

DYNAMO

J-M Lemoine, Ecole d'été GRGS, sept. 2002

DYNAMO

Les éléments de la chaîne DYNAMO :

Pour tous ces éléments : taper `exe_dynamo_...` `-help` pour l'aide

1- Sur IBM (Δ \Leftrightarrow pas encore converti à l'IBM)

- `exe_cray_to_ibm` : Conversion d'une équation normale binaire CRAY au binaire IBM (ieee)
- `exe_dynamo_b` : Réduction d'une ou plusieurs équations normales (actions possibles : EXT/ELI/RED)
- `exe_dynamo_c` : Cumul d'équations normales
- `exe_dynamo_b_c` : Enchaînement (réduction - cumul) sur un lot d'équations normales
- `exe_dynamo_d` : Résolution d'une ou plusieurs équations normales (actions possibles : FIX/RES)
- `exe_dynamo_p` : Permutation d'une équation normale
- `exe_dynamo_l2` Δ : Génération d'une équation normale à partir d'une grille (sigmas quelconques)
- `exe_dynamo_l3` Δ : Génération d'une équation normale à partir d'une grille (sigmas uniformes par latitude)
- `exe_dynamo_r` Δ : Résolution de gros systèmes issus de dynamo_l3
- `exe_dynamo_w` Δ : Recherche de pondération par Helmert
- `exe_dynamo_v` Δ : Extraction des solutions issues de dynamo_d
- `exe_verif` : Vérification d'une équation normale
- `exe_binaire_code` : Conversion binaire --> formatée d'une équation normale
- `exe_code_binaire` : Conversion formatée --> binaire d'une équation normale

- **exe_conversion_sol_eqn** : Conversion de la partie "Matrice Inverse" d'un fichier solution en pseudo-équation normale
- **exe_completion Δ** : Complétion d'une équation normale triangulaire pour la rendre carrée
- **exe_covhsm Δ** : Projection de la matrice de covariance du champ sur une grille d'erreur radiale d'orbite
- **exe_genere_equation Δ** : Génère une équation normale à partir d'un fichier de type "Contraintes" (voir *contraintes_info*)
- **exe_visu_matrice Δ** : Prépare une équation normale quelconque pour visualisation par *matrice.dess*

2- Sur CALC-GEN3-CI

- **extraction_parametres_sortie_gins** : Extrait les paramètres à convergence d'un listing GINS pour tracé
- **extraction_parametres_sortie_dynamo** : Extrait les paramètres libérés d'une solution ou d'un listing *dynamo_D* pour tracé
- **convers_fic_dyd.potentiel** : Extraction des solutions issues de *dynamo_D* (uniquement la partie potentiel)
- **convers_fic_dyd.stations** : Extraction des solutions issues de *dynamo_D* (uniquement la partie stations)
- **convers_fic_dyd.marees** : Extraction des solutions issues de *dynamo_D* (uniquement la partie marées) (H.S. pour le moment)
- **genere_corrections_aux_directeurs_dynamo** : Génère la partie OLD/NEW des directeurs dynamo qui corrige les valeurs initiales à partir de différents fichiers (fichiers dynamo et fichiers potentiel)
- **tester_contraintes** : Teste la réalisation par une solution dynamo des contraintes contenues dans un fichier *contraintes*
- **sigmas_et_residus_moyens** : Statistiques sur les sigmas a priori et les résidus d'une équation normale (input = listing dynamo)

- **ponderation_resultante** : Statistiques sur la pondération résultant d'un cumul d'équations normales (input = input de dynamo_C)
- **diagonales_champ_degrees** : Extraction des sommes, par degré, de diagonales du champ résultant d'un cumul d'équations normales
- **diagonales_champ_ordres** : Extraction des sommes, par ordre, de diagonales du champ résultant d'un cumul d'équations normales
- **triangle_champ.dess** : Dessin triangulaire, pour le champ de gravité, des rapports des diagonales d'équations normales
- **triangle_correl.dess** : Dessin triangulaire des corrélations à partir d'un fichier "solution dynamo" contenant la matrice inverse
- **matrice.dess** : Dessin d'une matrice quelconque à partir d'un fichier de type <l,m,value>
- **extraction_spectre_en_puissance** : Extraction des spectres en puissance / degré d'un champ dans une solution ou un listing dynamo_D
- **precision_gradients_conjugues** : Précision de la méthode des gradients conjugués à partir de 2 listings dyd et dydgc
- **difgri** : Différence de grilles et tracé
- **compsta** : comparaisons de réseaux de stations

⊛ RAPPEL DES NOTATIONS

- y : vecteur des mesures

On cherche à modéliser y à l'aide de paramètres x par l'intermédiaire de la fonction f au voisinage du point x_0 (important dans le cas où f est non linéaire, sans importance dans le cas contraire) :

on cherche x tel que $y \approx f(x)$ au sens d'un certain critère.

