

# Plan du cours

---

- I    Objet et méthodes du cours
- II   Signal et échantillonnage
- III  Transformée de Fourier
- IV  FFT et usage de la FFT
- V.   Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI  Analyse en fréquence : FAMOUS

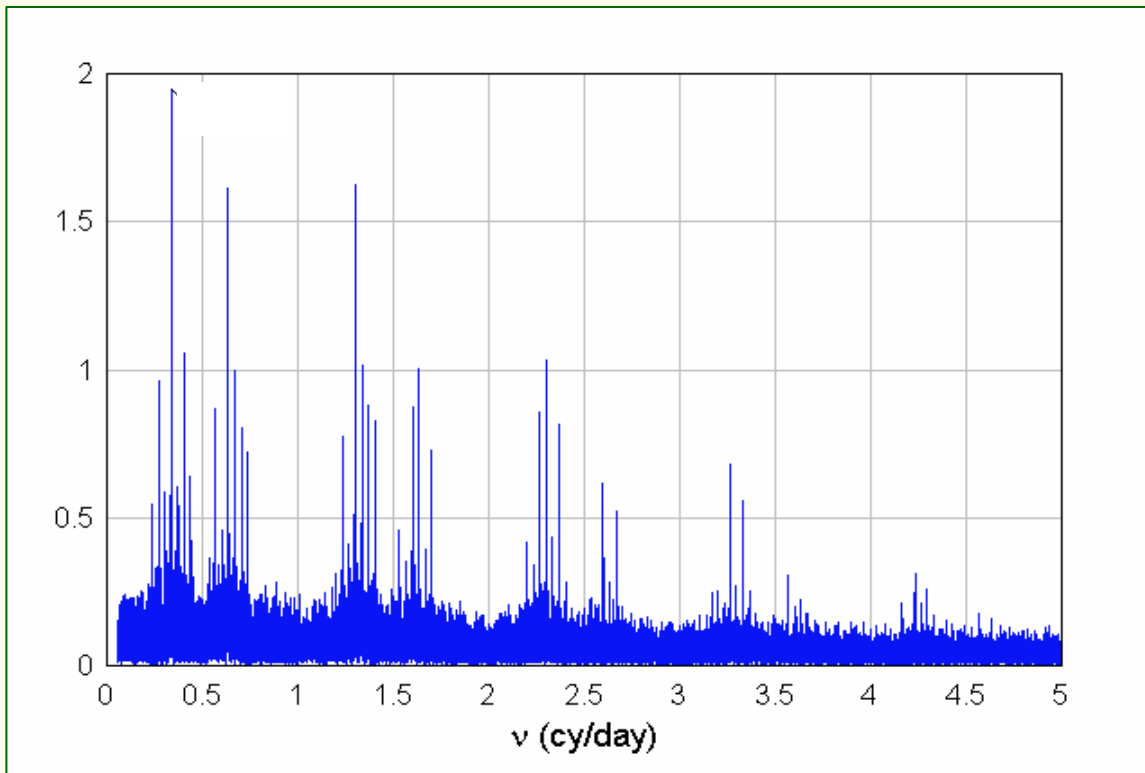
# I. Objet du cours

# Objectifs et contenu

- Quelques principes sur l'analyse spectrale
  - Signaux discrets
  - Echantillonnage quelconque
- Un peu de théorie et pas mal d'applications
  - théorie, pièges, recettes et outils pratiques
- Trucs et astuces
- Démonstrations complémentaires possibles après le cours

# Principes et méthodes

- Question : Combien de lignes spectrales dans ce spectre
  - Périodogramme d'une série temporelle réelle
  - Échantillonnage irrégulier



- Réponse :

→ 1 ligne harmonique :

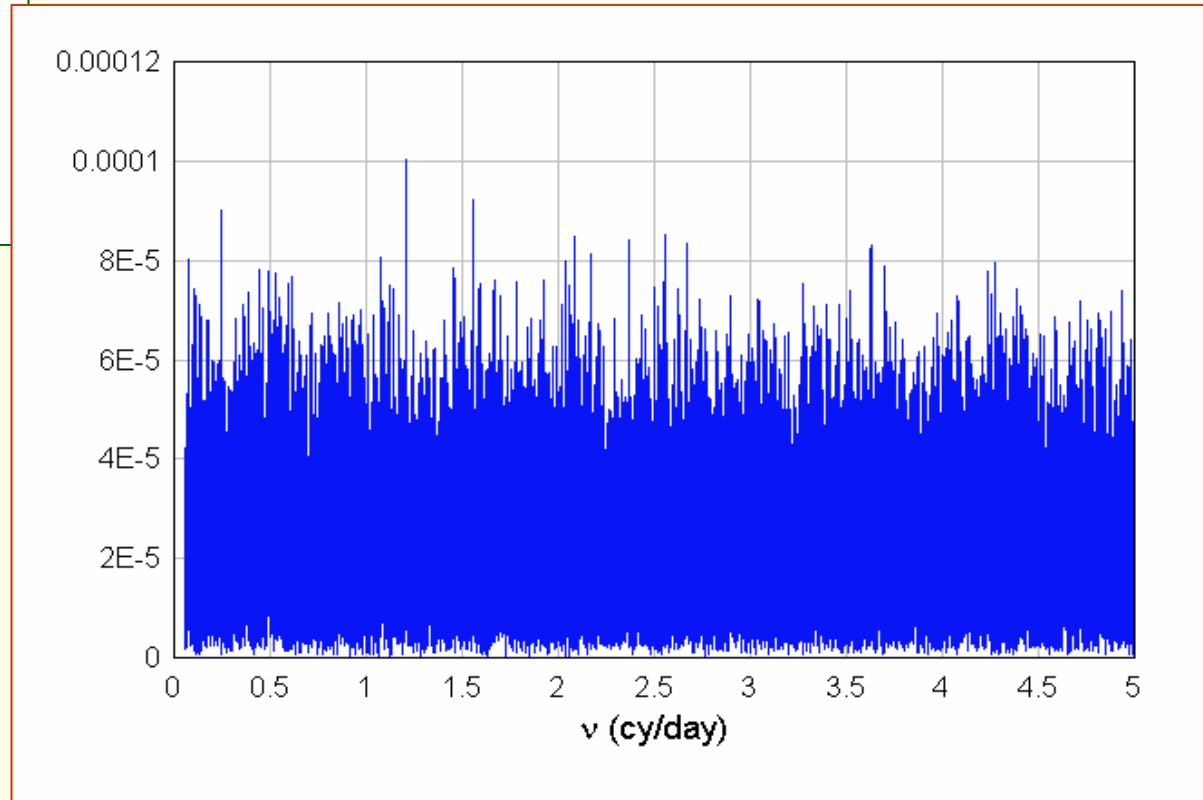
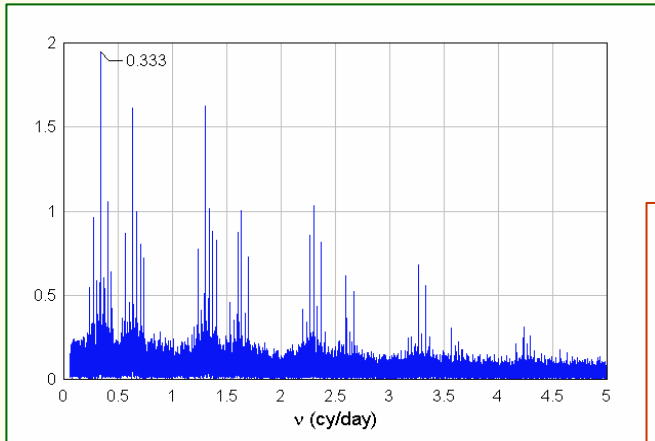
- période 3 jours
- amplitude 2.

- Preuve :

→ ce qu'il reste si on enlève cette ligne

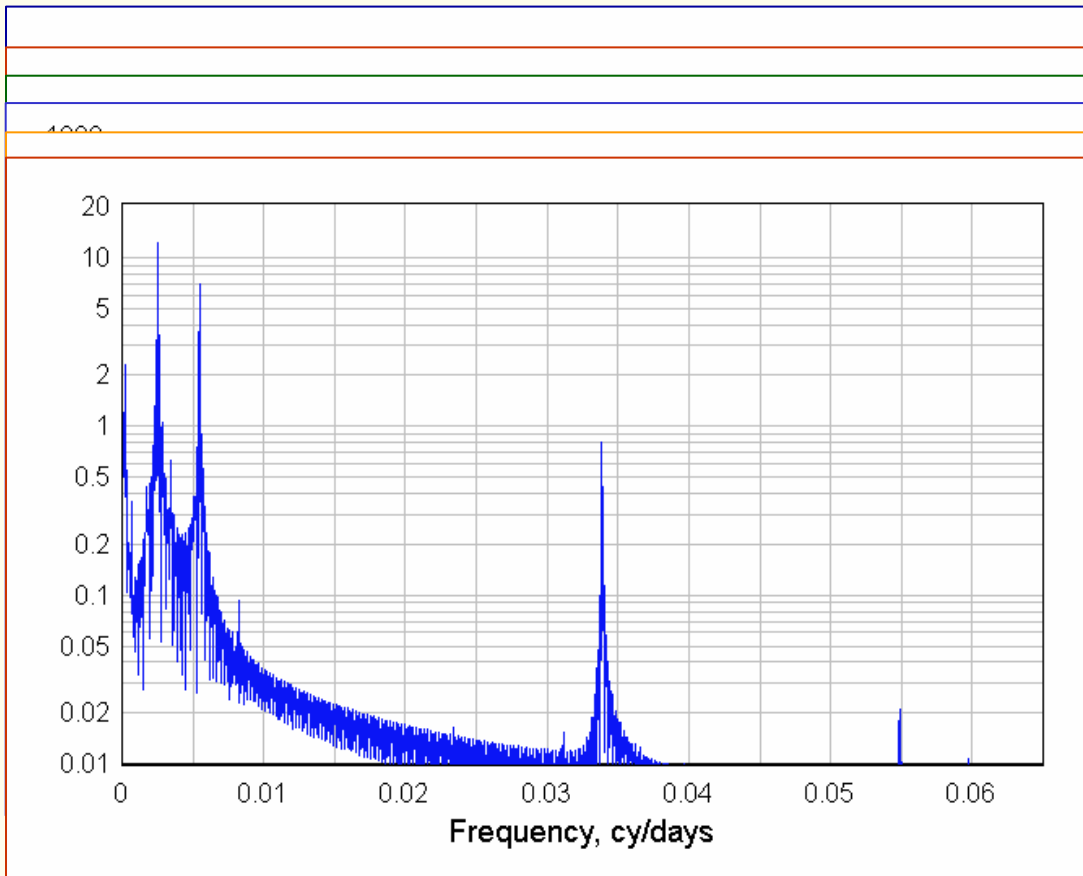
# Principes et méthodes

- *Ce qu'il reste quand on enlève 'le haut' :*



# Principes et méthodes

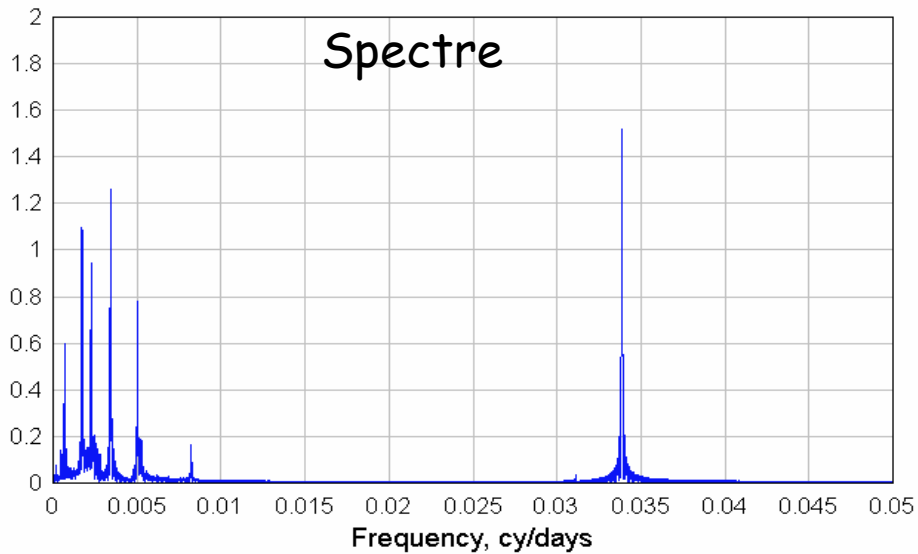
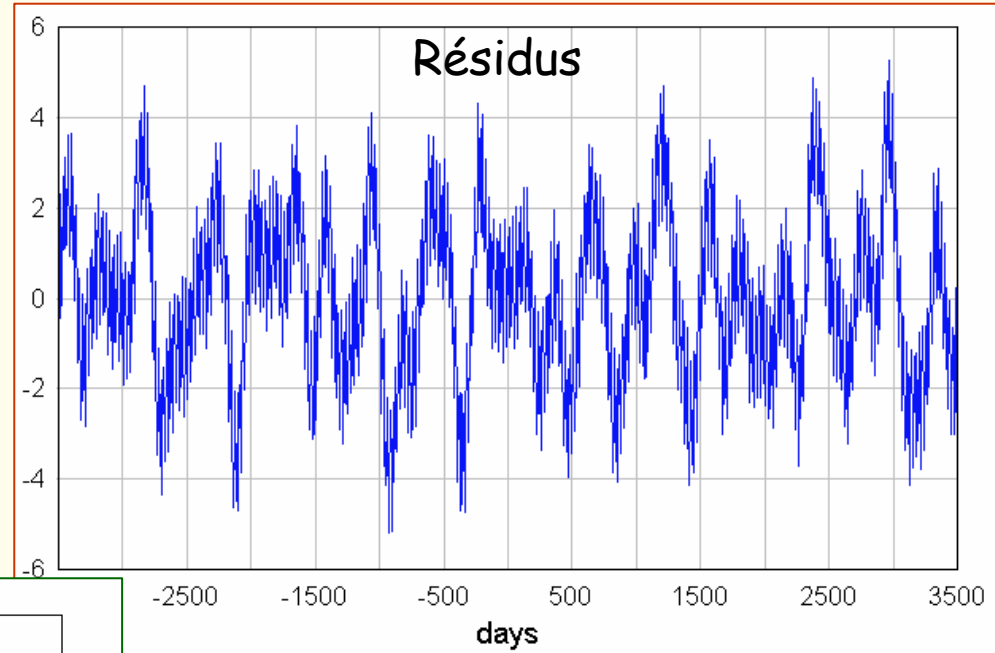
- Question : contenu fréquentiel d'un signal discret complexe
  - utilisation des outils classiques  $\rightarrow$  (si  $t_{i+1} - t_i = \tau = \text{cte}$ )
  - décomposition du signal en composantes  $\rightarrow$  analyse en fréquence



- est-ce une simple droite ?
- on enlève le 'trend'
  - calcul très précis
- FFT ??
- mieux en log ?
- peut on estimer et enlever la raie : 1 an ?
- on rejoue la partie n fois

# Résidus et périodogramme

P(yr)	$\mu s$	origine
1.00	1656.68	Sun
1.09	22.42	J-S
0.5	13.84	2S
11.8	4.77	J
1.04	4.68	Sa-S
29.5	2.26	Sa
...	...	...





- I    Objet et méthodes du cours
- II   Signal et échantillonnage
- III  Transformée de Fourier
- IV   FFT et usage de la FFT
- V.   Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI.  Analyse en fréquence : FAMOUS

# Séries temporelles

- Les séries temporelles font partie des sciences d'observation
  - astronomie, géophysique, météorologie, océanographie
  - sociologie, démographie
  - économie et finance
- Elles sont analysées pour obtenir une description synthétique
  - Tendances, composantes périodiques, systèmes quasi-périodiques
- L'analyse de Fourier est l'outil privilégié depuis des années
  - Très adaptée aux signaux régulièrement échantillonnés
  - Avec de nombreuses limitations
    - Fréquence maximum, pas de liberté de l'échantillonnage en fréquence
    - Boite noire
    - Interprétation difficile : raies non orthogonales
    - Pas de standard de normalisation, difficile de récupérer l'amplitude
- Mais la FFT demeure indispensable

# Échantillonnage régulier

- Problèmes rencontrés
  - Structure périodique dans l'espace des fréquences
    - répliques (aliasing)
    - Chaque ligne spectrale est répliquée une infinité de fois
    - Besoin d'une hypothèse supplémentaire pour lever l'ambiguïté
- Avantages de l'échantillonnage régulier
  - Pas de lignes fantômes sans signification
  - $\langle \exp i2\pi\nu t, \exp i2\pi\nu' t \rangle \sim 0$  si  $\nu - \nu' \neq k/\tau$  :: condition d'orthogonalité
    - Mais pour une durée finie  $T$ ,  $\nu - \nu'$  doit être  $> 1/T \rightarrow$  lobes
  - Avec un spectre on possède toute l'information spectrale

# Échantillonnage irrégulier

- Pas de définition précise de l'irrégularité
  - Évolution continue de la parfaite régularité au désordre total
  - L'échantillonnage aléatoire meilleure que "l'irrégulier structuré"
- Problèmes rencontrés
  - Nombreuses raies fantômes reliées aux raies 'bien placées'
  - $\langle \exp i2\pi vt, \exp i2\pi v't \rangle \neq 0$  pour de nombreuses paires  $(v, v')$ 
    - Absence d'orthogonalité dans la projection
  - Avec un spectre il est difficile de retrouver l'information spectrale pertinente
- Avantages :
  - Pas de structure périodique dans l'espace des fréquences
    - Chaque ligne spectrale apparaît une seule fois dans le spectre

- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

# Transformée de Fourier

- rappels sur la Transformée de Fourier
- signaux discrets et transformée discrète
- FFT
- périodogrammes

# Transformée de Fourier

- Projection sur une base orthogonale de  $L_2$

- TF :

$$X(f) = \int x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

- TF<sup>-1</sup> :

$$x(t) = \int X(f) e^{2j\pi f t} df$$

- Propriétés : voir cours universitaires

- linéarité, translation en t, échelles réciproques, convolution, symétries

- Importance : capitale

- sous la forme continue fondamentale pour établir des résultats généraux en optique, traitement du signal, fonctions aléatoires ...
- Les vrais problèmes commencent avec les calculs pratiques

$$X(f) = \int x(u) e^{-2j\pi f u} du$$

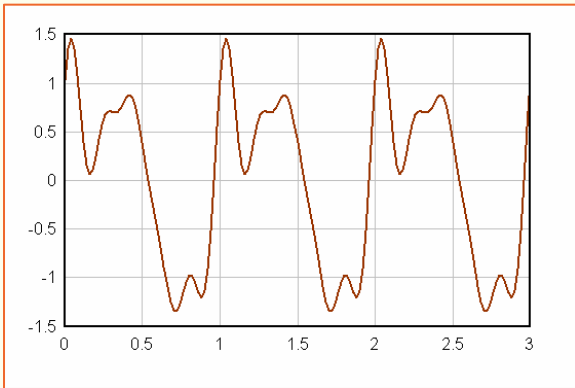
- $X(f)$  : spectre
- $|X(f)|$  : spectre d'amplitude
- $|X(f)|^2$  : spectre de puissance

variable	$u$	$s$
variable	$f$	$s^{-1}$
fonction	$x$	$m s^{-2}$
spectre	$X$	$m s^{-1}$
puissance		$m^2 s^{-2}$



# Séries de Fourier I

- Cas d'un signal périodique de période  $T$



$\phi(t)$  : signal périodique  $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \phi(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi_0(t - nT) = \phi_0(t) * \delta(t - nT)$$

$$\Phi(\nu) = \sum \int e^{-2j\pi\nu t} \phi_0(t - nT) dt = \sum \Phi_0(\nu) e^{-2j\pi\nu nT} = \Phi_0(\nu) \sum e^{-2j\pi\nu nT}$$

$$\sum_n e^{-2j\pi\nu nT} = \sum_k \delta(\nu T - k) = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0(\nu) \delta(\nu - n/T) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta(\nu - n/T)$$

- Spectre de raies enveloppé dans la TF du motif
  - raies espacées de  $\nu = 1/T$

# Séries de Fourier II

- Avec la transformée inverse :

$$\phi(t) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) F^{-1}[\delta(v - n/T)] = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) e^{2j\pi nt/T}$$

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi nt/T} \quad c_n = \frac{1}{T} \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0(t) e^{-2j\pi nt/T} dt$$

$$\phi(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt$$

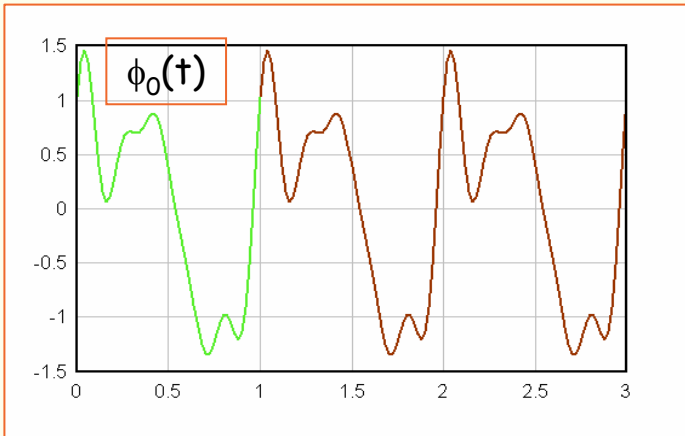
$$a_k = \frac{1}{2T} \int_0^T \phi(t) \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{1}{2T} \int_0^T \phi(t) \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt$$

