

# Trajectoires planétaires et interplanétaires

## Théories planétaires analytiques de l'IMCCE

-

## TOPxx, VSOPxx : construction et utilisation

Florent Deleflie & Jean-Louis Simon, Gérard Francou  
florent.deleflie@imcce.fr

6 septembre 2016

# Introduction :

## 30 ans de théories analytiques à l'IMCCE



Deux types de théories planétaires analytiques à l'IMCCE :

- ▶ Les théories VSOP
  - ▶ Variations Séculaires des Orbites Planétaires
  - ▶ Essentiellement issues des travaux de P. Bretagnon.
  - ▶ Les théories VSOP sont des solutions du mouvement des huit planètes du système solaire.
  - ▶ Très précises sur des intervalles de temps d'environ 1 000 ans
  - ▶ Base des éphémérides planétaires de l'IMCCE de 1984 à 2006.
- ▶ Les théories TOP
  - ▶ Theory of Outer Planets
  - ▶ Issues des travaux de J.-L. Simon.
  - ▶ Les théories TOP sont des solutions du mouvement des quatre grosses planètes
  - ▶ Précises sur plusieurs milliers d'années.

## Introduction

# Introduction : *analytique vs numérique* : des changements de paradigme



- ▶ Affrontements numérique/analytique : Trois périodes.
- ▶ Éphémérides planétaires actuelles :
  - ▶ principalement issues d'intégrations numériques très précises
  - ▶ ajustées aux observations les plus récentes
  - ▶ experts internationaux :
    - ▶ les éphémérides européennes INPOP : Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris. (Fienga et al., 2008, 2009, 2011) ;
    - ▶ les éphémérides américaines DE : Development Ephemeris. (Standish, 1998), (Folkner et al., 2009), (Folkner, 2010)
    - ▶ éphémérides russes EPM: Ephemerides of Planets and the Moon. (Pitjeva, 2005, 2010).
- ▶ Théories planétaires analytiques récentes
  - ▶ VSOP2010 et TOP2010 : ajustées sur DE405 (Standish, 1998)
  - ▶ VSOP2013, TOP2013 (Simon et al., 2013) : ajustées à INPOP10a (Fienga et al., 2011)

- ▶ Même si les théories analytiques ne peuvent concurrencer, en terme de précision, les intégrations numériques pour le calcul d'éphémérides dans le cas de programmes astronautiques, elles restent cependant suffisamment précises pour répondre à la plupart des besoins des astronomes;
- ▶ Leur précision décroît lentement avec le temps et elles peuvent rester précises sur des intervalles de temps de plusieurs milliers d'années;
- ▶ Elles permettent une analyse très fine des différentes perturbations;
- ▶ Leur forme analytique est très utile pour étudier des problèmes tels que la rotation de la Terre;
- ▶ On peut obtenir des solutions compactes de bonne précision.

# Remarques générales sur les théories du mouvement des planètes autour du Soleil



- ▶ Un cas particulier du problème des  $N$  corps;
- ▶ Loi de la gravitation universelle en puissance;
- ▶ les planètes ont une masse faible devant celle du Soleil;
- ▶ On recherche des solutions approchées du problème;
- ▶ Valables sur un intervalle de temps limité;
- ▶ les coordonnées sont des fonctions :
  - ▶ du temps  $t$ ;
  - ▶ des masses des corps en présence;
  - ▶ des constantes d'intégration.

## 2 types de théories

- ▶ Approches analytiques : les coordonnées sont des fonctions analytiques du temps.
- ▶ Approches numériques : les coordonnées sont déterminées de proche en proche par intégration numérique.

- ▶  $a$  le demi-grand axe de l'orbite, relié au moyen mouvement  $n$  de la planète par la troisième loi de Képler;
- ▶  $e$ , l'excentricité de l'orbite;
- ▶  $i$  l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique; on peut aussi utiliser dans les équations la variable  $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ ;
- ▶  $\Omega$ , la longitude du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique, comptée à partir de l'équinoxe;
- ▶  $\varpi$ , la longitude du périhélie, comptée à partir de l'équinoxe jusqu'au nœud ascendant sur l'écliptique et ensuite à partir du nœud jusqu'au périhélie, sur l'orbite; On a :  $\varpi = \omega + \Omega$ .
- ▶ une variable rapide :
  - ▶ l'anomalie moyenne définie par  $M = n(t - \tau)$  où  $\tau$  est le temps de passage au périhélie;
  - ▶ la longitude moyenne  $\lambda = M + \varpi$ ;
  - ▶  $\varepsilon$  la longitude moyenne de l'époque qui vérifie

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt}$$

- ▶ distinction actions/angles : *variables métriques* ( $a, e, i$  ou  $\gamma$ ) et les *variables angulaires* ( $\varepsilon$  ou  $\lambda$  ou  $M, \varpi$  ou  $\omega, \Omega$ ).
- ▶ Paramètres adaptés : on utilise souvent au lieu des variables  $e, \gamma, \varpi, \Omega$ , les variables suivantes:

$$k = e \cos \varpi; \quad h = e \sin \varpi; \quad q = \gamma \cos \Omega; \quad p = \gamma \sin \Omega.$$

- ▶ Pour décrire l'orbite d'une planète autour du Soleil, on peut utiliser :
  - ▶ les six variables  $a, e, \gamma, \lambda, \varpi, \Omega$ ,
  - ▶ ou les six variables  $a, \lambda, k, h, q, p$ .

## Cas particulier de la variable rapide

Nous serons amenés à distinguer la longitude moyenne  $\lambda$  des autres variables et nous noterons :

- ▶  $\eta$ , l'ensemble des cinq variables elliptiques autres que  $\lambda$ ,
- ▶  $\sigma$ , l'ensemble des six variables elliptiques utilisées :  
 $\{\sigma\} = \{\eta, \lambda\}$ .

## Rappels de mécanique céleste

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ -\frac{u_1(1-u_1)}{e} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{u_1}{e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right], \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ -\frac{\gamma}{2u_1} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\gamma}{2u_1} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{1}{4\gamma u_1} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right], \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{u_1(1-u_1)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\gamma}{2na^2 u_1} \frac{\partial R}{\partial \gamma}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ \frac{u_1}{e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\gamma}{2u_1} \frac{\partial R}{\partial \gamma} \right], \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{1}{4\gamma u_1} \frac{\partial R}{\partial \gamma}.\end{aligned}$$

avec  $u_1 = \sqrt{1 - e^2}$ .

# Équations planétaires de Lagrange en paramètres équinoctiaux



$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{u_1 u_2}{na^2} \left( h \frac{\partial R}{\partial h} + k \frac{\partial R}{\partial k} \right) + \frac{1}{2na^2 u_1} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right), \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ -u_1 \frac{\partial R}{\partial h} - k u_1 u_2 \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{h}{2u_1} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right], \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[ u_1 \frac{\partial R}{\partial k} - h u_1 u_2 \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{k}{2u_1} \left( p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right) \right], \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{-1}{2na^2 u_1} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial \lambda} + q \left( k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right], \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{2na^2 u_1} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial q} - p \frac{\partial R}{\partial \lambda} - p \left( k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k} \right) \right].\end{aligned}$$

$$\text{avec } u_2 = \frac{1}{1+u_1}.$$

## Problème général de $N$ planètes

- ▶ corps central Soleil  $S$
- ▶ chaque planète  $P_i$  est soumise aux perturbations des autres planètes  $P_{j \neq i}$ .