- $X = x - x_0$: vecteur des paramètres
- $Y = y - f(x_0)$: vecteur des pseudo-observations (aussi appelé "vecteur des résidus a priori")
- Equation approchée $A \cdot X \approx Y$: équations d'observation
- A : matrice des dérivées partielles (puisque le problème est linéarisé par développement de Taylor)

Les moindres carrés disent que le vecteur qui minimise la fonction $\varphi(x) = \|y - f(x)\|^2$ est le vecteur \hat{X} :

$$\hat{X} = \underbrace{(A^T \pi A)}_N^{-1} \cdot \underbrace{A^T \pi Y}_S$$

- $A^T \pi A$: matrice normale N , π étant la matrice des poids des observations
- $A^T \pi Y$: seconds membres S (car $N \cdot \hat{X} = S$)

Le théorème de Gauss-Markov dit comment choisir la matrice π : comme $\frac{1}{\sigma^2} \Lambda^{-1}$

⊛ QUANTITÉS INTÉRESSANTES

- "SIGMA2 a priori" $Y^T \Pi Y$: somme des carrés des résidus a priori pondérés
- "SIGMA2 a posteriori" $\hat{V}^T \Pi \hat{V}$: somme des carrés des résidus a posteriori pondérés,
 $\hat{V} = A \cdot \hat{X} - Y$ étant le vecteur des résidus
- Matrice de variance-covariance des paramètres : $k \cdot N^{-1}$,
 $k = \frac{\hat{V}^T \Pi \hat{V}}{n-p}$ étant le facteur unitaire de variance.

⊛ CHANGEMENT DE VALEURS INITIALES

On veut prendre x_1 comme valeur initiale au lieu de x_0 : $x_1 = x_0 + dx_0$
On cherche le nouvel $X' = x - x_1 = X - dx_0$

Les équations d'observation s'écrivent $A \cdot X' \approx Y'$ avec $Y' = Y - A \cdot dx_0$

Les nouvelles équations normales s'écrivent

$$N \cdot X' = S' \text{ avec } S' = S - N \cdot dx_0$$

Le nouveau SIGMA2 a priori s'écrit :

$$\sigma'^2 = Y'^T \Pi Y' = (Y^T - dx_0^T \cdot A^T) \Pi (Y - A \cdot dx_0)$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = \sigma^2 + (dx_0^T \cdot N - 2 S^T) \cdot dx_0$$

FORMAT DES ÉQUATIONS NORMALES

```

HEADER
COMMENT
STATIG 10651 6 6229 0.16542093018607E+05
STATIS 9306102 STEL LASER 961206 970108 1356 3643 0.15000000000E-01 0.250000000000000E+01 0.13560123890345E+04
STATIS 9205201 TOPX LASER 940812 940822 924 2598 0.10000000000E-01 0.120000000000000E+01 0.92345678556262E+03
STATIS 9205201 TOPX DOPPLER 940812 940822 5634 2598 0.53300000000E-03 0.120000000000000E+01 0.56328534722634E+04
STATIS 9205201 TOPX XOVER 940812 940822 340 2598 0.80000000000E-01 0.120000000000000E+01 0.34567298864729E+03
STATIS 9205201 TOPX ERS1 MXOVER 940812 940822 1624 2598 0.95000000000E-01 0.120000000000000E+01 0.16250875422113E+04
STATIS 9105001 ERS1 LASER 940812 940822 537 2598 0.90000000000E-02 0.120000000000000E+01 0.54902345673465E+03
STATIS 9105001 ERS1 XOVER 940812 940822 236 2598 0.12000000000E-00 0.120000000000000E+01 0.23456836289577E+03
EARTH0 0.39860044000000E+15 0.63781360000000E+07 0.29825781000000E+03 0.72921150000000E-04
CODE GINS 97/02/12 Version 2.4
NORMAL
6

GCN 0 0 GCN 2 0 GCN 2 1 GSN 2 1 GCN 2 2
GSN 2 2

0.100000000000000E+01-.48416547587615E-030.00000000000000E+000.00000000000000E+00 .24392656784958E-05-.14000095372867E-05

1 1 1 1 1 1

0.100000000000000E+01
0.100000000000000E+010.100000000000000E+01
0.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+01
0.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+01
0.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+010.100000000000000E+01

0.000000000000000E+000.000000000000000E+000.000000000000000E+000.000000000000000E+000.000000000000000E+000.000000000000000E+00
0.16542093018607E+05
    
```