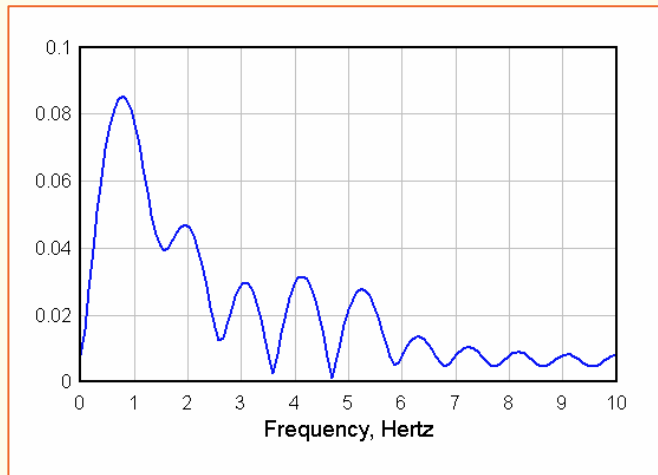
# Séries de Fourier III

- Exemple par synthèse d'une série de Fourier

$$\phi(t) = \sin(2\pi t) + 0.5 \cdot \cos(4\pi t) + 0.3 \cdot \sin(6\pi t + 0.7) + 0.3 \cdot \cos(8\pi t - 0.8) + 0.2 \cdot \sin(10\pi t + 0.7)$$



Signal  $\phi(t)$  et sa restriction  $\phi_0(t)$

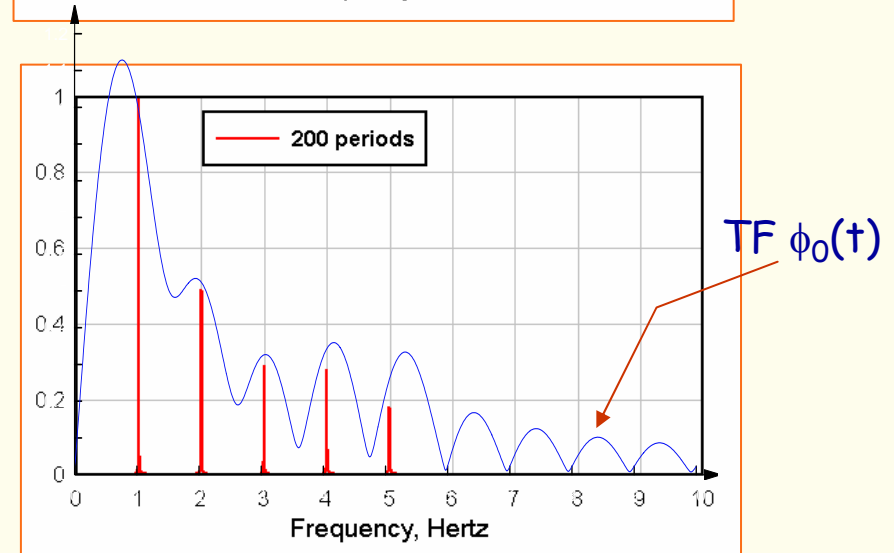
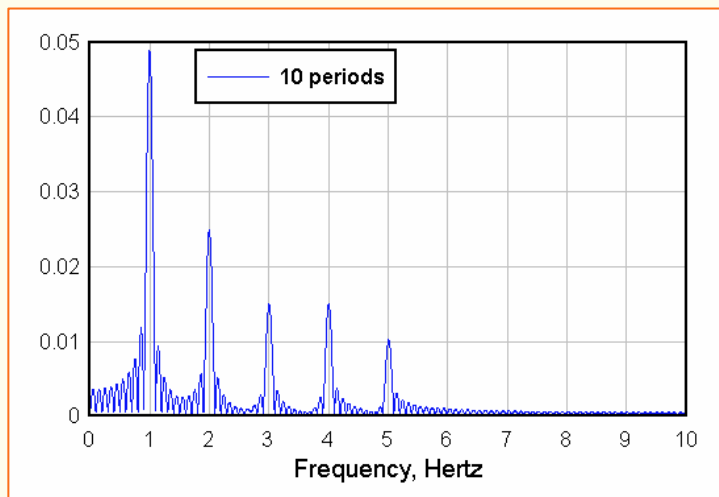
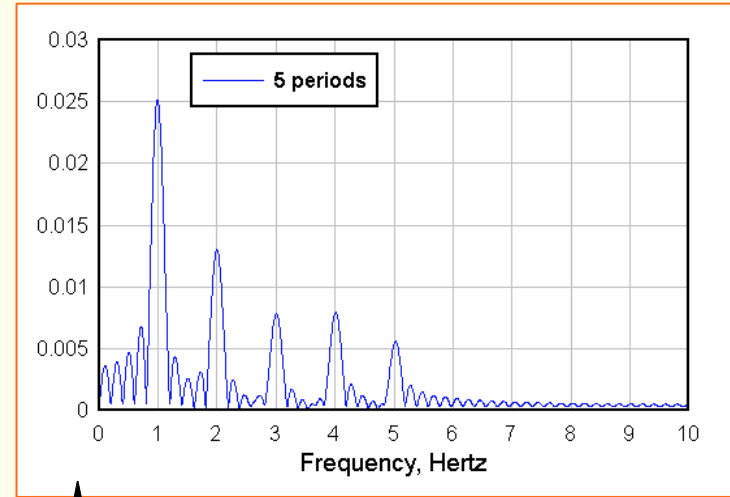
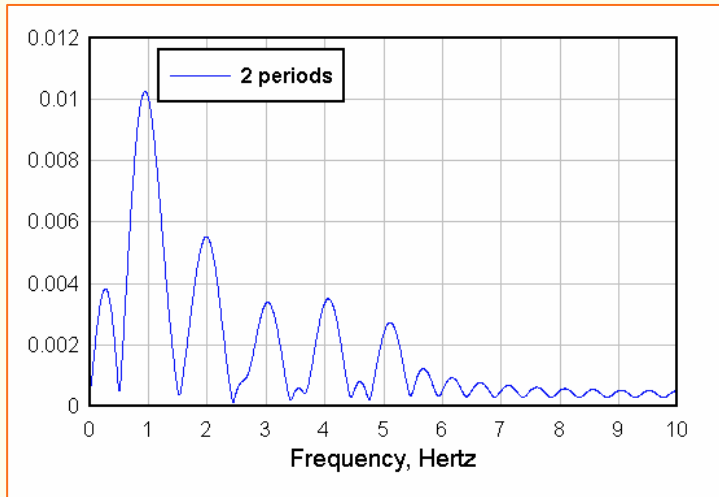


TF de  $\phi_0(t)$

Q : comment faire ce calcul numériquement ?

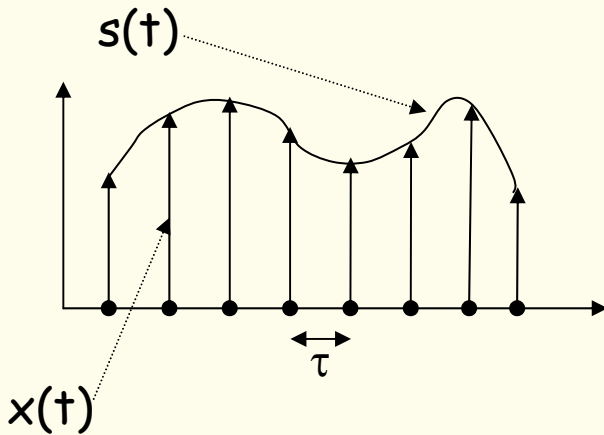
# Séries de Fourier III

- Visualisation de la convergence vers la série de Fourier
  - TF du signal sur différents intervalles



# Transformée à temps discret (TFTD)

- Signal de mathématicien  $x(t)$  continu avec  $-\infty < t < \infty$
- Signal de physicien : échantillonnage temporel



$$\begin{aligned}x(t) &= s(t) \sum \delta(t - n\tau) = \sum s(t) \delta(t - n\tau) \\ &= \sum s(n\tau) \delta(t - n\tau) \\ &= \{s(\tau), s(2\tau), \dots, s(N\tau)\} \\ x(t) &= \{x(\tau), x(2\tau), \dots, x(N\tau)\}\end{aligned}$$

TF du signal acquis :  $X(\nu) = S(\nu) * \sum \delta(\nu - n/\tau) = \sum S(\nu - n/\tau)$

# Transformée à temps discret (TFTD)

- Signification de  $X(\nu)$ :  $X(\nu) = S(\nu) * \sum \delta(\nu - n/\tau) = \sum S(\nu - n/\tau)$
- Répétition périodique (période  $1/\tau$ ) du motif de la TF de  $s(t)$ 
  - résultat rigoureux pour le signal discret
  - pas encore très utile pour le calcul
  - si  $s(t)$  est à bande limitée  $< 1/2\tau$ , alors on a toute l'information sur la TF
- Formule de calcul de  $X(\nu)$ :

$$x(t) = \sum s(t) \delta(t - n\tau) = \sum s(n\tau) \delta(t - n\tau)$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum s(n\tau) \int \delta(t - n\tau) e^{-2j\pi\nu t} dt = \sum s(n\tau) e^{-2j\pi\nu n\tau} \\ &= \sum x(t_n) e^{-2j\pi\nu n\tau} \end{aligned}$$

# Propriétés de la TFTD

- Définition : 
$$X(\nu) = \sum x(t_n) e^{-2j\pi\nu n\tau}$$

Transformée de Fourier à temps discret

- continue en fréquence
- périodique de période  $1/\tau$
- c'est exactement la TF du signal discret

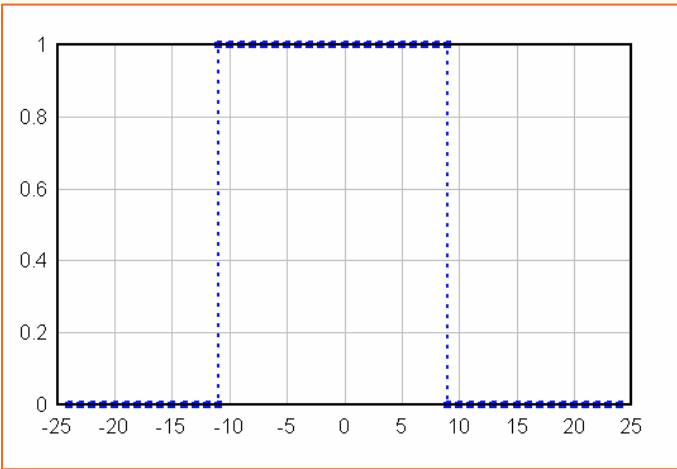
- Transformée inverse :

$$x(n\tau) = \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} X(\nu) e^{2j\pi\nu n\tau} d\nu$$

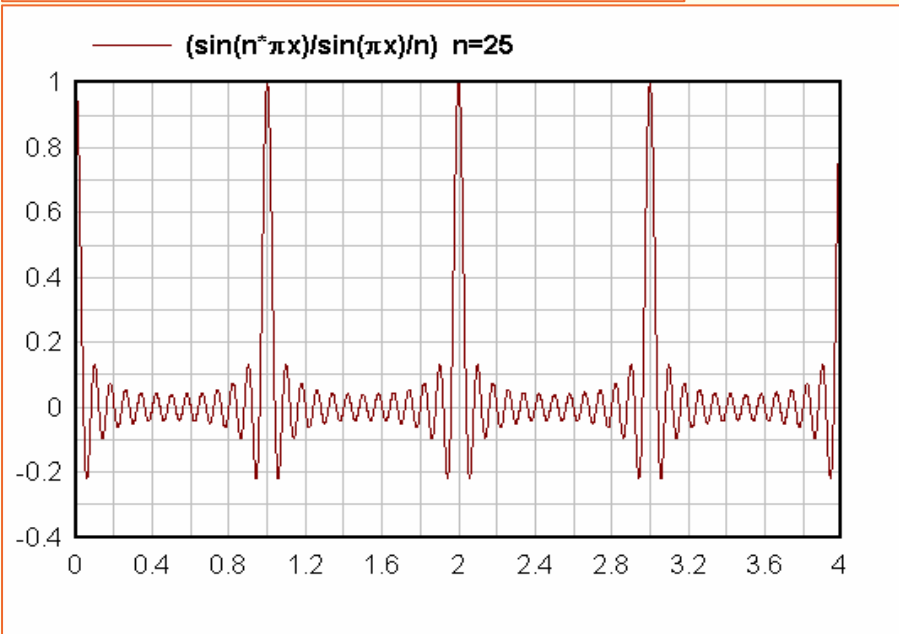
Problème de calcul numérique : il faut échantillonner  $\nu$  dans  $X(\nu)$

# Exemple

- Calcul analytique pour une porte de  $2N+1$  points de  $-N$  à  $N$



$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-N}^N x(n\tau) e^{-2j\pi\nu n\tau} = \sum_{k=-N}^N e^{-2j\pi k\nu} \\ &= e^{2j\pi N\nu} \left( 1 + e^{-2j\pi\nu} + e^{-4j\pi\nu} + \dots + e^{-2j\pi(2N+1)\nu} \right) \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi\nu}{\sin \pi\nu} \end{aligned}$$



- structure périodique
- période  $\eta = 1/\tau$
- symétrie par rapport à  $\eta/2$



# Transformée discrète

- Une réponse à l'évaluation numérique de la TFTD

- Signal temporel  $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$   $\implies \tau = 1$

- TF  $X(v) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi v n} \implies \text{Periode} = 1$

- Echantillonnage de  $v$  sur  $L$  valeurs de 0 à  $L-1$  :  $v_k = k/L$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/L}$$

- On choisit  $L = N$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{2j\pi/N}$$

- Pour ces fréquences la TFD = TF d'une fonction à bande limitée

# Transformée discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{2j\pi/N}$$

- $W^{kn}$  : matrice hermitienne  $\rightarrow W^{-1} = W^{*\top}$  (à  $1/N$  près)
- Donc on a la transformée inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X(k) e^{-2j\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

- Normalement calcul avec  $N^2$  opérations arithmétiques
  - mais algorithme de la FFT en  $N \log N$
  - Transforme  $N$  données  $x(t_k)$  en  $N$  valeurs de  $X(v_k)$ 
    - $v$  de  $0$  à  $1/2\tau$  pour les signaux réels

# Sommaire des TF

Définition mathématique

Signal continu



$$X(f) = \int x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int X(f) e^{2j\pi f t} df$$

Définition mathématique

Signal discret



$$X(f) = \sum x(t_k) e^{-2j\pi f t_k}$$

$$x(t_k) = \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} X(f) e^{2j\pi f t_k} df$$

Transformée discrète

Signal discret

Echantillonnage en fréquences

Calcul avec FFT



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2j\pi kn/N}$$

# Périodogramme

- Décomposition d'un signal sur un signal périodique de référence



$$x(t) := \alpha + \beta e^{2j\pi\nu t}$$

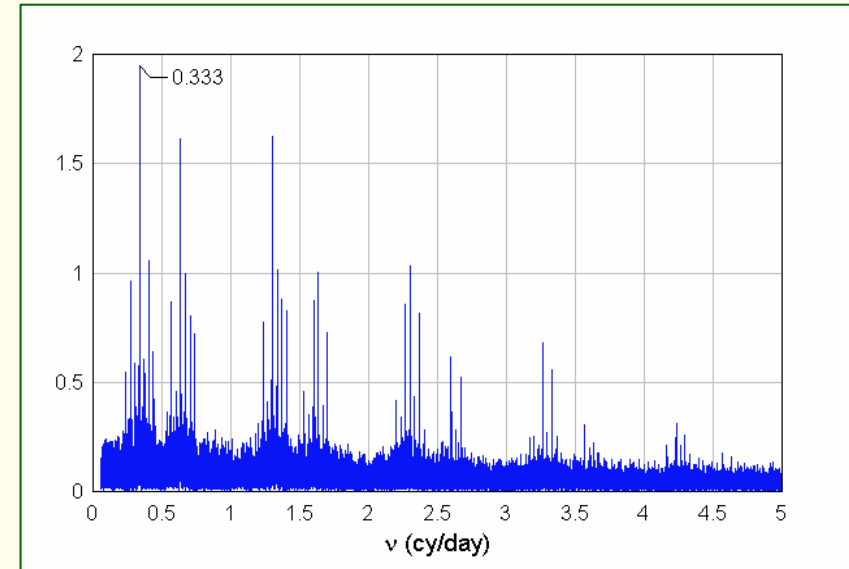
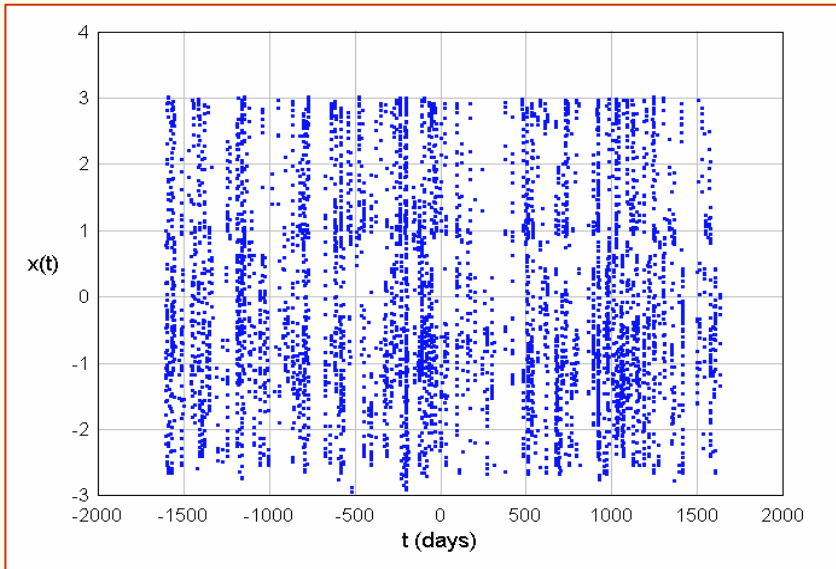
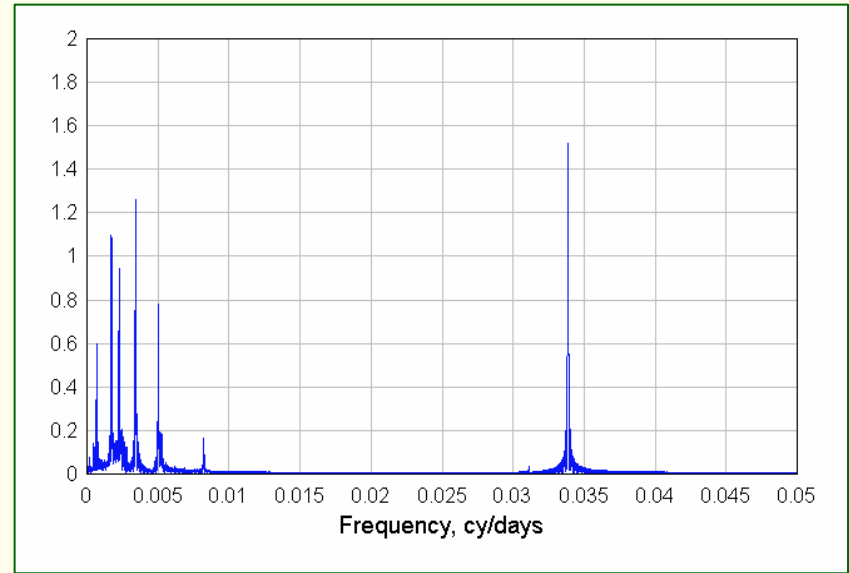
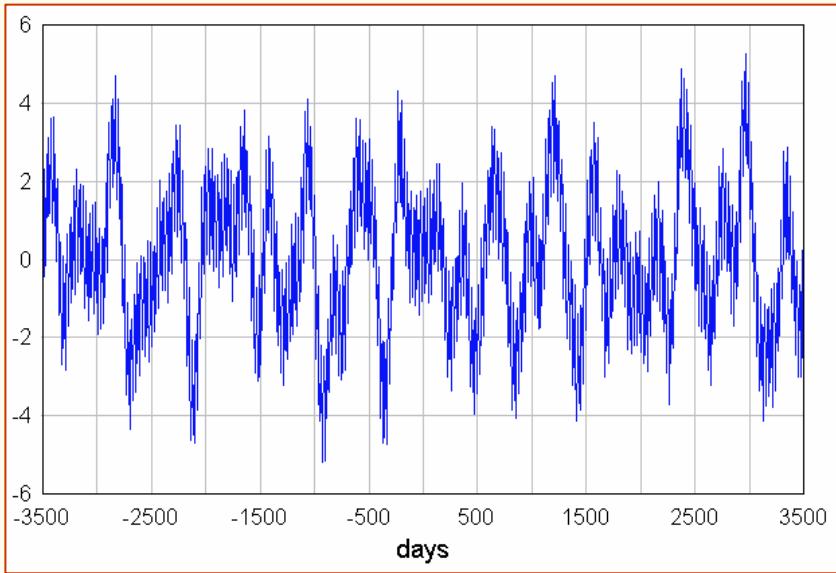
$$x(t) := a_\nu + b_\nu \cos 2\pi\nu t + c_\nu \sin 2\pi\nu t = \phi_\nu(t)$$

- Pour chaque fréquence on calcule la puissance  $P(\nu)$

$$P(\nu) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \phi_\nu^2(t_k) \quad [\text{en général } \neq b_\nu^2 + c_\nu^2]$$

- Le périodogramme sera la représentation de  $[P(\nu)]^{1/2}$
- Calcul pratique : ajustement de moindres carrés de  $x(t)$  sur  $\phi_\nu(t)$ 
  - doit être très optimisé → calcul sur des milliers de fréquences

# Exemples



- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

# Usage de la FFT

- Nombreuses implémentations disponibles
  - routines dans toutes les bibliothèques de programmation
  - fonction disponible dans les applications PC ou station
    - Matlab, Scilab, Maple, logiciels graphiques
- Les contraintes
  - fichier de données sous forme d'un vecteur  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  - le temps peut être utilisé, mais en général non
    - FFT échantillonne le temps selon  $1, 2, \dots, N$
  - demande ou ne demande pas  $N = 2^k$
  - complète ou non avec des zéros au plus petit  $2^k > N$ 
    - cela ne change pas la fréquence de Nyquist
    - mais cela influe sur la normalisation

