

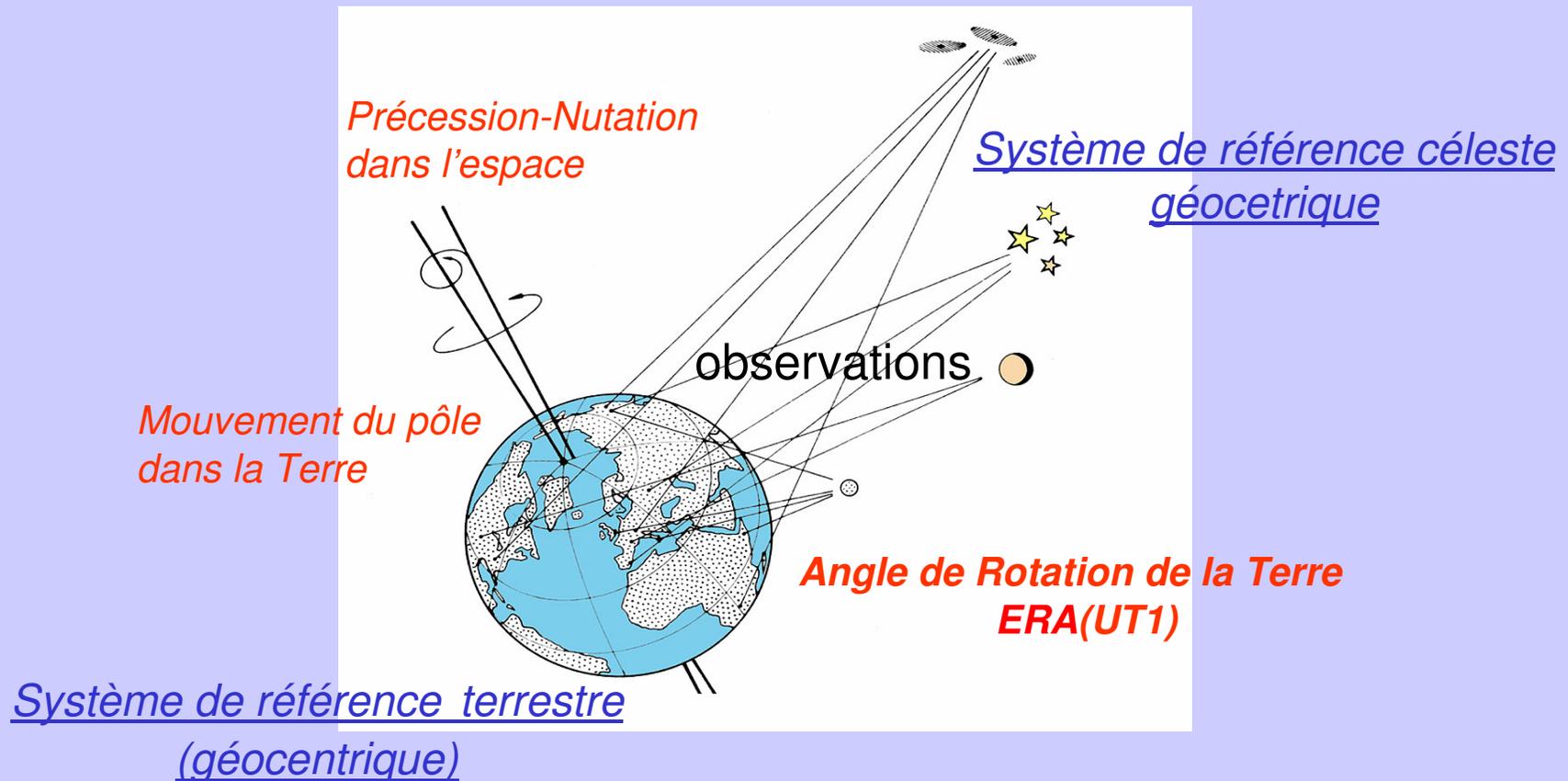
Orientation et rotation de la Terre

Modélisation astronomique

Nicole Capitaine
SYRTE, Observatoire de Paris

Ecole d'été du GRGS, 1-5 septembre 2008

L'orientation/rotation de la Terre dans l'espace



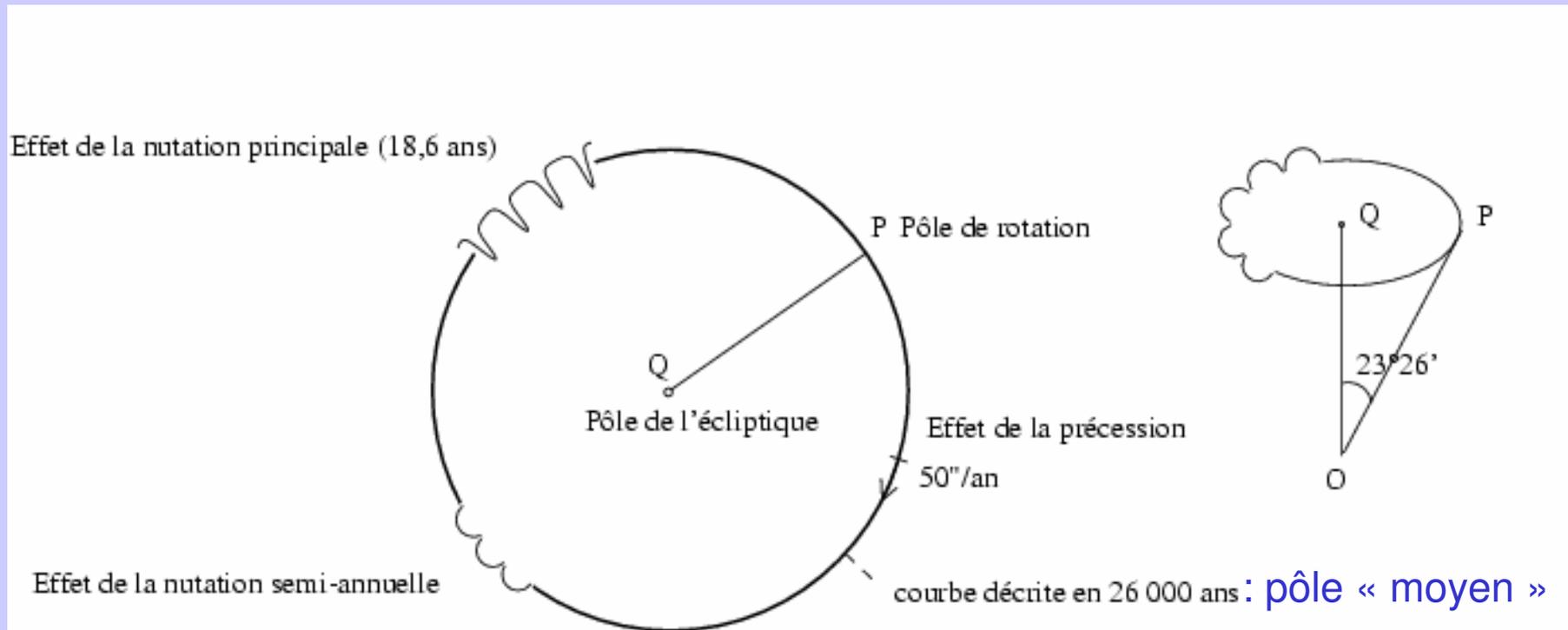
Introduction

- La connaissance précise de la rotation de la Terre est fondamentale:
 - pour fixer l'orientation de la Terre dans l'espace,
 - pour la connaissance de la structure globale de la Terre,
 - comme base dans l'étude de la rotation des autres planètes.

- La modélisation astronomique de la rotation de la Terre exige:
 - la connaissance des phénomènes observables par l'astronomie (détermination des constantes d'intégration),
 - le choix d'un paramétrage adapté,
 - la résolution des équations dynamiques de la rotation de la Terre.

*Quantités
observables par l'astronomie
et nécessaires pour les réductions d'observation*

Définition et description de la précession-nutation



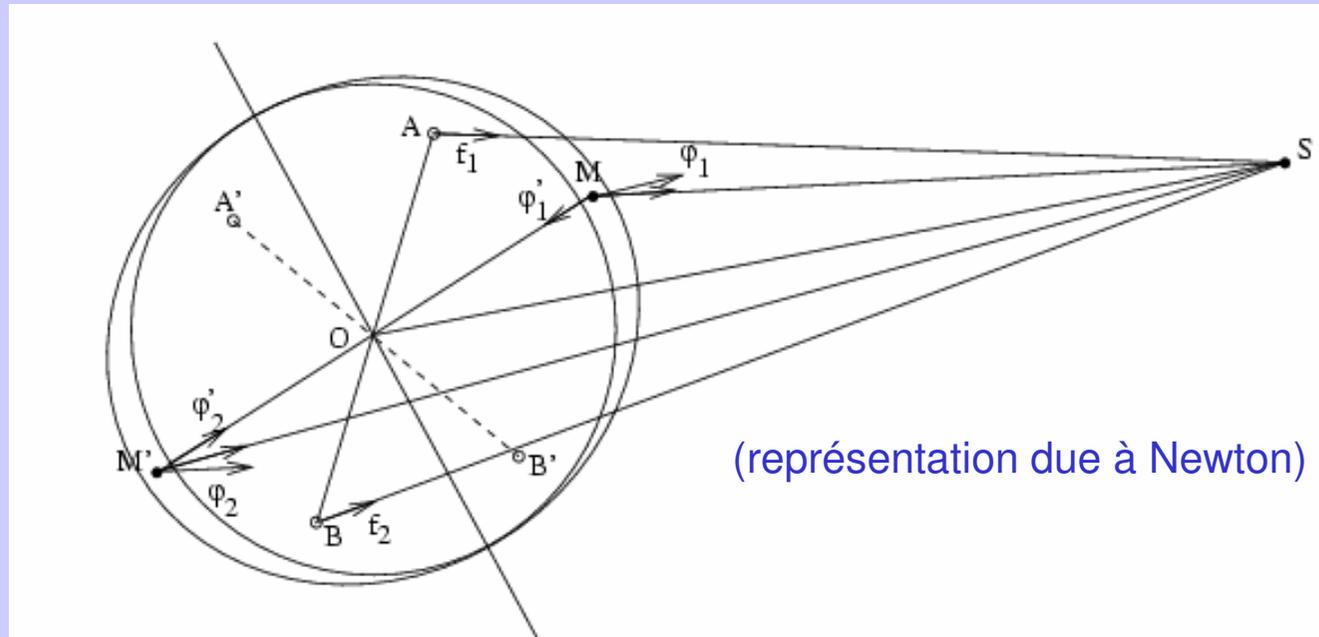
Déplacement céleste de l'axe de rotation : précession-nutation

