface n'est pas déformée; la pression atmosphérique est totalement transmise sur le plancher

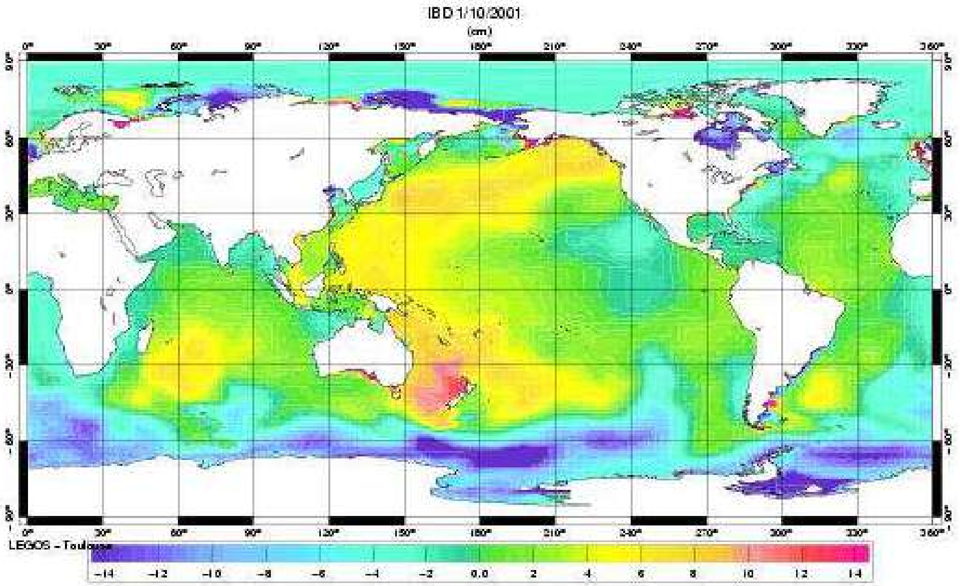


Modèle "baromètre inversé" :
l'océan se réajuste pour rester en équilibre hydrostatique avec l'atmosphère (selon la loi d'équilibre hydrostatique: $\Delta P=\rho_w gh$)

Modèle dynamique (ECCO, MIT) : la surface se déforme mais une partie de la pression est transmise au fond (une friction est générée)



La charge due à l'océan (mode barotrope)



Développement de la hauteur d'eau (sur les océans) en harmoniques spheriques:

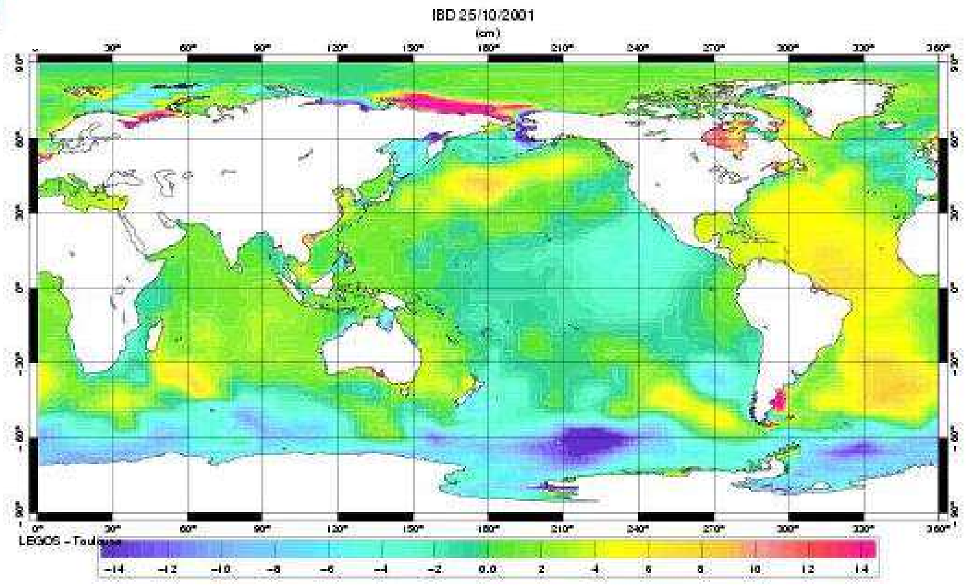
$$\xi = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{l} P_{l,m}(\sin\varphi)\left(\xi_{l,m}^{C} \cos m\lambda + \xi_{l,m}^{S} \sin m\lambda\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{l} \xi_{l,m}(\varphi,\lambda)$$

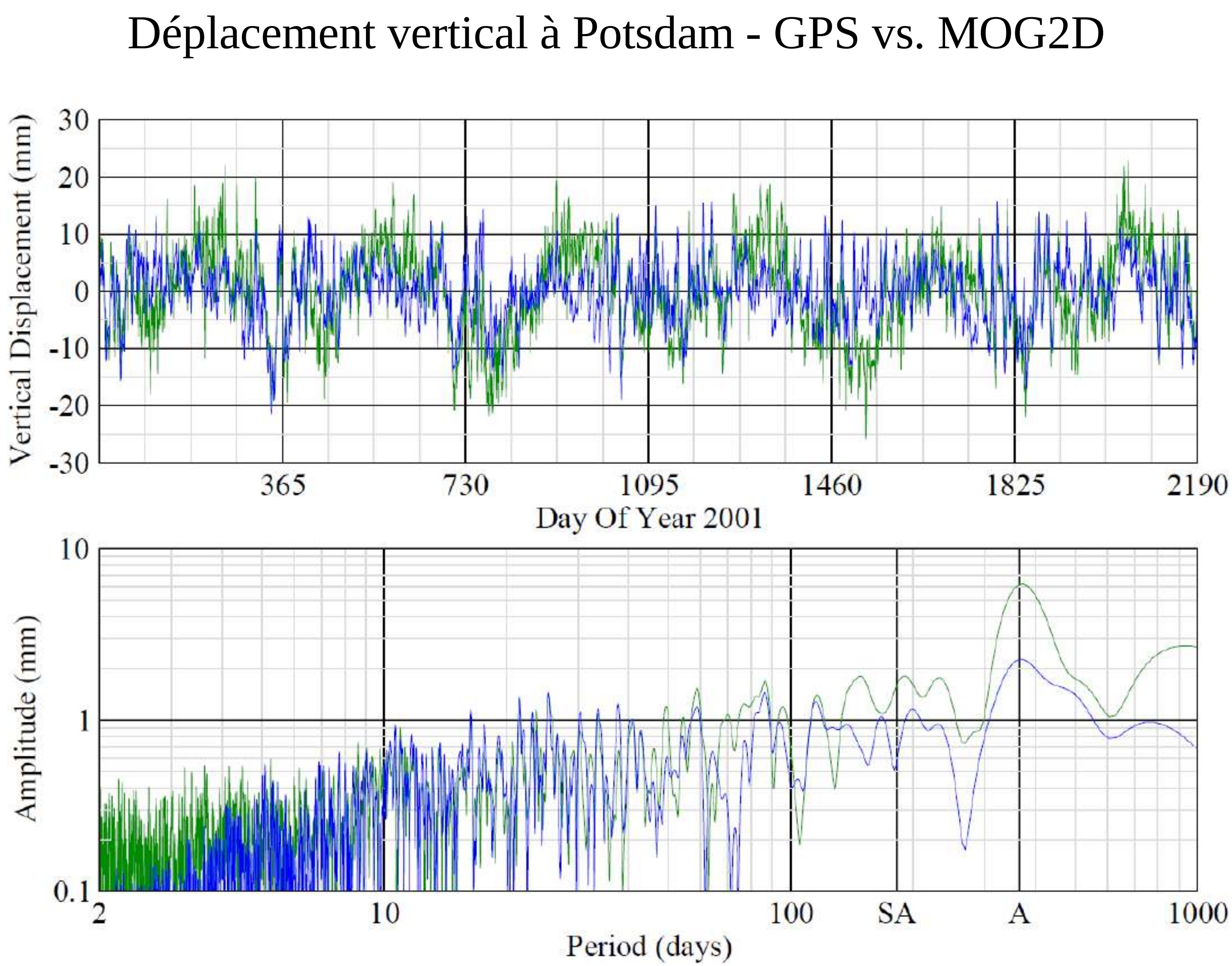
Déformation de charge à partir des hauteurs d'eau sur les océans (Modèle MOG2D/Legos)::

$$u_r' = \frac{4\pi G R \rho_w}{g} \sum_{l=2}^{L} \frac{h_l'}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} \xi_{l,m}(\varphi,\lambda)$$