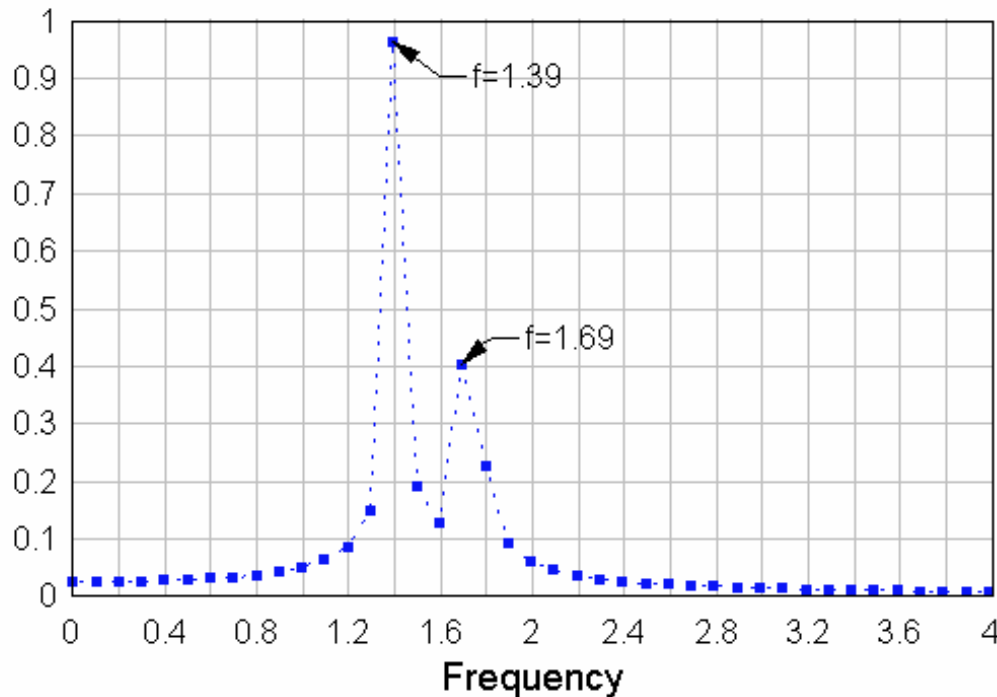
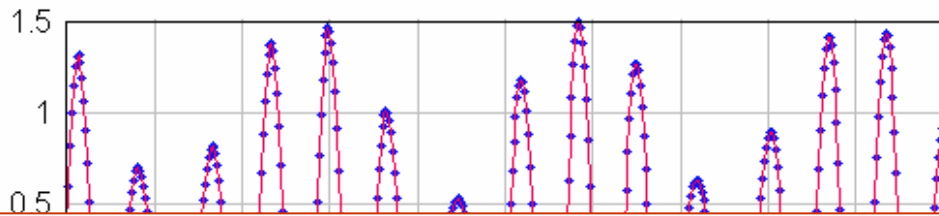
# Usage de la FFT

- Les problèmes
  - sortie d'un fichier FFT sans échelle des fréquences  $\nu$ 
    - il y a  $N$  (ou  $N/2$ ) valeurs de  $0$  à  $1/\tau$  ( $1/2\tau$ ) et faire  $\nu = k/(N\tau) = k/T$
  - sortie avec une échelle de fréquence
    - soit de  $1$  à  $n$ ,  $1$  à  $n/2$ ,  $0$  à  $1$  avec  $N$  valeurs
    - soit avec la bonne échelle si le vecteur temps est utilisé
  - diverses normalisations de l'amplitude
    - $1, 1/N, 2/N \dots \rightarrow$  interprétation difficile
- Test de l'échantillonnage régulier ?
  - seulement si le vecteur temps est demandé
    - sinon par hypothèse  $t = 0:1:N$
  - mais attention aux troncatures des fichiers ascii !
    - gare aux changements d'échelles
      - pas (*steps*) de calcul réguliers en jours et output en années



# Exemples

$$x(t) = a_1 \sin 2\pi f_1 t + a_2 \sin (2\pi f_2 t + \pi / 4)$$



## Domaine temporel

$$a_1 = 1.0 \quad a_2 = 0.5$$

$$f_1 = 1.414 \quad f_2 = 1.732$$

$$\eta = 1/\tau = 50 \quad (\sim 30 \text{ pts/période})$$

$$t = 0..1.0 \text{ soit } 500 \text{ points}$$

## Domaine fréquentiel

$$f_{\max} = 25$$

$$\rho = 1/T = 0.1 \quad (\text{échantillonnage en } f)$$

largeur des lobes  $\sim \rho$

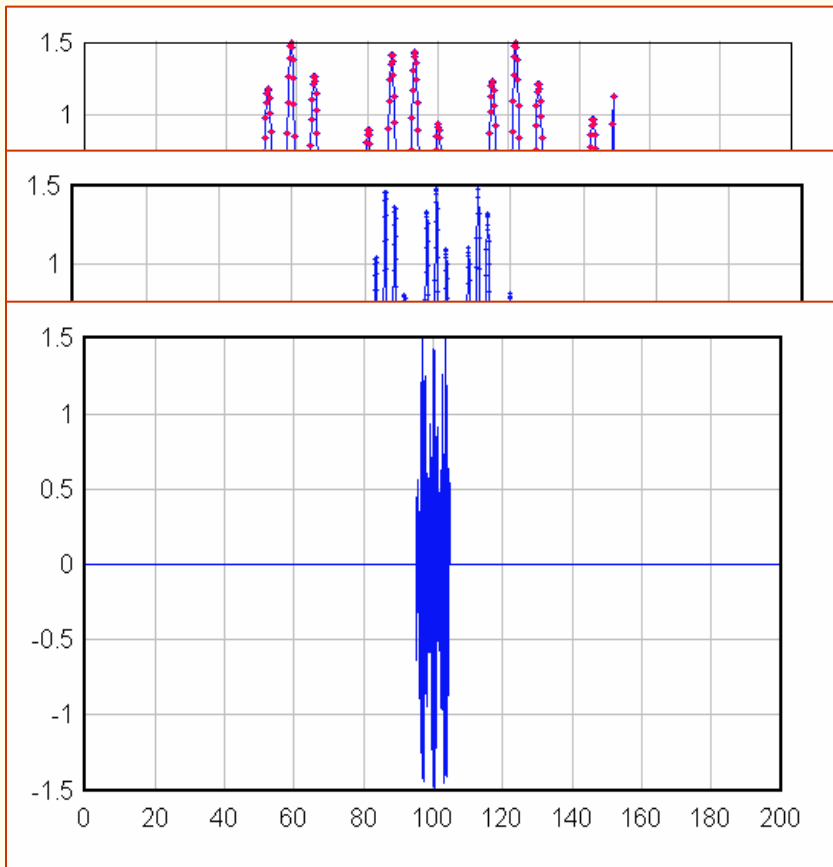
$$f = 0..25 \text{ soit } 250 \text{ points}$$

## Problèmes

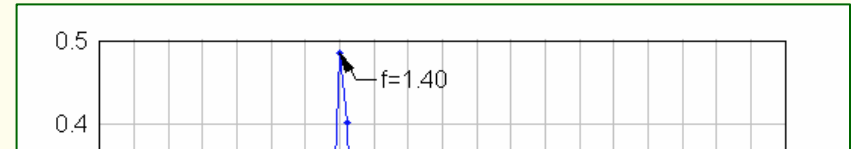
- fréquence des lignes  $\rightarrow$  résolution
- amplitude des lignes

# 'Zero-Padding'

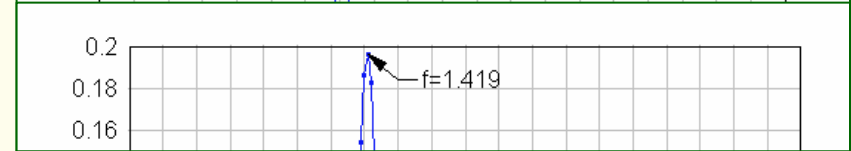
- Solution pour calculer une TFTD avec une FFT
  - on borde le signal réel avec des zéros sur une longue durée
- On peut ainsi améliorer l'échantillonnage en fréquence
  - on change la précision, pas la résolution !



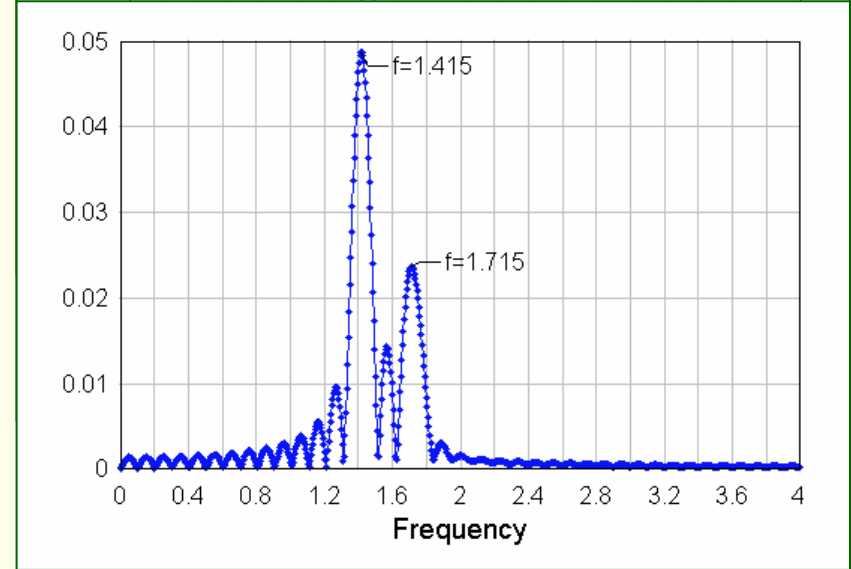
$r=2$



$r=5$

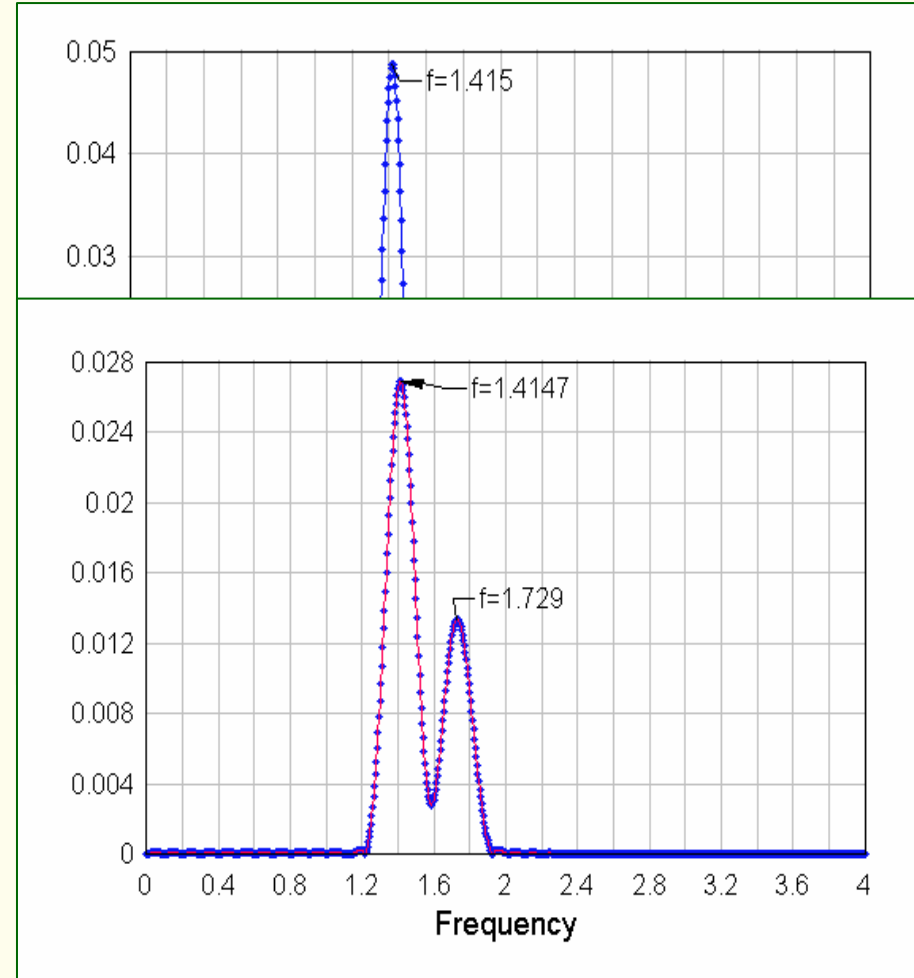
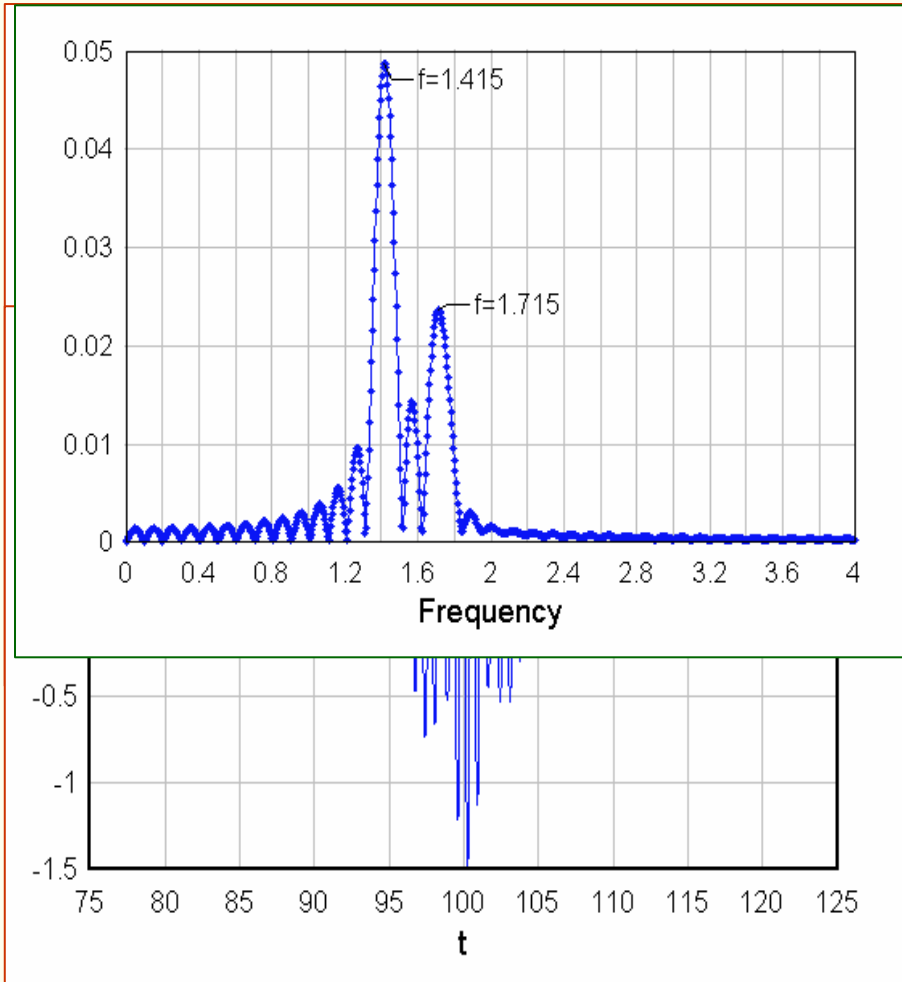


$r=20$



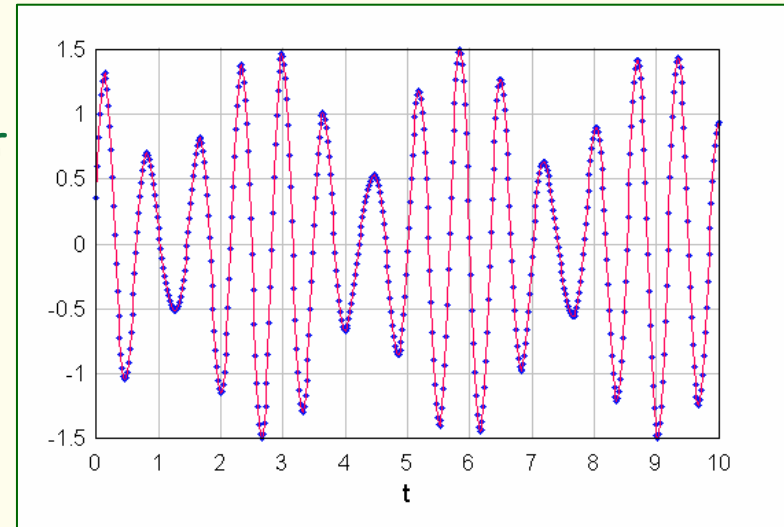
# Fenêtre de Hamming

- Atténuation des lobes secondaires
  - fenêtre de Hamming :  $0.54 - 0.46\cos(2\pi t/T)$



# Pour se mettre en appétit :

- Résolution par une analyse en fréquence
  - solution parfaite pour un signal sans bruit
  - précision machine atteinte
- Inconnues :
  - nombre de fréquences
  - fréquences et amplitudes

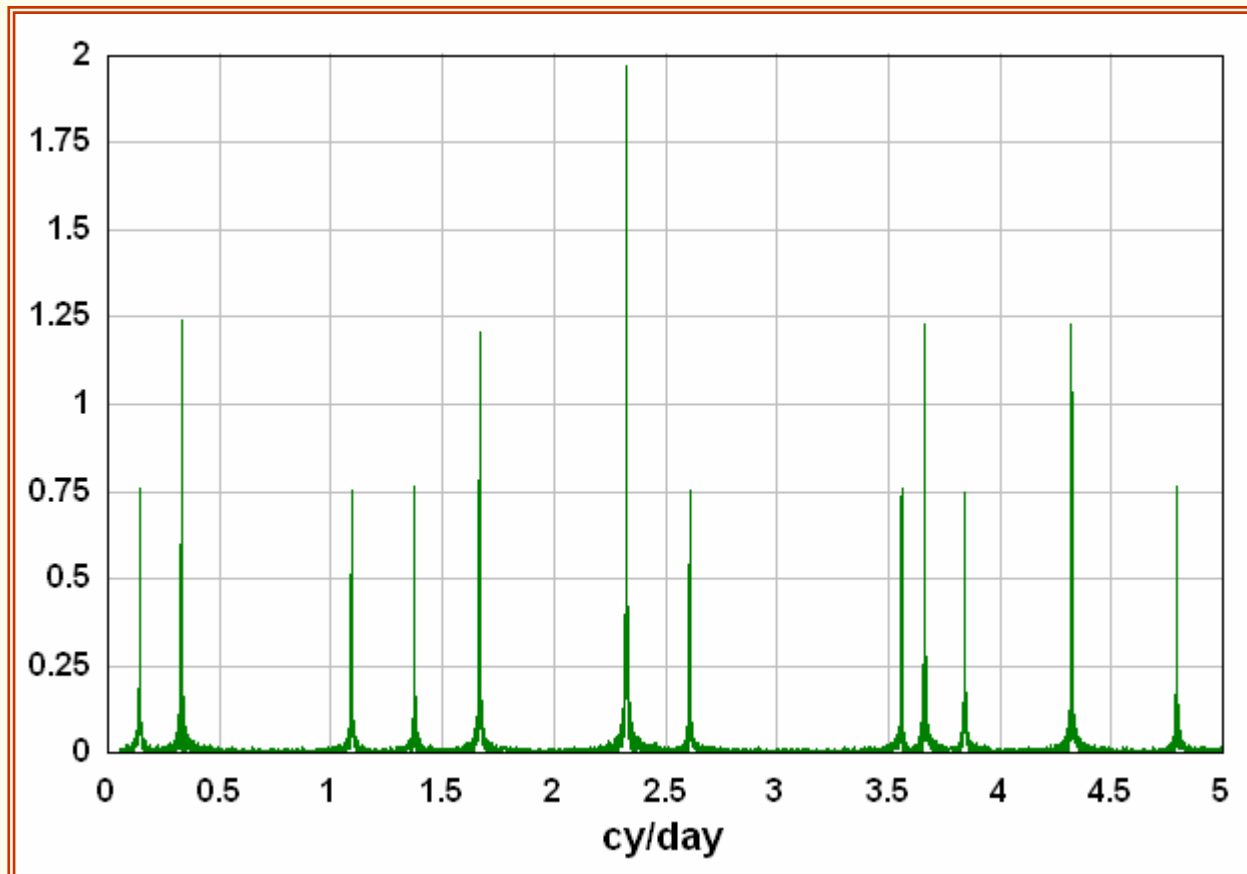


	Frequency	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N
0 $t^0$	0.00000000E+00		5.082557E-16	
1 $t^0$	1.41400000E+00	9.888E-18	1.000000E+00	9.13E+02
2 $t^0$	1.73200000E+00	1.646E-17	5.000000E-01	1.78E+15

*'N' est très mal défini*

- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

# Réplication (= aliasing)



# Répliques

- Raies significatives à une mauvaise fréquence
  - elles correspondent à de véritables composantes
  - leur fréquence est totalement fausse en général
- Origine : spectre d'un signal échantillonné
  - le spectre est périodique et à bande limitée
  - Les raies de basses fréquences sont répliquées aux hautes fréquences
- Rapport étroit avec l'apparition de raies supplémentaires venant de la fenêtre d'observation