équateur: *plan normal à l'axe de la Terre*
animé d'un mouvement de « précession-nutation »

écliptique: *plan perpendiculaire au vecteur « moment cinétique orbital héliocentrique » du barycentre du système Terre-Lune « moyen »*
animé d'un mouvement séculaire

Représentation schématique du phénomène de précession-nutation

exemple du couple produit par le Soleil



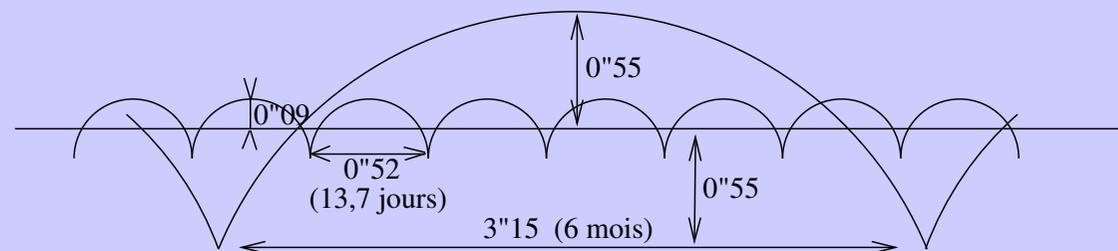
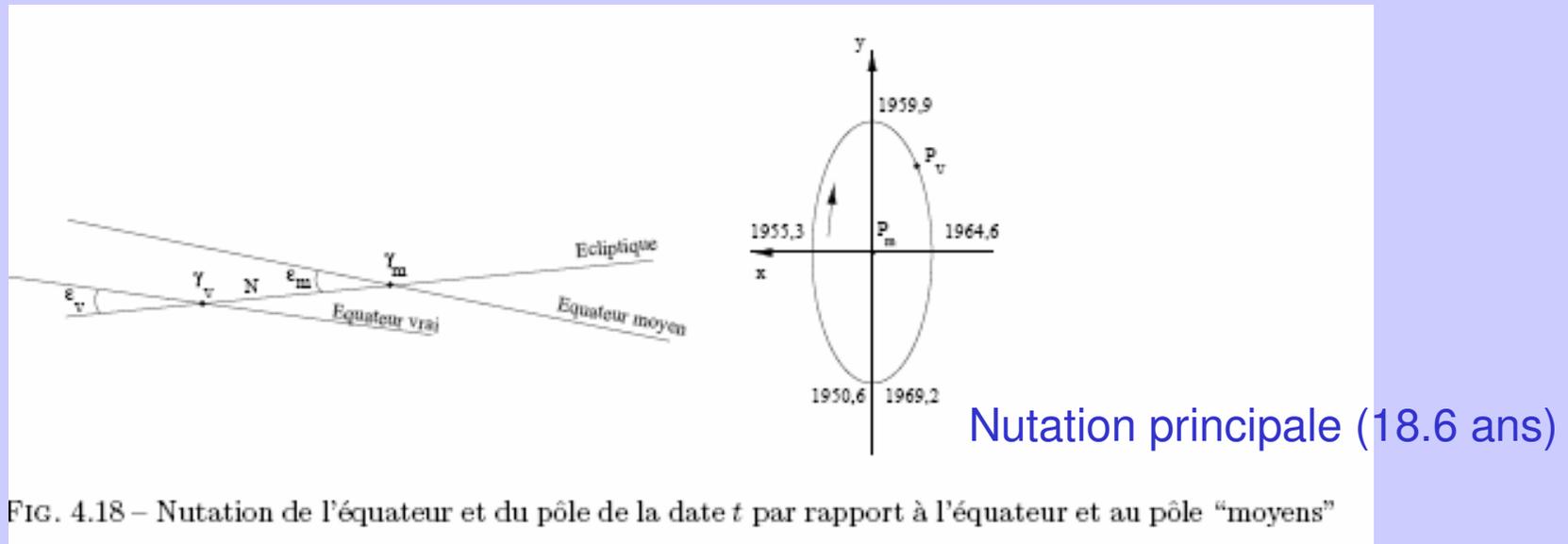
Couple solaire sur la Terre

- s'annule entre les points (AB et A'B') à l'intérieur de la sphère intérieure à la Terre,
 - ne s'annule pas couple pour les points (M, M') du bourrelet équatorial du fait (i) de la Terre non-sphérique et (ii) de l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique.
- Couple résultant tendant à faire coïncider l'équateur avec l'écliptique

Effet gyroscopique

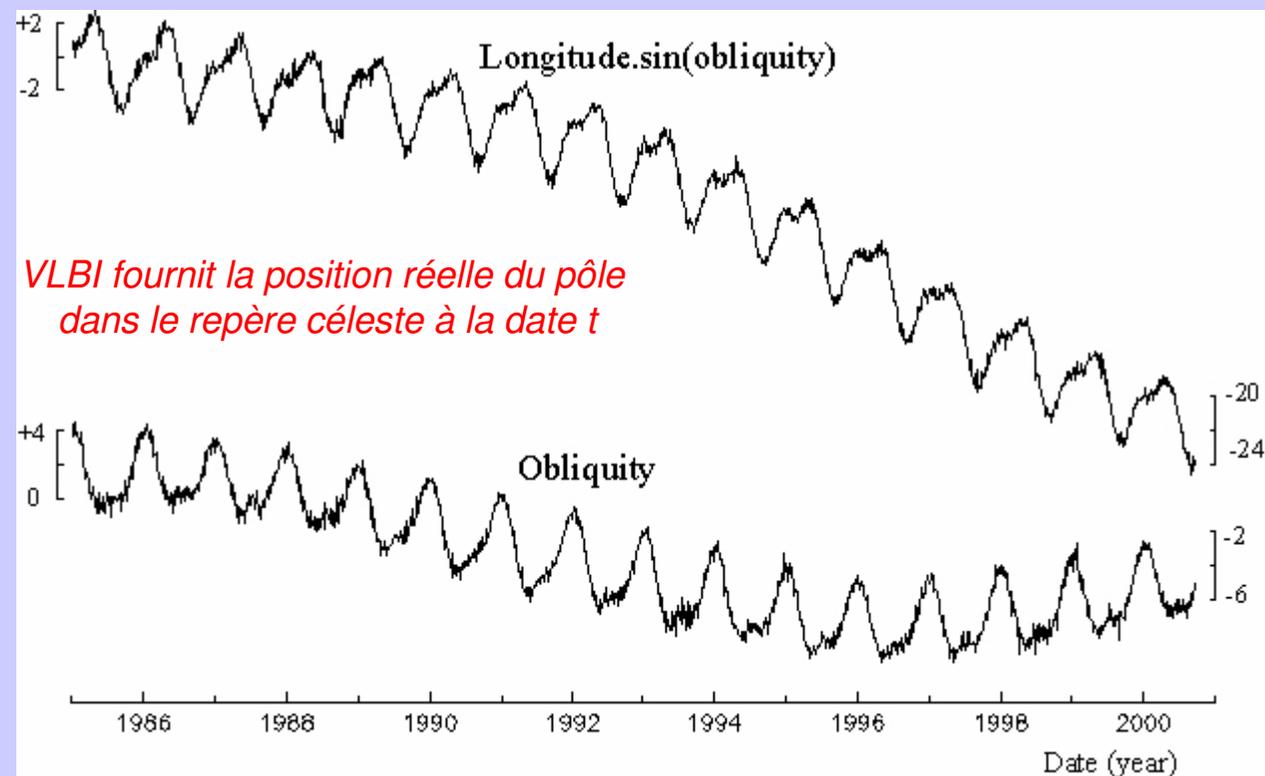
- dû à la rotation de la Terre
- du fait du couple extérieur s'exerçant sur la Terre, fait décrire à l'axe de l'équateur un cône d'angle fixe (demi-angle=obliquité de l'écliptique) autour de l'axe de l'écliptique