On note et pose  $\mathbf{r}_i = \mathbf{SP}_i$ ,  $\mathbf{r}_j = \mathbf{SP}_j$ ,  $r_i = |\mathbf{SP}_i|$ ,  $r_j = |\mathbf{SP}_j|$ ,  $\Delta_{ij} = |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j|$ .  
Équations du mouvement pour la planète  $P_i$ :

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{grad}(U_i + R_i)$$

où  $U_i$  est le *potentiel képlérien* dû au Soleil et  $R_i$  la *fonction perturbatrice* ( $m_i$  est une masse réduite, et  $k$  la constante de Gauss) :

$$U_i = \frac{k^2(1 + m_i)}{r_i},$$
$$R_i = \sum_{j \neq i} k^2 m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right),$$

# Une remarque sur la constante de Gauss



Extrait de : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante\\_gravitationnelle\\_de\\_Gauss](https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_gravitationnelle_de_Gauss)

$$k = \sqrt{GM_S}$$

Les valeurs recommandées du paramètre de masse solaires sont :

- $GM_S = 1,327\,124\,420\,99 \times 10^{20} (\pm 1 \times 10^{10}) \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
- $GM_S = 1,327\,124\,400\,41 \times 10^{20} (\pm 1 \times 10^{10}) \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

## Dimension et unité

La **dimension** du **carré** de la constante de Gauss est celle de la constante de gravitation :

$$[k^2] = [G] = \text{L}^3 \text{ M}^{-1} \text{ T}^{-2},$$

où  $[k^2]$  et  $[G]$  sont la dimension du carré de la constante de Gauss et celle de la constante de gravitation.

La dimension de la constante de Gauss est celle de la **vitesse angulaire** ou pulsation :

$$[k] = \text{T}^{-1} \cdot 1$$

où  $\text{T}^{-1}$  est la dimension d'une **vitesse** et **1** exprime l'**angle plan**, **grandeur adimensionnelle**.

Bien que, dans le **Système international d'unités**, l'unité **dérivée** pour la vitesse angulaire, ou pulsation, soit le **radian par seconde**, la constante de Gauss est exprimée en **radian par jour**.

## Valeur

Dans le **système astronomique d'unités**, la constante associée au Système solaire vaut :

$$k = 0,017\,202\,098\,95 \text{ A}^{\frac{3}{2}} \text{ D}^{-1} \text{ S}^{-\frac{1}{2}}$$

avec :

- **A** l'unité astronomique,
- **D** le **jour solaire moyen**,
- **S** la masse solaire.

Si, à la place du jour solaire moyen, on utilise l'**année sidérale** comme unité de **temps**, la valeur de  $k$  est alors très proche de  $2\pi$ .

Cette valeur de 0,017 202 098 95, calculée par Gauss<sup>2</sup>, est encore en usage.

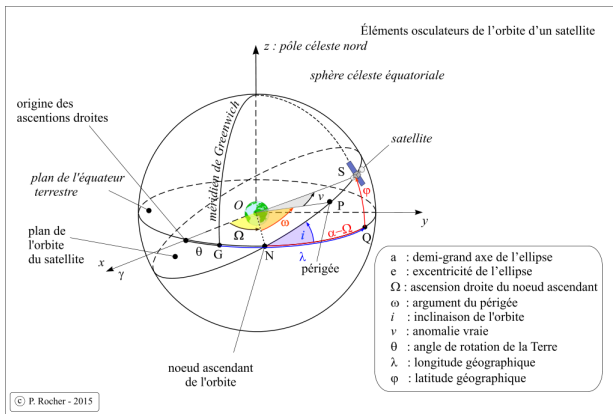
## Rappel sur la théorie de (Kaula, 1966)

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda)) P_{n,m}(\sin \varphi)$$

Dans cette équation :

- $r$  est la distance entre le centre de la Terre et le satellite,
- $\lambda$  est la longitude du satellite,
- $\varphi$  sa latitude.
- $\mu = GM$  avec  $G$  constante de la gravitation universelle et  $M$  masse de la Terre.
- $n$  est appelé le *degré* du développement, et  $m$  son *ordre*.
- $R_0$  est le rayon équatorial de la Terre.
- $C_{n,m}$  et  $S_{n,m}$  : coefficients du modèle

# Le développement de Kaula : Une transformation «géométrique»



$$\sin \varphi = \sin(i) \sin(\omega + v) ; \cos(\alpha - \Omega) = \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \varphi} ; \sin(\alpha - \Omega) = \frac{\sin(\omega + v) \cos i}{\cos \varphi}$$

## Introduction des fonctions d'inclinaison :

$$(C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\sin \varphi) = \sum_{p=0}^n F_{n,m,p}(i) \left( \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} C_{n,m} \\ -S_{n,m} \end{array} \right]_{(n-m)_{\text{pair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \cos((n-2p)(\omega + \nu) + m(\Omega - \theta)) \\ + \left[ \begin{array}{l} S_{n,m} \\ C_{n,m} \end{array} \right]_{(n-m)_{\text{impair}}}^{(n-m)_{\text{pair}}} \sin((n-2p)(\omega + \nu) + m(\Omega - \theta)) \end{array} \right)$$

## Un développement en série de Fourier :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} e^{i((n-2p)\nu + \text{Arg})} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{n,p,q}(e) e^{i((n-2p+q)M + \text{Arg})}$$

# Exemple : le potentiel de degré 2

$$\begin{aligned}U_2 = & \mu J_2 \frac{R_0^2}{a^3} \frac{1}{\eta^6} \times \left( \right. \\ & \left( \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) + \frac{9}{16} e^2 \sin^2 i \cos 2\omega \right) \\ & + \left( \left( 3e + \frac{3}{4} e^3 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) + \frac{9}{8} (e + e^3) \sin^2 i \cos 2\omega \right) \cos v \\ & + \left( -\frac{3}{8} \left( 3e + \frac{1}{2} e^3 \right) \sin^2 i \sin 2\omega \right) \sin v \\ & + \left( \frac{3}{2} e^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) + \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin^2 i \cos 2\omega \right) \cos 2v \\ & + \left( -\frac{3}{4} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin^2 i \sin 2\omega \right) \sin 2v \\ & + \left( \frac{1}{4} e^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) + \frac{3}{8} \left( 3e + \frac{3}{4} e^3 \right) \sin^2 i \cos 2\omega \right) \cos 3v \\ & + \left( -\frac{3}{8} \left( 3e + \frac{3}{4} e^3 \right) \sin^2 i \sin 2\omega \right) \sin 3v \\ & + \left( \frac{9}{16} e^2 \sin^2 i \cos 2\omega \right) \cos 4v \\ & + \left( -\frac{9}{16} e^2 \sin^2 i \sin 2\omega \right) \sin 4v \\ & + \left( \frac{3}{16} e^3 \sin^2 i \cos 2\omega \right) \cos 5v \\ & \left. \right)\end{aligned}$$