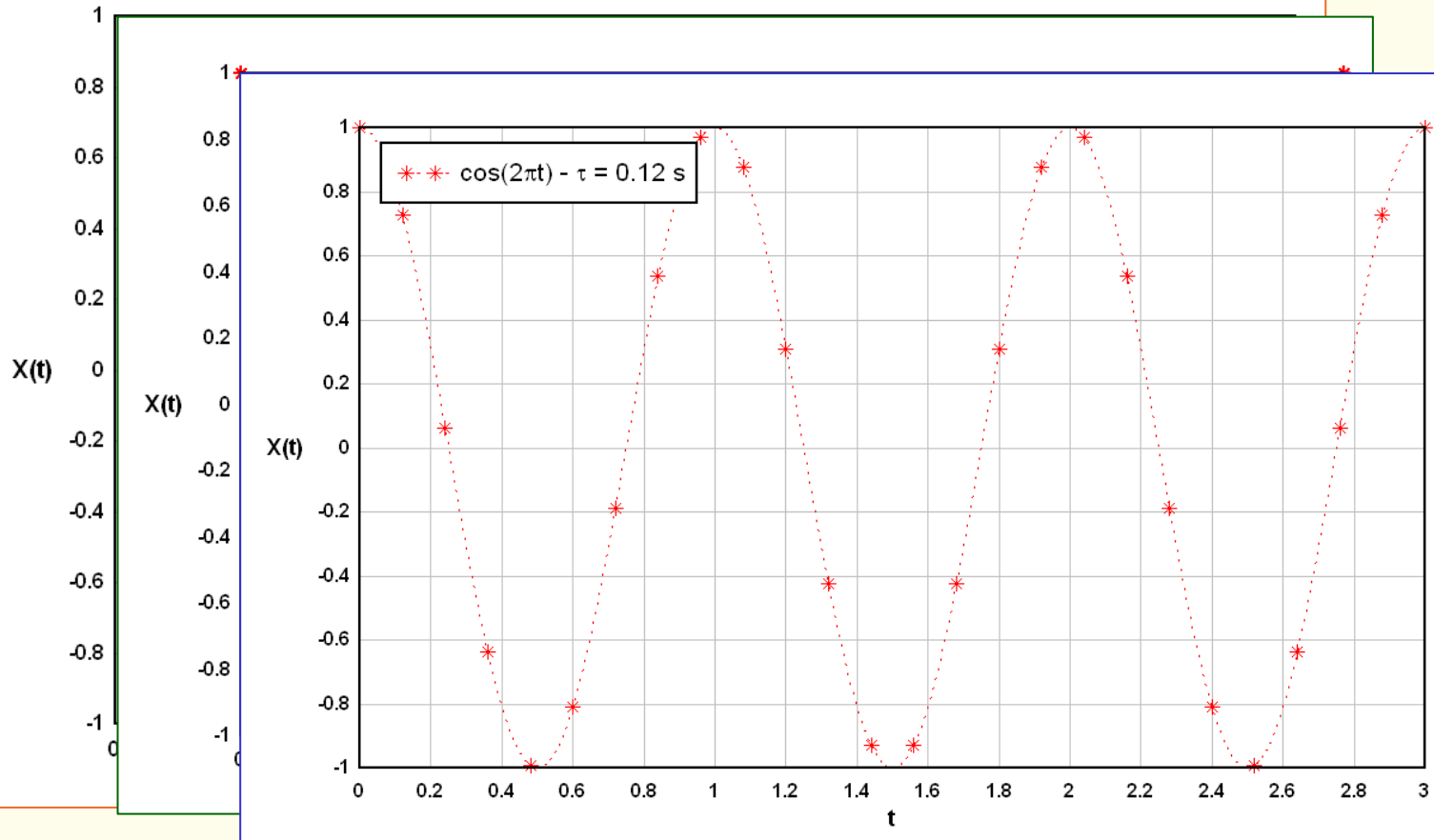
# Formulation du problème

- L'effet réplique est bien connu en analyse fréquentielle
  - toujours présent dans les échantillonnages réguliers
  - beaucoup plus difficile à caractériser dans les autres cas
    - très lié aux 'irrégularités régulières' et aux effets d'agrégats de données
  - totalement absent avec un échantillonnage aléatoire
- Les répliques limitent le domaine de fréquence utile
  - Echant. régulier :  $\nu_{\max} = 1/2\tau \rightarrow$  Fréquence de Nyquist
- Constatation : avec échant. irrégulier  $\rightarrow$  obtention de fréquences élevées possible
  - règles empiriques pour généraliser la notion de Fréquence de Nyquist :
    - inverse de l'intervalle le plus petit
    - inverse de l'intervalle moyen
    - pas de limite
  - paramètre essentiel pour conduire une exploitation avec sûreté



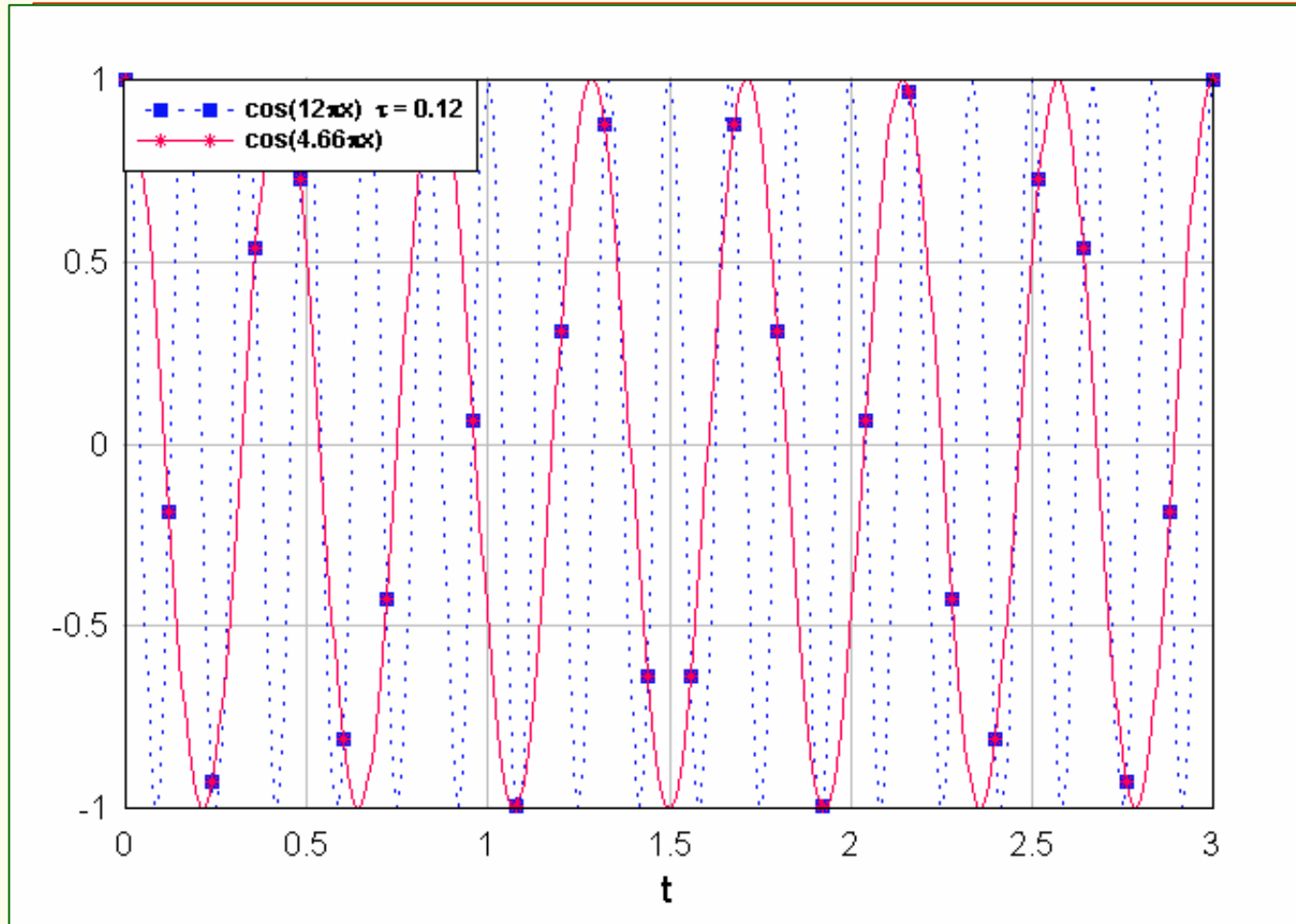
# Signal harmonique simple

- Visualisation de l'échantillonnage



Le signal (sans bruit) peut être reconstruit à partir des mesures  
- solution pour la fréquence et l'amplitude

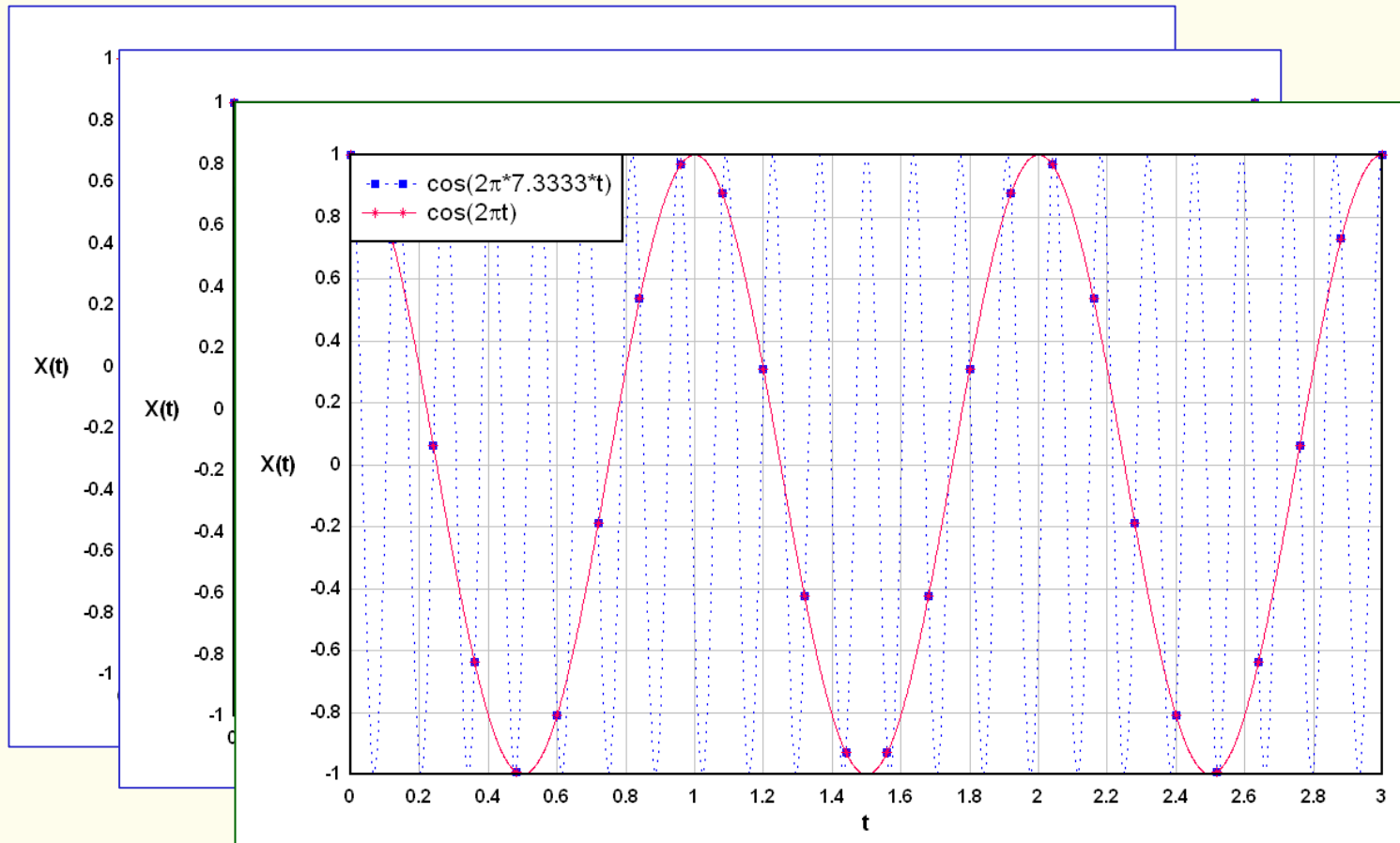
# Répliques : HF vers BF



- Intuitivement il y a trop peu de mesures pour retrouver le signal
- Y a-t-il un (ou plus) signal de basse fréquence qui passe par les points ?

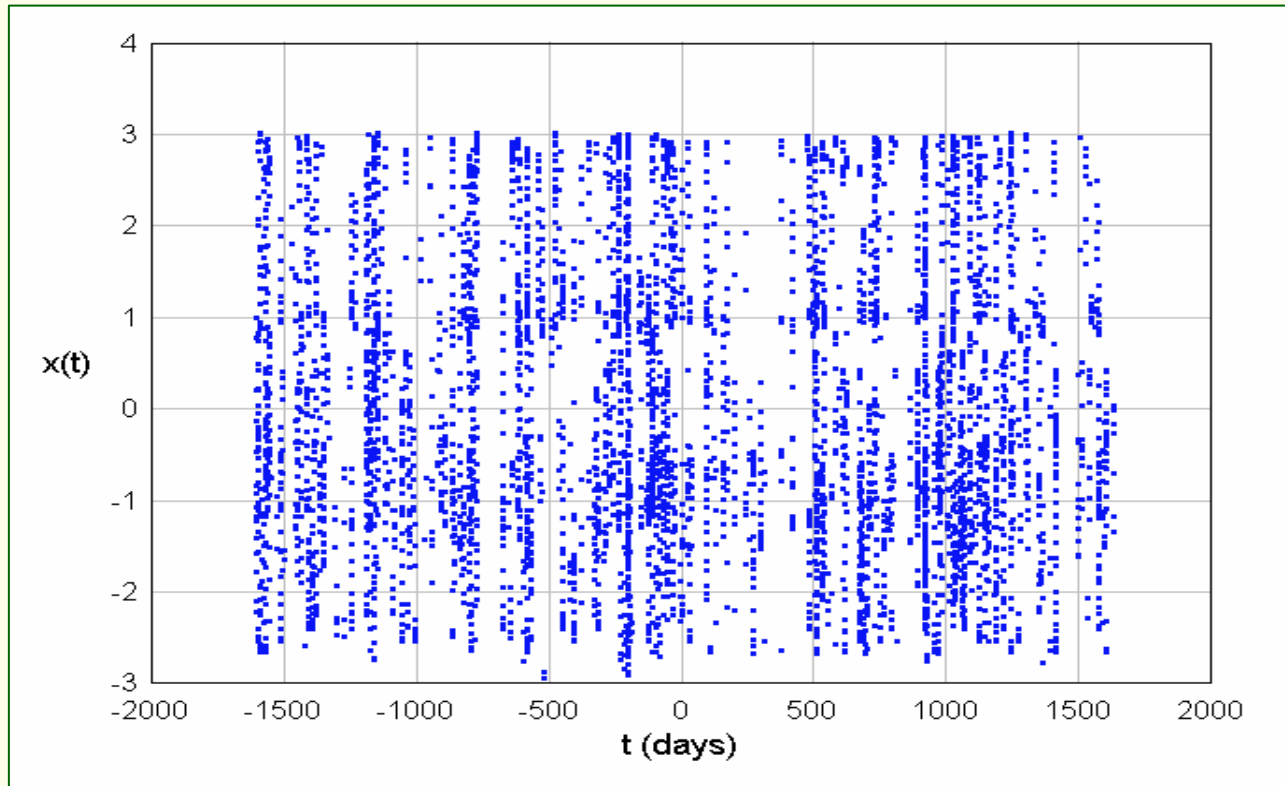
# Répliques : BF vers HF

- Raies significatives à une mauvaise fréquence
  - elles correspondent à de véritables composantes



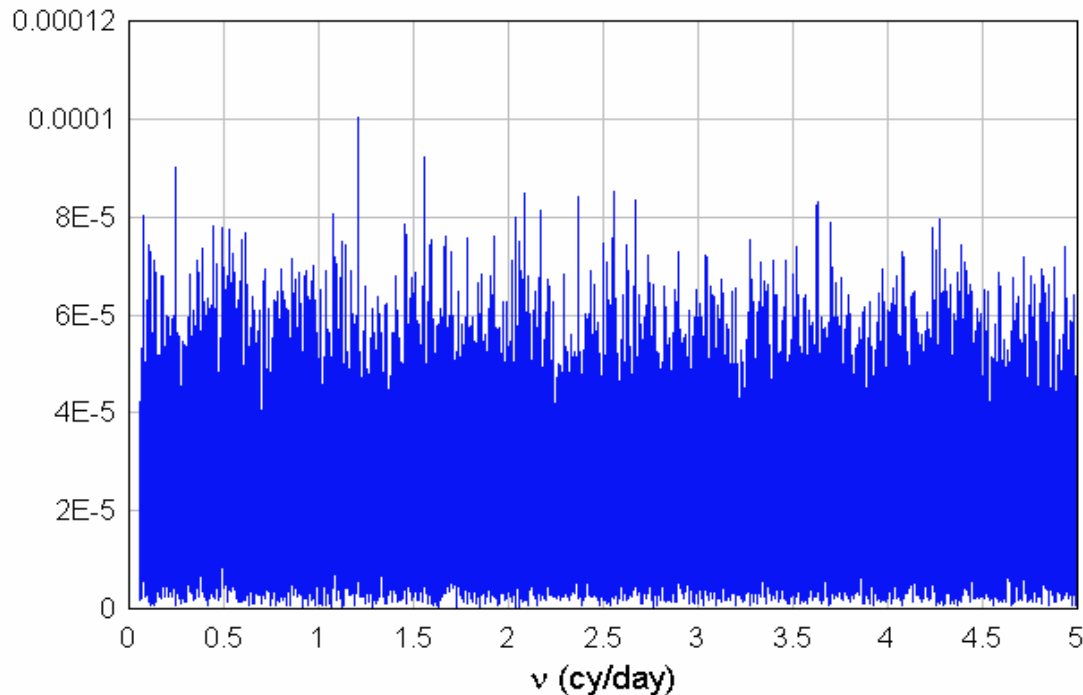
# Fenêtre spectrale d'observation

- Signaux simples sur la fenêtre temporelle du Laser Lune
  - 5000 dates d'observations sur 10 ans
  - intervalles allant de qq minutes à plusieurs mois
  - régularités sous-jacentes : jours, semaine, mois lunaire, saisons



# Fenêtre Laser Lune

- $x(t) = 2 \cdot \cos(2\pi t/T) + N(\sigma=0.001)$   $T = 3$  jours  $\nu = 0.3333$
- Etude de la puissance spectrale.



- trace de réplique avec  $\eta \sim 1$
- effet régulier de 1 jour

Le spectre doit se répéter :

$$\nu = 0.33, 1.33, 2.33 \dots$$

et

$$\nu = 0.66, 1.66, 2.66 \dots$$

Répétition approximative en amplitude : on retrouve la ligne majeure  
Toutes les autres lignes sont artificielles y compris le 'fond'  
→ preuve sur la figure suivante (spectre du signal - la ligne trouvée)

# Mélange des spectres

- $x(t) = a_1 \cos(2\pi t/T_1) + a_2 \cos(2\pi t/T_2)$ 
  - $a_1 = 2$   $T_1 = 2.5$  jours  $v_1 = 0.4$
  - $a_2 = 1$   $T_2 = 0.555$  jours  $v_2 = 1.8$
- $t_k$  avec la fenêtre laser-lune

Le spectre doit se répéter :

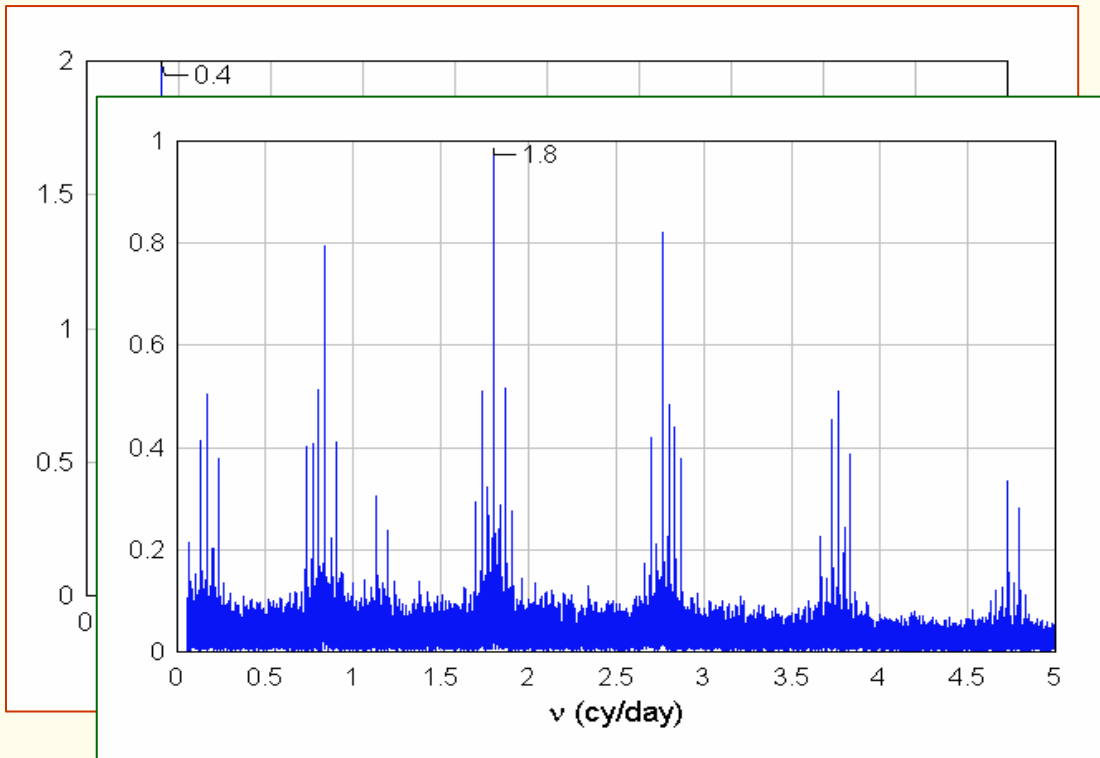
$$v = 0.4, 1.4, 2.4 \dots, 0.6, 1.6, 2.6 \dots$$

et

$$v = 0.8, 1.8, 2.8 \dots 0.2, 1.2, 2.2$$

# Mélange des spectres

- Les spectres sont relativement séparés
- les lignes majeures ont les bonnes amplitudes