HEADER
 et STATISTIQUES

 Nombre de paramètres
 ELEMENTS SIGNALIQUES
 des paramètres
 VALEURS INITIALES
 1^{er} élément non nul de N

 MATRICE NORMALE

 SECOND MEMBRE
 et SIGMA2

CAPACITÉS COMMUNES À TOUS LES ÉLÉMENTS DE LA CHAÎNE DYNAMO

* RENOMMAGE DES INCONNUES



Possibilité d'utiliser le caractère "?" pour remplacer n'importe quel caractère :

OLD [A B ? C ? ...]
 NEW [A D E ? ...]

$\} \longrightarrow$ par exemple : [A B X C Y ...] \longrightarrow [A D E Y ...]

* CHANGEMENT DE VALEURS INITIALES

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{avec correction du second membre et du } \sigma^2 \\ \text{SANS correction du second membre et du } \sigma^2 \end{array} \right. \longrightarrow$ stations : passer de la croisée des axes à un marqueur
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{changer les valeurs initiales pour d'autres} \\ \text{ajouter une valeur aux valeurs initiales} \\ \text{multiplier les valeurs initiales par un facteur} \end{array} \right. \longrightarrow$
 - changement de coordonnées initiales des stations
 - test de la restitution du géocentre
 - conversion / au en / jour, } (CODIOR)
normalisation / dénormalisation

Toujours : possibilité d'utiliser le caractère "?" comme caractère "joker"

* DÉTECTION des lignes et colonnes nulles dans la matrice normale N

(\longrightarrow apparition d'un * en 4^e colonne des éléments signalétiques)

* NOMBRE MAXIMUM DE PARAMÈTRES : 18 000 (aujourd'hui)

DYNAMO C : CUMUL d'équations normales

$$\begin{aligned} & \pi_1 \times (N_1 \cdot X = S_1) \\ + & \pi_2 \times (N_2 \cdot X = S_2) \\ \hline & \underbrace{(\pi_1 N_1 + \pi_2 N_2)}_N \cdot X = \underbrace{(\pi_1 S_1 + \pi_2 S_2)}_S \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \sum_i \pi_i \sigma_i^2$$

Capacité : jusqu'à 40 E.N. simultanément

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{aligned}$$

OK

Par contre :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IMPOSSIBLE

\rightarrow DYNAMO P

DYNAMO P : PERMUTATION des inconnues

\rightarrow Remettre les inconnues dans un ordre prédéfini : Permutations des éléments de N, X et S

En général : GINS \rightarrow DYNAMO : compatibles

Problème : GINS \rightarrow DYNAMO : passer DYNAMO P sur les équations qui le nécessitent
EQUATIONS EXTÉRIEURES (par ex. CODIOR)

Remarque : La détection de deux (ou +) inconnues identiques (\Leftrightarrow éléments signalements identiques) entraîne leur compaction, c'est à dire la sommation de leurs lignes et colonnes dans l'équation normale, et de leurs seconds membres.
 \rightarrow utile pour le champ de gravité variable (entre autres...)

DYNAMO B : RÉDUCTION des équations normales

2 groupes d'inconnues :

X_I : paramètres internes dont la valeur n'est pas recherchée mais dont on doit tenir compte (paramètres d'orbite, de fréquence, empiriques ...)

X_E : paramètres externes que l'on cherche à estimer (coefficients de champ de gravité, coordonnées de stations ...)