$$\rho_w \approx 1025 kg / m^3$$

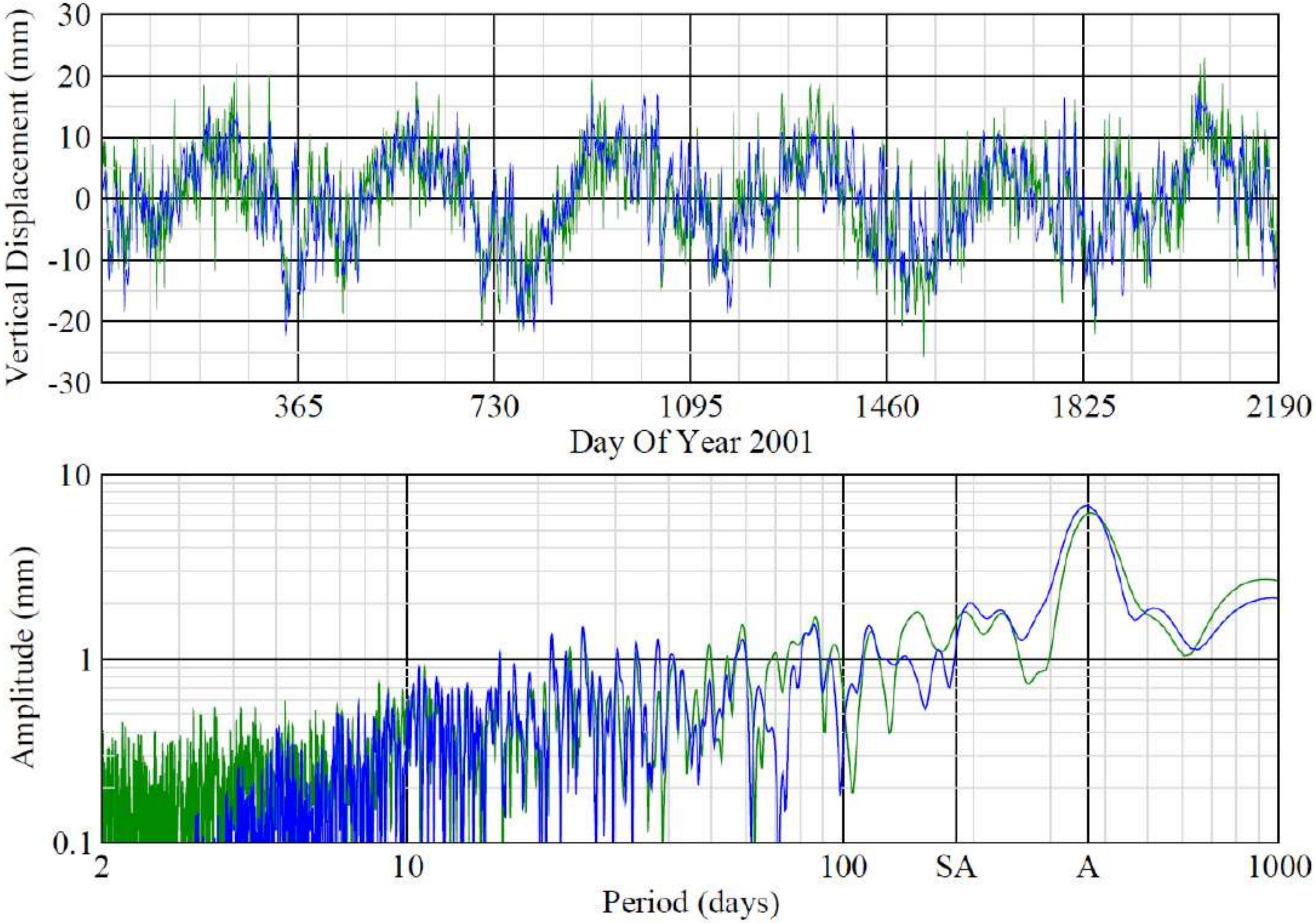


Comparaison à GPS



Comparaison à GPS

Déplacement vertical à Potsdam - GPS vs. AOH



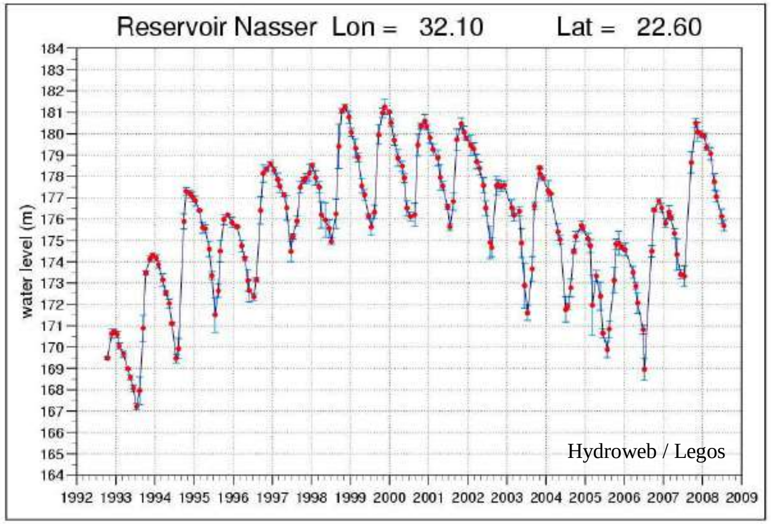
La charge hydrologique

Les variations de distribution des masses d'eau ou de neige sur Terre et dans les sous sols provoquent une charge et une déformation lithosphérique principalement liées :

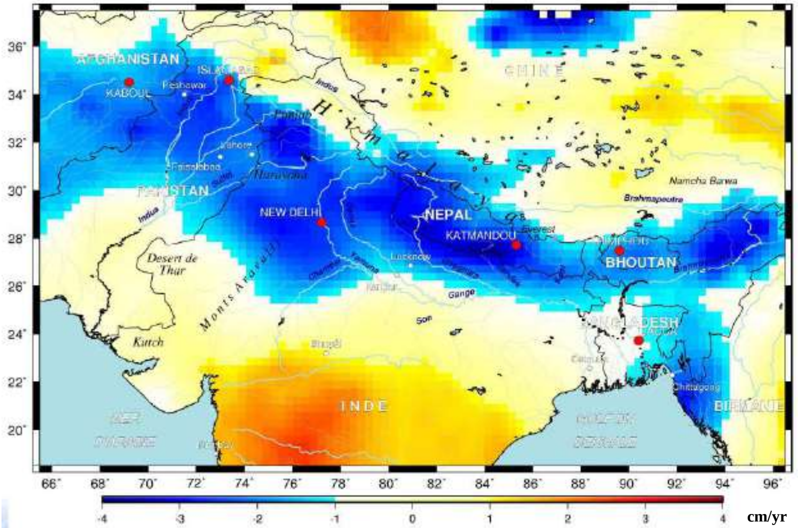
• au cycle saisonnier

• aux événements catastrophiques majeurs comme les sécheresses, les crues, la mousson, etc.

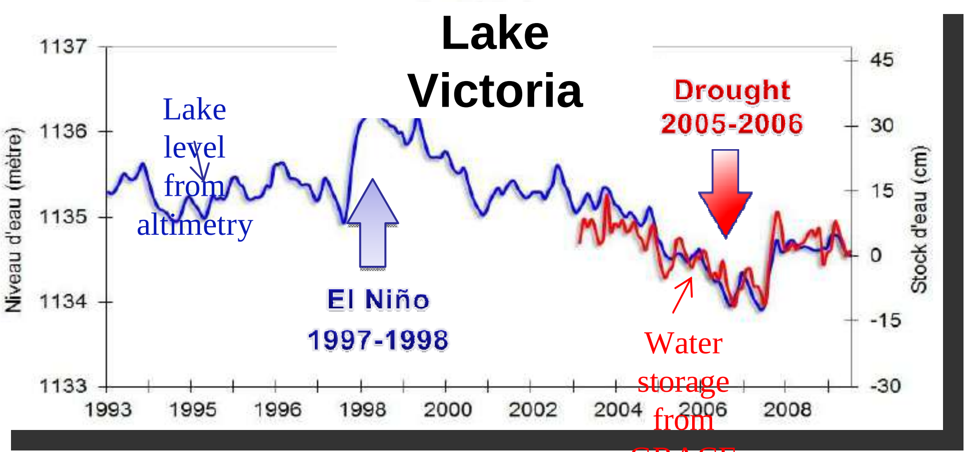
• aux activités anthropiques



Water storage trend in the Ganges Basin from GRACE (2002-2009)

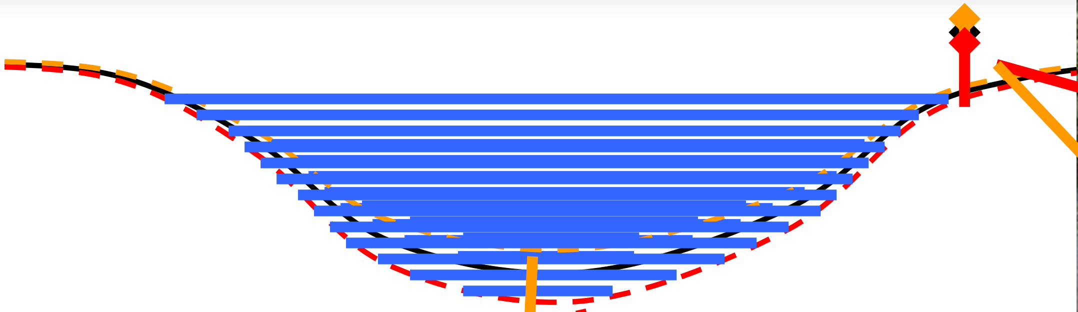


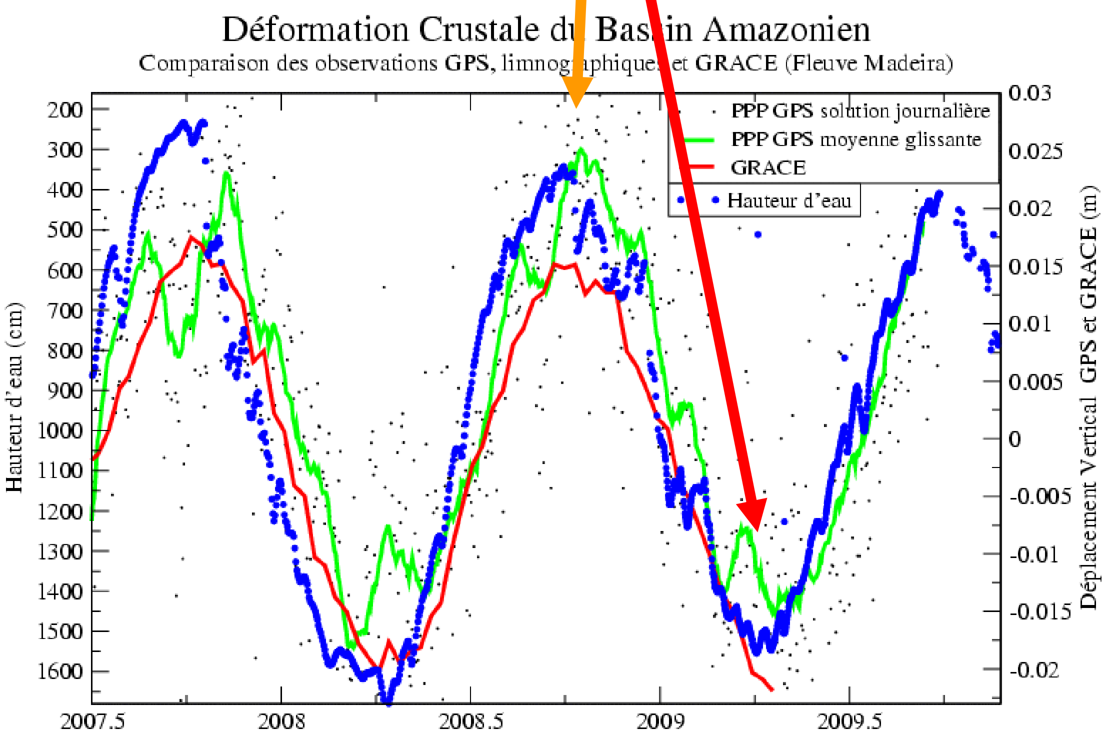
Rodell et al., 2009; Tiwari & Wahr, 2009