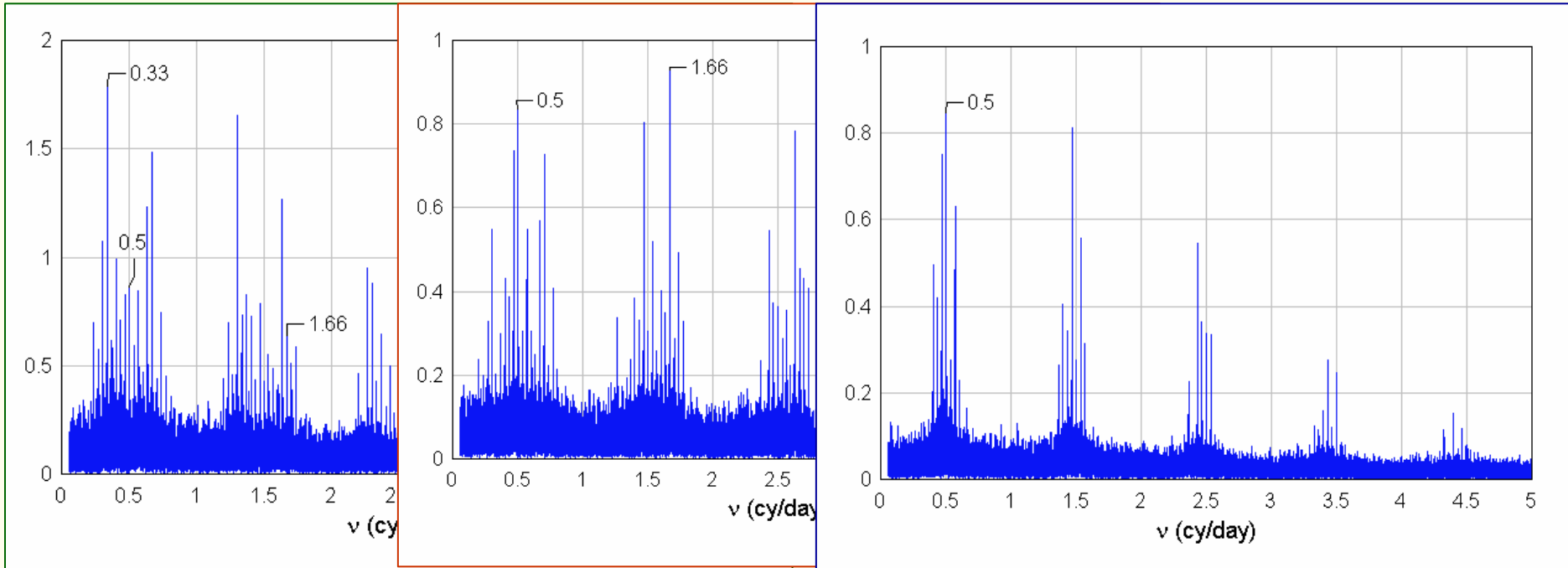


- On identifie et enlève la ligne  $\nu = 0.4$

	Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N	
1	$t^0$	4.00000001E-01	2.49999999E+00	4.295E-09	2.000013E+00	4.43E+01
2	$t^0$	1.80018002E+00	5.55500001E-01	1.864E-09	1.000022E+00	3.20E+04
3	$t^0$	1.20407976E+00	8.30509768E-01	2.896E-05	9.741412E-05	3.16E+00

# Mélanges des spectres

- Trois lignes dans le signal 3, 0.6, 2 jours ( $\alpha = 2, 1, 0.7$ ) [ $\nu = 0.33, 1.66, 0.5$ ]
- Les spectres se recouvrent,
- Les amplitudes sont incertaines



	Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N	
1	$t^0$	3.33333334E-01	2.99999999E+00	5.054E-09	1.999986E+00	2.98E+01
2	$t^0$	1.66666667E+00	6.00000000E-01	2.101E-09	1.000027E+00	2.50E+01
3	$t^0$	5.00000016E-01	1.99999994E+00	1.418E-08	7.000089E-01	2.79E+04
4	$t^0$	1.20408133E+00	8.30508685E-01	2.958E-05	9.609074E-05	3.14E+00



# Un peu de théorie

# Répliques avec échantillonnage régulier

Signal:  $x(t)$  défini dans le domaine temporel

mesures :  $x(t_k) = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$

Spectre :  $X(\nu)$  défini dans le domaine des fréquences

Puissance:  $P(\nu)$  " " "

Analyse en fréquence : projection de  $X(t)$  sur un espace de fonctions

$$X(\nu) = \Re(X, e^{2j\pi\nu t}) \text{ avec } \Re \text{ opérateur linéaire et } P(\nu) = (XX)^{1/2}$$

Exemples: *TF, projection sur un base, LSQR*

Echantillonnage régulier :  $t_{k+1} - t_k = \tau \quad \forall k \quad \Rightarrow t_k = t_0 + k\tau$

Echantillonnage quelconque :  $t_k - t_{k-1} = \tau_k$

# Répliques avec échantillonnage régulier

$$t_k = t_0 + k\tau \quad \Rightarrow \quad e^{2i\pi\nu t} = e^{2j\pi\nu t_0} \cdot e^{2j\pi\nu k\tau}$$

soit  $\nu \rightarrow \nu + m/\tau$ :

$$e^{2j\pi(\nu+m/\tau)k\tau} = e^{2j\pi km} \cdot e^{2j\pi\nu k\tau} = e^{2j\pi\nu k\tau} \quad \forall m \in \mathbf{Z}$$

donc avec  $\eta = 1/\tau$  on a  $\forall \nu$  :

$$X(\nu + \eta) = X(\nu) ; \quad P(\nu + \eta) = P(\nu)$$

$$X(\nu + k\eta) = X(\nu) ; \quad P(\nu + k\eta) = P(\nu) , \quad k \in \mathbf{Z}$$

Attention : propriété due à l'échantillonnage régulier

mais :  $P(\nu) = P(-\nu) \Rightarrow \quad P(\nu) = P(\eta - \nu) \quad : \text{symétrie en } \eta/2$

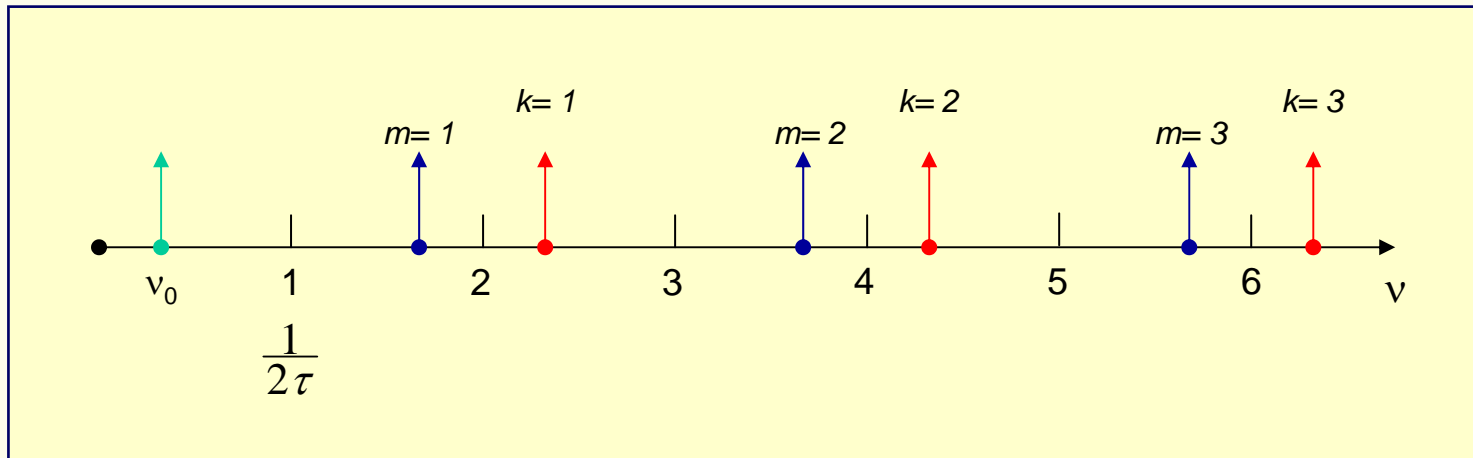
$$\frac{1}{2\tau} = \frac{\eta}{2} : \text{Fréquence de Nyquist}$$

# Structure des répliques en fréquence

- Une ligne spectrale sur  $0 < \nu < \eta/2$  a une double infinité d'images :

$$\nu_+ = \nu + k\eta, \quad k = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

$$\nu_- = -\nu + m\eta, \quad m = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

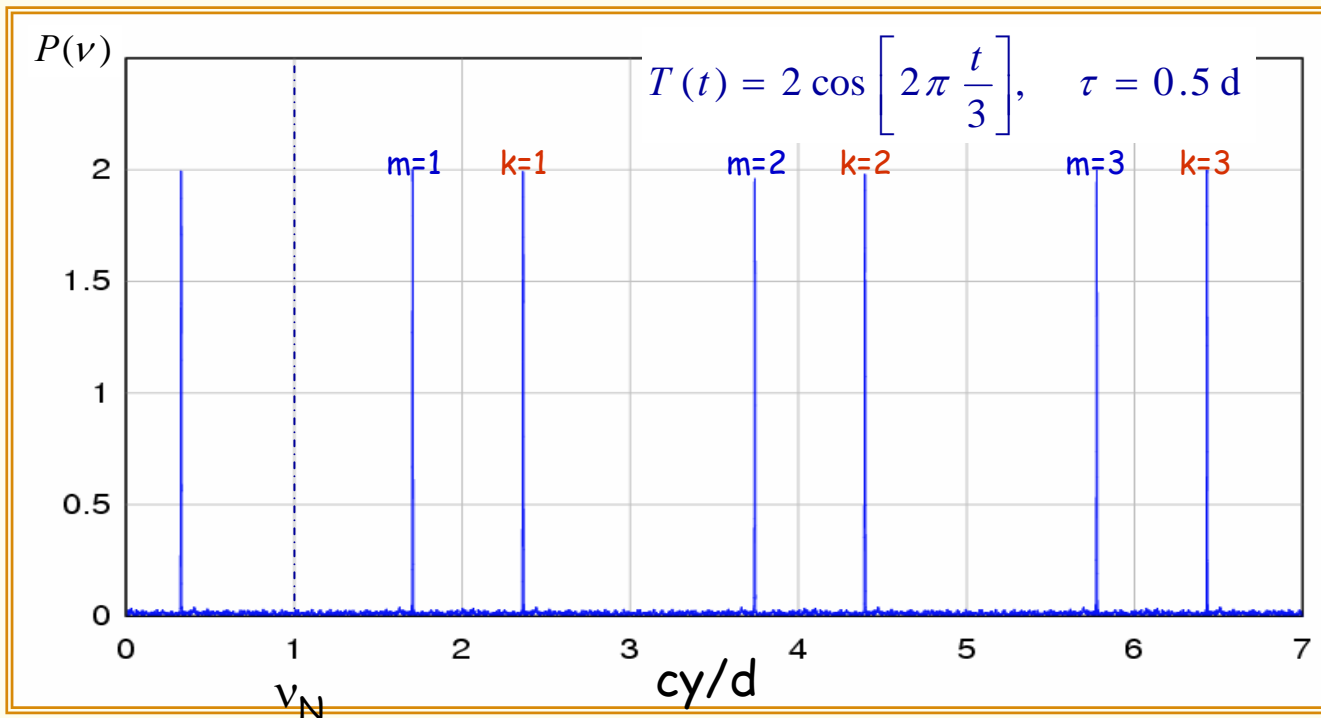


- Conséquence usuelle :
  - Dans une série temporelle régulière on ne peut récupérer une ligne de fréquence  $\nu > 1/2\tau$  !
- Meilleure formulation :
  - Dans une série temporelle régulière on peut récupérer sans ambiguïté toute ligne dans un intervalle de fréquences de longueur  $1/2\tau$  (e.g  $1/\tau : 3/2\tau$ )

# Exemple

- En général on se limite à  $0 < \nu < \eta/2$  qui contient toute l'information fréquentielle.
  - Mais une fréquence élevée peut se trouver imagée dans cet intervalle

Périodogramme avec 1000 mesures,  $\nu = 1/3$  et  $\tau = 0.5$  d ;  $\eta/2 = 1$  cy/d



$$\nu_+ = \nu + k\eta$$

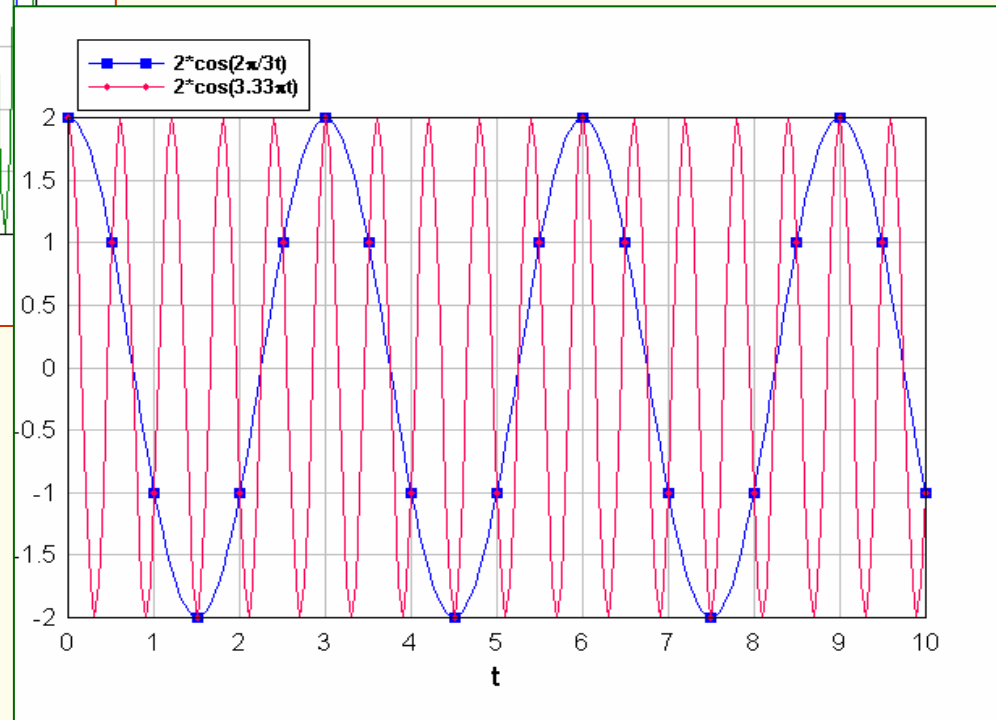
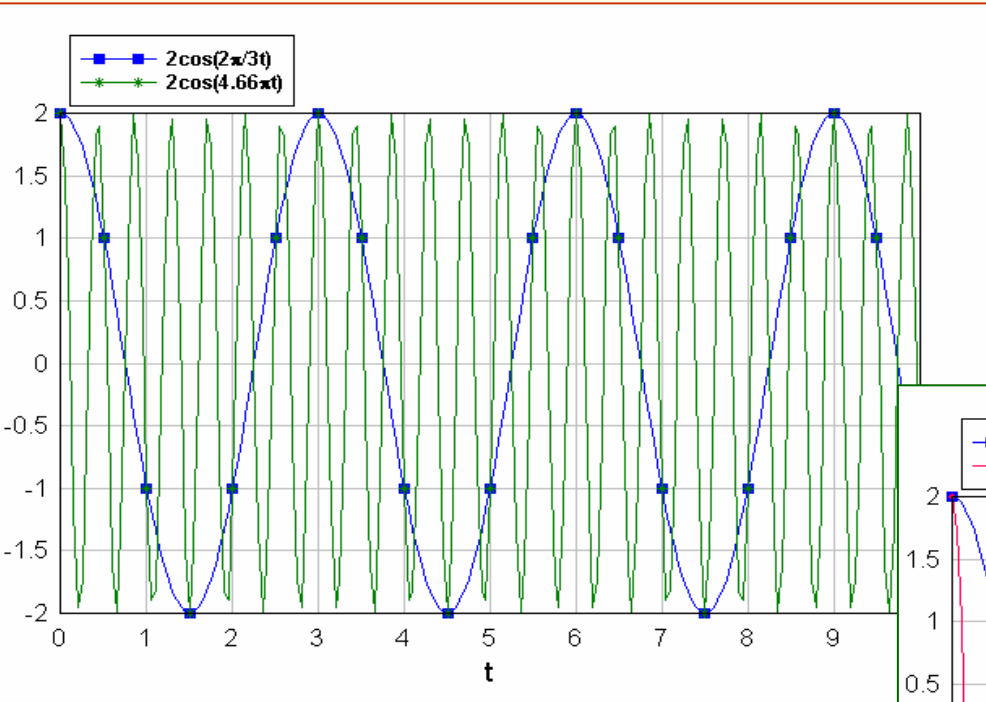
$$\nu_- = -\nu + m\eta$$

$$\nu_+ = 0.33 + 2k : \{ 0.33, 2.33, 4.33 \dots \} \quad \nu_- = -0.33 + 2m : \{ 1.67, 3.67, 5.67 \dots \}$$

# Origine des répliques

$$v_+ = 0.33 + 2k : \{ 0.33, 2.33, 4.33 \dots \}$$

$$v_- = -0.33 + 2m : \{ 1.67, 3.67, 5.67 \dots \}$$



# Cas général

- Echantillonnage arbitraire :  $t_1, t_2, \dots, t_n$  with  $t_{k+1} - t_k = \tau_k$
- la réplique apparaît si  $P(\nu)$  est périodique.
- Avec la linéarité on a :  $P(\nu) = \sum \alpha_k e^{-2j\pi\nu t_k}$
- Périodicité si :  $\exists \eta / 2\pi\nu t_k = 2\pi(\nu + \eta)t_k + \phi \quad \forall k$   
avec  $\eta$  et  $\phi$  indépendants de  $k$

$$\eta\tau_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

Systeme de n-1 équations à résoudre en  $\eta$

Pas de solution en général  $\rightarrow$  pas de répliques

# Cas particuliers

- Echantillonnage régulier :  $\tau_k = \tau \rightarrow \eta\tau \equiv 0 \pmod{1} \rightarrow \eta = 1/\tau$  (or  $m/\tau$ )
- Echant. pseudo régulier :  $\tau_k = p_k\tau$  ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$

-les  $\tau_k$  sont des multiples d'un même élément (et donc de ses diviseurs)

-ex : observations à 12h tous les jours ... de ciel clair !

- parmi les possibilités l'un est le plus grand  $\tau \rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = 1$

[un autre  $\tau' < \tau$  est un diviseur de  $\tau$ , donc les  $p'_i$  sont des multiples des  $p_i$  et ont un diviseur commun d]

$$\eta\tau p_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

- système invariant par changement d'unité de temps. On prend  $\tau = 1$  ou de façon équivalente, la véritable inconnue est  $\eta\tau = \sigma$



# Cas particuliers

$$\sigma p_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

Pour  $k$  donné on a les solutions :  $\sigma = \frac{m}{p_k}, \quad m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sigma \in \mathbf{Q}$

Solution générale :

$$\sigma = \frac{r}{s} \quad \text{avec} \quad (r, s) = 1 \Rightarrow s \mid p_k \forall k \Rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \neq 1$$

Donc  $s=1$  et la plus petite solution est  $r=1$  :

$$\sigma = 1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{\tau}$$

Remarque :  $\tau$  peut être « que le plus petit intervalle et donc  $\eta$  sera très élevé

• Echant. pseudo irrégulier :

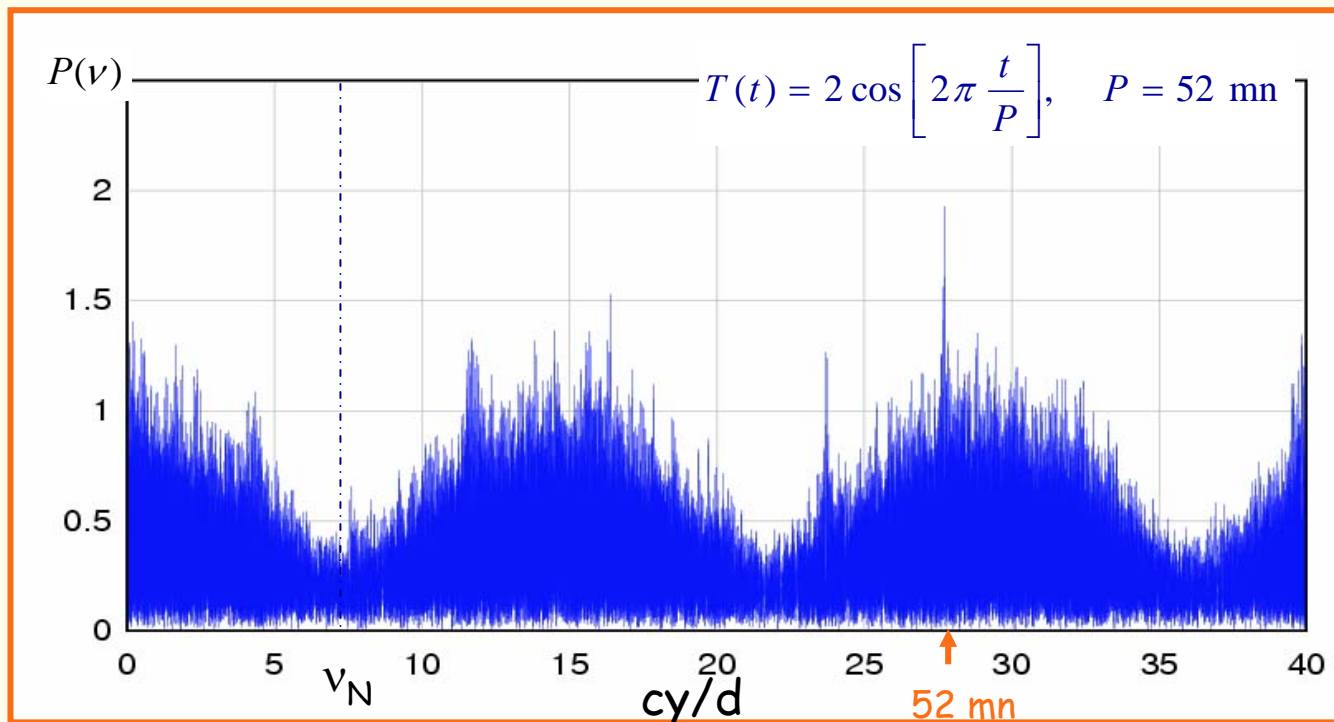
• approximation diophantienne  $q\tau_k/\tau_m \approx p_k \rightarrow \eta \approx q/\tau_m$