OBJET : Réduction de la matrice normale aux seuls paramètres externes par décomposition en groupes :

$$\begin{pmatrix} N_{ii} & N_{iE}^T \\ N_{iE} & N_{EE} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ X_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_i \\ S_E \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} r \text{ paramètres} \\ \} n-r \text{ paramètres} \end{array} \right\}$$

$$\text{soit } \begin{cases} N_{ii} X_i + N_{iE}^T X_E = S_i & (1) \\ N_{iE} X_i + N_{EE} X_E = S_E & (2) \end{cases}$$

de (1) on tire $X_i = N_{ii}^{-1} (S_i - N_{iE}^T X_E)$
à remplacer dans (2) :

$$\underbrace{\left(N_{EE} - N_{iE} N_{ii}^{-1} N_{iE}^T \right)}_{N^*} \cdot X_E = \underbrace{S_E - N_{iE} N_{ii}^{-1} S_i}_{S^*}$$

avantage : • ne nécessite que l'inversion de N_{ii} , de taille r
• on ne conserve dans l'équation normale que les paramètres utiles pour la suite ...

Correction du SIGMA 2 : REDUCTION \Leftrightarrow changement de valeur initiale des seules variables internes

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + (dx_0^T \cdot N - 2 S^T) \cdot dx_0 \text{ avec, dans le cas de la réduction, } dx_0 = X_i$$

donc $dx_0 = N_{ii}^{-1} (S_i - N_{iE}^T X_E)$ or, à cette étape, c'est à dire tant que les X_E n'ont pas été résolus, $X_E = 0 \Rightarrow dx_0 = N_{ii}^{-1} S_i$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = \sigma^2 + \underbrace{(S_i^T N_{ii}^{-1} N - 2 S_i^T)}_I \cdot dx_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma'^2 = \sigma^2 - S_i^T N_{ii}^{-1} S_i}$$

CAPACITÉS DE DYNAMO B :

- RED : Réduction de l'inconnue
- ELI : Inconnue indéterminable (à éliminer)
- EXT : Inconnue externe (à conserver)

REMARQUES :

⊛ réduction des paramètres internes } \Leftrightarrow résolution de tous les paramètres
 puis résolution des paramètres externes

⊛ **ATTENTION** aux paramètres qui deviennent (souvent ...) indéterminés à la suite d'une réduction
exemple : une seule observation, deux (ou +) inconnues relatives à cette observation

on réduit une des inconnues \rightarrow BOUH

Les lignes et colonnes de N relatives à l'inconnue restante deviennent ~ 0
 L'élimination automatique des lignes totalement nulles ne peut pas toujours détecter le cas
 \rightarrow détecté par le paramètre "RSAV" dans le listing: apparition d'un *

* **DYNAMO D** : RESOLUTION des équations normales

méthodes disponibles : - Choleski
- gradients conjugués
- valeurs et vecteurs propres

$$\hat{X} = N^{-1} \cdot S$$

correction du SIGMA2 : RESOLUTION \Leftrightarrow changement de valeurs initiales avec $dx_0 = \hat{X}$

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + \underbrace{(\hat{X}^T \cdot N - 2 S^T)}_{S^T} \cdot \hat{X}$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = \sigma^2 - S^T \cdot \hat{X}$$

CAPACITÉS DE DYNAMO D : - **FIX** : fixation de l'inconnue à sa valeur initiale
- **RES** : résolution de l'inconnue

Possibilité de demander les variances des paramètres ou la matrice de variance-covariance (si celle-ci est disponible par la méthode d'inversion).

Possibilité d'introduire une contrainte selon la loi de Kaula sur les paramètres de champ de grav.

* **CONTRAINTES** (limité à DYNAMO B et DYNAMO D)