Becker et al. 2010

La charge hydrologique en Amazonie



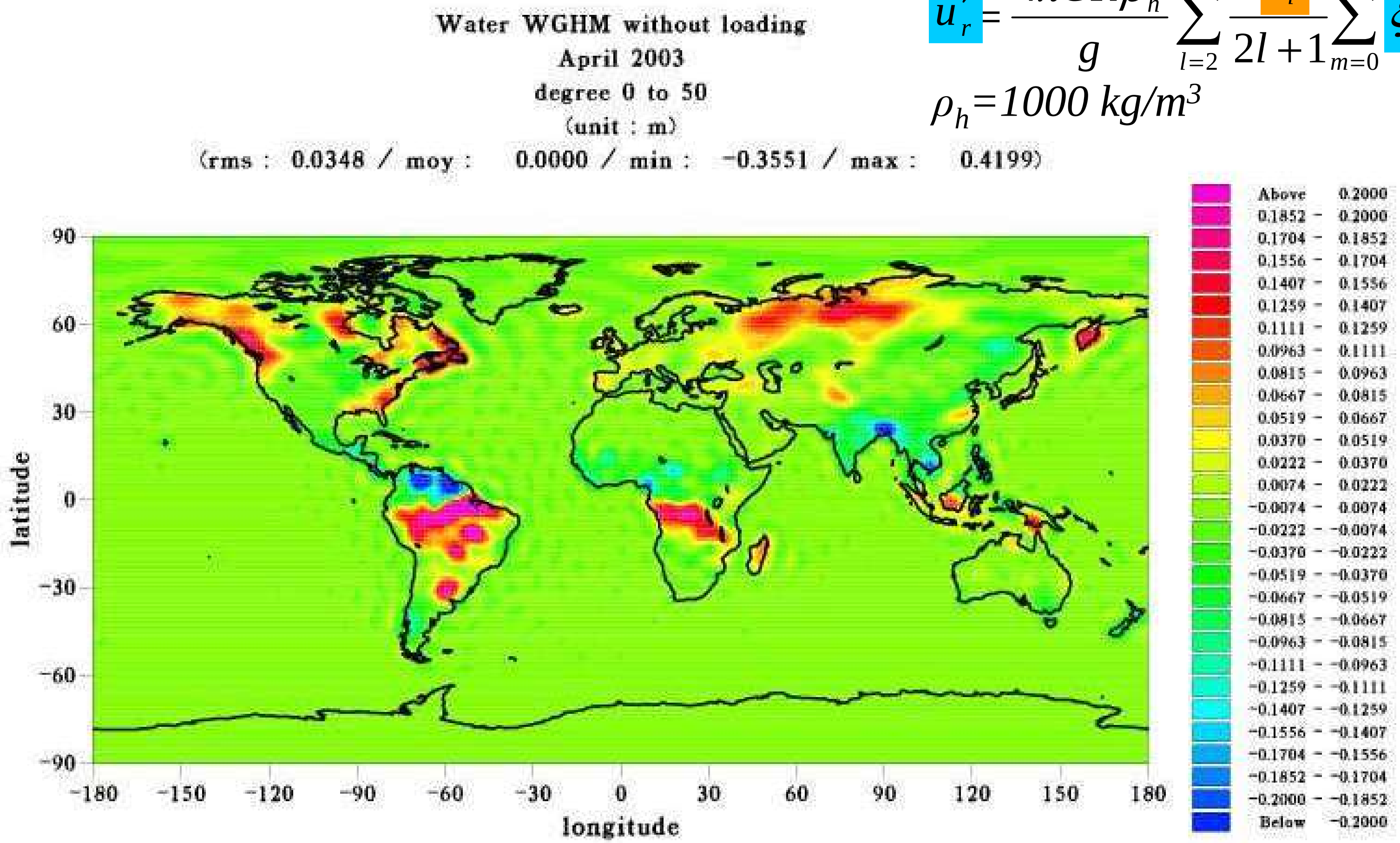


Les données de climatologie

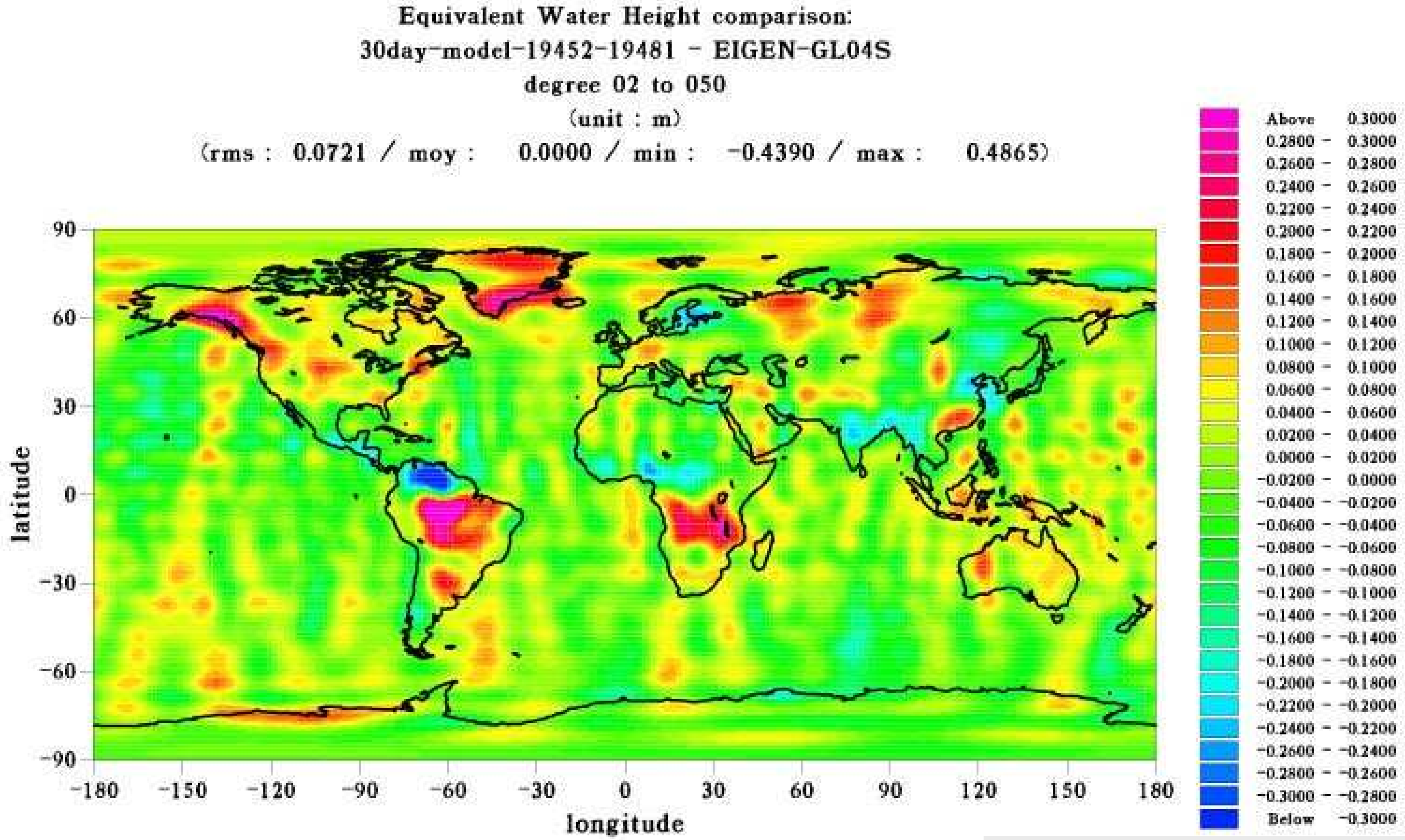
Déformation de charge à partir des hauteurs d'eau (sur les continents):

$$u'_r = \frac{4\pi G R \rho_h}{g} \sum_{l=2}^{L} \frac{h'_l}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} \xi_{l,m}$$

$$\rho_h = 1000\ kg/m^3$$



WaterGAP Global Hydrology Model, P. Döll & al., 2003



$$\Delta N = R\sum_{l=2}^{L}\sum_{m=0}^{l}\overline{P}_{lm}(\sin\varphi)\left(\Delta\overline{C}_{lm}\cos m\lambda + \Delta\overline{S}_{lm}\sin m\lambda\right)$$

$$\Delta h_w = \frac{g}{4\pi G R \rho_w}\sum_{l=2}^{50}\frac{2l+1}{1+k_l'}\Delta N_l^{geoid}$$

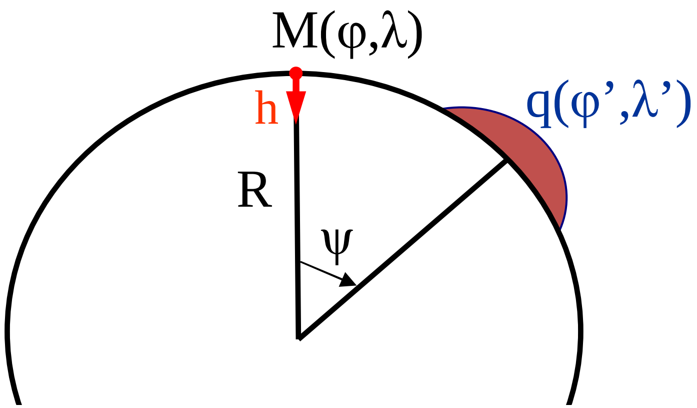
Les fonctions de Green

Les fonctions de Green décrivent la réponse de la Terre à la charge d'une masse ponctuelle.