# Conséquences

- Fréquence maximum que l'on peut extraire d'un signal
  - Echant. régulier =  $\eta/2 = 1/2\tau \sim$  inverse du pas de mesure
- Pour un échantillonnage général diverses règles proposées
  - $1/\tau_{\min}, 1/\langle\tau\rangle, \dots$
- Pour le mathématicien : pas de réplique
  - pas de limitation sur la fréquence max
- En pratique c'est la notion d'irrégularité qui est difficile
  - régulier + une observation manquée ?
  - intervalle moyen bien défini ou non avec une distribution uniforme
  - distribution pas paquets avec de larges lacunes (astro, géophysique)
- Il faut essayer de mieux caractériser la distribution des  $t_k$

# Exemple : échantillonnage de Gaia

- Exploitation des données photométriques
  - études des étoiles variables
  - recherche de périodes
- Plus petit intervalle entre deux mesures :  $t = 100 \text{ mn}$   $\rightarrow v_N \sim 7.2 \text{ cy/d}$ 
  - pas de réplique visible à plus haute fréquence
  - des variables de très courtes périodes pourront être étudiées



- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

# FAMOUS

## Frequency Analysis Mapping On Unusual Samplings

- analyse en fréquence
- description de FAMOUS
- illustrations et performances

# Analyse en fréquence

- Méthode pour analyser les signaux quasi-périodiques

$$s(t) = \sum_k a'_k e^{2\pi j\nu'_k t}$$

- Il est possible de trouver une approximation quasi-périodique de  $s(t)$  sur  $[0, T]$  bien plus précise que par l'analyse de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=0}^{k=N} a_k e^{2\pi j\nu_k t}$$

- Les fréquences  $\nu_k$  et les amplitudes complexes  $a_k$  sont déterminées par l'algorithme
- La méthode est très utilisée pour les systèmes dynamiques pour représenter les résultats d'une intégration numérique.
  - par construction échantillonnage régulier en  $t$
- FAMOUS étend le principe aux séries temporelles observationnelles

# FAMOUS : Présentation

- FAMOUS réalise la décomposition d'une série temporelle :

$$\phi(t) = c_0 + \sum c_k \cos(2\pi\nu_k t) + s_k \sin(2\pi\nu_k t), \quad k = 1, \dots, n$$

- $c_k$  et  $s_k$  sont des constantes ou des polynomes du temps
- On résoud également pour les fréquences  $\nu_k$
- Les lignes spectrales sont orthogonales par rapport aux  $\tau_k$  (aussi bien que possible)
- FAMOUS n'utilise jamais la FFT
- Il fonctionne sur tout type d'échantillonnage
- Un système interne détermine le meilleur échantillonnage en fréquences
- Il détecte les distributions régulières → calculs optimisés
- Il a un mode spécial pour les signaux périodiques  $\nu_k = k\nu_1$
- Il estime la précision et le niveau de signification de chaque ligne
- Plusieurs modes de sortie pour examen détaillé des résultats

# Modèle de décomposition

Avec  $k$  fréquences identifiées on a le modèle :

$$\psi(t) = c_0 + \sum_1^k c_i \cos(2\pi \nu_i^0 t) + s_i \sin(2\pi \nu_i^0 t)$$

où

$c_0, c_1, \dots, c_k$  et  $s_0, s_1, \dots, s_k$  sont :

constantes ou des polynômes du temps :

$$C_i = a_i^0 + a_i^1 t + a_i^2 t^2 + \dots + a_i^p t^p$$

$$S_i = b_i^0 + b_i^1 t + b_i^2 t^2 + \dots + b_i^p t^p$$

avec  $p = p(i)$  : degré sélectionnable pour chaque ligne

Pour  $i = 0$  c'est donc un ajustement des très basses fréquences sur un polynôme → théories planétaires à variation séculaire.



# Solution avec k fréquences

Lorsque k fréquences ont été trouvées on ajuste le modèle par MC non-linéaire :

$$(a_i^r, b_i^r, \nu_i) :: \text{least - squares fit} \Rightarrow \min |S(t) - \psi(t)|^2$$

Cette étape est très sensible aux conditions initiales

On résoud en deux temps :

- SVD avec  $\nu_i = \nu_i^0$  and
- Optimisation de Levenberg-Marquardt avec toutes les inconnues

Résultat : meilleure décomposition de  $S(t)$  sur le modèle à k fréquences

Les fréquences sont donc réajustées à chaque étape

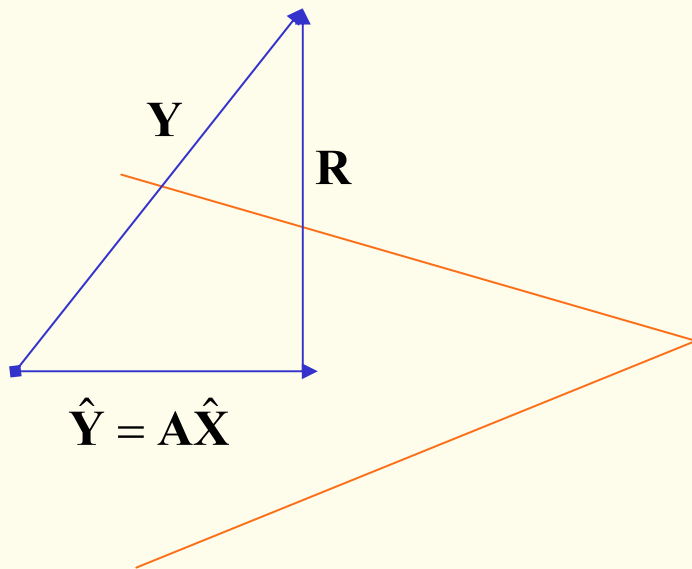
Étape suivante : recherche de la k+1 fréquence

# Orthogonalité de la $(k+1)^e$ fréquence

Avec la solution par moindres carrés :

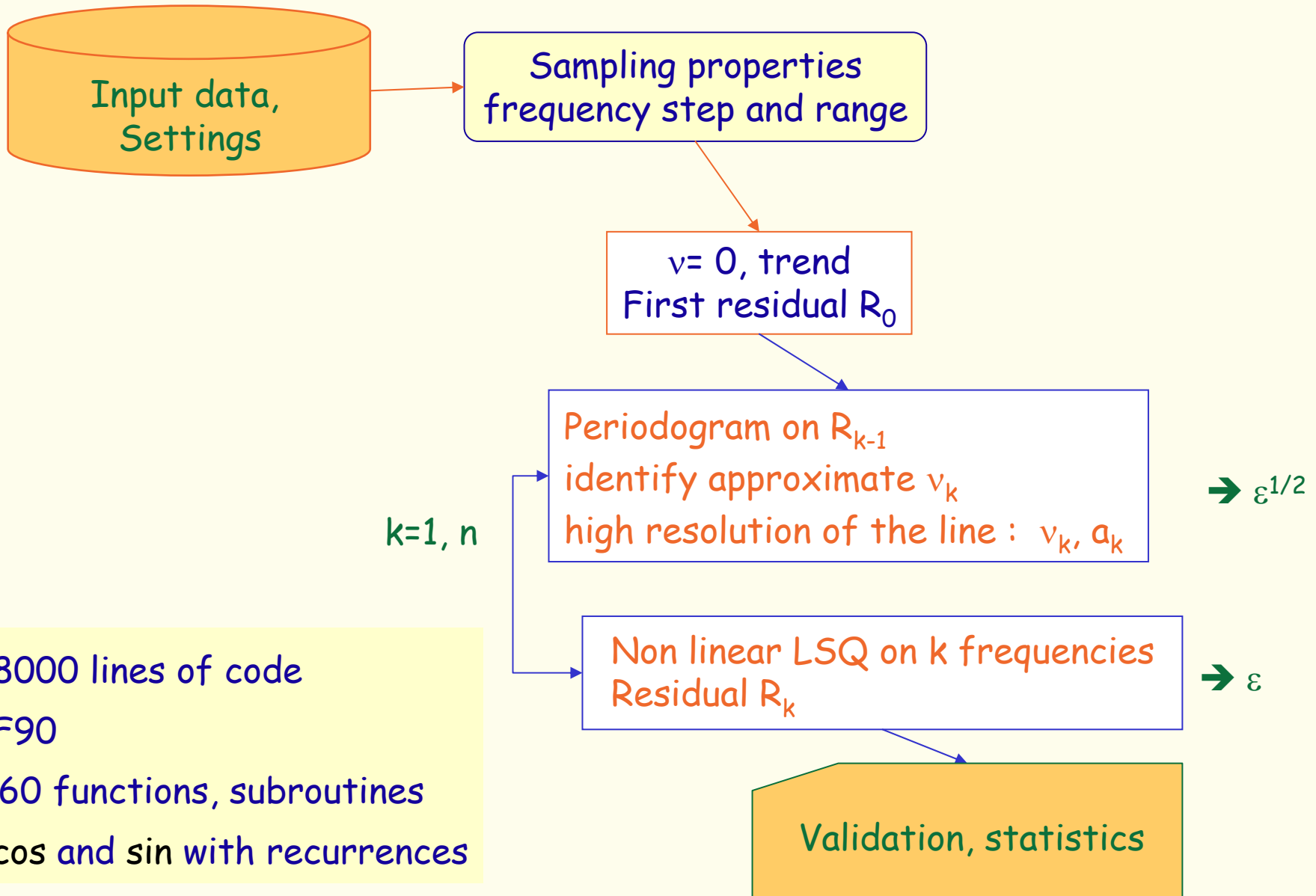
$$\mathbf{Y} \prec \mathbf{AX} :: \text{MC ajuste } \hat{\mathbf{X}} \Rightarrow \min |\mathbf{Y} - \mathbf{AX}|^2$$

Propriété caractéristique :  $\mathbf{R} = (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}) \perp \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$



Une nouvelle ligne trouvée dans les résidus est orthogonale à l'espace linéaire du modèle précédent

# Etapes de l'algorithme FAMOUS



- 8000 lines of code
- F90
- ~ 60 functions, subroutines
- cos and sin with recurrences

# Settings of FAMOUS

- **file\_in** Input filename with the data  $y(x)$  as  $xx, yy$  on each record
- **icolx** index of the column with the time data in **file\_in**
- **icoly** index of the column with the observations in **file\_in**
- **file\_out** output filename
- **numfreq** search of at most **numfreq** lines
- **flmulti** multiperiodic (true) or periodic (false) search in the signal.
- **flauto** automatic search (true) or preset value (false) of the max and min frequencies
- **frbeg** preset min frequency in preset mode
- **frend** preset max frequency in preset mode
- **fltime** automatic determination (true) or preset value (false) of the time offset
- **tzero** preset value of the origin of time if **fltime** = .false. e
- **threshold** threshold in S/N to reject non significant lines ( $<$  threshold)
- **flplot** flag for the auxiliary files ( power spectrum and remaining signal after **k** lines )
- **isprint** control of printouts (0 : limited to results, 1 : short report, 2 : detailed report)
- **iresid** control the output of the residuals
- **fldunif** flag for the degree of the mixed terms (true : uniform degree for all terms)
- **idunif** degree if **fldunif** = .true.
- **idegf(k)** degree of each line if **fldunif** = .false. ,  $k=0, numfreq$

# Paramètres fondamentaux

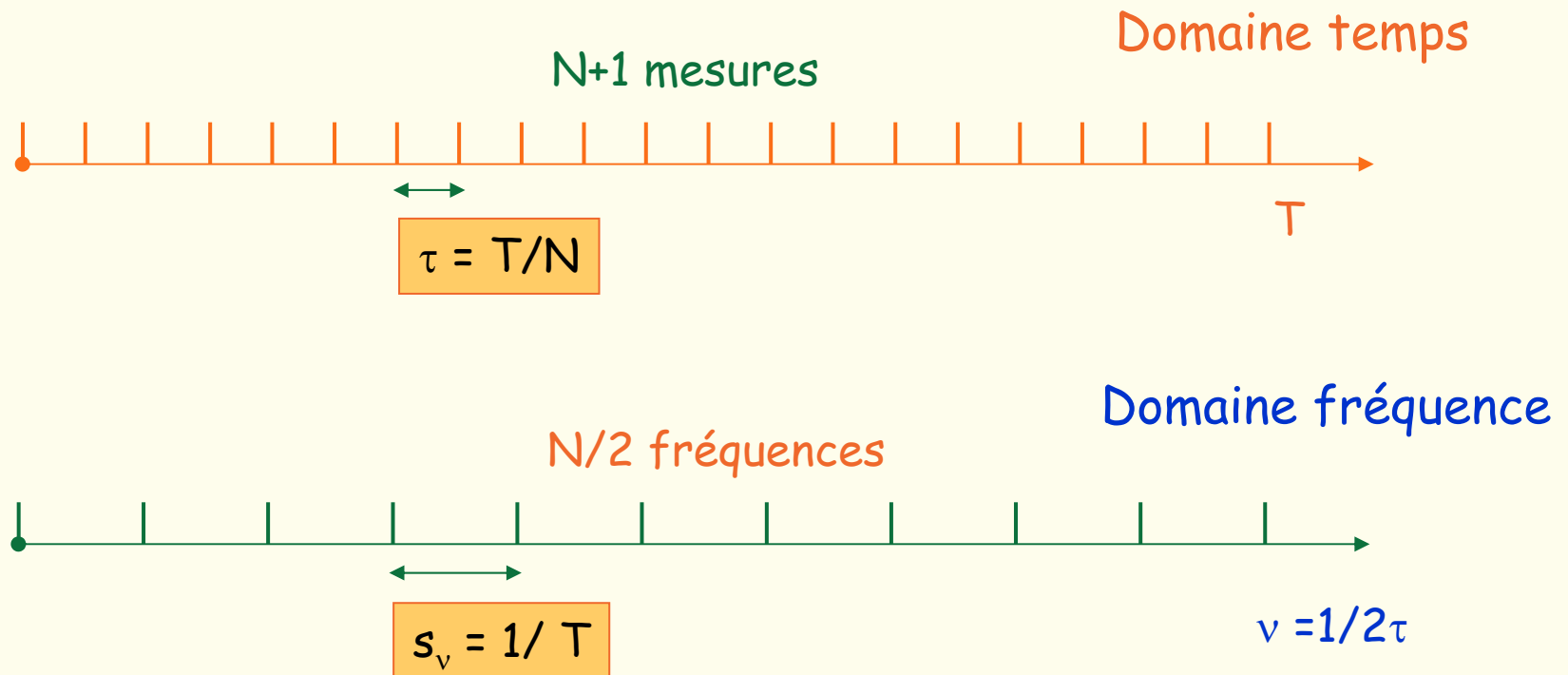
- Pas du calcul dans le domaine fréquentiel
  - comment trouver la valeur optimale
    - il faut avoir la résolution pour trouver toutes les lignes
      - l'utilisateur peut aussi souhaiter un sur-échantillonnage
    - limiter la quantité de calculs
  - échantillonnage uniforme en  $v \rightarrow$  les phases sont en progression arithmétique à  $t$  donné.
    - calcul des lignes trigonométriques par récurrence
- FAMOUS doit avoir un système interne automatique
  - recherche empirique de la bonne résolution

# Paramètres fondamentaux

- Domaine d'exploration des fréquences
  - question très difficile → avis de l'utilisateur d'un grand secours
  - explorer des hautes fréquences est très pénalisant en terme de calcul
  - règle simple pour l'échantillonnage uniforme en temps
  - rien de naturel pour les intervalles irréguliers
  - quelques règles pratiques bien utiles mais de portée limitée basées sur :
    - la moyenne du pas temporel
    - le plus petit pas dans le domaine temporel
    - la distribution des intervalles  $t_1 - t_m$

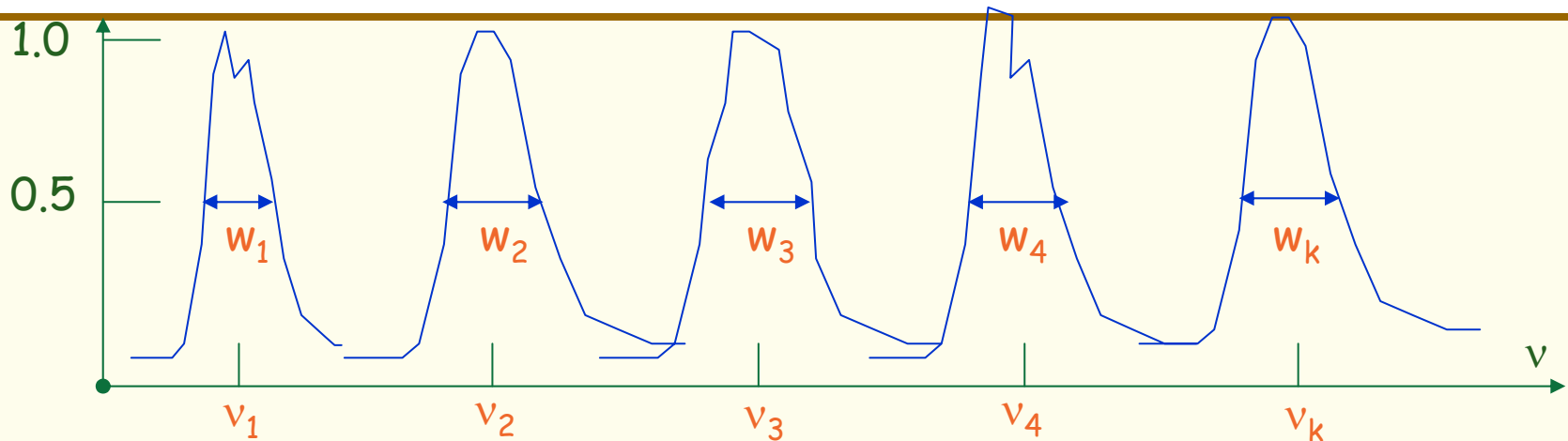
# Pas en fréquence

- Pour la FFT avec pas régulier en temps :  $N+1$  points sur  $T \rightarrow s_v = 1/T$



- TFD avec échantillon régulier : plus de liberté pour  $s_v$  mais moins d'efficacité

# Méthode empirique



- On détermine les lobes à haute résolution pour  $\sim 15$  fréquences
- Fréquences bien réparties dans le domaine d'intérêt
  - Réponse du système à :  $s(t) = \cos(2\pi v t)$ ,  $v = v_1, v_2, \dots, v_k$  in  $v_{\min} \dots v_{\max}$
- Statistique des  $k$  largeurs à mi-hauteur
  - $k = 1$  pour  $\tau$  uniforme (tous les lobes sont identiques)
  - $k \sim 15$  pour le cas irrégulier
- Nombreuses protections pour les lignes à forme anormale
- Puis on prend  $s_v \sim \langle w \rangle / 6$  soit 6 points par lobe.
- Résolution suffisante pour avoir toute les lignes



# Plus grande fréquence résoluble

- Le problème le plus ennuyeux rencontré durant le développement
- Très lié à la généralisation de la fréquence de Nyquist
- Solution bien comprise pour les échantillons réguliers
  - $v_{\max} = \text{Nyquist}$  ou un multiple
- Pas de solution générale dans les autres cas
  - inverse de l'intervalle le plus petit, moyen, médian ...
- Solution pratique adoptée dans FAMOUS :
  - soit :
    - $v_{\max}$  fournie par l'utilisateur → solution la meilleure
  - sinon : recherche d'un pas temporel représentatif
    - statistique des intervalles à deux points
    - puis  $\tau \sim 2^{\text{ème}} \text{ décile}$  et  $v_{\max} = 1/2\tau$