La nutation céleste



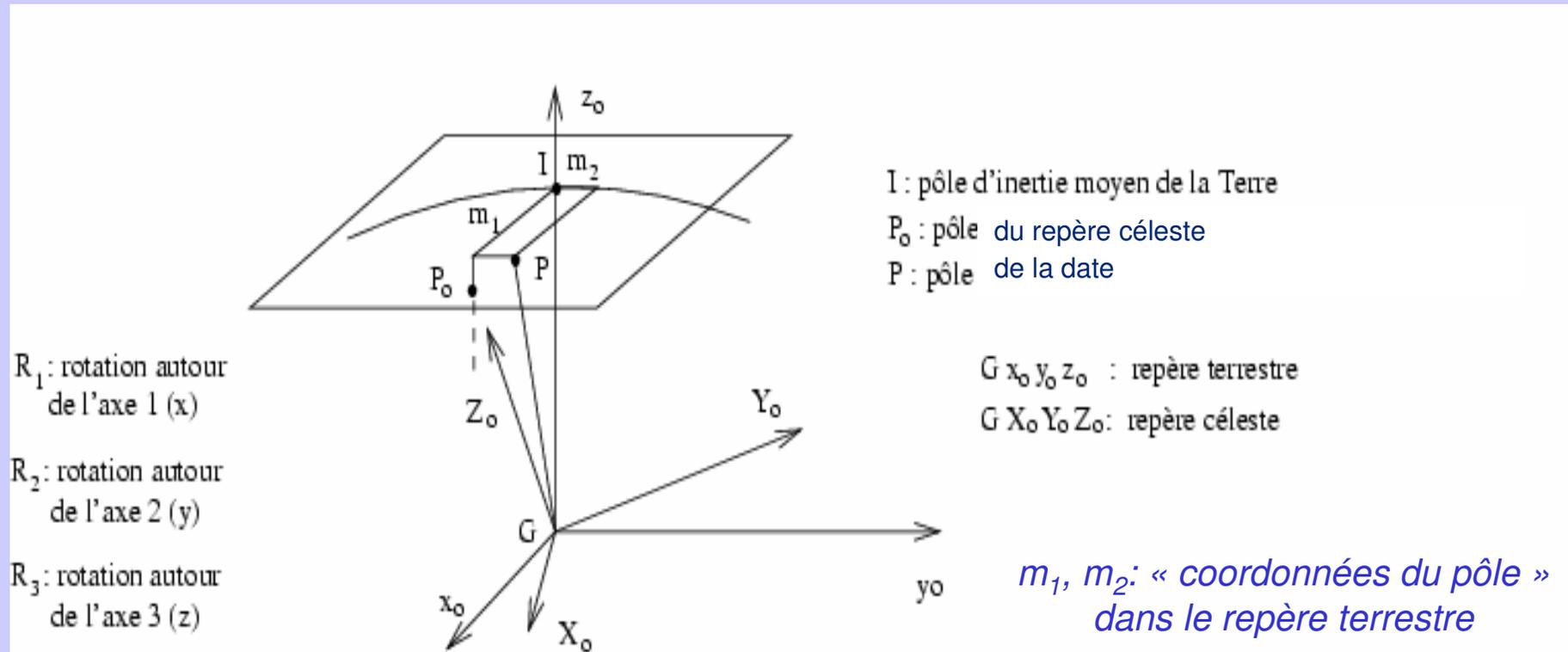
Nutation semi-annuelle et semi-mensuelle

Écarts observés VLBI du pôle céleste par rapport au modèle de précession-nutation IAU 1976/1980



estimation possible également avec LLR

Déplacement terrestre de l'axe de rotation: « mouvement du pôle »



*Systemes de référence et échelles de temps
pour la rotation de la Terre*

Systeme de reference celeste

- FK5 -

- basé sur
 - définition dynamique
 - positions et mouvements propres d'étoiles brillantes (précision : 0.02", 0.08"/c)
- positions rapportées à la meilleure estimation de la position du pôle moyen et équinoxe moyen de l'époque
- mouvements propres permettent accès le meilleur au pôle moyen et équinoxe moyen de l'époque de référence (J2000) à toute date
- *Systeme FK5*: catalogue FK5 + précession IAU1976 + nutation IAU 1980 + relation GMST/UT1

Systeme de reference celeste conventionnel de l'UAI de 1976 à 1997

- ICRS -

- ICRS basé sur
 - définition cinématique
 - directions des objets extragalactiques (précision : 0.4 mas)
- condition cinématique de non-rotation globale des directions par rapport aux objets définissant l'ICRS
- sans référence au pôle et à l'équinoxe moyens J2000
- ICRS: réalisé par ICRF indépendant des modèles de precession-nutation

Systeme de reference celeste international adopté par l'UAI à partir de 1998

Rappel sur la définition de systèmes de référence célestes

Définition du *Barycentric celestial reference system* (BCRS) et du *Geocentric celestial reference system* (GCRS): Résolution UAI 2000 B1.3

- vitesses faibles par rapport à vitesse de la lumière et champs faibles (v^2/c^2 et U/c^2 de l'ordre de 10^{-9}) → approximation PNA
- Définition des systèmes de référence célestes en RG (PNA)
 - barycentrique: ICRS
 - barycentrique, cadre RG bien défini: BCRS, TCB, (TDB)
 - géocentrique, cadre RG bien défini : GCRS, TCG, (TT)

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}(dx^i)(dx^j) + g_{0i}(dx^0)(dx^i)$$

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4},$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} w \right),$$

$$g_{0i} = -\frac{4}{c^3} w^i,$$

σ and σ_i : masse gravitationnelle et densité

$w(t, \mathbf{x})$: potentiel scalaire généralisant le potentiel Newtonien; $w_i(t, \mathbf{x})$: potentiel vecteur

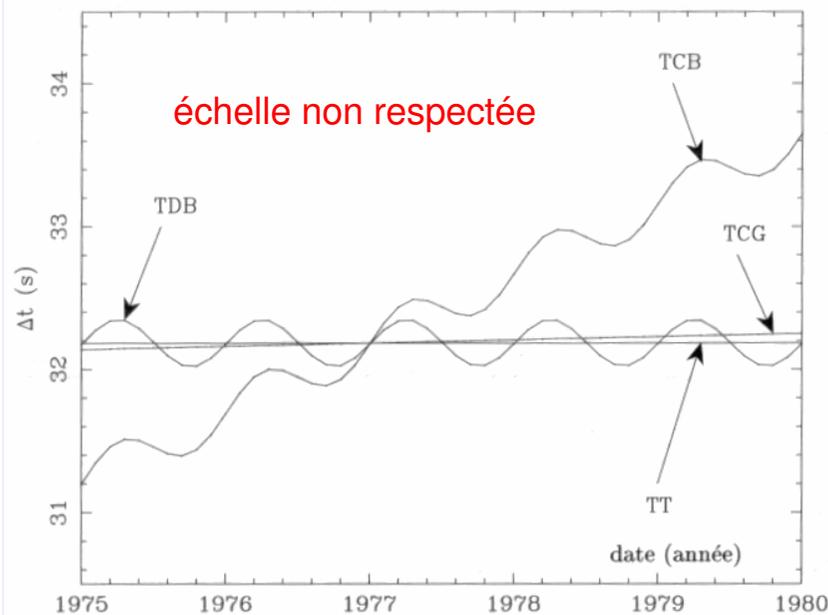
BCRS → GCRS

$$\mathbf{X}^a = \delta_{ai} \left[r_E^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v_E^i v_E^j r_E^j + w_{ext}(\mathbf{x}_E) r_E^i + r_E^i a_E^j r_E^j - \frac{1}{2} a_E^i r_E^2 \right) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}),$$

TCB → TCG

$$T = t - \frac{1}{c^2} [A(t) + v_E^i r_E^i] + \frac{1}{c^4} [B(t) + B^i(t) r_E^i + B^{ij}(t) r_E^i r_E^j + C(t, \mathbf{x})] + \mathcal{O}(c^{-5}),$$

Rappel sur la définition des échelles de temps

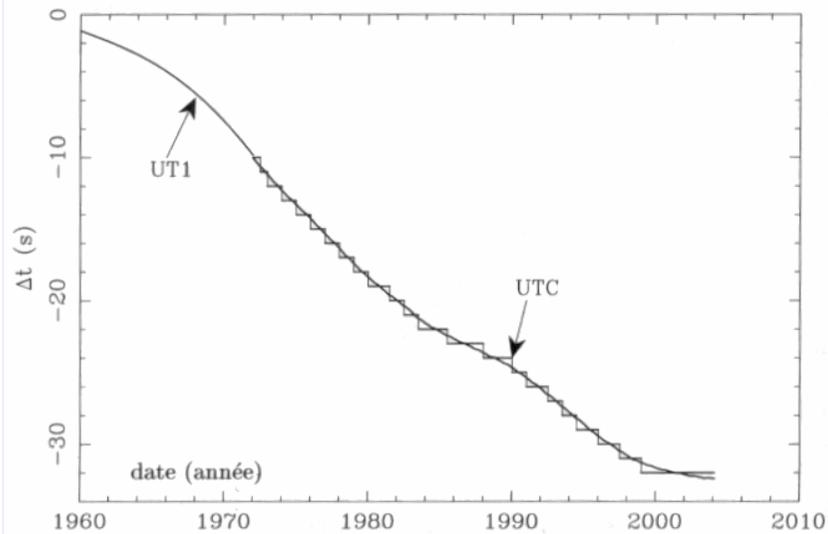


$$TCB - TDB = LB \times (JD - 2443144.5003725) \times 86400 + Po$$

$$TCG - TT = LG \times (JD - 2443144.5003725) \times 86400$$

$$TT = TAI + 32.184 \text{ s}$$

$$L_G = 6.969290134 \times 10^{-10} \quad L_B = 1.55051976772 \times 10^{-8}$$



$$UTC = TAI + n \quad ; \quad (TAI = UTC + 33s \text{ depuis le } 01/01/06)$$

Echelles de temps TT, TCG, TCB, TDB: en prolongement de TE mais en cohérence avec la RG (temps-coordonnées géocentrique et barycentrique)

écart en secondes au TAI

Ecole d'été du GRGS, 1-5 septembre 2008

source Bdl

Réduction d'observations d'étoiles

Ancienne procédure (pré-IAU 2000)