L'opérateur de Green, solution des équations aux dérivées partielles forcées par une distribution de Dirac, est une intégrale de convolution entre une fonction de Green et un modèle de charge:

$$h(\varphi,\lambda) = R^2 \iint_S q(\varphi',\lambda')\, G(\psi)\, dS$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\varphi',\lambda')\, G(\psi) \cos\varphi \, d\varphi' \, d\lambda'$$



$$radial: \quad G_u(\psi) = \frac{R}{M} \sum_{l=0}^{\infty} h_l' P_l(\cos\psi)$$

$$tangentiel: \quad G_v(\psi) = \frac{R}{M} \sum_{l=0}^{\infty} l_l' \frac{\partial P_l(\cos\psi)}{\partial\psi}$$

$$avec \quad \cos\psi = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda')$$

Le développement harmoniques sphériques

Soit le déplacement radial:

$$h(\varphi,\lambda)=\frac{R^3}{M}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(\varphi',\lambda')\left[\sum_{l=0}^{\infty} h'_l P_l(\cos\psi)\right]\cos\varphi\, d\varphi'\, d\lambda'$$

Dans le cas d'un modèle de Terre à symétrie sphérique, plutôt que discrétiser la charge, on la décompose en fonctions harmoniques sphériques:

$$q(\varphi',\lambda')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} q_{lm}\ Y_{lm}(\varphi',\lambda') \quad avec \quad Y_{lm}(\varphi',\lambda')=\sqrt{(2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\sin\varphi')e^{im\lambda'}$$

Du fait de l'orthonormalisation des fonctions de Legendre, l'intégrale double sur la sphère de $P_l(\cos\psi)=\sum_{m=0}^{l} Y^*_{lm}(\varphi',\lambda')Y_{lm}(\varphi,\lambda)$ se simplifie en::

$$\iint_S Y^*_{l'm'}(\varphi',\lambda')\,Y_{lm}(\varphi',\lambda')\cos\varphi' d\varphi' d\lambda' = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

et le déplacement radial associé aux fonctions de Green devient:

$$h(\varphi,\lambda)=\frac{4\pi R^3}{M}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{h'_l}{2l+1} q_{lm}\ Y_{lm}(\varphi,\lambda)$$

De même pour le déplacement tangentiel: $\bar{r}(\varphi,\lambda)=\frac{4\pi R^3}{M}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{l'_l}{2l+1} q_{lm}\ \overline{\nabla} Y_{lm}(\varphi,\lambda)$

Le rebond post-glaciaire (I)

Dans le cas d'une rhéologie élastique, les nombres de Love/Shida s'écrivent *h'*, *l'* et désignent respectivement les coefficients d'harmoniques sphériques des déplacements radial et tangentiel, et de la perturbation gravitationnelle provoqués par la charge. Les fonctions de Green correspondant à cet effet de charge s'écrivent:

$$G_u(\psi)=\frac{R}{M}\sum_{l=0}^{\infty}h'_l P_l(\cos\psi) \quad ; \qquad G_v(\psi)=\frac{R}{M}\sum_{l=0}^{\infty}l'_l \frac{\partial}{\partial\psi}P_l(\cos\psi)$$

$$\cos\psi=\sin\varphi\,\sin\varphi'+\cos\varphi\,\cos\varphi'\,\cos(\lambda-\lambda')$$

et la réponse élastique de la Terre à une charge surfacique $q(\varphi',\lambda')$ est donnée par:

$$h(\varphi,\lambda)=R^2\iint_S q(\varphi',\lambda')\,G_u(\psi)\,dS'=R^2\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}q(\varphi',\lambda')\,G_u(\psi)\cos\varphi\,d\varphi'\,d\lambda'$$

Dans le cas de déformations de la surface associées à l'effet de charge du rebond post-glaciaire, l'approximation élastique est insuffisante. Du fait des constantes de temps, longues, associées au comportement d'une calotte de glace, les nombres de Love correspondants deviennent dépendant du temps:

$$h'_l(t)=h'_l\,\delta(t)+\sum_{k=0}^{\infty}r_{lk}\,\exp(-s_{lk}t)$$

Le rebond post-glaciaire (II)

L'intégration de la réponse sur l'ensemble de la surface terrestre se fait de la même façon à ceci près que la fonction de Green dépend du temps et qu'il faut distinguer le temps t_0 auquel s'applique la charge surfacique du temps t d'observation. L'intégration devient un double produit de convolution sur la surface de la Terre et le temps, soit :

$$h(\varphi,\lambda,t) = R^2 \int_{-\infty}^{t} \iint_S q(\varphi',\lambda',t')\, G_u(\psi,t-t')\, dS'dt'$$

Dans le cas d'un modèle de Terre à symétrie sphérique, plutôt que discrétiser la charge, on la décompose en fonctions harmoniques sphériques:

$$q(\varphi',\lambda',t') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} q_{lm}(t')\, Y_{lm}(\varphi',\lambda') \quad avec \quad Y_{lm}(\varphi',\lambda') = \sqrt{(2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\sin\varphi') e^{im\lambda'}$$

Du fait de l'orthonormalisation des fonctions de Legendre:

$$\iint_S Y^*_{l'm'}(\varphi',\lambda')\, Y_{lm}(\varphi,\lambda)\, dS' = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

le déplacement radial devient:

$$h(\varphi,\lambda,t) = \frac{4\pi R^3}{M} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \left[\frac{1}{2l+1} \int_{-\infty}^{t} h'_l(t-t')\, q_{lm}(t') dt' \right] Y_{lm}(\varphi,\lambda)$$

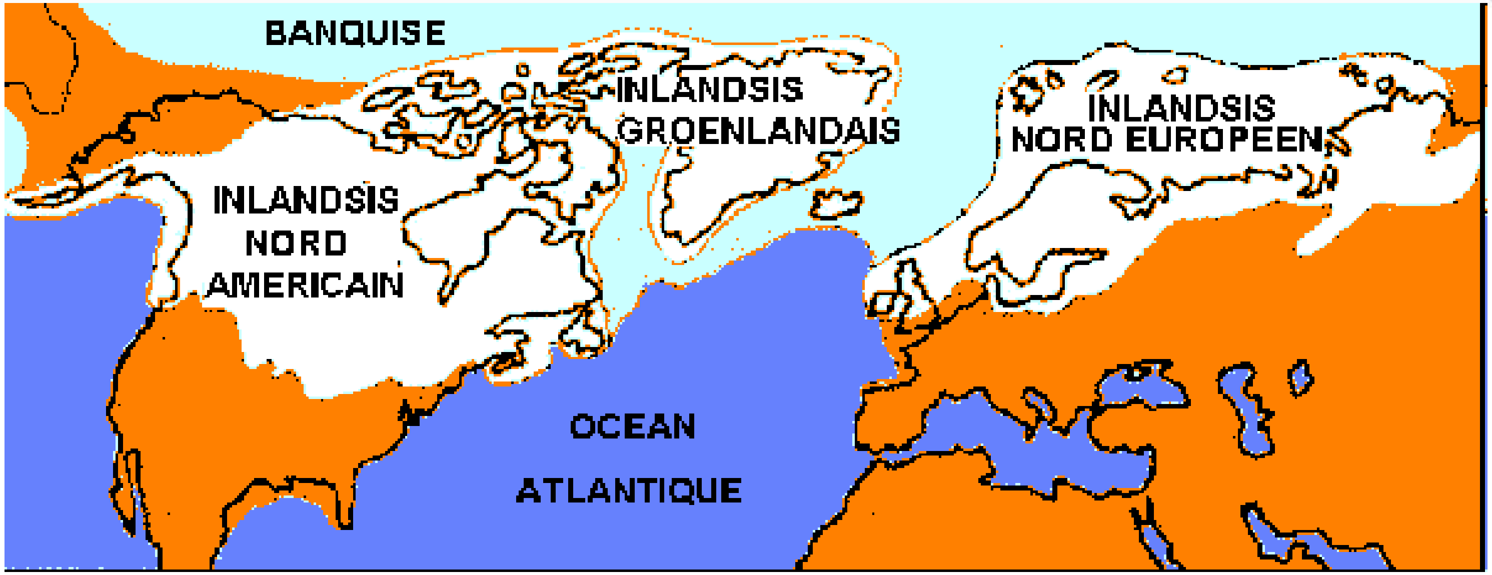
Le rebond post-glaciaire

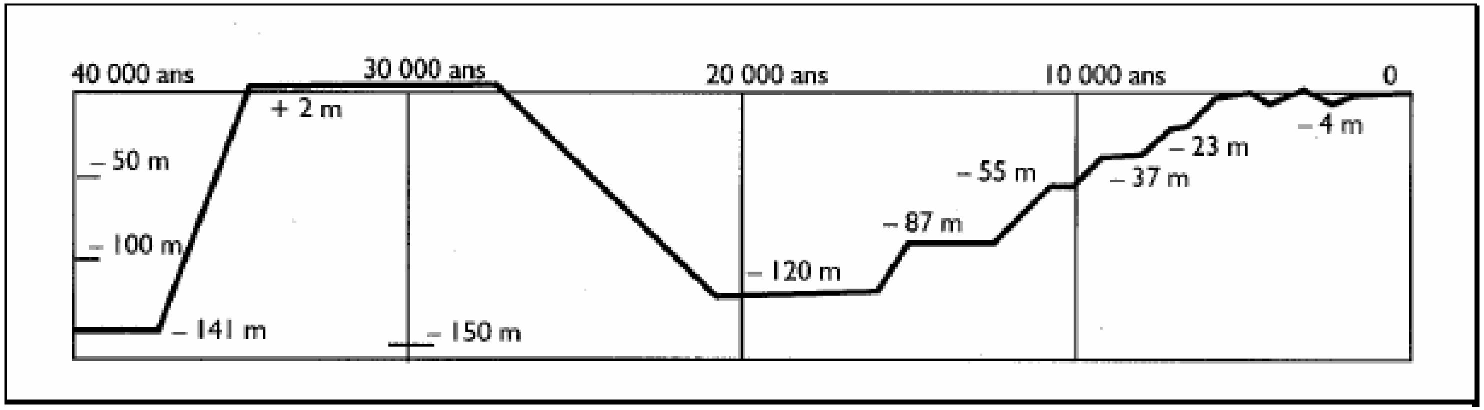
De façon assez simplifiée, la réponse terrestre à la variation d’une charge agissant sur sa surface résulte des contributions de deux milieux différents : **la lithosphère, couche rigide** dont le comportement peut être assimilé à celui d’un **solide purement élastique**, d’une **épaisseur** variable, mais dont la **moyenne** est d’environ **100 km**, et **le manteau**, sous la lithosphère, dont il faut prendre en compte les **composantes visqueuses**.