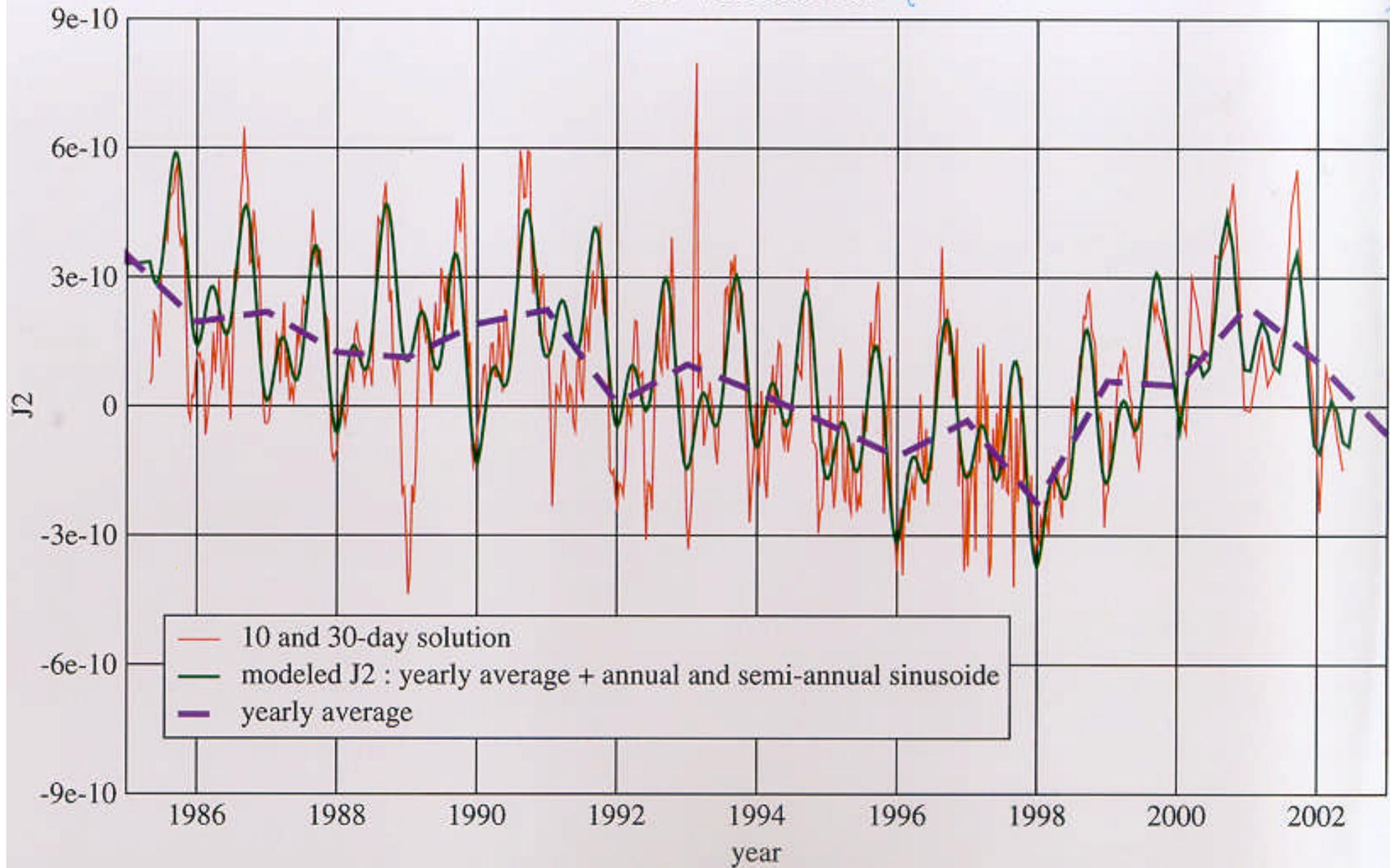
Il est possible, au moment de la réduction ou de la résolution, d'ajouter une série de contraintes sur les paramètres. Les contraintes s'écrivent dans un fichier sous la forme schématisée

$$f_1 \times [e_{levig_1}] + f_2 \times [e_{levig_2}] + f_3 \times [e_{levig_3}] + \dots = \text{VALEUR} \pm \text{INCERTITUDE}$$

Ces équations, de type équations d'observation, sont traduites en équations normales qui sont automatiquement ajoutées aux autres équations normales avant réduction ou inversion.

→ Voir **contraintes_info** pour plus de détails ...

J2 variations (Exemple d'utilisation des Contraintes)



DESCRIPTION DES FICHIERS DE CONTRAINTE

Trois procedures de la chaine dynamo peuvent utiliser les fichiers de contraintes :

- * exe_genere_equation_grim5 : cree une equation normale a partir d'un fichier de contraintes
- * dynamo_b : peut creer une equation normale de contrainte et l'additionner avant reduction
- * dynamo_d : peut creer une equation normale de contrainte et l'additionner avant inversion

Les deux dernieres procedures stockent automatiquement l'equation normale de contrainte sur DMF sous le nom : eqn_norm_grim5.contraintes