FK5
J2000 equator and equinox

FK5 Proper Motion

IAU1976 precession

IAU1980 nutation

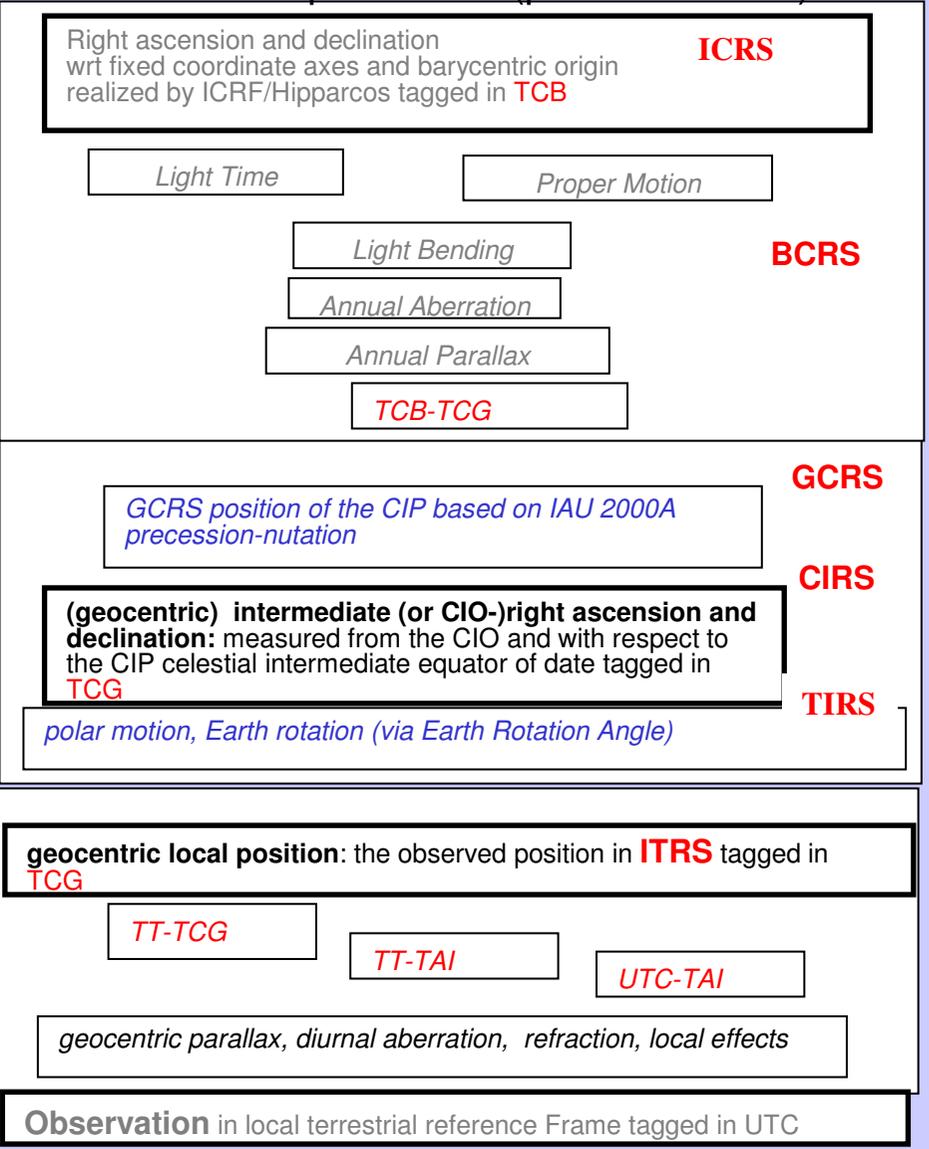
apparent right ascension and declination referred to the CEP equator and equinox of date

polar motion, Earth rotation (via Greenwich Apparent Sidereal Time)

$$UTC = TAI + n$$

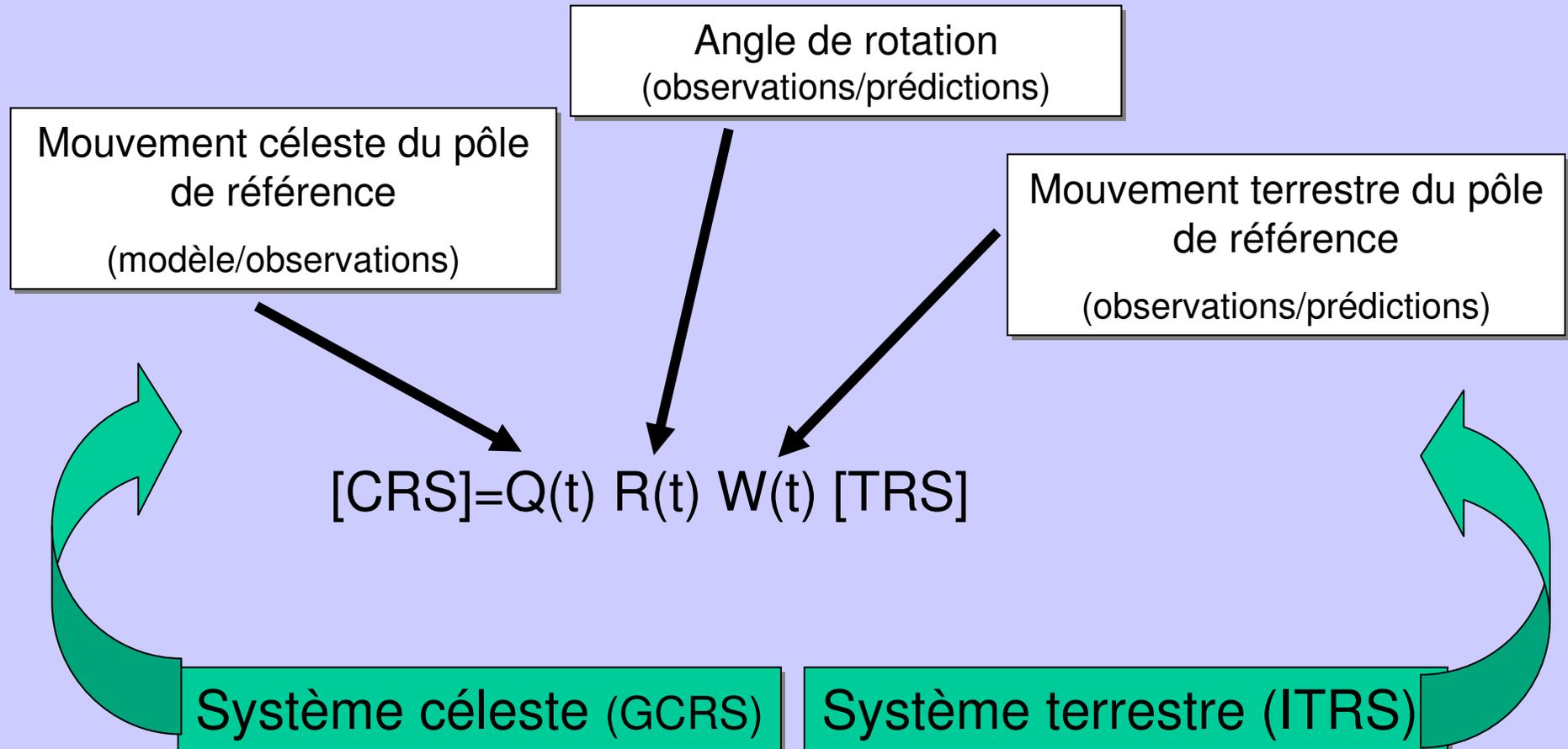
$$(TAI = UTC + 33s \text{ au } 01/01/06)$$

Nouvelle procédure (post-IAU 2000)