Ainsi, une masse posée à la surface de la Terre est supportée par deux effets physiques qui s’opposent à son enfoncement : la **rigidité élastique de la lithosphère**, qui s’oppose à la flexion de la croûte nécessaire à son enfoncement, et la **force d’Archimède du manteau**, lorsque la charge est suffisante. Le second effet, visqueux, concerne les charges ayant une distribution spatiale suffisante, et se produit sur des constantes de temps très longues. Il semble que des **charges de longueur d’onde supérieure à 1500 km** soient **compensées localement par le manteau**, que les charges comprises **entre 600 et 1500 km** sont partiellement **supportées par la lithosphère**, et que les charges de grandeur caractéristique **inférieure à 600 km** sont presque complètement **supportées par la flexure élastique de la lithosphère** (Zuber et al. 1989).

Dans le cas du rebond post-glaciaire (remontée progressive de la croûte et du manteau suite à la disparition totale ou partielle d’une calotte de glace), les deux effets se superposent, même si la réponse élastique s’estompe rapidement, alors que **le rebond visqueux est encore sensible plusieurs milliers d’années après la fin de la déglaciation**.

La remontée du niveau des mers





Evolution du niveau des mers depuis 40 000ans

La fonte des glaces (volume/masse)

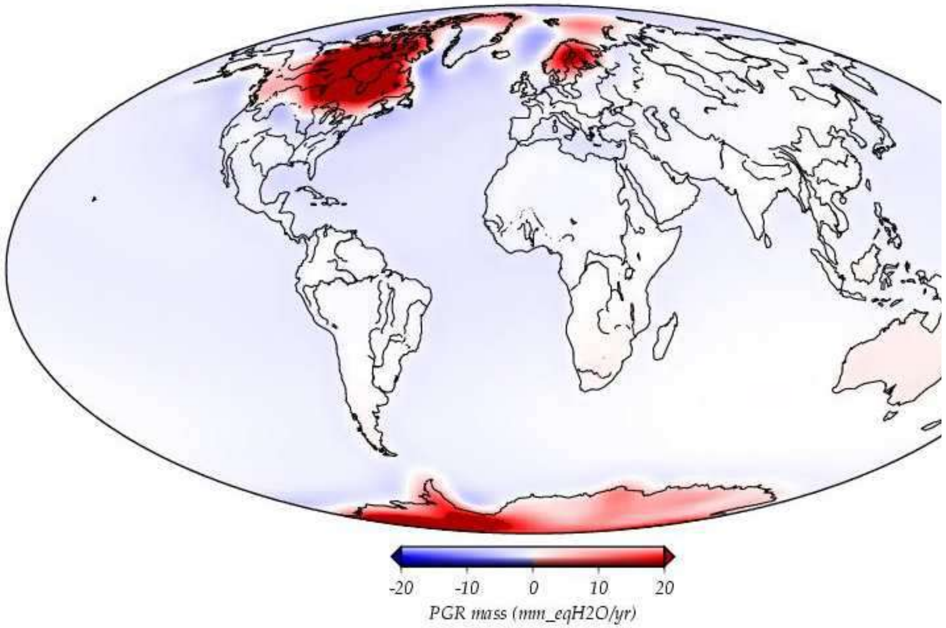
Calotte	Volume max, en 10^{14} m^3	Masse max en 10^{16} kg	Volume actuel 10^{14} m^3	Masse actuelle 10^{16} kg	Augment. en m
Innuit	9,9	89	0,34	3,1	3
Laurentide	210	1900	0,35	3,1	55
Groenland	55	490	30	270	6
Fennoscandie	29	260	0	0	8
Mer de Barents	22	200	0,09	0,77	6
Mer de Kara	26	240	0	0	7
Mer Est-sibérienne	11	99	0	0	3
Islande	2	18	0	0	1
Ecosse	0,96	8,6	0	0	0
Patagonie	1,8	16	0	0	0
Antarctique	350	3200	260	2300	26
Total	720	650	290	2600	115
				Capacité restante	76

Comparaison des masses et volumes des différentes calottes, lors du dernier maximum glaciaire et maintenant, et contribution à l'augmentation du niveau des mers.

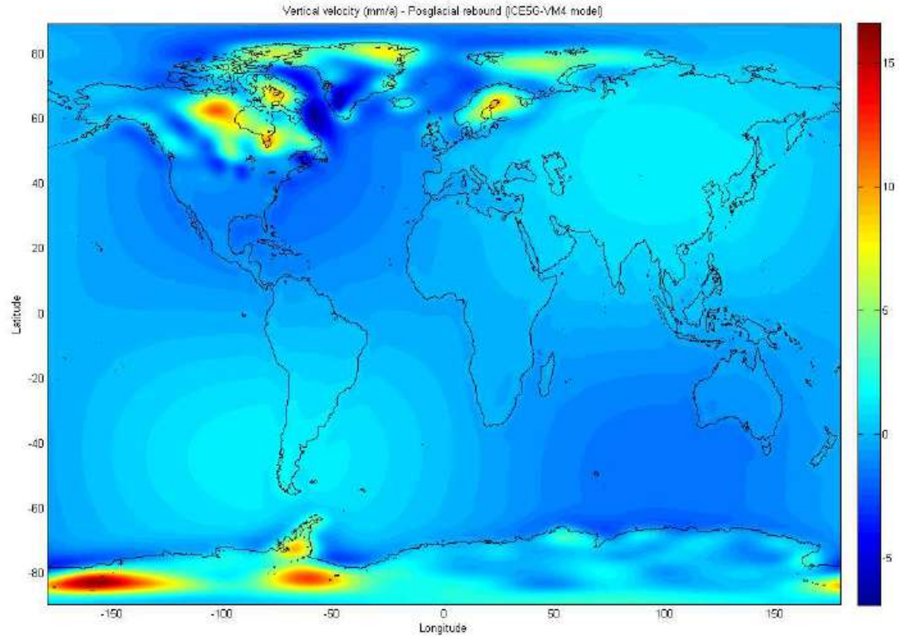
Tushingham & Peltier, 1991

Les modèles de rebond post-glaciaire

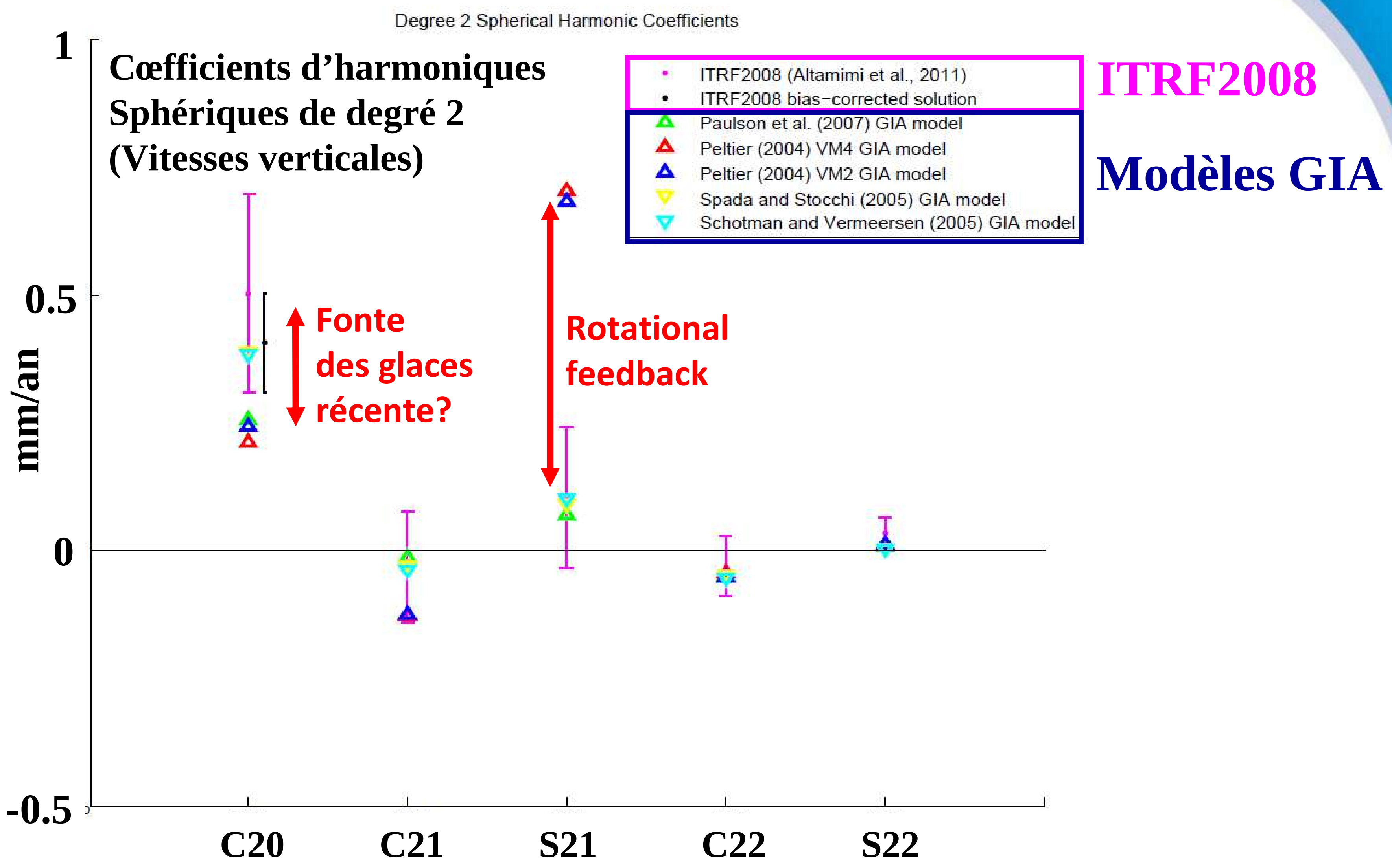
Modèle de Paulson, 2007



modèle ICE5G, Peltier 2005



ITRF2008 et rebond post-glaciaire



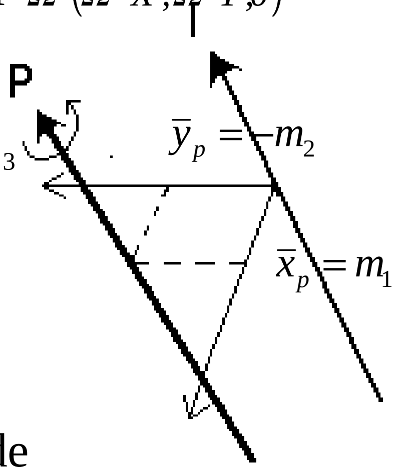
Le potentiel de marée polaire

L'accélération centrifuge à la surface de la Terre en rotation (Ω) s'exprime au point de coordonnées (X, Y, Z) définies dans le repère terrestre, par le vecteur $\overline{\Omega}\left(\Omega^2 X, \Omega^2 Y, 0\right)^T$