# Exemple : le potentiel moyen de degré 10



$\bar{U}_{10} = -\mu/a (R_0/a)^{10} 1/\epsilon^{19} J_{10} x$

0.34857246E-05

Amplitude du terme Prise en compte

kp2	kp1	l2					
0	0	0	#1	-0.246	(cos i/2)^0	(sin i/2)^0 e^0	-0.85781500E-06
0	1	0	#1	-4.430	(cos i/2)^0	(sin i/2)^0 e^2	-0.34179611E-10
0	2	0	#1	-11.628	(cos i/2)^0	(sin i/2)^0 e^4	-0.19860830E-15
0	3	0	#1	-6.460	(cos i/2)^0	(sin i/2)^0 e^6	-0.24424510E-21
0	4	0	#1	-0.606	(cos i/2)^0	(sin i/2)^0 e^8	-0.50687177E-28
1	0	0	#1	27.070	(cos i/2)^2	(sin i/2)^2 e^0	0.19299985E-04
1	1	0	#1	487.266	(cos i/2)^2	(sin i/2)^2 e^2	0.76900728E-09
1	2	0	#1	1279.072	(cos i/2)^2	(sin i/2)^2 e^4	0.44684894E-14
1	3	0	#1	710.596	(cos i/2)^2	(sin i/2)^2 e^6	0.54952721E-20
1	4	0	#1	66.618	(cos i/2)^2	(sin i/2)^2 e^8	0.11404111E-26
2	0	0	#1	-703.828	(cos i/2)^4	(sin i/2)^4 e^0	-0.10263629E-03
2	1	0	#1	-12668.906	(cos i/2)^4	(sin i/2)^4 e^2	-0.40895398E-08
2	2	0	#1	-33255.878	(cos i/2)^4	(sin i/2)^4 e^4	-0.23763189E-13
2	3	0	#1	-18475.488	(cos i/2)^4	(sin i/2)^4 e^6	-0.29223565E-19
2	4	0	#1	-1732.077	(cos i/2)^4	(sin i/2)^4 e^8	-0.60646457E-26
3	0	0	#1	7038.281	(cos i/2)^6	(sin i/2)^6 e^0	0.20992860E-03
3	1	0	#1	126689.055	(cos i/2)^6	(sin i/2)^6 e^2	0.83645982E-08
3	2	0	#1	332558.770	(cos i/2)^6	(sin i/2)^6 e^4	0.48604375E-13
3	3	0	#1	184754.872	(cos i/2)^6	(sin i/2)^6 e^6	0.59772831E-19
3	4	0	#1	17320.769	(cos i/2)^6	(sin i/2)^6 e^8	0.12404409E-25
4	0	0	#1	-29912.693	(cos i/2)^8	(sin i/2)^8 e^0	-0.18248668E-03
4	1	0	#1	*****	(cos i/2)^8	(sin i/2)^8 e^2	-0.72711759E-08
4	2	0	#1	*****	(cos i/2)^8	(sin i/2)^8 e^4	-0.42250799E-13
4	3	0	#1	*****	(cos i/2)^8	(sin i/2)^8 e^6	-0.51959313E-19
4	4	0	#1	-73613.268	(cos i/2)^8	(sin i/2)^8 e^8	-0.10782902E-25
5	0	0	#1	45467.292	(cos i/2)^10	(sin i/2)^10 e^0	0.56734261E-04
5	1	0	#1	818411.265	(cos i/2)^10	(sin i/2)^10 e^2	0.22605748E-08
5	2	0	#1	*****	(cos i/2)^10	(sin i/2)^10 e^4	0.13135577E-13
5	3	0	#1	*****	(cos i/2)^10	(sin i/2)^10 e^6	0.16153909E-19
5	4	0	#1	111892.165	(cos i/2)^10	(sin i/2)^10 e^8	0.33523540E-26
2	1	1	#2	8445.937	(cos i/2)^4	(sin i/2)^2 e^0 ((sin i/2)^2 e^2 cos 2w)	0.27263599E-08
3	1	1	#2	-95016.792	(cos i/2)^6	(sin i/2)^4 e^0 ((sin i/2)^2 e^2 cos 2w)	-0.62734486E-08
3	2	1	#2	*****	(cos i/2)^6	(sin i/2)^4 e^2 ((sin i/2)^2 e^2 cos 2w)	-0.48604375E-13
3	2	2	#2	33255.877	(cos i/2)^6	(sin i/2)^4 e^0 ((sin i/2)^4 e^4 cos 4w)	0.48604375E-14

- ▶ une transformation des coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \lambda)$  vers les éléments orbitaux  $(a, e, i, \Omega, \omega, \nu)$
- ▶ une décomposition en série de Fourier de l'anomalie moyenne  $M$
- ▶ un géopotential développé en série de Poisson !!
- ▶ une méthode d'intégration par itérations, en deux étapes : distinction entre termes séculaires et termes périodiques
- ▶ quid des conditions initiales ?
- ▶ quid des résonances et des singularités ?
- ▶ quid du potentiel de troisième corps ?

## Généralités sur les théories planétaires analytiques

Soit  $N$  le nombre des planètes  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) du système. Le nombre des variables elliptiques et des équations à intégrer est alors de  $6N$ . Notons:

- ▶  $\eta_i$ , l'ensemble des  $5N$  variables du système autres que les longitudes moyennes
- ▶  $\lambda_i$  les  $N$  longitudes moyennes;
- ▶  $\eta_i^0$  et  $\lambda_i^0$ , les constantes d'intégration correspondant aux variables  $\eta_i$  et  $\lambda_i$ , respectivement.
- ▶  $\bar{\lambda}_i$ , les *longitudes moyennes moyennes* :  $\bar{\lambda}_i = \bar{n}_i t + \lambda_i^0$
- ▶  $\bar{n}_i$  étant constante d'intégration de  $n_i$ , est le moyen mouvement moyen de la planète  $P_i$
- ▶  $\lambda_i^0$  est la constante d'intégration de  $\bar{\lambda}_i$

## On peut distinguer deux types de théories planétaires

- ▶ les théories générales
- ▶ les théories à variations séculaires.

on trouve  $3N$  fonctions linéaires du temps  $\bar{\lambda}_i$ ,  $\psi_i$  et  $\theta_i$  telles que les solutions sont des fonctions purement périodiques d'arguments  $\Phi$ , combinaisons linéaires de  $3N$  composantes

$$\Phi = \sum_{i=1}^N r_i \bar{\lambda}_i + \sum_{i=1}^N l_i \psi_i + \sum_{i=1}^N m_i \theta_i$$

où :

- ▶ les  $\bar{\lambda}_i$  sont les longitudes moyennes moyennes,
- ▶ les  $\psi_i$  et les  $\theta_i$  sont des arguments dont les périodes sont de l'ordre de celles des longitudes des périhélie et des longitudes des nœuds, respectivement;
- ▶  $r_i, l_i, m_i$  sont des entiers.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N r_i \bar{\lambda}_i + \sum_{i=1}^N l_i \psi_i + \sum_{i=1}^N m_i \theta_i$$

- ▶ Les  $\bar{\lambda}_i$  sont des angles rapides (de période de l'ordre de trois mois pour Mercure jusqu'à 165 ans pour Neptune)
- ▶ Les  $\psi_i$  et les  $\theta_i$  sont des angles lents (de période de l'ordre de quelques dizaines de milliers d'années).

## Définition

- ▶ *Partie à courte période* de l'argument  $\Phi$  : l'expression  $\sum_{i=1}^N r_i \bar{\lambda}_i$
- ▶ *Partie à longue période* de  $\Phi$  l'expression :  $\sum_{i=1}^N l_i \psi_i + \sum_{i=1}^N m_i \theta_i$ .
- ▶ *Arguments à longue période* : arguments pour lesquels  $r_i = 0$ , notés  $\Phi^*$ .

Pour une planète  $P(\eta, \lambda)$  quelconque du système, les solutions ont la forme de séries de Fourier:

$$\eta = \eta^0 + \sum_{\Phi^*} A_{\Phi^*} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \Phi^* + \sum_{\Phi \neq \Phi^*} A_{\Phi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \Phi$$

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{\Phi^*} B_{\Phi^*} \sin \Phi^* + \sum_{\Phi \neq \Phi^*} B_{\Phi} \sin \Phi .$$

- ▶ les coefficients  $A_{\Phi^*}, A_{\Phi}, B_{\Phi^*}, B_{\Phi}$  sont des fonctions analytiques ou semi-analytiques des constantes d'intégration;
- ▶ les variables  $\eta$  sont des séries de cosinus pour les variables  $a, e, i, k, q$  et des séries de sinus pour les variables  $\varpi, \Omega, h, p$ .
- ▶ il n'existe pas de terme séculaire dans les éléments métriques ni dans les éléments  $k, h, q, p$ : ces théories gardent un intervalle de validité très grand, de l'ordre de quelques millions d'années.

## On développe les fonctions trigonométriques en séries entières du temps

On obtient des développements des théories à variations séculaires sous la forme de séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes  $\bar{\lambda}_i$ .