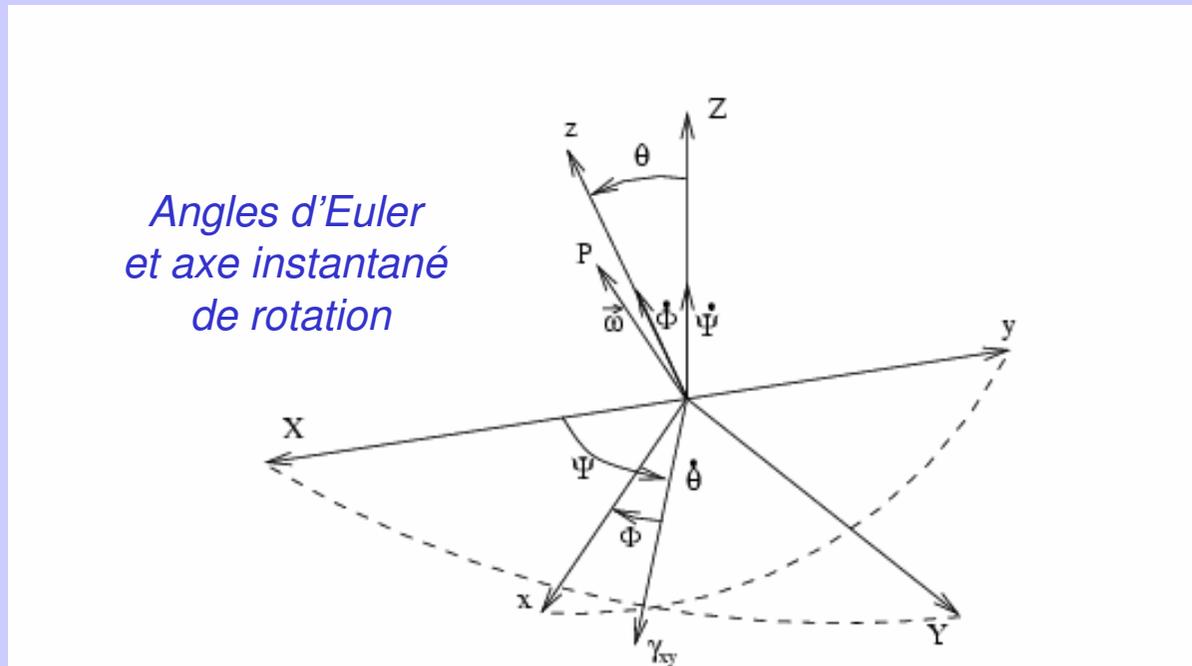


Paramètres d'orientation et paramètres de rotation

Transformation de coordonnées entre GCRS et ITRS



Angles d'orientation et vecteur instantané de rotation entre ITRS et GCRS



Angles d'Euler de Gxyz par rapport à GXYZ: θ , ψ , ϕ

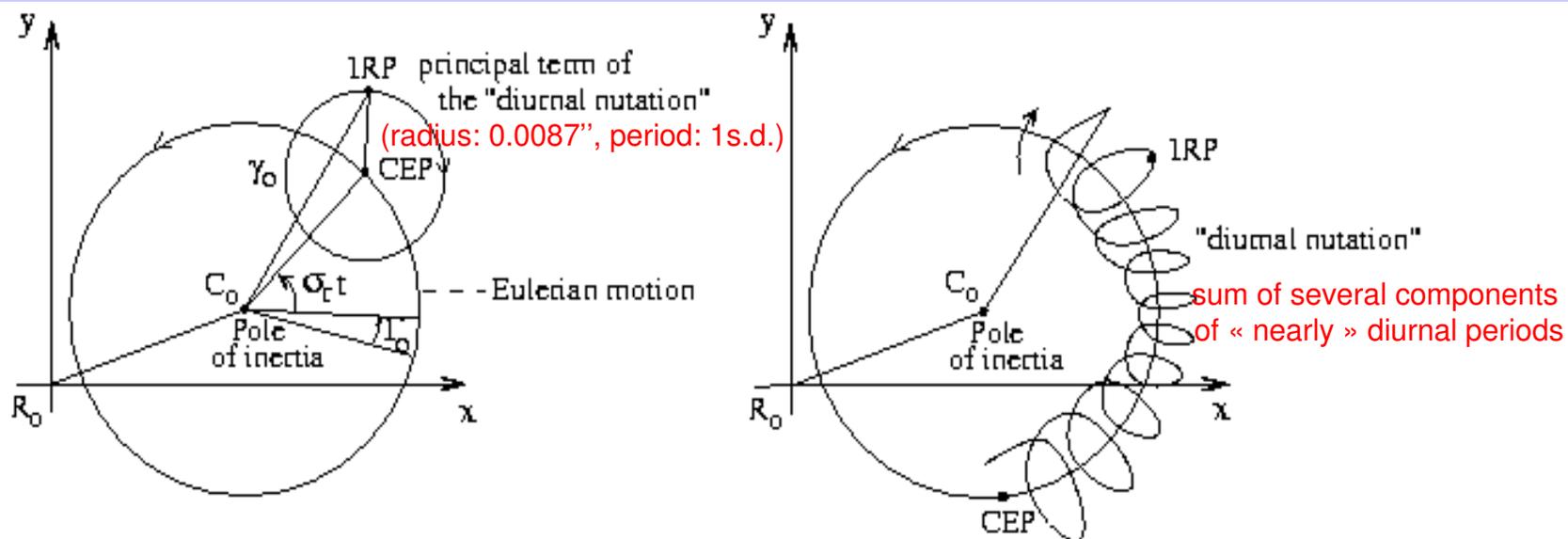
Coordonnées ITRS du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$: $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Relations cinématiques d'Euler

$$\dot{\theta} + i \dot{\psi} \sin \theta = -(\omega_1 + i \omega_2) e^{i\phi}$$

$$\omega_3 = \dot{\phi} - \dot{\psi} \cos \theta$$

Pôle instantané de rotation (IRP) et Pôle céleste des éphémérides (CEP) dans le repère terrestre

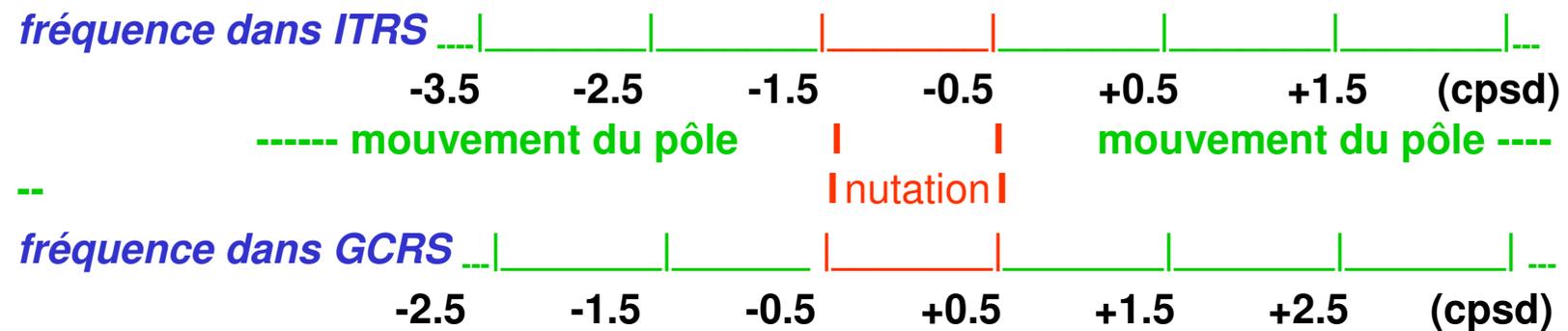


Definition du CEP (UAI 1980) à partir du PIR: pas de terme rétrograde diurne dans la Terre

Définition du Pôle Céleste Intermédiaire (Résolution UAI B1.7)

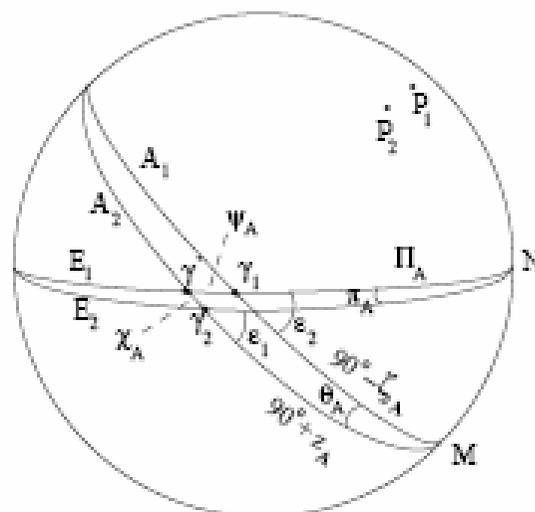
Définition du CIP: extension de la définition du CEP dans le domaine des hautes fréquences

- Mouvement céleste (précession-nutation IAU 2000): *périodes > 2 jours* + offsets
- Nutations de *périodes < 2 jours incluses* dans mouvement dans le repère terrestre



Représentation classique des déplacements de l'équateur et de l'écliptique

éléments « moyens »



Quantités classiques
de précession

FIG. 4.15 – Positions relatives de l'équateur moyen et de l'écliptique à deux dates, notées t_1 et t_2

$$\Pi_A = \gamma_1 N (\approx 174^\circ)$$

$$\pi_A = \gamma_1 N \gamma_2$$

$$z_A + \zeta_A = \gamma_2 M - \gamma_1 M$$

$$90^\circ - \zeta_A = \gamma_1 M$$

$$\theta_A = \gamma_1 M \gamma_2$$

$$\epsilon_i = N \gamma_i M$$

$$\chi_A = \gamma' \gamma_2$$

$$p_A = \gamma_2 N - \gamma_1 N$$

longitude écliptique à la date t_1 du noeud de E_2 dans E_1 ,

précession en latitude ($\approx -0.46''/\text{an}$),

précession en ascension droite ($\approx 46.12''/\text{an}$),

ascension droite à la date t_1 du noeud de A_2 dans A_1 ,

précession en déclinaison ($\approx 20.04''/\text{an}$),

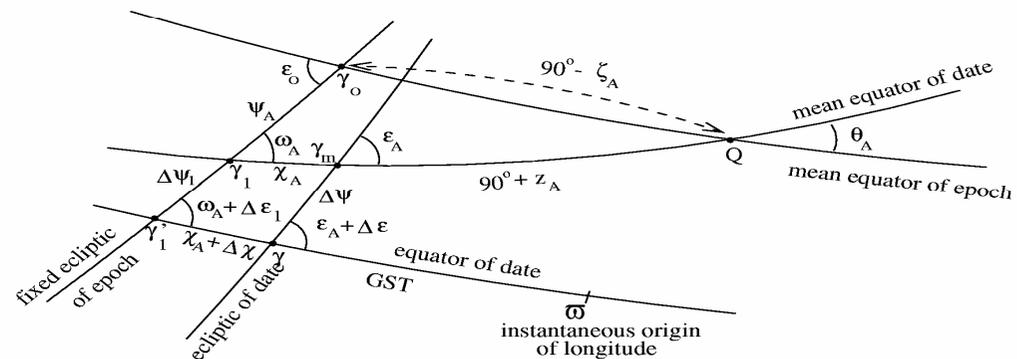
obliquité vraie de l'écliptique ($\approx 23^\circ 26'$),

précession de l'écliptique le long de l'équateur ($\approx 0.11''/\text{an}$),

précession en longitude écliptique ou *précession générale* ($\approx 50.29''/\text{an}$).

Précession-nutation et Temps sidéral à Greenwich (pre-2003: catalogue FK5)

éléments « vrais » et éléments « moyens »



$\varepsilon_A, \omega_A, z_A, \zeta_A, \theta_A, \psi_A, \chi_A$: précession ; $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$: nutation

$$\text{GST}_{1982} (0\text{h}) = 24110.54841 + 8640184.812866 t + 0.093104 t^2 - 6.2 \cdot 10^{-6} t^3 + \Delta\psi \cos \varepsilon + 2 \text{ termes complémentaires} \quad (t = \text{UT})$$

Rotation de la Terre + précession + nutation + précession x nutation

$z_A, \varepsilon_A, \chi_A, \Delta\psi, \Delta\varepsilon, \text{GST}$: référence à γ et à écliptique de la date