Elle dérive du **potentiel axifuge** :

$$V_c = \frac{1}{2}\left[\Omega^2 R^2 - \left(\overline{\Omega}.\overline{R}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\Omega^2\left(X^2 + Y^2\right)$$

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = m_3$$



Toute variation de l'axe de rotation paramétré par (m_1,m_2), comme de la vitesse de rotation (m_3), modifie le vecteur rotation de la Terre :

Ω_0 = 7.292115 10^{-05} rd/s

$$\overline{\Omega} = \Omega_o\left(m_1\overline{X}_u + m_2\overline{Y}_u + (1+m_3)\overline{Z}_u\right)$$

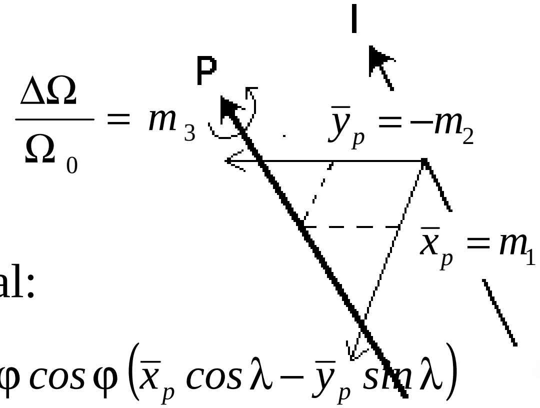
et par conséquence entraîne une modification du potentiel axifuge qui devient au 1^er^ ordre en

$$V_c = V_{c_o} + \Delta V_c = \frac{\Omega_o^2}{2}\left[\left(X^2+Y^2\right)(1+2m_3) - 2Z\left(m_1 X + m_2 Y\right)\right]$$

D'où une variation qui s'exprime en coordonnée polaire

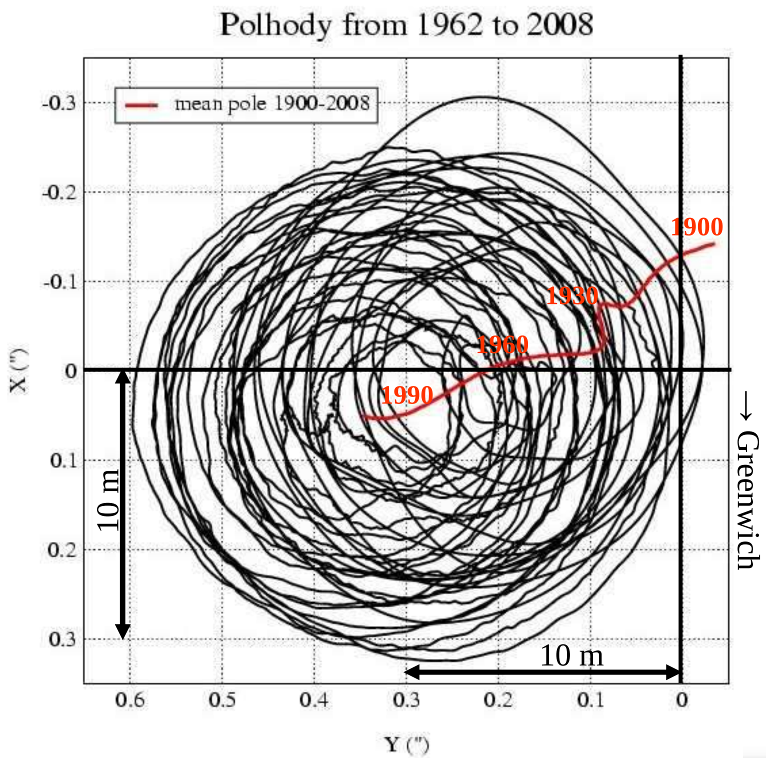
$$\Delta V_c = \Omega_o^2 R^2\left[m_3\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\left(m_1\cos\lambda + m_2\sin\lambda\right)\right]$$

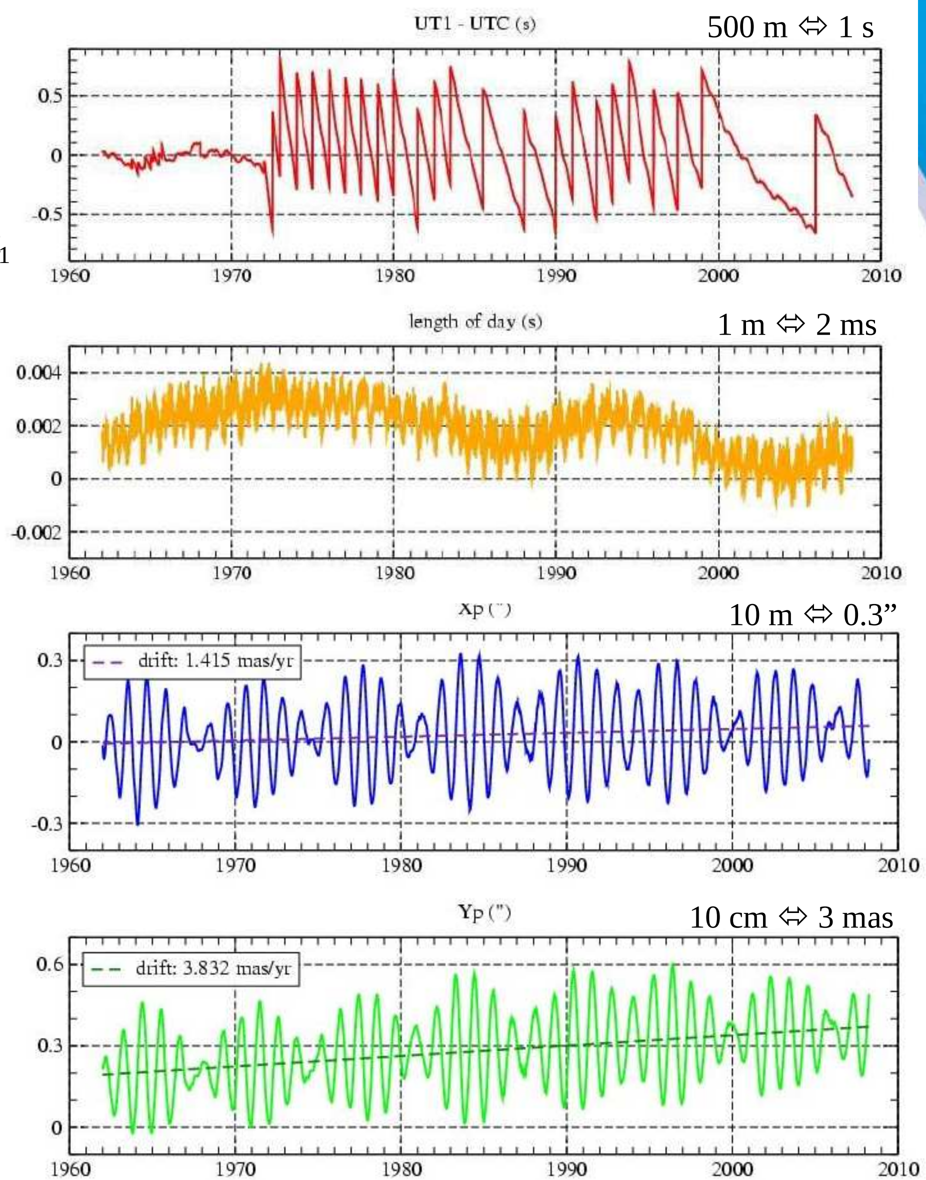
Les variations x_p, y_p, UT1



Déplacement radial:

$$u_r = -\frac{h_2}{g}\Omega_0^2 R^2 \sin\varphi \cos\varphi \left(\bar{x}_p \cos\lambda - \bar{y}_p \sin\lambda\right)$$





La déformation de marée polaire

Typiquement les variations annuelles ou semi-annuelles de la vitesse de rotation de la Terre sont de l'ordre de quelques ms, alors que le pôle peut varier à la période de Chandler jusqu'à 0.6''. Il s'en suit que m_3 est de deux ordres de grandeur inférieur à m_1 et m_2 et peut donc être négligé:

$$\Delta V_c = -\frac{\Omega_o^2 R^2}{3} P_{21}(\sin\varphi)(m_1 \cos\lambda + m_2 \sin\lambda)$$

Le déplacement de la surface de la Terre induit par la variation du potentiel centrifuge représenté par l'harmonique sphérique de degré 2 s'exprime conformément à la formulation de Love/Shida :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{h_2}{g}\Delta V_c = -\dfrac{h_2}{g}\Omega_o^2 R^2 \sin\varphi\cos\varphi(m_1\cos\lambda + m_2\sin\lambda) = -0.033\sin 2\varphi(\bar{x}_p\cos\lambda - \bar{y}_p\sin\lambda) \\ u_\varphi = \dfrac{\ell_2}{g}\dfrac{\partial\Delta V_c}{\partial\varphi} = -\dfrac{\ell_2}{g}\Omega_o^2 R^2\cos 2\varphi(m_1\cos\lambda + m_2\sin\lambda) = -0.009\cos 2\varphi(\bar{x}_p\cos\lambda - \bar{y}_p\sin\lambda) \\ u_\lambda = \dfrac{\ell_2}{g\cos\varphi}\dfrac{\partial\Delta V_c}{\partial\lambda} = \dfrac{\ell_2}{g}\Omega_o^2 R^2\sin\varphi(m_1\sin\lambda - m_2\cos\lambda) = 0.009\sin\varphi(\bar{x}_p\sin\lambda + \bar{y}_p\cos\lambda) \end{cases}$$

$$(\bar{x}_p, \bar{y}_p \ en'')$$

Le déplacement radial peut atteindre 2 cm, le déplacement tangentiel 5 mm.