Pour une planète  $P(\eta, \lambda)$ , ces développements s'écrivent:

$$\begin{aligned}\eta &= \eta^0 + \eta^1 t + \eta^2 t^2 + \dots + \eta^p t^p + S^0 + t S^1 + \dots + t^p S^p, \\ \lambda &= \lambda^0 + \bar{n} t + l^2 t^2 + \dots + l^p t^p + L^0 + t L^1 + \dots + t^p L^p,\end{aligned}$$

où :

- ▶  $\bar{n}$  est le moyen mouvement moyen de la planète P,
- ▶  $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^p, l^2, \dots, l^p$  sont des coefficients numériques appelés *termes séculaires d'ordre 1, 2, ..., p* des variables  $\eta$  et  $\lambda$
- ▶  $S^0, \dots, S^p, L^0, \dots, L^p$  sont des séries de Fourier dont les arguments  $\Psi$  sont des combinaisons linéaires des  $N$  longitudes moyennes moyennes  $\bar{\lambda}_i$  :  $\Psi = \sum_{i=1}^N r_i \bar{\lambda}_i$ .

# Détermination des valeurs numériques des coefficients



- ▶ les coefficients numériques  $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^p, l^2, \dots, l^p$  ainsi que les coefficients des séries de Fourier  $S^p$  et  $L^p$  sont calculés par la théorie.
- ▶ Les constantes d'intégration  $\eta^0$  autres que  $a^0$  et les constantes  $\lambda^0 z$  sont obtenus par ajustement de la théorie avec les observations.
- ▶ Les constantes  $a^0$  et les moyens mouvements moyens  $\bar{n}$  des longitudes moyennes  $\lambda$  sont reliés par la troisième loi de Képler.

## Stratégie d'ajustement

- ▶ en général : les moyens mouvements ajustés aux observations, et déduction des constantes  $a^0$  (3e loi de Képler).
- ▶ l'inverse est possible aussi : ajuster aux observations les constantes  $a^0$  et en déduire ensuite les moyens mouvements.
- ▶ les constantes des solutions VSOP2013 et TOP2013, ont été obtenues par comparaison avec l'intégration numérique INPOP10a.

# Théories à variations séculaires : avantages et inconvénients



- ▶ Ces formes de solutions sont beaucoup moins volumineuses que sous la forme générale.
- ▶ Elles permettent d'obtenir des théories planétaires gardant une très grande précision sur un intervalle de temps de l'ordre du millier d'années.

## En pratique on procède différemment

- ▶ Méthodes par itérations
- ▶ Les théories de satellites artificiels s'en sont inspirées

## Méthodes d'intégration

*Développement en fonction d'un petit paramètre.*

Système des équations planétaires à résoudre de la forme :

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \mu F^i(\sigma_j)$$

On cherche une solution sous la forme :

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \mu \Delta^1 \sigma_i + \mu^2 \Delta^2 \sigma_i + \mu^3 \Delta^3 \sigma_i + \dots$$

La quantité  $\Delta^p \sigma_i$  est appelée *perturbations d'ordre p par rapport aux masses* de la variable  $\sigma_i$ .

En pratique, les théories développées récemment déterminent jusqu'au troisième ordre des masses.

En identifiant les termes, et après développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d \Delta^1 \sigma_j}{dt} &= F^i(\sigma_j^0) \\ \frac{d \Delta^2 \sigma_j}{dt} &= \sum_j \frac{\partial F^i}{\partial \sigma_j}(\sigma_j^0) \Delta^1 \sigma_j, \\ \frac{d \Delta^3 \sigma_j}{dt} &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma_j^0) \Delta^2 \sigma_j + \sum_{j,k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^i}{\partial \sigma_j \partial \sigma_k}(\sigma_j^0) \Delta^1 \sigma_j \Delta^1 \sigma_k \\ &\dots\end{aligned}$$

On obtient :

- ▶ les perturbations du premier ordre des masses  $\Delta^1 \sigma_i$ ;
- ▶ une deuxième intégration donne ensuite les perturbations du deuxième ordre des masses  $\Delta^2 \sigma_i$ ;
- ▶ ensuite on obtient les perturbations du troisième ordre des masses  $\Delta^3 \sigma_i$ ,
- ▶ et ainsi de suite.

Notons  $\sigma_i^n$  la solution de l'itération  $n$ .

Itération 1 :  $\sigma_i^1 = \sigma_i^0 + \mu \Delta^1 \sigma_i$

$$\frac{d\sigma_i^1}{dt} = \mu F^i(\sigma_j^0), \text{ avec : } \mu \Delta^1 \sigma_i = \mu \int F^i(\sigma_j^0) dt$$

(résultat identique à celui de la méthode précédente).

Itération 2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i^2}{dt} &= \mu F^i(\sigma_j^1) \text{ et si l'on développe :} \\ &= \mu F^i(\sigma_j^0) + \mu^2 \sum_j \frac{\partial F^i}{\partial \sigma_j}(\sigma_j^0) \Delta^1 \sigma_j + \sum_{j,k} \frac{\mu^3}{2} \frac{\partial^2 F^i}{\partial \sigma_j \partial \sigma_k}(\sigma_j^0) \Delta^1 \sigma_j \Delta^1 \sigma_k + \dots \end{aligned}$$

On a ici des termes d'ordre trois et plus par rapport aux masses : résultats différent de la méthode précédente.

Itération  $n$  :

$$\frac{d\sigma_i^n}{dt} = \mu F^i(\sigma_i^{n-1}).$$

# Méthode utilisée pour construire les théories TOP et VSOP



## Méthode itérative :

- ▶ formulaire : seulement perturbations au premier ordre des masses;
- ▶ pas auto suffisante : petits diviseurs au troisième ordre des masses pas révélés par la méthode.

## Méthode correcte :

- ▶ une association ordre par ordre / itérations;
- ▶ 1. ordre par ordre jusqu'au troisième ordre des masses;
- ▶ 2. et ensuite méthode itérative.

## Exemples :

- ▶ VSOP82, TOP82, VSOP2000, construites selon ce principe
- ▶ construction par itérations : VSOP2010 avec VSOP2000, TOP2010 avec TOP82, VSOP2013 avec VSOP2010, et TOP2013 avec TOP2010.

## Compléments à la fonction perturbatrice

Il est nécessaire dans une théorie des planètes de tenir compte de l'effet de la Lune sur le barycentre Terre–Lune. Notons :

- ▶  $m_S, m_T, m_L$  les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune,
- ▶  $r_T, r_G, r_L$  les distances au Soleil de la Terre, du barycentre Terre–Lune et de la Lune.

On ajoute dans les équations du mouvement l'effet de :

$$R_G = k^2(m_S + m_T + m_L)\left[(1 - \sigma_1)\frac{1}{r_T} + \sigma_1\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_G}\right]$$

où  $\sigma_1$  désigne le rapport  $\frac{m_L}{m_T + m_L}$

- ▶ Formulation générale très compliquée
- ▶ En pratique : corrections de Schwarzschild, issus du champ de gravitation du Soleil :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = & \mathbf{grad} (U_i + R_i) \\ & + \frac{k^2}{c^2} \left[ (4 - 2\alpha) \frac{k^2}{r_i^4} \mathbf{r}_i - \frac{1 + \alpha}{r_i^3} \mathbf{r}_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 + \frac{3\alpha}{r_i^5} \mathbf{r}_i \left( \mathbf{r}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{4 - 2\alpha}{r_i^3} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \left( \mathbf{r}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \right] \end{aligned}$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière, et où  $\alpha$  est un paramètre uniquement fonction du système de coordonnées choisi parmi les trois cas couverts par ces équations : ( $\alpha = 0$ : coordonnées isotropiques;  $\alpha = 1$ : coordonnées standard;  $\alpha = 2$ : coordonnées de Painlevé).