Ecole d'été du GRGS, 1-5 septembre 2008

Coordonnées GCRS et ITRS du Pôle

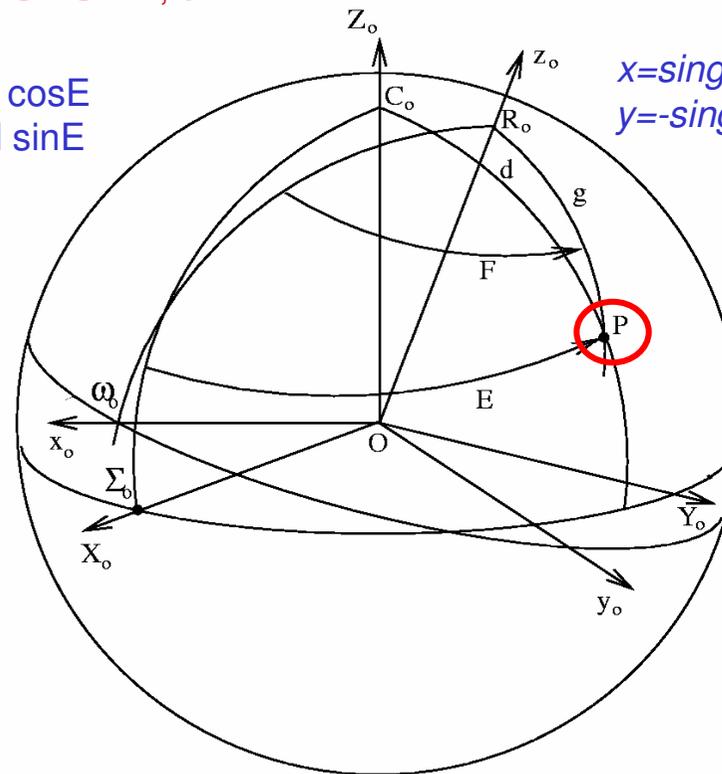
(Résolution UAI B1.8; post- 2003)

position du CIP
dans le GCRS : E, d

$$\begin{aligned} X &= \sin d \cos E \\ Y &= \sin d \sin E \end{aligned}$$

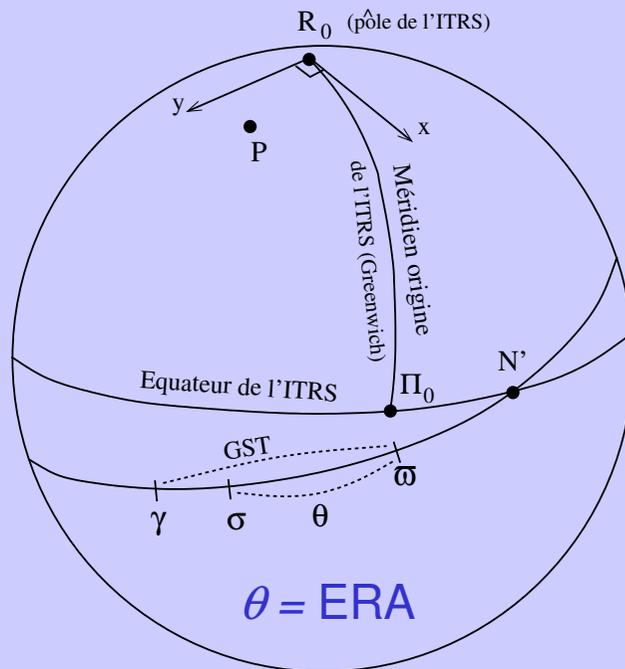
position du CIP
Dans l'ITRS : F, g

$$\begin{aligned} x &= \sin g \cos F \\ y &= -\sin g \sin F \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X = \sin d \cos E &= \chi_0 + \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \\ Y = \sin d \sin E &= \eta_0 + \sin \epsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) + \cos \epsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta\psi_1), \quad (4) \end{aligned}$$

Définition IAU 2000 de l'angle de rotation de la Terre (Résolution UAI 2000 B1.8; post- 2003)



$\sigma = \text{CIO}$: origine céleste intermédiaire

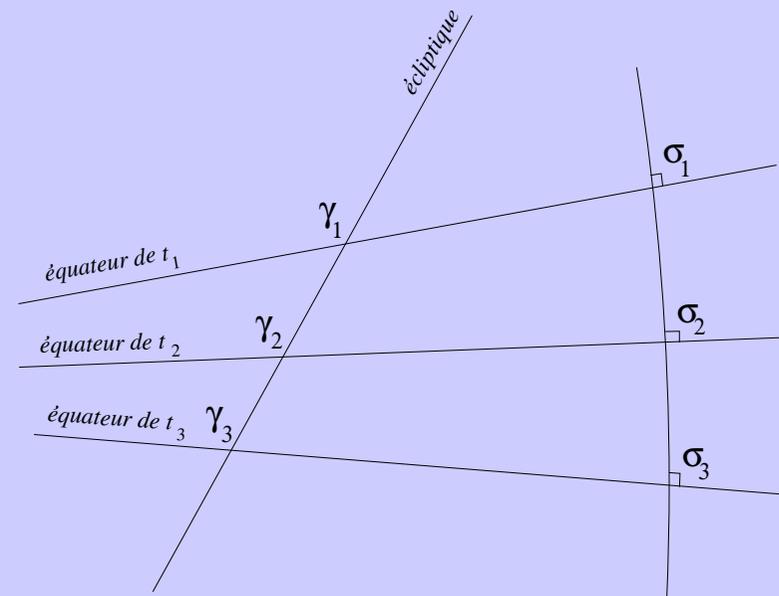
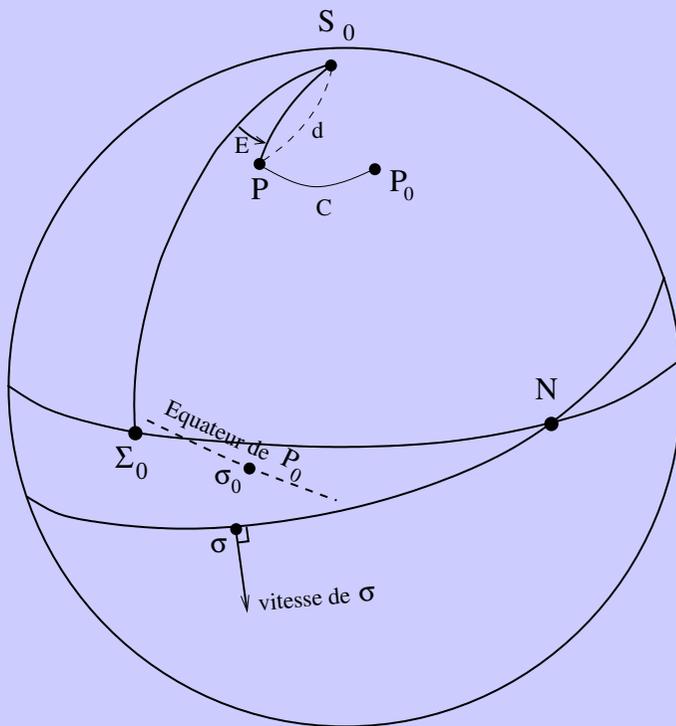
$\omega = \text{TIO}$: origine terrestre intermédiaire

(définition cinématique dépendant du mouvement du CIP)

lien linéaire entre angle de rotation de la Terre θ et UT1:

$$\text{ERA} = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448 \times (UT1 - UT10))$$

Définition cinématique de l'origine « non-tournante » sur l'équateur de la date (Guinot 1979)



Déplacement entre les dates t_1 et t_3 , de l'équinoxe, γ et de l'origine non tournante, σ .

Modèles UAI de précession-nutation

IAU Precession-nutation

1) IAU 2000 Resolution B1.6

- **adopted** the IAU2000 precession-nutation (Mathews, Herring, Buffett 2002) which was implemented in the IERS Conventions 2003

IAU 2000A Nutation (*non-rigid Earth*)

IAU 2000 Precession= IAU 1976 (*Lieske et al. 1977*) + corrections to precession rates

$$d\psi_A \text{ (IAU 2000)} = -0.299\ 65''/c ; \quad d\omega_A \text{ (IAU 2000)} = -0.025\ 24''/c$$

1st step

Celestial pole offsets at J2000 (*VLBI estimates*)

$$\xi_0 \text{ (IAU 2000)} = -16.6170 \text{ mas} ; \quad \eta_0 \text{ (IAU 2000)} = -6.8192 \text{ mas}$$

- **recommended** the development of new expressions for precession consistent with dynamical theories and with IAU 2000A nutation

2) IAU 2006 Resolution B1

- **adopted** the P03 precession (Capitaine, Chapront, Wallace, 2003) dynamical model consistent with IAU 2000A nutation and with non-rigid Earth (*Hilton et al. 2006*)

2nd step

- **recommended** improved definitions (ecliptic, precession of the equator, precession of the ecliptic)

Table IAU2000A : nutations luni-solaires

L	Lm	F	D	Om	Period (days)	In Phase				Out of phase				
						Psi (mas)	dPsi/dt (mas/c)	Eps (mas)	dEps/dt (mas/c)	Psi (mas)	dPsi/dt (mas/c)	Eps (mas)	Deps/dt (mas/c)	
*														
*														
0	0	0	0	1	-6798.383	-17206.4161	-17.4666	9205.2331	0.9086	3.3386	0.0029	1.5377	0.0002	
0	0	2	-2	2	182.621	-1317.0906	-0.1675	573.0336	-0.3015	-1.3696	0.0012	-0.4587	-0.0003	
0	0	2	0	2	13.661	-227.6413	-0.0234	97.8459	-0.0485	0.2796	0.0002	0.1374	-0.0001	
0	0	0	0	2	-3399.192	207.4554	0.0207	-89.7492	0.0470	-0.0698	0.0000	-0.0291	0.0000	
0	1	0	0	0	365.260	147.5877	-0.3633	7.3871	-0.0184	1.1817	-0.0015	-0.1924	0.0005	
0	1	2	-2	2	121.749	-51.6821	0.1226	22.4386	-0.0677	-0.0524	0.0002	-0.0174	0.0000	
1	0	0	0	0	27.555	71.1159	0.0073	-0.6750	0.0000	-0.0872	0.0000	0.0358	0.0000	
0	0	2	0	1	13.633	-38.7298	-0.0367	20.0728	0.0018	0.0380	0.0001	0.0318	0.0000	
.....														

périodes comprises entre 3.5 d et 930 c ; amplitudes comprises entre 0.1 μ as et 17.2''