La marée polaire océanique

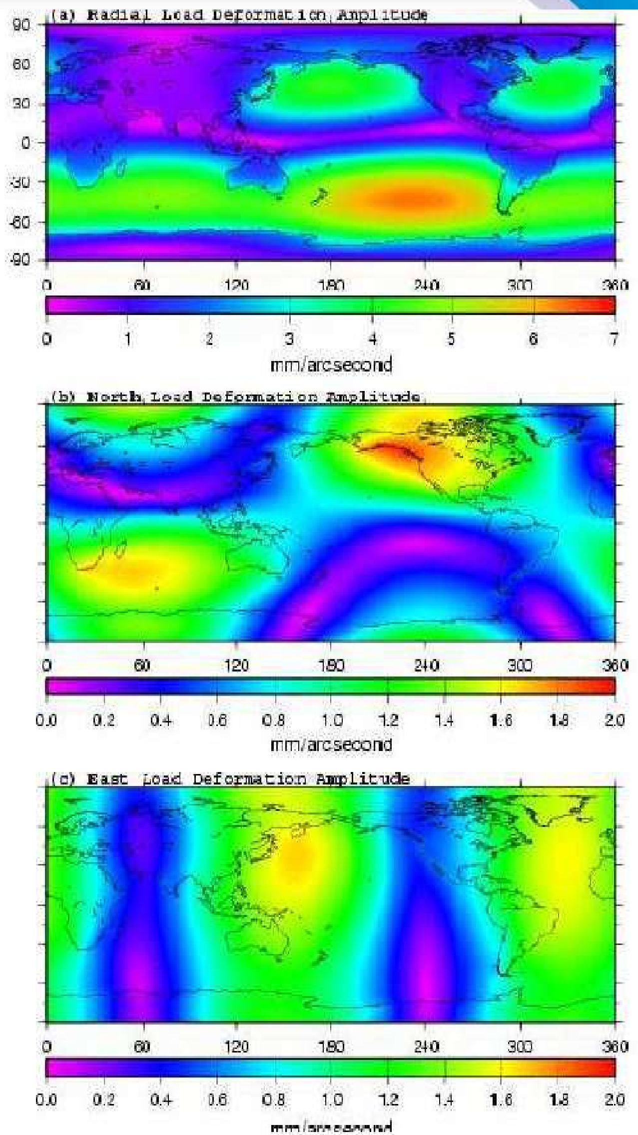
La marée polaire océanique est générée par l'effet axifuge du mouvement du pôle sur les océans. Le modèle de Desai (2002) de marée polaire d'équilibre tient compte du contour des continents, de la charge sur le fond, de l'auto-gravitation, de la conservation de la masse océanique. La charge induite de marée polaire océanique produit la déformation suivante à la surface de la Terre:

$$\begin{bmatrix} u_r(\varphi,\lambda) \\ u_n(\varphi,\lambda) \\ u_e(\varphi,\lambda) \end{bmatrix} = K \left\{ \left(m_1\gamma_2^R + m_2\gamma_2^I\right) \begin{bmatrix} u_r^R(\varphi,\lambda) \\ u_n^R(\varphi,\lambda) \\ u_e^R(\varphi,\lambda) \end{bmatrix} + \left(m_2\gamma_2^R - m_1\gamma_2^I\right) \begin{bmatrix} u_r^I(\varphi,\lambda) \\ u_n^I(\varphi,\lambda) \\ u_e^I(\varphi,\lambda) \end{bmatrix} \right\}$$

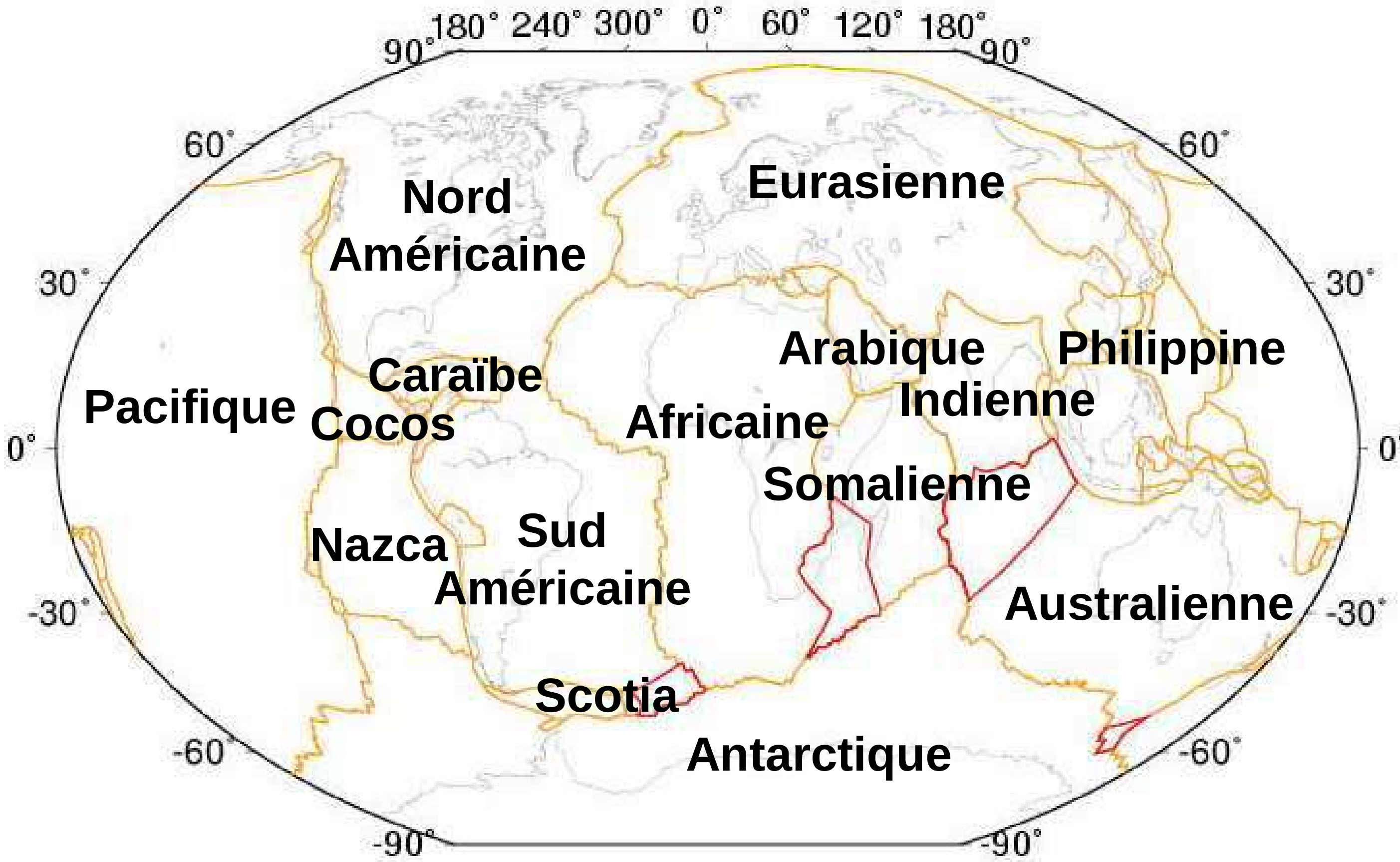
$$avec: \quad K = \frac{4\pi G a_e \rho_w H_p}{3g} \quad et \quad H_p = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\frac{\Omega^2 a_e^4}{GM}$$

$$\gamma = (1 + k_2 - h_2) = \gamma_2^R + i\gamma_2^I = 0.6870 + 0.0036i$$

Figures: amplitude en fonction de l'amplitude de la polhodie. Pour une amplitude de 0.3", la déformation de charge peut atteindre 1.8, 0.5, 0.5 mm dans les directions radiale, nord, est..