Exemple de fichier de contrainte :

```
*****
*** Debut de l'exemple ***
CONTRAINTES pour tester la chaine dynamo
FORMAT(1X,12,2X,11,1X,2(E12.5,4X,A24,4X),E12.5,6X,E10.3)
(cle=0: contrainte sur dX, cle=1: contrainte sur X+dX)
nb cle      coef      label      coef      label      valeur      sigma
0           |A          |
0           |B          |
0           |C          |
1 1 0.10000E+01 * |A          |
1 1 0.10000E+01 * |A          |
1 1 0.10000E+01 * |B          |
1 1 0.10000E+01 * |B          |
1 1 0.10000E+01 * |C          |
1 1 0.10000E+01 * |C          |
3 1 0.10000E+01 * |A          | + -0.10000E+01 * |B
   0.10000E+01 * |C          |
2 1 0.10000E+01 * |A          | + 0.20000E+01 * |B
*** Fin de l'exemple ***
```

Explication des cles du fichier de contraintes :

* cle "nb" :

Indique le nombre de parametres participant a la contrainte.
 nb = 0 permet d'indiquer la valeur initiale des parametres (utile pour exe_genere_equation_grim5,
 mais inutile pour dynamo_b et dynamo_d).
 si nb > 2, la ou les lignes suivantes participent a la definition de la contrainte.

* cle "cle" :

Permet de choisir entre une contrainte sur la variation du parametre (dX) si cle=0
 et une contrainte sur la valeur finale du parametre (X+dX) si cle=1

* cle "coef" :

Indique les coefficients de la combinaison lineaire de parametres a imposer

* cle "label" :

Indique les elements signalétiques des parametres des equations de contrainte
 REMARQUE : Pour les procedures dynamo_b et dynamo_d on peut mettre des "?" dans
 les labels qui remplaceront automatiquement n'importe quel caractere dans les
 elements signalétiques des parametres de l'equation normale. Par exemple :

```
1 1 0.10000E+01 * [S?P????????????????????????] = 0.000000000000E+00 1.000E-03
```

permet de figer toutes les vitesses de station a 0. +/- 1.e-03

En résumé...

- ✓ Aide mémoire : *dynamo_info* (et, plus généralement, *info_info*)
- ✓ Aide sur un élément de la chaîne : ... *-help*
- ✓ Pour tous les éléments de la chaîne dynamo, attention aux « **WARNING** »
- ✓ Pour dynamo_b, attention à « **RSAV** »
- ✓ Contrôler l'évolution du « **SIGMA2** »
- ✓ L'utilisation de **fichiers de contraintes** permet une grande souplesse dans la libération de certaines inconnues (description : *contraintes_info*)
- ✓ *difgri* (comparaison de grilles) est très utile, également, en dehors du contexte dynamo

Variance Component Estimation According to Helmert

PRINCIPLE:

Adequacy between errors and residuals (i.e. a-priori and a-posteriori errors) through a constant calibration factor for each independent measurements subset.

IMPLEMENTATION:

- ◆ Select a group of variables on which the method is going to be applied (here, harmonic coefficients of the geopotential up to degree and order 60).
- ◆ Obtain a solution for the selected variables, starting from an approximate weighting, with the full variance/covariance matrix.
- ◆ Estimate the a-posteriori errors for each subset.
- ◆ Correct the weighting of the subset accordingly.

iterations



METHODE DE COMBINAISON OPTIMALE DE HELMERT

- ① on dispose d'un jeu d'équations normales pré pondérées N_i , que l'on souhaite cumuler de manière optimale pour trouver la meilleure solution $\hat{x} = N^{-1} A^T \pi Y$ au sens des moindres carrés
- ② les poids de cumul W_i affectés à chaque équation normale sont choisis. Plus on a confiance en la pondération a priori des mesures qu'on a introduites dans l'équation normale, plus ce facteur W_i est proche de 1.
- ③ la matrice globale N est formée en cumulant les équations normales pondérées par W_i
- ④ solution par moindres carrés $x = N^{-1} \cdot A^T \pi Y$

Observation
residuals

$$\begin{cases} v_1 = A_1 x - b_1 \\ \vdots \\ v_p = A_p x - b_p \end{cases}$$

⑤ ON FORME LES EQUATIONS DE HELMERT :