Effets de non-rigidité de la Terre: qqs mas -> qqs 10 mas

Exemple de l'expression UAI 2000 pour Y

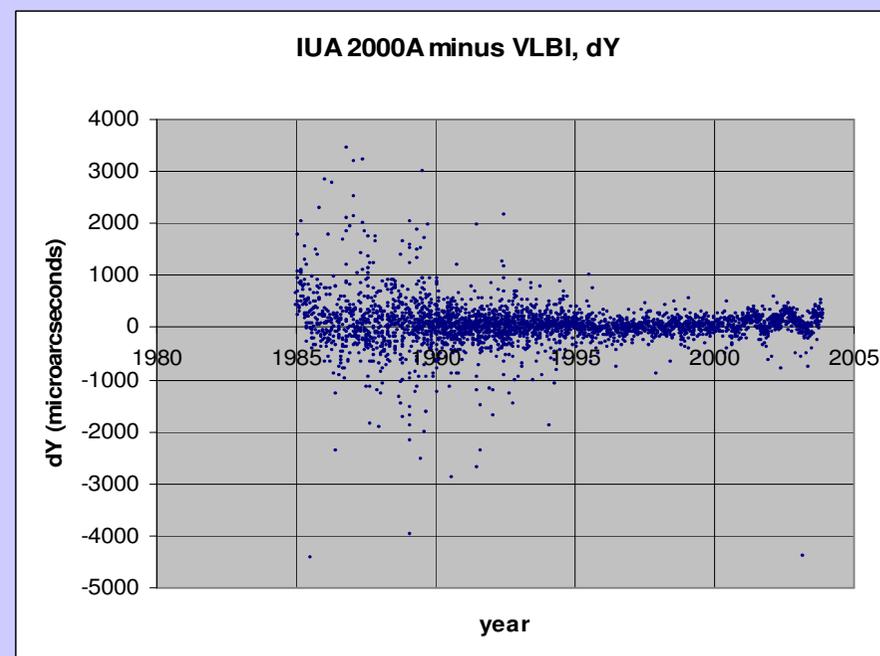
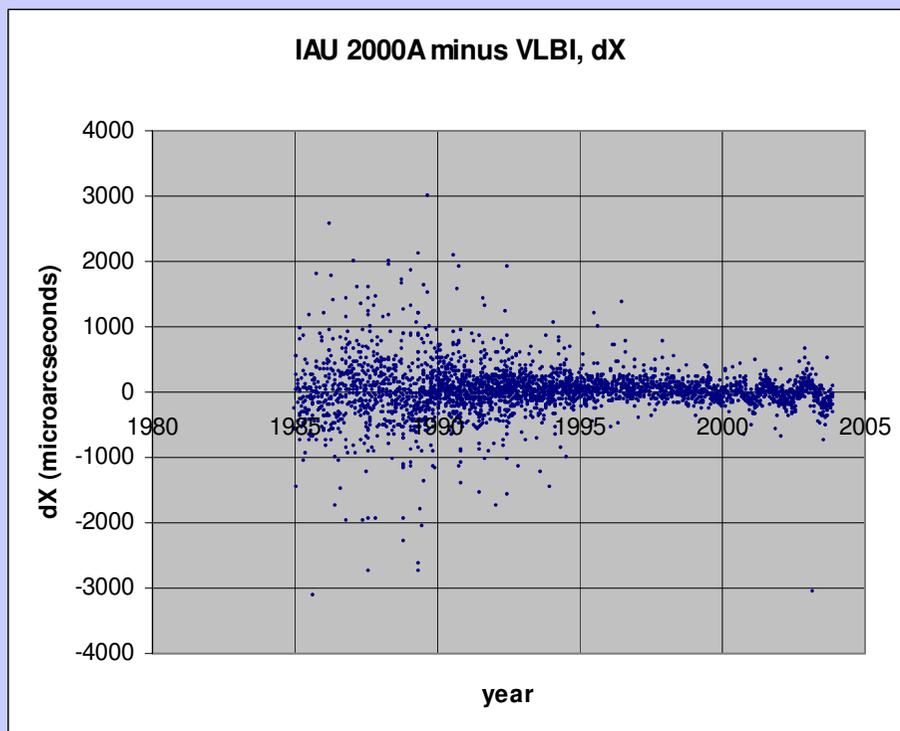
termes périodiques principaux: termes de Fourier (sin/cos) et termes de Poisson (t^n sin/cos)

Argument de la nutation: combinaison linéaire des arguments fondamentaux ($l, l', F, D, \Omega, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, p$)

(microarcseconds)

	<i>SIN</i>	<i>COS</i>														
Number of periodic terms :			Order of polynomial :													
962			l	l'	F	D	Ω	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	λ ₆	λ ₇	p	
1	1538.18	9205236.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-458.66	573033.42	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	137.41	97846.69	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-29.05	-89618.24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-17.40	22438.42	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	31.80	20069.50	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	36.70	12902.66	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Number of periodic terms :			Order of polynomial :													
277			1													
963	153041.82	878.89	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
964	11714.49	-289.32	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
965	2024.68	-50.99	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
966	-1837.33	47.75	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
967	-1312.21	-28.91	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Number of periodic terms :			Order of polynomial :													
30			2													
1240	121.15	-2301.27	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1241	-0.98	-143.27	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Number of periodic terms :			Order of polynomial :													
5			3													
1270	-15.23	-1.62	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0																
Number of periodic terms :			Order of polynomial :													
1			4													
1275	-0.01	0.11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Écarts VLBI au pôle céleste par rapport au modèle précession-nutation UAI 2000



A comparer avec la diapo N° 8

The IAU 2006 precession precession of the equator

The precession of the equator (Capitaine, Chapront, Wallace, 2003) is solution of the dynamical precession equations, with contributions to the precession rates r_ψ , r_ϵ (from Souchay et al. 1990/1999, Williams 1994, Brumberg et al. 1998, Mathews et al. 2002)

Source of the effect	ϵ dependence	Contribution in longitude at J2000			Contribution in obliquity at J2000		
		$\mu\text{as/cy}$	$\mu\text{as/cy}^2$	$\mu\text{as/cy}^3$	$\mu\text{as/cy}$	$\mu\text{as/cy}^2$	$\mu\text{as/cy}^3$
Luni-solar & Planetary torque							
Luni-solar 1st order	$\cos \epsilon$	$(r_0)_1$	-3395	-6	0	0	0
Luni-solar 2d order(a)	$6 \cos^2 \epsilon - 1$	-33 100	0	0	0	0	0
Luni-solar 2d order(b)	$3 \cos^2 \epsilon - 1$	-13 680	0	0	0	0	0
Luni-solar J_4	$\cos \epsilon (4 - 7 \sin^2 \epsilon)$	+2600	0	0	0	0	0
Planetary 1st order	$\cos \epsilon$	+31 367	0	0	-1400	0	0
J_2 and planetary tilts							
J_2 and planetary tilt(a)	$\cos 2\epsilon / \sin \epsilon$	-269 430	+1074	0	0	0	0
planetary tilt(b)	$\cos \epsilon$	0	0	0	$(u_0)_1$	-44	+3
Tides							
tides(a)	$\cos^2 \epsilon$	0	-102	0	0	0	0
tides(b)	$\cos^3 \epsilon$	0	-133	0	0	0	0
tides(c)	$\sin \epsilon \cos \epsilon$	0	0	0	+2400	0	0
J_2 rate	$\cos \epsilon$	0	-14 000	0	0	0	0
Non-linear effect	1	-21 050	0	0	0	0	0
Geodesic precession	1	-1 919 883	+3	+1	-1	0	+5
Total		$(r_0)_1 - 2 223 176$	-16 553	-5	$(u_0)_1 + 999$	-44	+8

$(r_0)_1$ and $(u_0)_1$ derived from VLBI observations

+ correction in the precession rate for the change in the J2000 obliquity from IAU2000 to P03

J2 rate

$dJ_2/dt = -3.0 \times 10^{-11}/\text{yr}$

dynamical flattening

MHB2000: $H_d = 3.273\,794\,92 \cdot 10^{-3} \pm 0.000\,001\,20$

P03: $H_d = 3.273\,794\,48 \cdot 10^{-3}$

$$H_d = (C-A)/C$$

Modèle de précession UAI 2006

TAB. 4.1 – Comparaison des expressions P03 et UAI 2000 des quantités de précession ; unité : mas.

Source		t^0	t	t^2	t^3	t^4	t^5
IAU 2000	P_A		4197.6	194.47	-0.179		
P03			4199.094	193.9873	-0.22466	-0.000912	0.0000120
IAU	Q_A		-46815.0	50.59	0.344		
P03			-46811.015	51.0283	0.52413	-0.000646	-0.0000172
IAU 2000	ψ_A		5038478.750	-1072.59	-1.147		
P03			5038481.507	-1079.0069	-1.14045	0.132851	-0.0000951
IAU 2000	ω_A	84381448.0	-25.240	51.27	-7.726		
P03		84381406.0	-25.754	51.2623	-7.72503	-0.000467	0.0003337
IAU 2000	ϵ_A	84381448.0	-46840.24	-0.59	1.813		
P03		84381406.0	-46836.769	-0.1831	2.00340	-0.000576	-0.0000434
IAU 2000	χ_A		10552.6	-2380.64	-1.125		
P03			10556.403	-2381.4292	-1.21197	0.170663	-0.0000560

TAB. 4.2 – Expressions P03 de la position GCRS du CIP (X, Y) et de la CIO ($s + XY/2$) ; unité : mas.

Quantité		t^0	t	t^2	t^3	t^4	t^5
X	- 16.617	2004191.898	- 429.7829	-198.61834	0.007578	0.0059285	
Y	- 6.951	- 25.896	- 22407.2747	1.90059	1.112526	0.0001358	
$s + XY/2$	0.094	3.80865	- 0.12268	- 72.57411	0.02798	0.01562	

Equations de la rotation de la Terre

Equations of Earth rotation

In the terrestrial system :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{\Gamma}$$

angular momentum

$$\vec{H} = \underline{\underline{I}}\vec{\omega} + \vec{h}$$

Inertia tensor

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

rotation axis

$$\vec{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix}$$

*Euler dynamical equations
in the terrestrial system*

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = \lambda \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = \mu \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = \nu \end{cases}$$

Equations of Earth rotation for a rigid Earth in the terrestrial system

$$\begin{cases} A \dot{\omega}_1 + (C - B) \omega_2 \omega_3 = \lambda \\ B \dot{\omega}_2 + (A - C) \omega_1 \omega_3 = \mu \\ C \dot{\omega}_3 + (B - A) \omega_1 \omega_2 = \nu \end{cases}$$

rigid Earth
Euler free nutation
for $A=B$, frequency: $\sigma_r = (C-A/A) \Omega$

$$\begin{aligned} \dot{m} - i\sigma_r m + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} + \frac{\dot{h} + i\Omega h}{A\Omega} &= \frac{\Gamma}{A\Omega} \\ \dot{m}_3 + \frac{\dot{c}_{33}}{C} + \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} &= \frac{\Gamma_3}{C\Omega} \end{aligned}$$

non rigid Earth

$$\begin{aligned} \dot{m} - i\sigma_r m + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} + \frac{A_f}{A} (\dot{m}_f + i\Omega m_f) &= \frac{\Gamma}{A\Omega} \\ \dot{m} + \dot{m}_f - i\sigma_f m_f + i\Omega m_f + \frac{\dot{c}_f}{A_f} &= 0 \end{aligned}$$

non rigid Earth
with a fluid core

Transformation of the equations from terrestrial to celestial systems: rigid Earth