# Performances

# La simulation

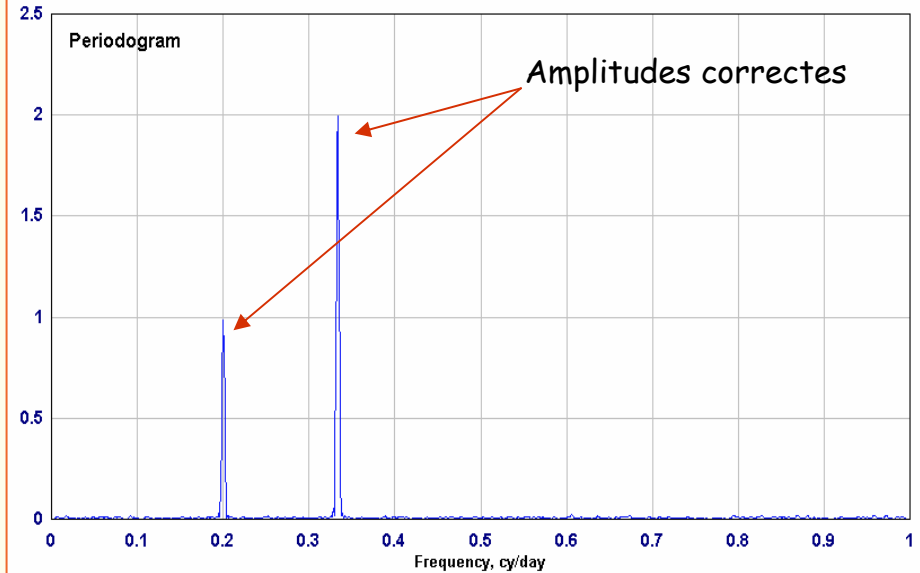
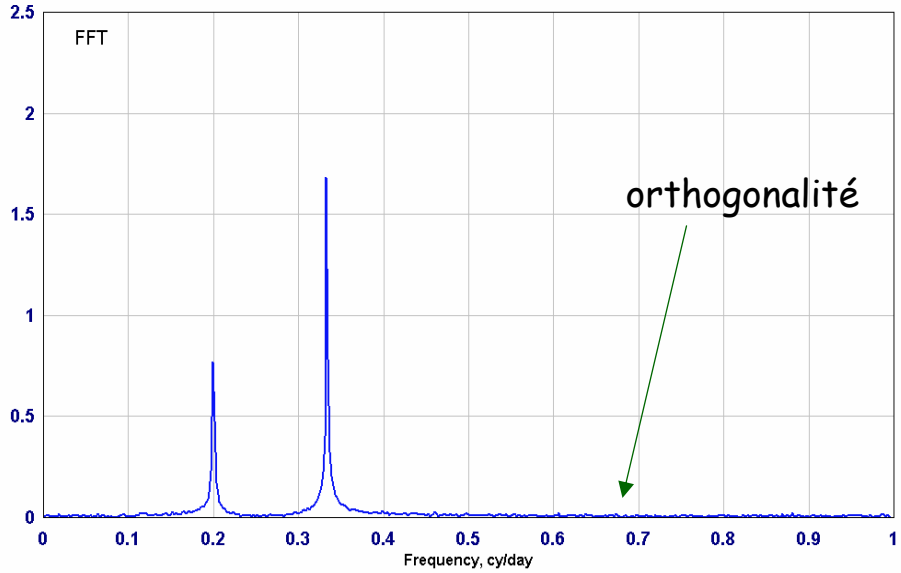
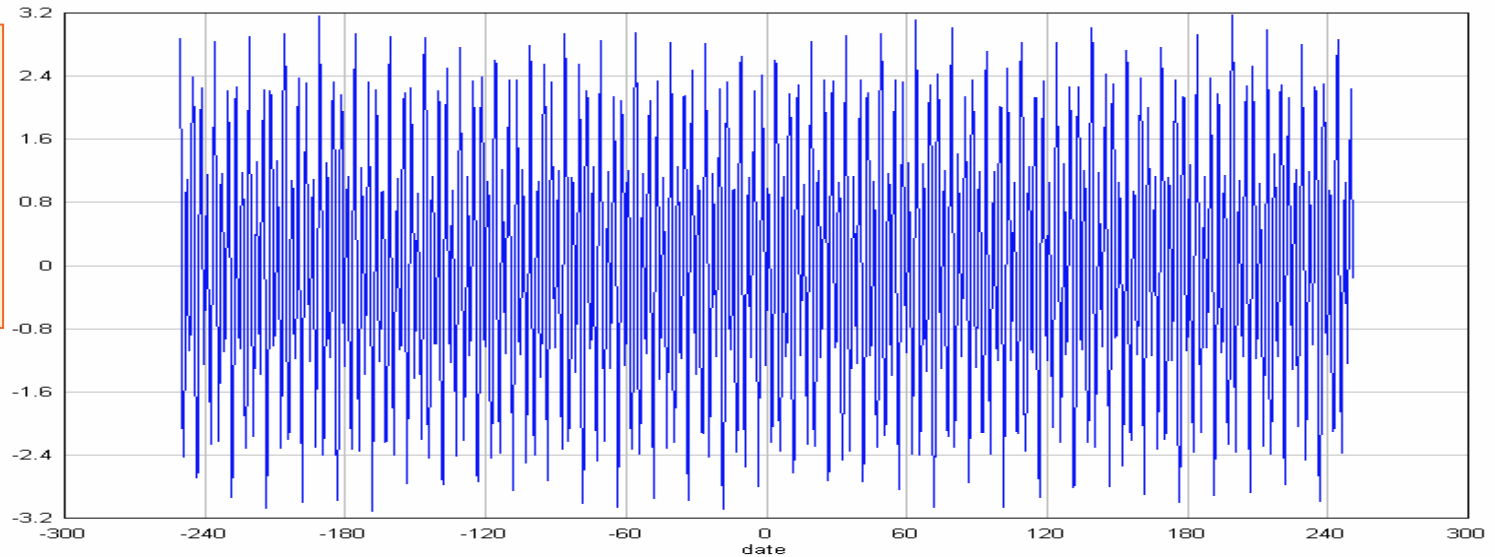
- Le mode simulateur génère des signaux périodiques ou multi-périodiques
- L'échantillonnage peut être périodique, semi-régulier, aléatoire..

$$x(t_k) = 2 \cos 2\pi \frac{t_k}{p_1} + \cos 2\pi \frac{t_k}{p_2}$$

- Bruit gaussien avec  $\sigma = 0.1$
- $n = 1000$  points
  - $P = 3, 5, \dots$  jours
  - $T = 500$  jours
  - $\tau = 0.5$  jour (si régulier)
  - $1/\tau = 2$  cy/jour
  - $N_y = 1/2\tau = 1$  cy/jour

# Exemple : cas d'école

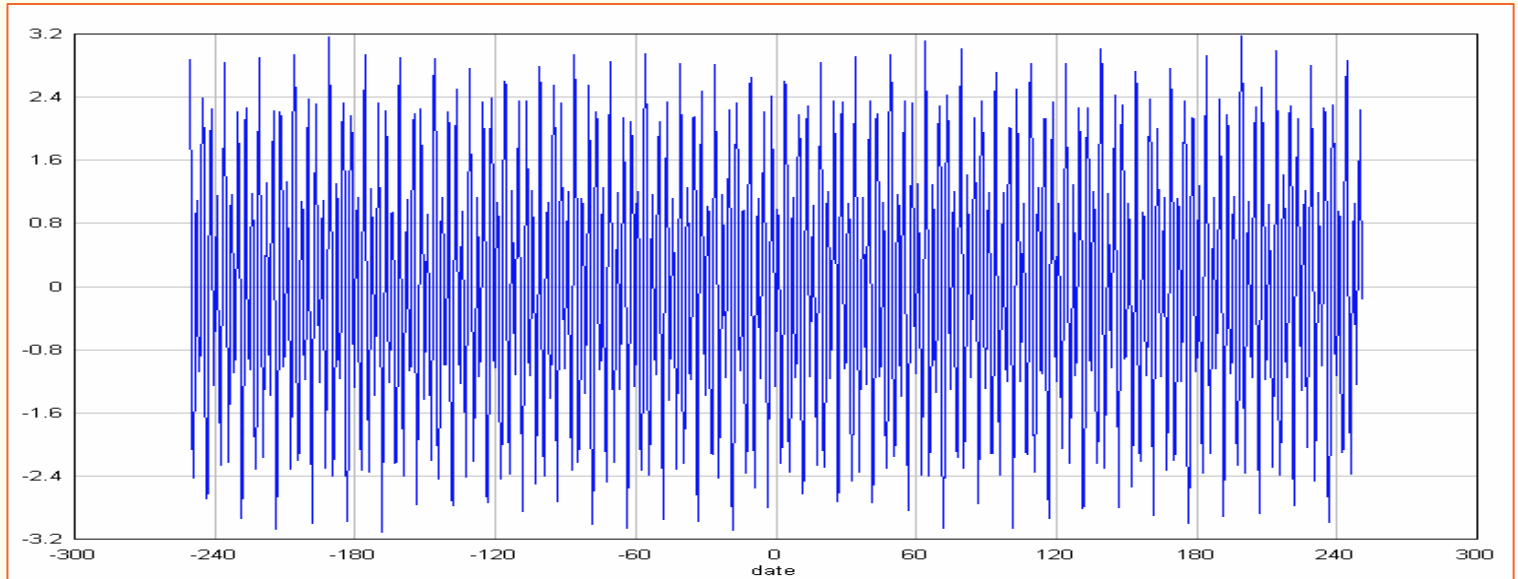
$p_1 : 3 \text{ d}$   
 $p_2 : 5 \text{ d}$   
 $\tau = 0.5 \text{ d}$   
 $N_y = 1 \text{ cy/d}$



# Exemple : au-delà de Nyquist I

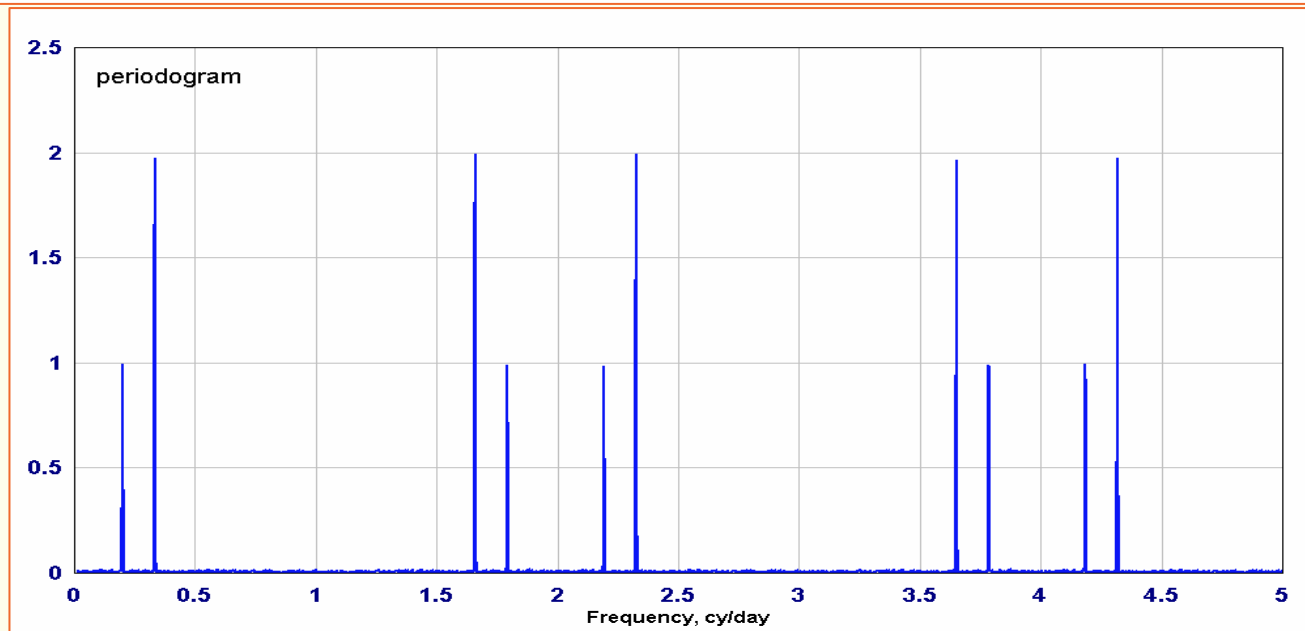
$p_1 : 3 \text{ d}$   
 $p_2 : 5 \text{ d}$

$\tau = 0.5 \text{ d}$   
 $N_y = 1 \text{ cy/d}$



$f_1 : 0.33 \text{ cy/d}$   
 $f_2 : 0.2 \text{ cy/d}$

$N_y = 1 \text{ cy/d}$

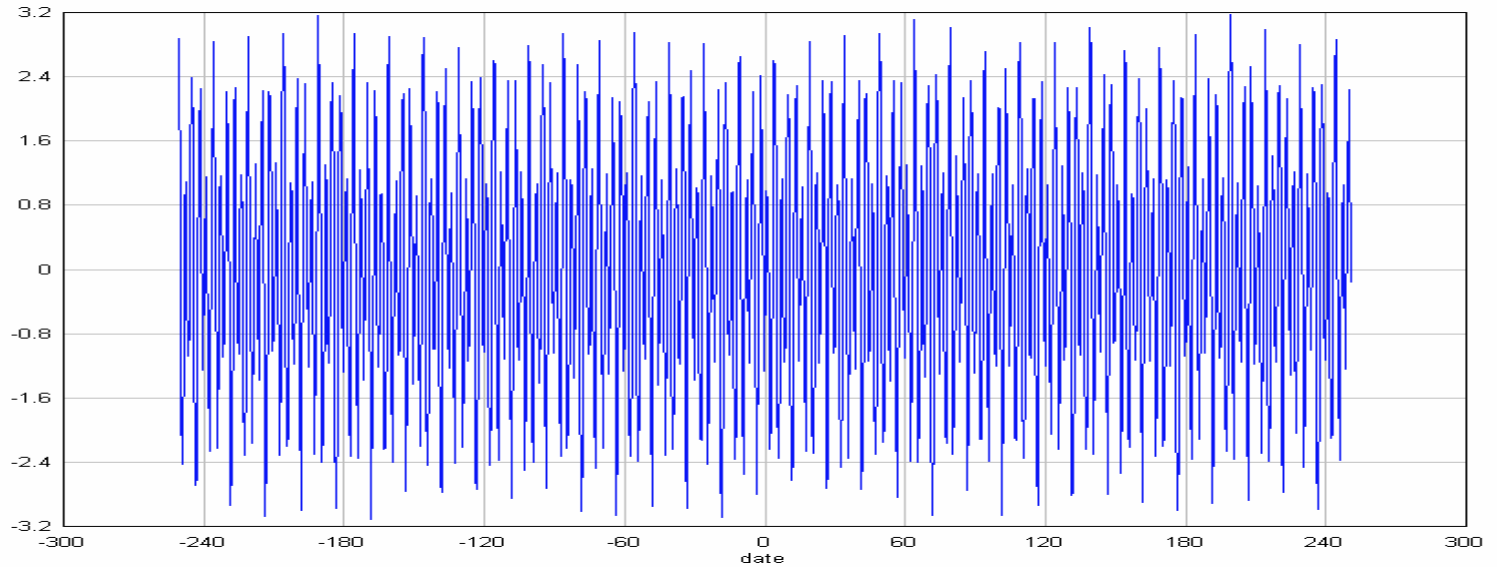


# Exemple : au-delà de Nyquist II

$p_1 : 0.430 \text{ d}$   
 $p_2 : 0.455 \text{ d}$

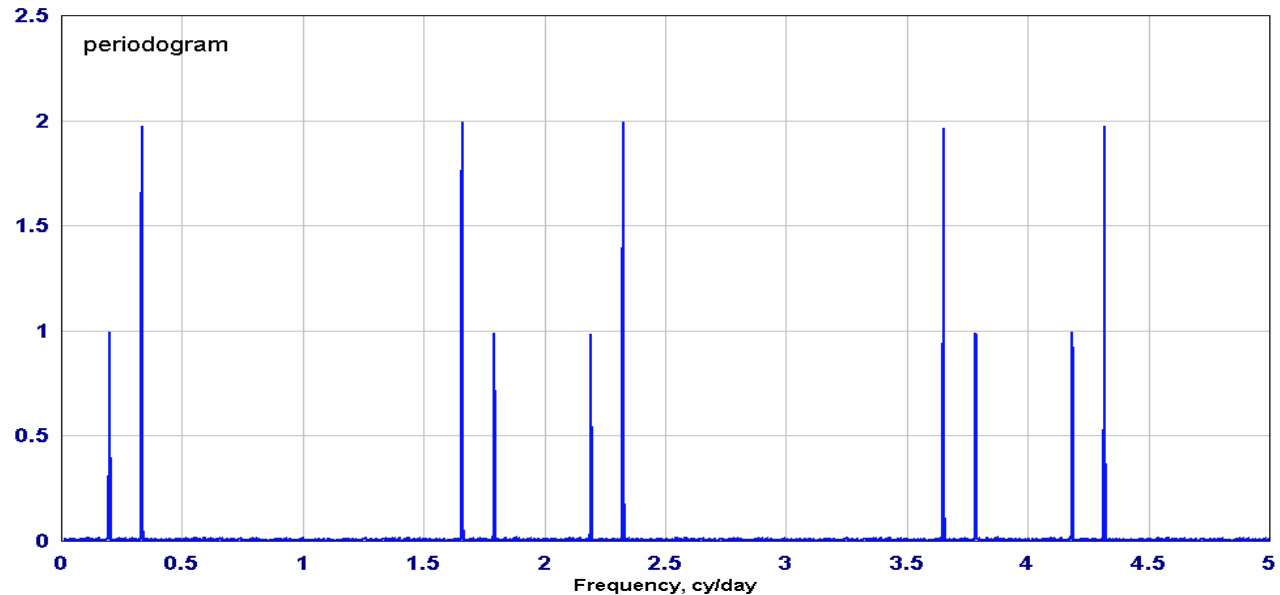
$\tau = 0.5 \text{ d}$

$\tau = 0.05 \text{ d}$



$f_1 : 2.33 \text{ cy/d}$   
 $f_2 : 2.20 \text{ cy/d}$

$N_y = 1 \text{ cy/d}$



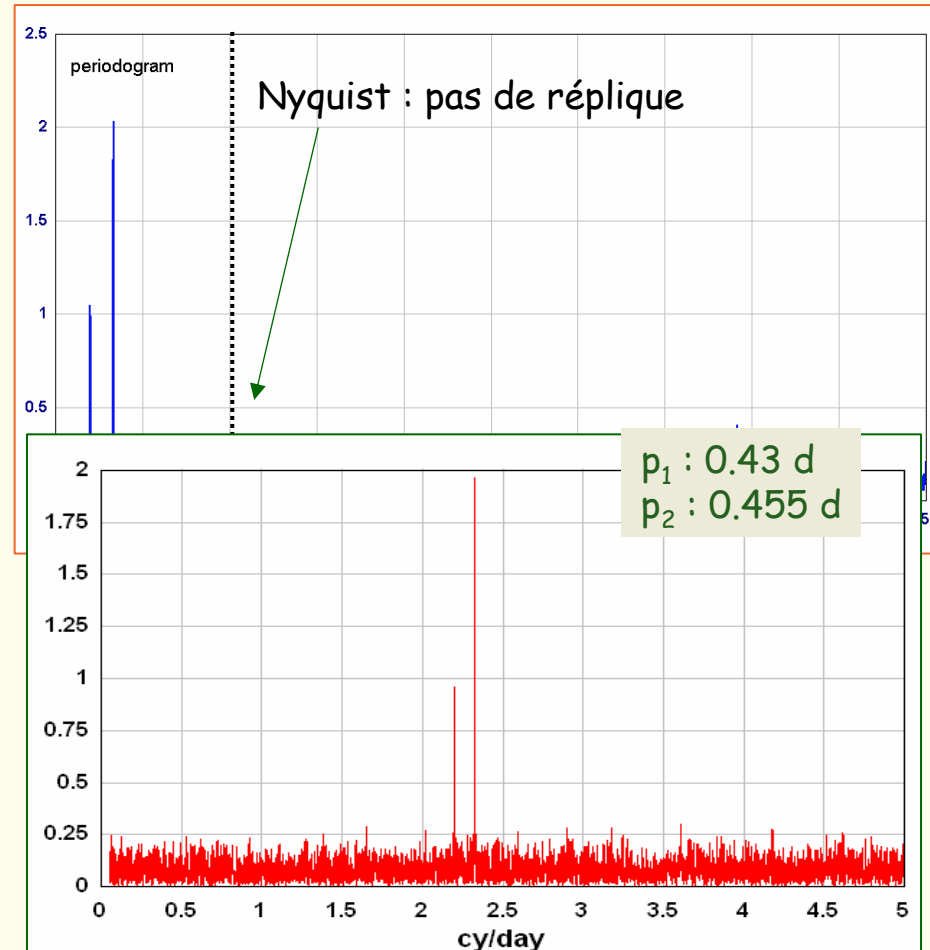
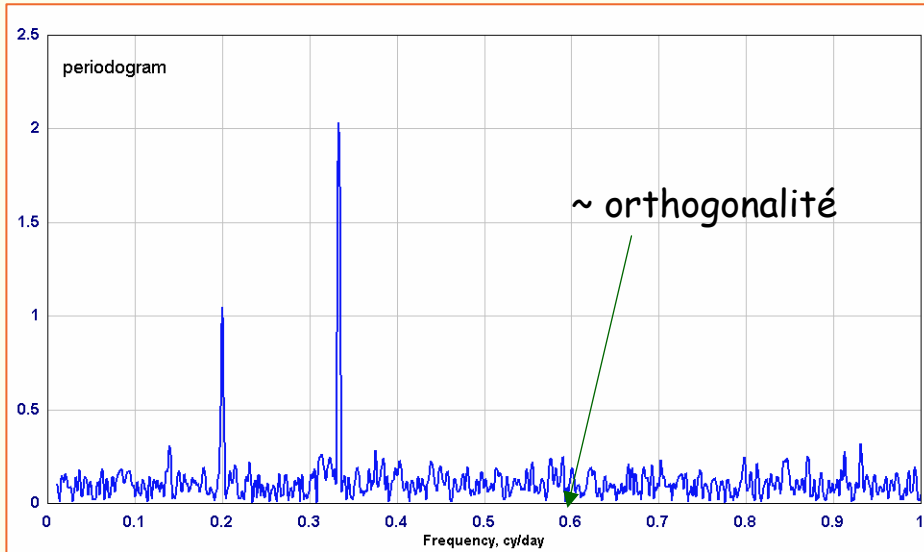
# Echantillonnage aléatoire I

$p_1 : 3 \text{ d}$   
 $p_2 : 5 \text{ d}$

$$S(t_k) = 2 \cos(2\pi t_k / P_1) + \cos(2\pi t_k / P_2)$$

$\langle \tau \rangle = 0.5 \text{ d}$      $\sigma = 0.1$

Tirage uniforme de 1000 dates sur 500 jours.