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots & h_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

avec: $c_i = v_i^T W_i v_i$

$$h_{ii} = n_i - 2\text{Tr}(N^{-1} N_i) + \text{Tr}(N^{-1} N_i N^{-1} N_i)$$

$$h_{ij} = \text{Tr}(N^{-1} N_j N^{-1} N_i) \text{ for } i \neq j$$

$$s_i = S_i^2$$

La solution est par construction itérative parce que c est une fonction de W qui est une fonction de s

⑥ On résoud s . Les nouveaux poids $W_i' = \frac{W_i}{s_i}$ vont pouvoir être appliqués à l'itération suivante

⑦ ARRÊT : quand tous les s_i sont ≈ 1

ITERATION normalement 2 à 4 sont suffisantes

Titré de "Variance Component estimation applied to satellite laser ranging", Salin, Gross and Sellers, Bulletin Géodésique (1992) 66: 284-295

Variance Component Estimation According To Helmert

The following derivation of Helmert's variance component analysis technique is based on Welsch (1978) and Grafarend et al (1980).

The general linearized functional model, for the observation equations is given by

$$Ax = b - e \quad (1)$$

where

A : design matrix of full column rank relating the observations to the unknown parameters,

x : vector containing the unknown parameters,

b : vector containing the 'observed - computed' values,

e : vector containing the true errors of the observations

If the observations are unbiased we can take the expectation of (1) as

$$E[b] = Ax, \quad \text{where } E[e] = 0 \quad (2)$$

or

$$b = Ax + e \quad (3)$$

where the vector e contains the true errors

The least squares solution of (1) is:

$$\hat{x} = N^{-1}A^T W b$$

where

$$N^{-1} = (A^T W A)^{-1}$$

and the least squares residuals v are given by

$$v = A \hat{x} - b$$

or

$$v = A(\hat{x} - x) - e$$

where

$$\hat{x} - x = N^{-1} A^T W e \quad (4)$$

and

$$\begin{aligned} v &= AN^{-1} A^T W e - e \\ &= (AN^{-1} A^T W - I)e \end{aligned} \quad (5)$$

If the observations are considered to be divided into p groups: 1, 2, 3, ..., p then (5) can be partitioned as follows

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} N^{-1} A^T W e - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{bmatrix}$$

which leads to

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 N^{-1} A^T W e - e_1 \\ v_p &= A_p N^{-1} A^T W e - e_p \end{aligned} \quad (6)$$

Using the i 'th part of (6) we can write

$$\begin{aligned} v_i^T W_i v_i &= (A_i N^{-1} A^T W e - e_i)^T W_i (A_i N^{-1} A^T W e - e_i) \\ &= e_i^T W_i e_i - e_i^T W_i A_i N^{-1} A^T W e - e^T W A N^{-1} A_i^T W_i e \\ &\quad + e^T W A N^{-1} A_i^T W_i A_i N^{-1} A^T W e \end{aligned} \quad (7)$$

The middle terms on the right hand side of (7) are equal, i.e. $s^T t = t^T s$

Hence (7) becomes

$$\begin{aligned} v_i^T W_i v_i &= e_i^T W_i e_i - 2e_i^T W_i A_i N^{-1} A^T W e \\ &\quad + e^T W A N^{-1} A_i^T W_i A_i N^{-1} A^T W e \end{aligned} \quad (8)$$

Taking the trace of both sides of (8) leads to

$$\begin{aligned} v_i^T W_i v_i &= \text{Tr}(v_i^T W_i v_i) \\ &= \text{Tr}(e_i e_i^T W_i) - 2\text{Tr}(N^{-1} A^T W e e_i^T W_i A_i) \\ &\quad + \text{Tr}(N^{-1} A^T W e e^T W A N^{-1} N_i) \end{aligned} \quad (9)$$

where $N_i = A_i^T W_i A_i$

We now simply expand $A^T W e$ as follows:

$$A^T W e = \sum_{j=1}^p A_j^T W_j e_j \quad (10)$$

and substituting (10) in (9) gives

$$\begin{aligned} v_i^T W_i v_i &= \text{Tr}(e_i e_i^T W_i) - 2\text{Tr}(N^{-1} (\sum_{j=1}^p A_j^T W_j e_j) e_i^T W_i A_i) \\ &\quad + \text{Tr}(N^{-1} (\sum_{j=1}^p A_j^T W_j e_j) (\sum_{j=1}^p A_j^T W_j e_j)^T N^{-1} N_i) \end{aligned} \quad (11)$$