## Les méthodes de calcul

## Termes des séries de Poisson

$$t^\alpha (S \sin \phi + C \cos \phi)$$

où  $t$  est le temps exprimé en milliers d'années juliennes à partir de J2000:

$$t = (\text{date julienne} - 2\,451\,545.0) / 365\,250 \quad (5.1.2)$$

La puissance du temps  $\alpha$  est un entier compris entre 0 et 20. Les coefficients du sinus et du cosinus sont des réels exprimés en unités astronomiques pour le demi-grand axe et en radians pour les autres variables. L'argument  $\phi$  est une combinaison linéaire de 18 fonctions linéaires du temps  $\bar{\lambda}_i$  définies par Bretagnon:

$$\phi = \sum_{i=1}^{18} a_i \bar{\lambda}_i$$

## Termes des séries de Poisson

$$\phi = \sum_{i=1}^{18} a_i \bar{\lambda}_i$$

- ▶  $\bar{\lambda}_i$ , pour  $i = 1, 2, 3, 4$  : longitudes moyennes moyennes de Mercure, Vénus, BTL et Mars,
- ▶  $\bar{\lambda}_i$ , pour  $i = 5, 6, 7, 8, 9$  longitudes moyennes moyennes des cinq gros astéroïdes Vesta, Iris, Bamberga, Cérès, Pallas,
- ▶  $\bar{\lambda}_{10}$  ne sert pas (Bretagnon l'avait peut-être prévu pour introduire un astéroïde supplémentaire).
- ▶  $\bar{\lambda}_i$ , pour  $i = 11, 12, 13, 14$  correspondent aux longitudes moyennes moyennes de Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune,
- ▶  $\bar{\lambda}_{15}$  devait correspondre à la longitude moyenne moyenne de Pluton. En fait, dans les itérations, on ne tient pas compte de Pluton,  $\bar{\lambda}_{15}$  ne sert donc pas. Dans la solution finale, on introduit les perturbations au premier ordre des masses dues à Pluton et aux autres astéroï. On aura alors  $\bar{\lambda}_{15} = \mu$

## Termes des séries de Poisson

$$\phi = \sum_{i=1}^{18} a_i \bar{\lambda}_i$$

- ▶  $\lambda_i$ , pour  $i = 16, 17, 18$  correspondent aux arguments lunaires de Delaunay sous leur forme linéaire:

$$D = w1 + \bar{\lambda}_3 + 180^\circ \quad F = w1 - w2 \quad l = w1 - w3$$

où :

- ▶  $w1$  est la longitude moyenne de la lune,
- ▶  $w2$  est la longitude moyenne du périégée lunaire,
- ▶  $w3$  est la longitude moyenne du nœud ascendant lunaire.

# Représentation des solutions (constructions de TOP)



Les séries  $S^j$  et  $L^j$  sont des séries de Fourier d'un seul argument  $\mu$ .  
Elles ont donc la forme:

$$X^j/L^j = \sum_r A_r \cos r\mu + B_r \sin r\mu$$

$r$  est un entier positif dont la valeur maximale est  $2^{19}$  (524 288).  
L'argument  $\mu$  est une fonction linéaire du temps reliée aux moyens mouvements de Jupiter et Saturne  $n_5$  et  $n_6$  par:

$$\mu = (n_5 - n_6)t/880 = 0.359\,536\,23\,t,$$

où  $t$  est mesuré en milliers d'années à partir de J2000.

La période de  $\mu$  est d'environ 17 485 ans. Les moyens mouvements des quatre grosses planètes sont reliés à  $\mu$  par:

$$n_5 t = 1473\mu + \sigma_5 t = 1473\mu + 0.094\,095\,55\,t$$

$$n_6 t = 593\mu + \sigma_6 t = 593\mu + 0.094\,095\,55\,t$$

$$n_7 t = 208\mu + \sigma_6 t = 208\mu - 0.001\,873\,89\,t$$

$$n_8 t = 106\mu + \sigma_6 t = 106\mu + 0.022\,132\,13\,t$$

# Représentation des solutions (constructions de TOP)



Représentation avec perturbations sont beaucoup plus convergentes sous cette forme que sous la forme classique de séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes de Jupiter et Saturne.

## Constantes d'intégration et moyens mouvements moyens de TOP2013

Planète	$a_0$ (ua)	$\lambda_0$ (rad)	$k_0$	$h_0$	$q_0$	$p_0$	$\bar{\omega}$ (rad/1000 ans)
Jupiter	5.202 603 2025	0.599 544 6520	0.046 985 8464	0.012 003 7085	-0.002 065 6227	0.011 183 8645	529.690 962 2786
Saturne	9.554 910 4300	0.874 020 9500	-0.002 959 8987	0.055 429 6608	-0.008 717 4558	0.019 891 4362	213.299 081 1942
Uranus	19.218 438 2726	5.481 221 8694	-0.045 953 1057	0.005 648 4158	0.001 859 2404	0.006 486 0177	74.781 661 6318
Neptune	30.110 415 8724	5.311 899 0423	0.005 998 8612	0.006 691 7075	-0.010 291 4756	0.011 516 7670	38.132 972 3622
Pluton	39.544 617 1440	4.165 471 1248	-0.178 738 9594	-0.173 404 7186	-0.051 702 3078	0.139 779 9252	25.335 660 2044

# Construction des solutions par analyse harmonique



- ▶ Méthode itérative de Simon et Joutel (1988).
- ▶ Équations de Lagrange de la forme:

$$\frac{d\sigma}{dt} = F(\mu, t)$$

- ▶ On calcule  $F(\mu, t_j)$  pour  $j + 1$  valeurs du temps  $t_0, t_1, \dots, t_j$ , par analyse harmonique, sous la forme :

$$F(\mu, t_j) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k \cos k\mu + s_k \sin k\mu)$$

- ▶ les coefficients  $c_k$  et  $s_k$  donnés par les formules classiques:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} F\left(i\frac{\pi}{N}, t_j\right) \cos k_i \frac{\pi}{N} \quad s_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} F\left(i\frac{\pi}{N}, t_j\right) \sin k_i \frac{\pi}{N}$$

- ▶ Valeurs numériques  $F\left(i\frac{\pi}{N}, t_j\right)$  obtenues à partir de relations analytiques (nombre important de formules)

Après interpolation et intégration :

- ▶ les solutions ont la forme de séries de Poisson de  $\mu$ .
- ▶ TOP2010 et TOP2013 :  $N = 65\,536$ ,  $j = 12$  avec  $t_0 = J2000$ ,  $t_1 = J2000 + 1200$  ans,  $t_2 = J2000 - 1200$  ans, ...,  $t_{11} = J2000 + 6 \times 1200$  ans,  $t_{12} = J2000 - 6 \times 1200$  ans.

# Construction d'une théorie du mouvement de Pluton



- ▶ résonance très serrée entre Neptune et Pluton d'argument  $2\bar{\lambda}_8 - 3\bar{\lambda}_9$ , de période environ 20 000 ans
- ▶ résonance qui rend très difficile le calcul des perturbations mutuelles Neptune-Pluton au premier ordre des masses et pratiquement impossible la construction d'une théorie du mouvement de Pluton sous la forme classique de séries de Poisson des longitudes moyennes moyennes.
- ▶ nouvel argument défini par :

$$\nu = N_8 t / 105 = 0.3632 t.$$

la résonance correspond à l'argument  $0\nu$ .

- ▶ *Théorie au premier ordre des masses* : résonance remplacée par des termes séculaires. Perturbations du couple Neptune-Pluton calculées au premier ordre des masses *Construction de la théorie* deux systèmes d'équations, en utilisant l'argument  $\nu$  :
  - ▶ Cinq planètes : Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton
  - ▶ Quatre grosses planètes seulement.