Euler's kinematical relations: $\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta = -\Omega m e^{i\Phi}$

$$\left[\frac{d}{dt}(\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta) - i\left(\frac{C}{A}\Omega - \dot{\psi} \cos \theta\right)(\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta) \right] e^{-i\Phi} = \frac{iC_0}{A}\Omega - \frac{L}{A} \quad (2)$$

where $\lambda = -Le^{i\Phi}$

$$\underbrace{\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta = -\frac{iL}{C\Omega} e^{i\Phi}}_{\text{Poisson's equation}} - \frac{iA}{C\Omega} \frac{d}{dt}(\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta) + \frac{A}{C\Omega} \dot{\psi} \cos \theta (\dot{\theta} + i\dot{\psi} \sin \theta)$$

the kinematical relations are independent
on the structure and properties of the Earth

Equations of Earth rotation for a rigid Earth in the celestial system

Euler angles

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} + \frac{C}{A} \sin \omega_0 \varphi_1 \ddot{\psi} &= \frac{L}{A} + F_2 + \frac{B-A}{A} F_1 \\ \sin \omega_0 \ddot{\psi} - \frac{C}{A} \varphi_1 \dot{\omega} &= \frac{M}{A} + G_2 + \frac{B-A}{A} G_1 \\ \ddot{\varphi} &= \frac{N}{C} + H_2 + \frac{B-A}{C} H_1 \end{aligned}$$

in the true
equatorial system

GCRS CIP
Coordinates

$$\begin{cases} -\ddot{Y} + \frac{C\Omega}{A} \dot{X} = \frac{L}{A} + F'' \\ \ddot{X} + \frac{C\Omega}{A} \dot{Y} = \frac{M}{A} + G'' \end{cases}$$

in the celestial
intermediate
system (CIP, Σ)

(axially symmetric Earth)

axially symmetric and rigid Earth : $N=0$, except for semi-diurnal terms in (B-A)

Expression du couple extérieur

Couple exercé sur la Terre par un corps perturbateur (Lune, Soleil, planètes):

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = -m \vec{u} \times \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{u}} \right)$$

m: masse du corps

V: potentiel gravitationnel de la Terre

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$: vecteur unitaire dans la direction géocentrique du corps

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin \varphi) \right]$$

$J_2 = CH_d / MR^2$ avec $H_d = (C-A)/C$

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = k'_{J_2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \begin{pmatrix} v' w' \\ -u' w' \\ 0 \end{pmatrix} + k'_{J_3} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \begin{pmatrix} v' (1 - 5w'^2) \\ -u' (1 - 5w'^2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ + k'_{J_4} \left(\frac{a}{r} \right)^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} v' w' (3 - 7w'^2) \\ -\frac{1}{3} u' w' (3 - 7w'^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k'_{J_2} = \frac{3Gm}{a^3} MR^2 J_2$$

$$k'_{J_3} = \frac{1}{2} \frac{R}{a} \frac{3Gm}{a^3} MR^2 J_3$$

$$k'_{J_4} = \frac{5}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3Gm}{a^3} MR^2 J_4$$

Expression du couple

1. Expression semi-analytique

- Lune: théorie ELP 2000 (Chapront-Touzé & Chapront 1998)
- Soleil + planètes: théorie VSOP87 (Bretagnon & Francou 1987)

→ Expression du couple dans repère céleste

Lune: termes en J_2 , J_3 (10^5 fois plus faibles), J_4 (10^6 fois plus faibles),

Soleil: termes en J_2 , J_3 ,

Planètes: termes en J_2 .

termes polynomiaux

+ plusieurs milliers de termes périodiques (Fourier: sin/cos + Poisson: t^n sin/cos)

2. Expression numérique

- Ephémérides planétaires et lunaires numériques (DE405, INPOP06, ..),
- Pour tests des solutions semi-analytiques car impossible de prendre en compte les complexités du modèle de Terre.

Différentes formes de résolution

- **REN2000 (Souchay et al. 1999)**
 - résolution de l'équation du moment cinétique en formulation Hamiltonienne (par rapport à l'écliptique de la date)
 - variables d'Andoyer → paramètres classiques de précession-nutation
 - résolution analytique (succesivement ordre 1, ordre 2, etc.)
- **RD1997 (Roosbeek & Dehant 1997)**
 - résolution de l'équation du moment cinétique (par rapport à l'écliptique de la date)
 - variables: paramètres classiques de précession-nutation
 - résolution analytique (succesivement ordre 1, ordre 2, etc.)
- **SMART97 (Bretagnon et al. 1998)**
 - résolution des équation en angles d'Euler (par rapport à l'écliptique J2000)
 - variables: angles d'Euler
 - résolution semi-analytique par approximations successives et méthode de variations des constantes
- **XY2008 (Capitaine & Folgueira 2008)**
 - résolution des équation en fonction des paramètres X, Y
 - variables: X, Y
 - résolution semi-analytique par approximations successives et méthode de variations des constantes

Solution REN 2000: exemple

Table 5.1. The largest components of rigid Earth nutation, longitude part, angular momentum axis and figure axis, for epoch J2000.0. When some coefficients are the combination of a lunar and solar contribution, they are mixed together

l_M	l_S	F	D	Ω	Period day	Ang. mom.	axis	Figure	axis
						$\Delta\psi(\sin)$	$\Delta\psi(\cos)$	$\Delta\psi(\sin)$	$\Delta\psi(\cos)$
						mas	mas	mas	mas
0	0	0	0	1	-6798.384	-17283.9972	0.3826	-17280.5921	0.3826
0	0	0	0	2	-3399.192	209.0958	0.0047	209.0296	0.0047
0	1	0	0	0	365.260	125.5027		125.5036	
0	-1	2	-2	2	365.225	21.2480		21.3112	
0	0	2	-2	2	182.621	-1269.9036		-1277.4752	
0	0	2	-2	1	177.844	12.4161		12.5103	
0	1	2	-2	2	121.749	-49.4928		-49.9377	
-1	0	0	2	0	31.812	14.9442		14.9588	
1	0	0	0	1	27.667	5.8206		6.1093	
1	0	0	0	0	27.555	67.6795		67.7677	
1	0	0	0	-1	27.443	5.7020		5.4318	
-1	0	2	0	2	27.093	11.4450		11.9188	
0	0	0	2	0	14.765	6.0158		6.0432	
0	0	2	0	2	13.661	-204.1468		-221.5116	
0	0	2	0	1	13.633	-34.2965		-37.8530	

Exemple de la solution relative au couple solaire (forme très simplifiée)

$$\begin{cases} X = a \cos \odot \\ Y = a \sin \odot \cos \varepsilon \\ Z = a \sin \odot \sin \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = \frac{3n^2}{2}(C - A)(1 - \cos 2\odot) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ M_1 = -\frac{3n^2}{2}(C - A) \sin 2\odot \sin \varepsilon \\ N_1 = 0 \end{cases}$$

Le couple solaire s'annule pour ($\odot=0$)

$$\begin{cases} A \frac{dp_1}{dt} + [A \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)r_1]q_1 = L_1 \\ A \frac{dq_1}{dt} - [A \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)r_1]p_1 = M_1 \end{cases}$$

$$q_1 = \dot{\psi} \sin \theta ; p_1 = \dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{3}{4} \times \frac{\sin \varepsilon}{366,24} \times \frac{C - A}{A} \cos 2nt \\ \psi - \psi_0 = \frac{3}{4} \times \frac{\cos \varepsilon}{366,24} \times \frac{C - A}{A} (2nt - \sin 2nt) \end{cases}$$

$$\odot \approx \frac{2\pi(t - t_0)}{T} = nt$$

Références

- **Ouvrages Généraux**

- *Connaissance des Temps. Ephémérides Astronomiques 2008*; Chapitre 3.6, Bureau des longitudes, EDP Sciences.
- Danjon, A., 1959, *Astronomie Générale*, Sennac editeur, Paris.
- *Guide de données astronomiques 2007*, Annuaire du Bureau des longitudes, EDP Sciences.
- Kovalevsky, J. and Seidelmann, P.K., *Fundamentals of Astrometry*, J. Cambridge University Press, 2004.

- **Articles et documents spécialisés récents**

- Bretagnon, P., Francou, G., Rocher, P., and Simon, J.-L., 1998. "SMART97: a new solution for the rotation of the rigid Earth", *Astron. Astrophys.*, 329, 329-338.
- Capitaine, N., Wallace, P., Chapront, J., 2004, "Improvement of the IAU 2000 precession model", *Astron. Astrophys* 432, 355--367.
- Capitaine, N., Folgueira, M. Souchay, J., 2006, "Earth rotation based on the celestial coordinates of the celestial intermediate pole: I. The dynamical equations", *Astron. Astrophys* 445, 347-360.
- Hilton, J.L., Capitaine, N., Chapront, J., Ferrandiz, J.M., Fienga, A., Fukushima, T., Getino, J., Mathews, P., Simon, J.-L., Soffel, M., Vondrak, J., Wallace, P., Williams, J. 2006, "Report of the IAU Div I Working Group on Precession and the Ecliptic", *Celest. Mech.*, 94, 351.
- Mathews, P.M., Herring, T.A., Buffett B.A., 2002, "Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior", *J. Geophys. Res.* 107, B4, 10.1029/2001JB000390.
- Roosbeek, F; Dehant, V., 1998 (RD97), "RDAN97 : An analytical development of rigid Earth nutation series using the torque approach", *Celestial Mechanics* 70 (4), 215
- Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H., and Folgueira, M., 1999, "Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory: III. Final tables REN-2000 including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects" , *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 135. , 111