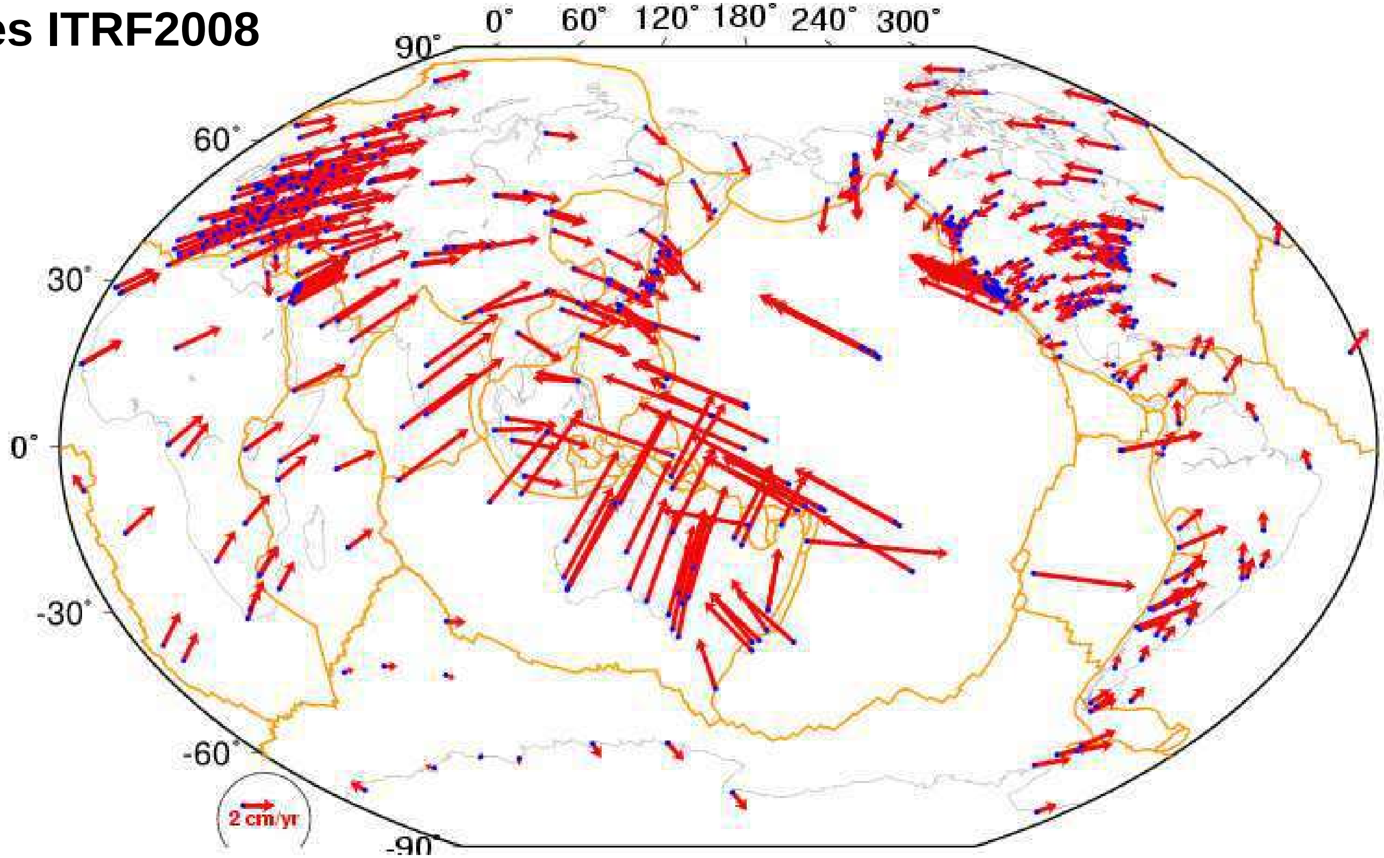


La tectonique



La tectonique

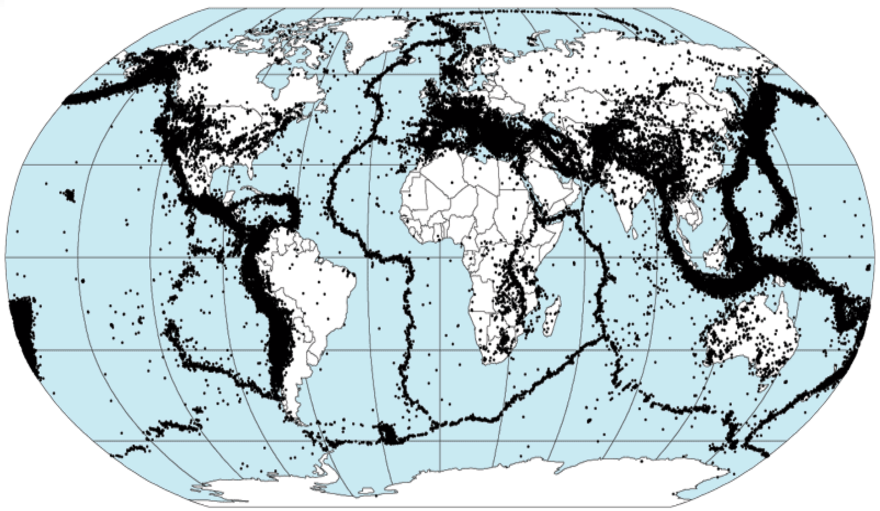
509 sites ITRF2008



Vitesses des sites ITRF2008
observations > 3 an

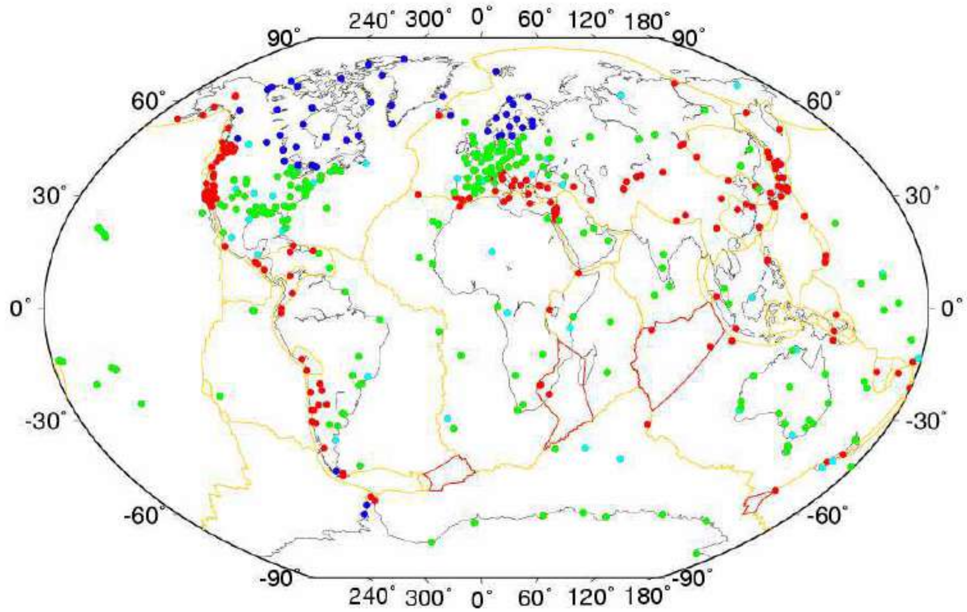
Les tremblements de Terre

Zones sismiques



509 stations ITRF:

- 193 en frontières des plaques et zones de déformation
- 55 en zones de rebond post-glaciaire
- 36 résidus > 3σ
- 225 sélectionnée en comparaison
  d'un modèle à 14 plaques
  à ±0.4mm/an



Le séisme du Maule (27 fév. 2010)

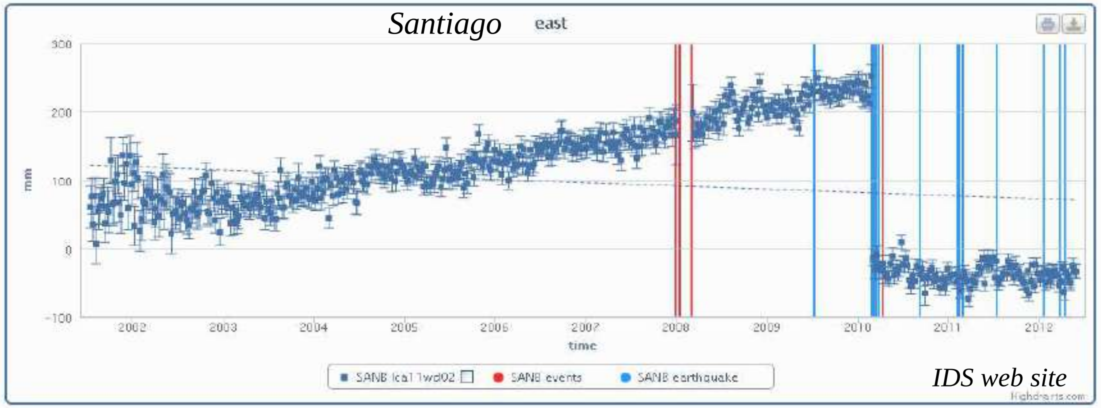
Exemples de changements de coordonnées, suite au séisme du Maule (Chili) de M 8.8 le 27 février 2010:

➢ **Concepcion** (SLR/TIGO)

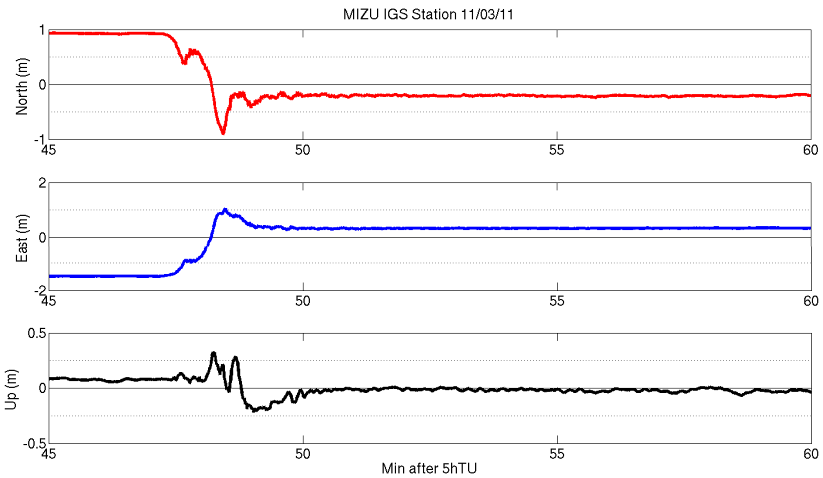
déplacement: 0,65 m S, 2,50 m W, -0,10 m H

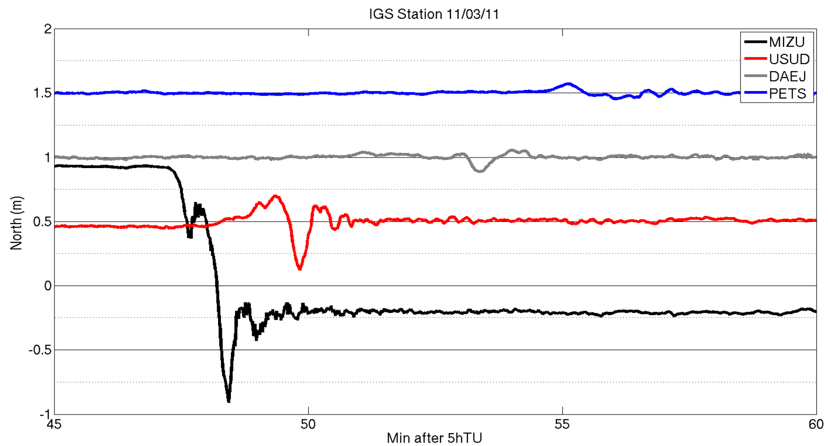
➢ **Santiago** (DORIS)

déplacement: 0,15 m S, 0,26 m W, -0,02 m H



Le séisme de Sendaï (11 mars 2011)





IPPP derived displacements induced by the last M 8.9 Sendaï earthquake on March 11, 2011 at the Mizusawa GPS station. Coordinates shifted by -1.25m, +1.75m, and -0.25m in the North, East and vertical directions respectively.

Results in the North direction ordered according to distances between stations and epicentre.

Synthèse des déplacements

	vertical	horizontal
Marée terrestre	30 cm	10 cm
Charge de marée océanique	10 cm	2 cm
Charge de courant océanique	1 cm	2 mm
Charge de marée atmosphérique	3 mm	0.5 mm
Charge pression atmosphérique	1 cm	2 mm
Charge hydrologique	5 cm	1 cm
Marée polaire	2 cm	5 mm
Marée polaire océanique	2 mm	0.5 mm
Rebond post-glaciaire	1 cm	2 mm
Tectonique	1 cm/an	10 cm/an
Géocentre	4 mm	2 mm