- ▶ Perturbations analytiques des astéroïdes : séries périodiques de  $\mu$ , calculées par analyse de Fourier.  
Arguments des séries :  $i\bar{\lambda}_p + j\bar{\lambda}_a$
- ▶ Ensuite, en faisant  $i\bar{\lambda}_p + j\bar{\lambda}_a = q\mu + \epsilon t$ .  
On transforme les séries périodiques des longitudes moyennes moyennes en séries de Poisson de  $\mu$ .
- ▶ DE405, prise en compte des les perturbations de Cérès, Pallas et Vesta sur toutes les planètes. + perturbations de 297 autres astéroïdes (dont Iris et Bamberga) sur Mars , la Terre et la Lune
- ▶ TOP2010, INPOP10a : 165 (resp 300) astéroïdes sont intégrés avec les planètes et donc leurs perturbations sur toutes les planètes sont prises en compte.
- ▶ VSOP : perturbations au premier ordre des masses de 295 astéroïdes pour VSOP2010 et 160 astéroïdes pour VSOP2013.

- ▶ TOP2010 : perturbations par les planètes telluriques au troisième ordre des masses issues de VSOP82 (Bretagnon, 1982), après conversion en séries de Poisson de  $\mu$ .
- ▶ TOP2013, nous avons obtenu ces perturbations en calculant et convertissant en séries de  $\mu$  les différences entre la dernière itération du processus itératif de VSOP et cette dernière itération refaite sans prendre en compte les planètes telluriques. Cette méthode donne une meilleure estimation des perturbations par les planètes telluriques que le simple troisième ordre des masses.
- ▶ Notons que les perturbations par Mercure conduisent à l'apparition de multiples très élevés de  $\mu$ .

# Orientation des solutions : Écliptique moyen inertiel



DE405 : repère équatorial J2000.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ecl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{equ}$$

où  $\epsilon$  et  $\phi$  sont donnés par Chapront et al. (2002)

$$\epsilon = 23^{\circ}26'21''.40960 \quad \text{et} \quad \phi = -0.05028''.$$

Cet écliptique très voisin de l'écliptique dynamique de VSOP, défini par Bretagnon en annulant les variables  $p$  et  $q$  du barycentre Terre-Lune (BTL) en J2000, sans être exactement le même : les constantes d'intégration des variables  $q$  et  $p$  du BTL de VSOP2013 sont très petites sans être rigoureusement nulles.

*« Ce traitement n'est évidemment pas rigoureux et est le fruit de nombreux tests. On peut, par exemple, dans le cas de coefficients oscillants, effectuer des comparaisons à l'intégration numérique en conservant le terme correspondant, en le supprimant ou en prenant la demi-somme des coefficients du terme de deux itérations successives et choisir la meilleure solution. »*

**Table 1.** Développements de Poisson de la longitude moyenne de Jupiter pour l'argument  $4\lambda_5 - 10\lambda_6$  pour VSOP2013, TOP2013, TOP2013 sous la forme VSOP, et corrections de VSOP2013. Les coefficients sont exprimés en secondes de degré pour les termes périodiques et en secondes de degré au bout de 6000 ans pour les termes de Poisson. (Table issue de Simon et al., 2013).

	VSOP2013		TOP2013		TOP2013/forme VSOP		Corrections de VSOP2013	
	$s_{4-10}^p$	$c_{4-10}^p$	$s_{38}^q$	$c_{38}^q$	$s_{4-10}^r$	$c_{4-10}^r$	$\delta s_{4-10}^r$	$\delta c_{4-10}^r$
$t^0$	10.370	3.476	-10.556	2.860	10.370	3.476	0	0
$t$	-22.920	47.143	10.418	12.650	-22.919	47.144	0	0
$t^2$	-106.469	-70.446	7.007	-12.358	-106.471	-70.444	0	0
$t^3$	138.263	-156.792	-8.624	0.062	138.254	-156.791	0	0
$t^4$	166.715	197.399	1.854	3.923	166.699	197.380	0	0
$t^5$	-220.086	133.030	1.223	-1.711	-220.056	132.897	0	0
$t^6$	-78.488	-200.287	-0.726	-0.218	-78.421	-200.435	0	0
$t^7$	153.283	-29.450	-0.021	0.294	153.211	-29.432	0	0
$t^8$	-0.706	100.680	0.066	0.026	-0.551	100.738	0	0
$t^9$	-56.991	-12.332	0.025	-0.031	-57.910	-12.219	-0.919	0.113
$t^{10}$	11.877	-26.174	-0.012	-0.021	12.823	-29.575	0.945	-3.401
$t^{11}$	-0.018	-0.011	-0.006	0.005	13.666	9.282	13.685	9.292
$t^{12}$			-0.002	-0.003	-5.526	5.856	-5.526	5.856
$t^{13}$					-2.405	-2.866	-2.405	-2.866
$t^{14}$					1.372	-0.983	1.372	-0.983
$t^{15}$					0.411	0.607	0.411	0.607
$t^{16}$					-0.253	0.175	-0.253	0.175
$t^{17}$					-0.074	-0.100	-0.074	-0.100
$t^{18}$					0.038	-0.030	0.038	-0.030
$t^{19}$					0.011	0.013	0.011	0.013
$t^{20}$					-0.004	0.004	-0.004	0.004

## Résultats et discussions

- ▶ Précision des solutions VSOP2013 et VSOP2010 évaluée en calculant les différences maximum avec INPOP10a et DE405 sur l'intervalle de temps [1890-2000].
- ▶ La précision de VSOP2013 est excellente :
  - ▶ La précision des longitudes moyennes est d'environ quelques 0.01 mas pour Mercure, Vénus, BTL, Saturne et Neptune, 0.2 mas pour Jupiter et 0.7 mas pour Mars et Uranus.
  - ▶ Par rapport à VSOP2000 le gain en précision va de 2 pour Uranus jusqu'à 24 pour le BTL et Neptune.
  - ▶ Ce gain est principalement dû au calcul plus précis des perturbations par les astéroïdes et Pluton.
- ▶ Différences VSOP2013-INPOP10a plus petites que les différences VSOP2010-DE405, d'un facteur allant de 2.5 à 5 pour les planètes de Mercure à Jupiter (grâce aux perturbations analytiques au premier ordre des masses des astéroïdes).
- ▶ Longitudes moyennes des planètes sur [1890, 2000] : gain en précision très important pour les nouvelles solutions VSOP (en particulier pour VSOP2013).

**Table 5.** Différences maximums sur [1890, 2000] entre VSOP2013, VSOP2010, VSOP2000 et les intégrations numériques de référence pour les éléments elliptiques des planètes. Les unités sont : km ( $a$ ), mas ( $\lambda$ ) et  $10^{-10}$  ( $k, h, q, p$ ). (Table issue de Simon et al., 2013).