The global covariance matrix of the observations C is given by

$$C = E[ee^T] = \sum_{i=1}^p S_{\alpha_i}^2 W_i^{-1} \quad (12)$$

where

$$E[c_p c_p^T] = C_{ip} = S_{\alpha_p}^2 W_p^{-1}$$

and

- W_i : the assigned weight matrix,
- $S_{\alpha_i}^2$: the true value of the variance factor

It is also assumed that there is no correlation between groups of observations.

$$i.e. E[c_i c_j^T] = 0 \quad \text{for all } i \neq j \quad (13)$$

The problem of variance component analysis is to determine the unknown variance factors $S_{\alpha_i}^2$. In order to do this we proceed as follows.

Taking the expectation of (11) and by substituting in (12) and (13) leads to

$$\begin{aligned} E[v_i^T W_i v_i] &= \text{Tr}(S_{\alpha_i}^2 W_i^{-1} W_i) \\ &\quad - 2\text{Tr}(N^{-1} A_i^T W_i S_{\alpha_i}^2 W_i^{-1} W_i A_i) \\ &\quad + \text{Tr}(N^{-1} (\sum_{j=1}^p A_j^T W_j A_j S_{\alpha_j}^2 W_j^{-1} W_j A_j) N^{-1} N_i) \\ &= \text{Tr}(I) S_{\alpha_i}^2 - 2\text{Tr}(N^{-1} N_i) S_{\alpha_i}^2 \\ &\quad + \text{Tr}(N^{-1} (\sum_{j=1}^p A_j^T W_j A_j S_{\alpha_j}^2) N^{-1} N_i) \\ &= (n_i - 2\text{Tr}(N^{-1} N_i) + \text{Tr}(N^{-1} N_i N^{-1} N_i)) S_{\alpha_i}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^p \text{Tr}(N^{-1} N_j N^{-1} N_i) S_{\alpha_j}^2 \end{aligned}$$

where

n_i : the number of observation equations in the i 'th group

Now we replace the expectation $E[v_i^T W_i v_i]$ by the actual values $v_i^T W_i v_i$ and accordingly the true variance factors $S_{\alpha_i}^2$ by their estimations S_i^2 . Hence we have

$$\begin{aligned} v_i^T W_i v_i &= (n_i - 2\text{Tr}(N^{-1} N_i)) \quad (14) \\ &\quad + \text{Tr}(N^{-1} N_i N^{-1} N_i) S_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^p \text{Tr}(N^{-1} N_j N^{-1} N_i) S_j^2 \end{aligned}$$

Putting

$$c_i = v_i^T W_i v_i \quad (15)$$

$$h_{ii} = n_i - 2\text{Tr}(N^{-1} N_i) + \text{Tr}(N^{-1} N_i N^{-1} N_i) \quad (16)$$

$$h_{ij} = \text{Tr}(N^{-1} N_j N^{-1} N_i) \quad (\text{for } i \neq j) \quad (17)$$

$$s_i = S_i^2 \quad (18)$$

then (14) becomes

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots & h_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \quad (19)$$

or

$$Hs = c \quad (\text{Helmert equation})$$

The solution of the Helmert equation has to be iterative because c is a function of W which is a function of s.

The estimation of the variance component can be summarised as follows:

Step 1. The weights, for each group of observations, W_1, W_2, \dots, W_p are estimated before the least squares solution. The initial weights can be chosen to be unity. i.e. $W_1 = W_2 = \dots = W_p = 1$.

Step 2. Using the initial weights, the normal matrices for each group, N_1, N_2, \dots, N_p and the global normal matrix N are formed. (Notice that $N = N_1 + N_2 + \dots + N_p$)

Step 3. From the least squares solution, the unknown parameters and the observation residuals are computed

$$x = N^{-1} d \quad (\text{where } d = A^T W b)$$

$$v_1 = A_1 x - b_1$$

$$v_p = A_p x - b_p$$

Step 4. Then the Helmert equation (19) is formed by using the equations (15 to 18)

Step 5. Having solved for s_1, s_2, \dots, s_p , the new weights are computed as following:

$$W_i = W_i / s_i$$

Step 6. If s_i is not equal to 1 for all $i=1, 2, \dots, p$ the procedure returns to Step 2. When $s_i=1$ for all p groups the iteration is stopped.