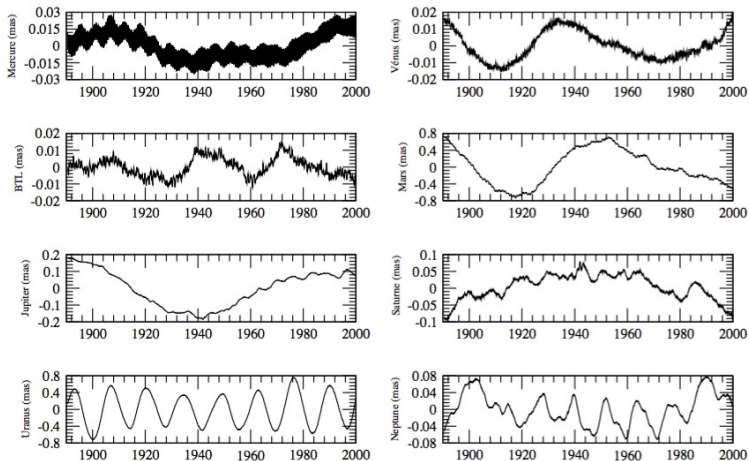
Planète	VSOP	$a$	$\lambda$	$k$	$h$	$q$	$p$
Mercure	2013	0.003	0.03	1.0	1.2	0.1	0.1
	2010	0.006	0.07	3.1	1.0	0.5	0.9
	2000	0.006	0.27	8.0	4.0	0.5	0.8
Vénus	2013	0.002	0.02	0.3	0.2	0.1	1.1
	2010	0.003	0.08	1.0	1.4	0.8	0.7
	2000	0.012	0.29	10.0	3.0	1.1	1.5
BTL	2013	0.003	0.01	0.8	0.5	0.1	1.9
	2010	0.003	0.06	0.8	0.6	0.1	2.0
	2000	0.021	0.35	3.0	17.0	3.4	4.2
Mars	2013	0.078	0.74	4.6	5.4	0.3	1.1
	2010	0.073	2.01	7.0	6.4	0.7	1.6
	2000	0.134	2.88	12.0	30.0	2.6	7.2
Jupiter	2013	0.099	0.19	2.9	3.3	0.5	0.4
	2010	0.683	0.72	13.3	13.6	0.6	0.4
	2000	0.910	0.47	15.0	16.0	5.0	4.3
Saturne	2013	0.173	0.09	4.8	4.3	0.9	0.9
	2010	0.816	0.19	5.5	5.8	1.0	0.9
	2000	6.774	1.75	19.0	35.0	7.8	8.1
Uranus	2013	15.120	0.76	40.0	39.1	3.0	2.3
	2010	24.467	0.88	60.6	68.5	2.8	2.2
	2000	23.600	1.49	66.0	57.0	38.2	11.0
Neptune	2013	3.432	0.08	9.1	3.8	1.5	1.0
	2010	7.747	0.27	10.6	7.8	1.5	1.1
	2000	47.032	1.86	61.0	68.0	4.1	11.3

**Notes.** Les intégrations numériques de référence sont INPOP10a pour VSOP2013, DE405 pour VSOP2010 et DE403 pour VSOP2000. Les valeurs correspondant à VSOP2000 sont issues de Moisson & Bretagnon (2001).

**Table 6.** Longitudes moyennes des planètes : gain en précision par rapport à VSOP82 pour VSOP2013, VSOP2010 et VSOP2000 sur l'intervalle de temps [1890,2000]. (Table issue de Simon et al., 2013).

Planète	VSOP2013	VSOP2010	VSOP2000
Mercure	21	9	2
Vénus	228	50	15
BTL	233	54	10
Mars	15	6	4
Jupiter	212	53	81
Saturne	962	496	53
Uranus	59	51	30
Neptune	2121	633	90

# Précision sur 1890-2000 : les solutions VSOP



**Fig. 1.** Longitudes moyennes des planètes : différences, en mas, entre VSOP2013 et INPOP10a sur [1890, 2000]. (Figure extraite de Simon et al., 2013).

- ▶ On donne les différences maximum entre TOP2013 et INPOP10a et entre TOP2010 et DE405 sur [1890-2000]
- ▶ Les orbites des planètes telluriques n'étant pas intégrées avec les grosses planètes, les solutions TOP ne peuvent être aussi précises que les VSOP sur des intervalles de temps courts.
- ▶ On constate que TOP2013 est plus précise que TOP2010.
- ▶ La précision de TOP2013 est comparable à celle de VSOP2000.
- ▶ Pour Pluton, la précision sur [1890, 2000] est de l'ordre de 3 mas pour la longitude moyenne, 125 km pour  $a$  et  $2 \times 10^{-8}$  pour  $k$  et  $h$ .
- ▶ Les différences entre TOP2013 et INPOP2010a pour la longitude moyenne de Pluton sont des termes à courte période.
- ▶ Or, les termes à courte période convergent parfaitement dans le processus itératif. En fait, la mauvaise convergence des perturbations correspondant à l'argument  $\bar{\lambda}_7 - 3\bar{\lambda}_9$  entraîne une imprécision dans la détermination des constantes d'intégration qui explique l'apparition de ces différences à courte période.

**Table 7.** Différences maximums sur [1890, 2000] entre TOP2013, TOP2010 et les intégrations numériques de référence pour les éléments elliptiques des planètes. Les unités sont : km ( $a$ ), mas ( $\lambda$ ) et  $10^{-10}$  ( $k, h, q, p$ ). (Table issue de Simon et al., 2013).

Planète	TOP	$a$	$\lambda$	$k$	$h$	$q$	$p$
Jupiter	2013	0.47	0.84	20.7	28.0	16.7	10.8
	2010	4.94	1.39	78.3	88.4	36.6	31.3
Saturne	2013	1.02	1.86	31.2	41.0	18.6	15.1
	2010	17.10	2.89	99.9	69.1	38.7	33.2
Uranus	2013	16.55	1.70	50.9	48.5	18.5	15.3
	2010	29.79	2.58	122.8	93.2	39.3	43.0
Neptune	2013	6.96	0.67	21.5	17.7	12.4	14.7
	2010	43.66	1.52	70.6	67.5	42.0	43.0
Pluton	2013	124.71	2.85	198.1	185.8	56.9	23.3
	2010	130.49	3.42	161.6	149.7	26.5	23.9

**Note.** Les intégrations numériques de référence sont INPOP10a pour TOP2013 et DE405 pour TOP2010.

# Précision sur de grands intervalles de temps : planètes telluriques



- ▶ Précision des solutions analytiques estimées par comparaison à des intégrations numériques de référence  $[-4000, 8000]$ . Valeurs initiales issues des solutions elles-mêmes.
- ▶ La précision reste bonne pour de grands intervalles de temps :
  - ▶ Sur  $[0, 4000]$ , la précision de la longitude moyenne est de l'ordre de  $0.02''$  pour Vénus et  $0.05''$  pour Mercure et le BTL.
  - ▶ Sur  $[-4000, 8000]$ , la précision est de l'ordre de  $0.2''$  pour Mercure et Vénus,  $1''$  pour le BTL et  $1.7''$  pour Mars.
- ▶ Par rapport à VSOP2000, le gain en précision est environ d'un facteur 5.
- ▶ On constate cependant que la précision diminue plus rapidement avec le temps pour le BTL et Mars que pour Mercure et Vénus. Ceci est dû aux perturbations par les astéroïdes qui devraient être calculées au deuxième ordre des masses

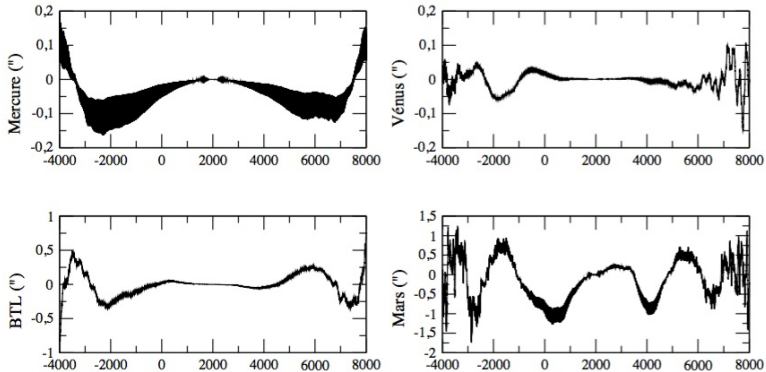
# Précision de grands intervalles de temps planètes telluriques



**Table 8.** Planètes telluriques : différences maximums sur de grands intervalles de temps entre VSOP2013 et l'extension de INPOP10a sur  $[-4000, 8000]$  (Manche, 2012) pour les longitudes moyennes et les coordonnées héliocentriques. Les unités sont : seconde de degré ( $\lambda$ ,  $L$ ,  $B$  et km ( $R$ )). (Table issue de Simon et al., 2013).

Planète	Intervalle de temps	$\lambda$	$L$	$B$	$R$
Mercure	[900, 3100]	0.01	0.02	0.002	0.9
	[0, 4000]	0.03	0.05	0.006	2.6
	[-4000, 8000]	0.12	0.20	0.021	9.2
Vénus	[900, 3100]	0.002	0.002	0.001	0.1
	[0, 4000]	0.02	0.02	0.002	0.2
	[-4000, 8000]	0.15	0.15	0.009	4.1
BTL	[900, 3100]	0.03	0.03	0.002	0.4
	[0, 4000]	0.05	0.06	0.003	1.9
	[-4000, 8000]	0.98	1.01	0.015	19.4
Mars	[900, 3100]	0.70	0.83	0.023	69.5
	[0, 4000]	1.06	1.28	0.036	107.2
	[-4000, 8000]	1.49	1.74	0.058	153.4

# Précision de grands intervalles de temps planètes telluriques



**Fig. 3.** Longitudes héliocentriques des planètes telluriques : différences entre VSOP2013 et l'extension de INPOP10a sur [-4000, 8000]. L'unité est la seconde de degré. (Figure extraite de Simon et al., 2013.)

# Précision sur de grands intervalles de temps : grosses planètes et Pluton



- ▶ Jupiter et Saturne :
  - ▶ sur  $[-4000, 8000]$  : la deuxième ligne de VSOP correspond à la théorie sans les corrections provenant de TOP2013. On constate que ces corrections améliorent d'un facteur 5, environ, la précision des longitudes héliocentriques de ces deux planètes
  - ▶ sur  $[-4000, 8000]$  : la précision des longitudes héliocentriques VSOP2013 des grosses planètes est comprise entre  $1''$  et  $5''$  pour Jupiter, Uranus et Neptune et est d'environ  $12''$  pour Saturne. Par rapport à VSOP2000, le gain en précision est entre 5 et 10.
- ▶ TOP2013 reste la solution la plus précise pour de grands intervalles de temps. Par rapport à VSOP2013, le gain en précision est compris entre 10 et 15 pour Jupiter et Saturne et entre 1.5 et 4 pour Uranus et Neptune.
- ▶ Pluton:
  - ▶ la précision reste bonne sur  $[900, 3100]$  (environ  $0.8''$  pour la longitude héliocentrique).
  - ▶ précision correcte sur  $[0, 4000]$  (environ  $12''$ ).
  - ▶ Intervalles plus longs : la précision se dégrade rapidement (due à la libration de la longitude de Pluton, de période 19 900 ans)

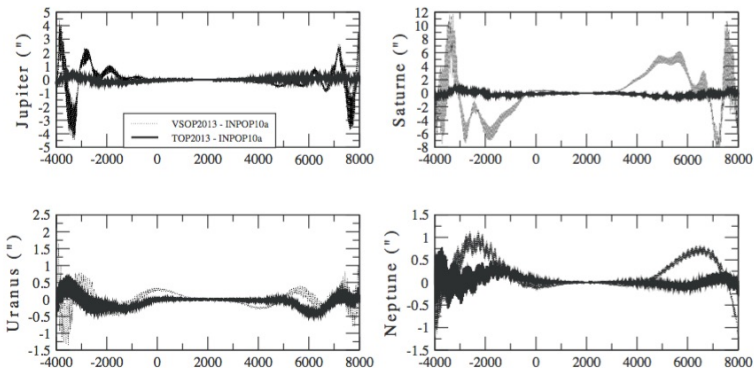
# Précision de grands intervalles de temps grosses planètes et Pluton



**Table 9.** Grosses planètes et Pluton : différences maximums sur de grands intervalles de temps entre VSOP2013, TOP2013 et l'extension de INPOP10a sur [-4000, 8000] Manche (2012) pour les longitudes moyennes et les coordonnées héliocentriques. Les unités sont : seconde de degré ( $\lambda, L, B$  et km ( $R$ )).(Table issue de Simon et al., 2013).

Planète	Intervalle de temps	Théorie	$\lambda$	L	B	R
Jupiter	[900, 3100]	VSOP	0.04	0.04	0.001	12
		TOP	0.01	0.01	0.001	21
	[0, 4000]	VSOP	0.22	0.24	0.004	64
		TOP	0.05	0.07	0.004	61
	[-4000, 8000]	VSOP	4.80	4.47	0.164	3393
		TOP	19.90	22.21	0.505	5858
Saturne	[900, 3100]	VSOP	0.28	0.30	0.013	122
		TOP	0.03	0.04	0.002	50
	[0, 4000]	VSOP	2.07	2.24	0.098	758
		TOP	0.15	0.18	0.008	151
	[-4000, 8000]	VSOP	8.92	11.73	0.524	21911
		TOP	35.58	41.97	1.543	35637
Uranus	[900, 3100]	VSOP	0.14	0.14	0.001	136
		TOP	0.01	0.02	0.001	102
	[0, 4000]	VSOP	0.30	0.34	0.004	433
		TOP	0.04	0.06	0.003	189
	[-4000, 8000]	VSOP	1.23	2.45	0.069	13007
		TOP	0.42	0.70	0.037	4113
Neptune	[900, 3100]	VSOP	0.06	0.07	0.002	143
		TOP	0.01	0.02	0.001	143
	[0, 4000]	VSOP	0.13	0.14	0.003	342
		TOP	0.04	0.06	0.003	311
	[-4000, 8000]	VSOP	1.28	1.27	0.044	7761
		TOP	0.39	0.78	0.059	5284
Pluton	[900, 3100]	TOP	0.36	0.80	0.222	6593
	[0, 4000]	TOP	5.14	11.95	2.980	45042

# Précision de grands intervalles de temps grosses planètes et Pluton



**Fig. 4.** Longitudes héliocentriques des grosses planètes : différences de TOP2013 (en gras) et VSOP2013 (en pointillé) avec l'extension de INPOP10a sur [-4000, 8000]. L'unité est la seconde de degré. (Figure extraite de Simon et al., 2013.)

## Conclusions

- ▶ Augmentation de la précision générale (plus de pbs de place mémoire)
- ▶ Augmentation du degré des développements de Poisson lors du processus itératif
- ▶ Perturbations au deuxième ordre des masses des astéroïdes : pour long terme BTL, Mars
- ▶ Perturbations mutuelles des cinq gros astéroïdes
- ▶ Davantage de corrections relativistes (Brumberg, 2012)

- ▶ Augmentation du degré des développements de Poisson lors du processus itératif (jusqu'en  $t^{16}$  par exemple)
- ▶ Perturbations par les planètes telluriques

- ▶ Les solutions analytiques VSOP2013 et TOP2013 sont les solutions analytiques du mouvement des planètes les plus précises dont nous disposons actuellement.
- ▶ VSOP2013 est la meilleure théorie analytique du mouvement des planètes sur des intervalles de temps de l'ordre de quelques centaines d'années. C'est aussi la meilleure solution du mouvement des planètes telluriques sur de grands intervalles de temps.
- ▶ La solution TOP2013 a une forme particulièrement compacte et facile à utiliser. C'est la théorie analytique du mouvement des grosses planètes la plus précise sur de grands intervalles de temps. Elle contient aussi une solution analytique du mouvement de Pluton de bonne précision sur des intervalles de temps de l'ordre de quelques milliers d'années.
- ▶ Des pistes d'améliorations sont formulées...
- ▶ ... pour des utilités certaines.

*Construction des théories planétaires analytiques de l'IMCCE*  
Jean-Louis Simon & Gérard Francou

Les Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste, 2015  
ISSN 1621-3823  
ISBN 2-910015-74-2