Périodes et amplitudes trouvées

2.99998 +/- 0.00002	1.995 +/- 0.005
4.99998 +/- 0.0001	1.005 +/- 0.005

# Echantillonnage aléatoire II

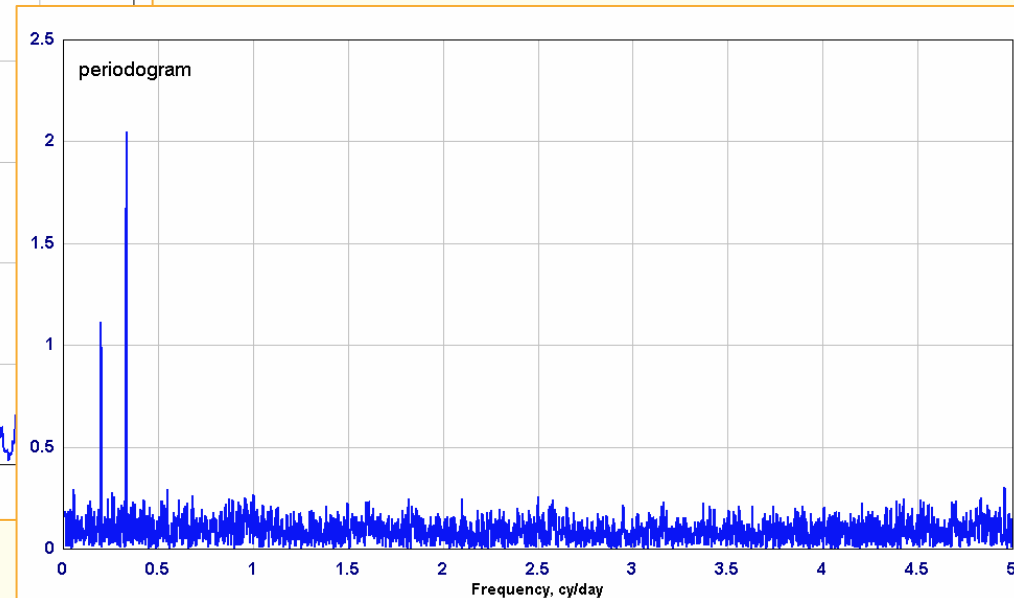
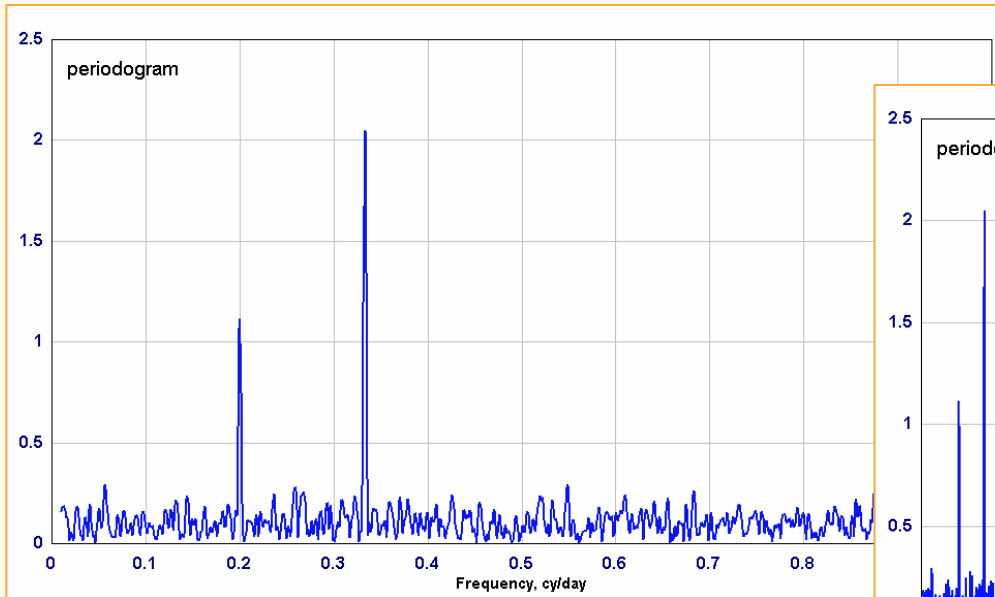
$p_1 : 3 \text{ d}$

$p_2 : 5 \text{ d}$

$$S(t_k) = 2 \cos(2\pi t_k / P_1) + \cos(2\pi t_k / P_2)$$

$\langle \tau \rangle = 0.5 \text{ d}$     $\sigma = 0.1$

Instants selon une loi de temps d'attente : 1000 points sur 500 jours.



Périodes and amplitudes trouvées

2.99999 +/- 0.00002      2.017 +/- 0.005

4.99994 +/- 0.00001      0.988 +/- 0.005

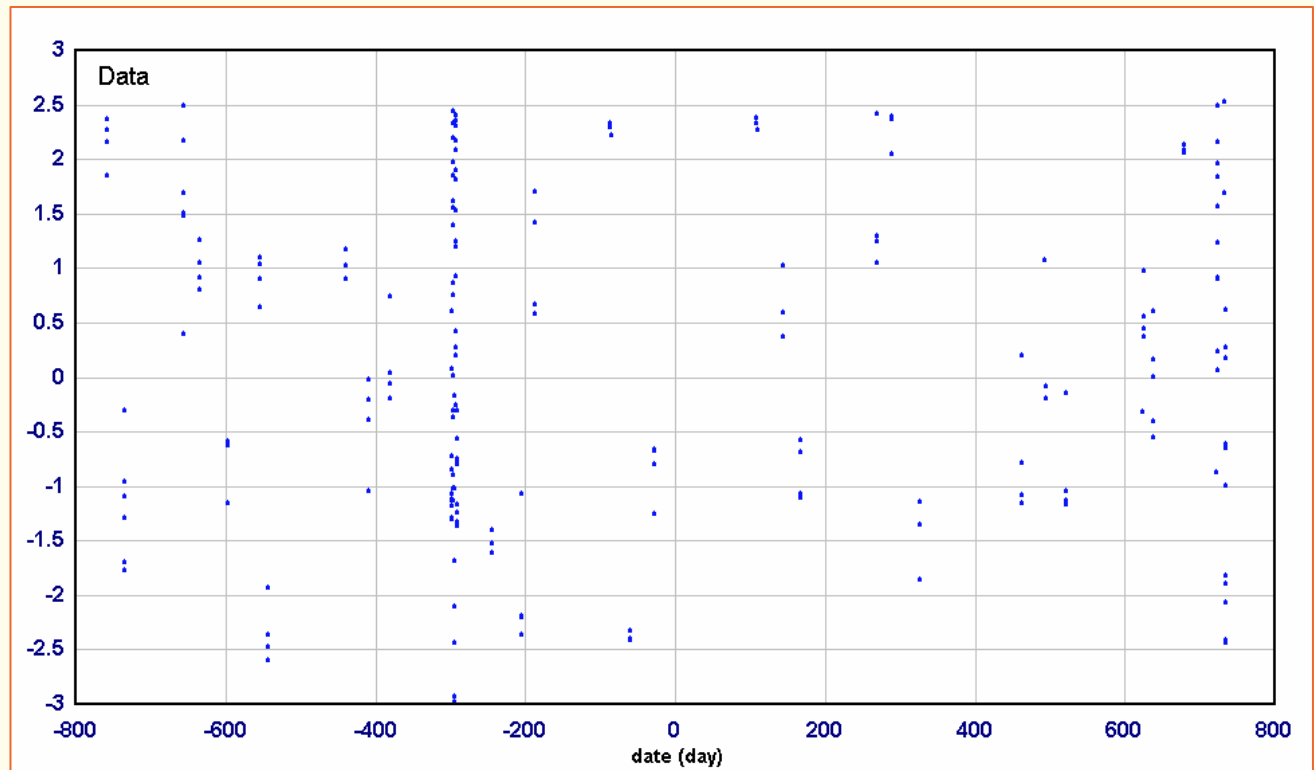


# Echantillonnage creux

$$S(t) = \sum a_i \cos\left(2\pi \frac{t}{P_i}\right)$$

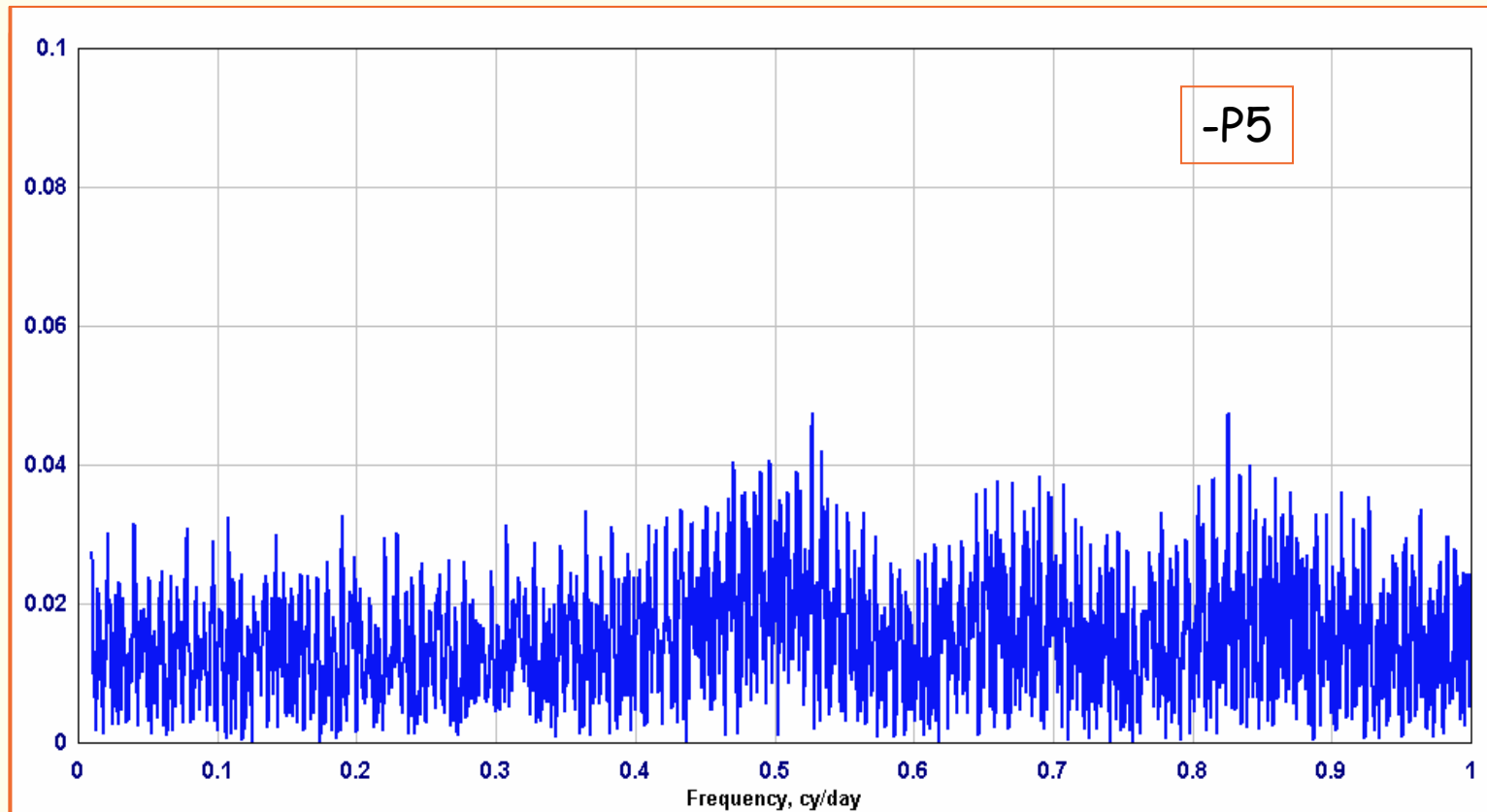
$\sigma = 0.1$ ; 220 mesures sur 1600 jours.

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1
4	7	0.5
5	20	0.2



# Périodogrammes successifs

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1
4	7	0.5
5	20	0.2



# Résultats numériques

- FAMOUS

## Paramètres du signal simulé

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1.0
4	7	0.5
5	20	0.2

## Périodes

3	2.99998 +/- 0.00002
5	4.99995 +/- 0.00006
1	0.99999 +/- 0.00002
7	7.00008 +/- 0.0003
20	20.0083 +/- 0.008

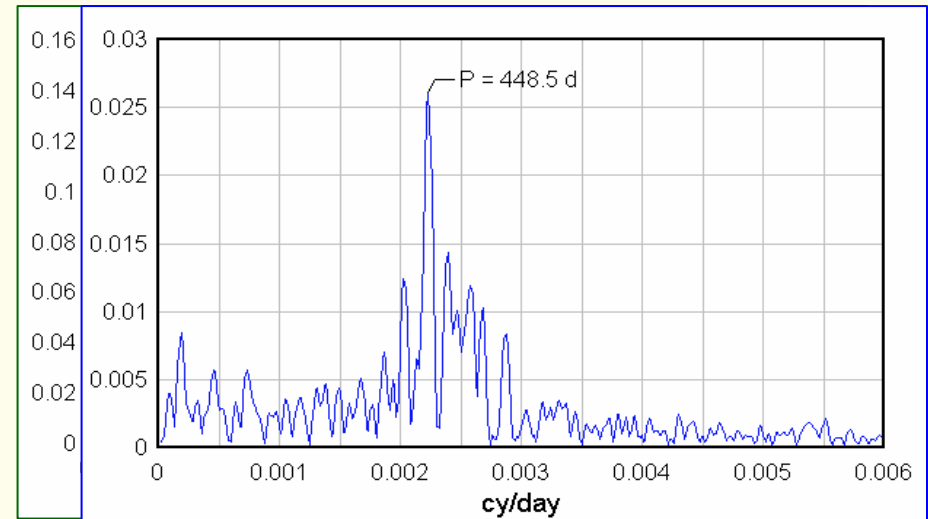
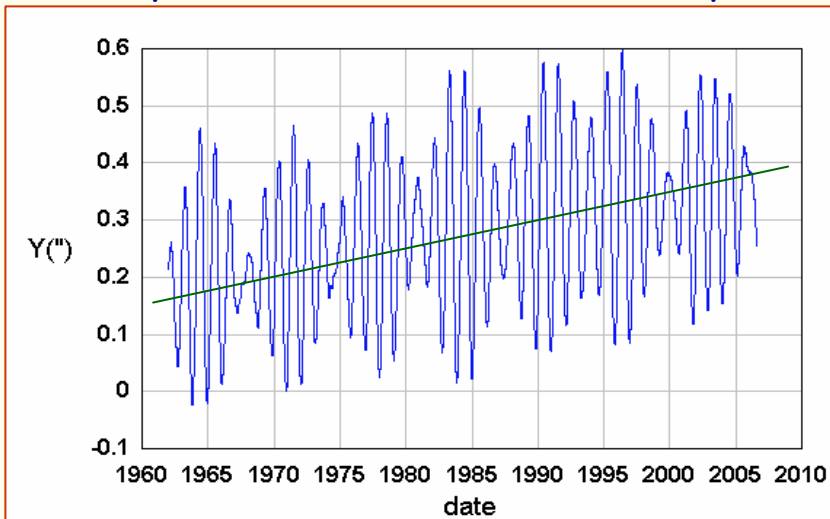
## Amplitudes

2	1.993 +/- 0.02
1.5	1.523 +/- 0.02
1.0	0.990 +/- 0.02
0.5	0.483 +/- 0.02
0.2	0.187 +/- 0.02

# Amplitudes polynomiales

- Les cas de dérive temporelle sont très fréquents sur les termes périodiques (mécanique céleste) ou sur le terme global
- Deux périodes très proches  $\sim$  amplitude  $a + bt$ 
  - *très bon moyen d'améliorer la résolution*

Composante Y du mouvement du pôle

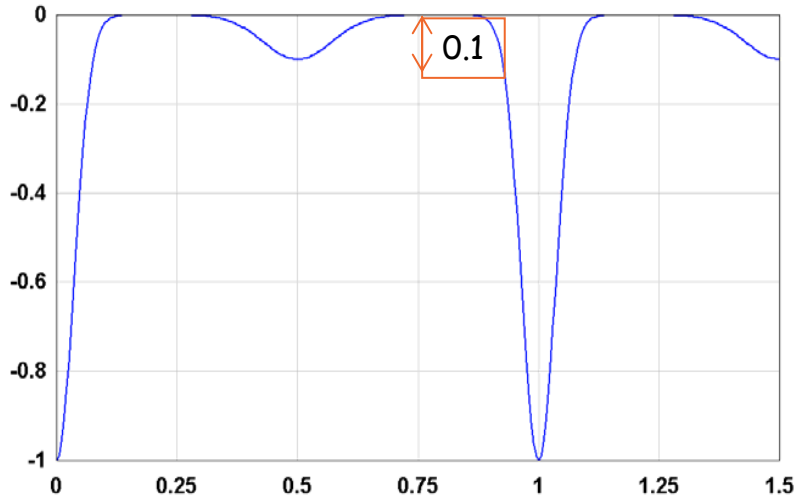


		Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude
0	$t^0$	0.00000000E+00			2.803037E-01
0	$t^1$	0.00000000E+00			1.102813E-05
1	$t^0$	2.31154564E-03	4.32610970E+02	3.437E-05	1.565780E-01
2	$t^0$	2.74200218E-03	3.64697011E+02	5.610E-05	7.959194E-02
3	$t^0$	2.22947941E-03	4.48535203E+02	1.705E-04	2.717569E-02

# Famous : signaux périodiques

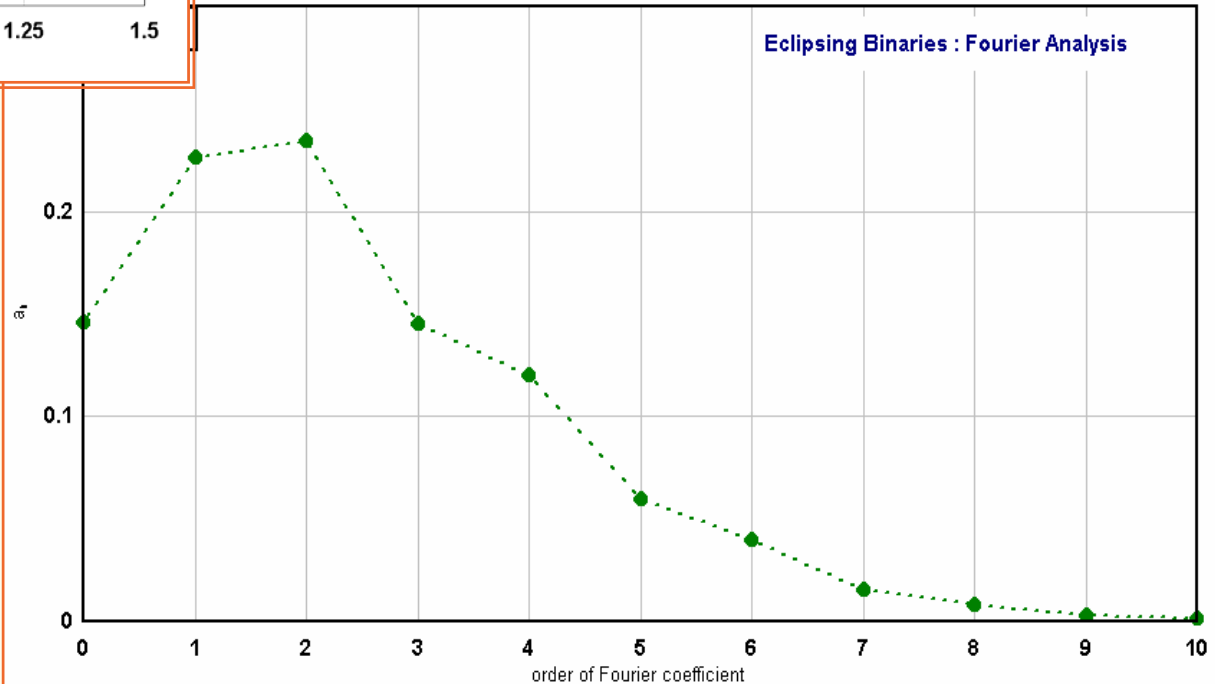
- FAMOUS n'a pas été optimisé pour les signaux périodiques
- Mais on peut toujours rechercher une seule ligne
  - Dans la plupart des cas cela conduit à la bonne période
  - mais : l'amplitude la plus large peut être celle d'un harmonique
    - Dans ce cas on trouve un diviseur de la période
- Si l'on prend deux fréquences on doit avoir :  $v_2/v_1 = 2$  or  $0.5 \rightarrow$  tests
- Cette remarque est généralisée pour trouver le fondamental
  - Recherche de la 1<sup>ère</sup> fréquence (plus grande amplitude 1<sup>er</sup> passage)
  - Recherche en bande étroite autour de  $v_1/2, v_1/3, v_1/4,$  et  $2v_1, 3v_1, \dots$
  - Série de tests pour identifier le fondamental

# Binaires à éclipse I.

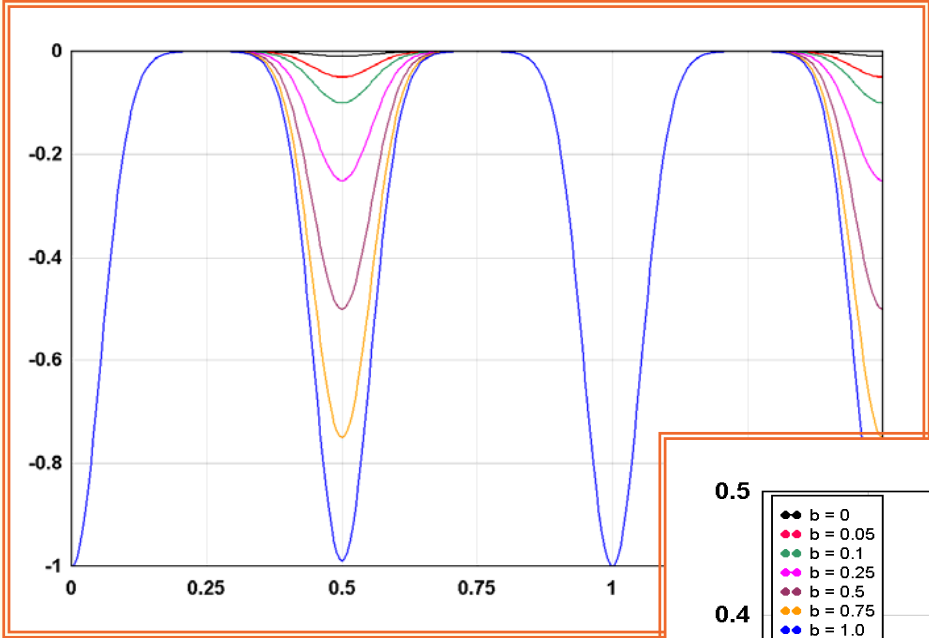


Etoiles EA avec  $b/a = 0.1$

Coefficients de Fourier

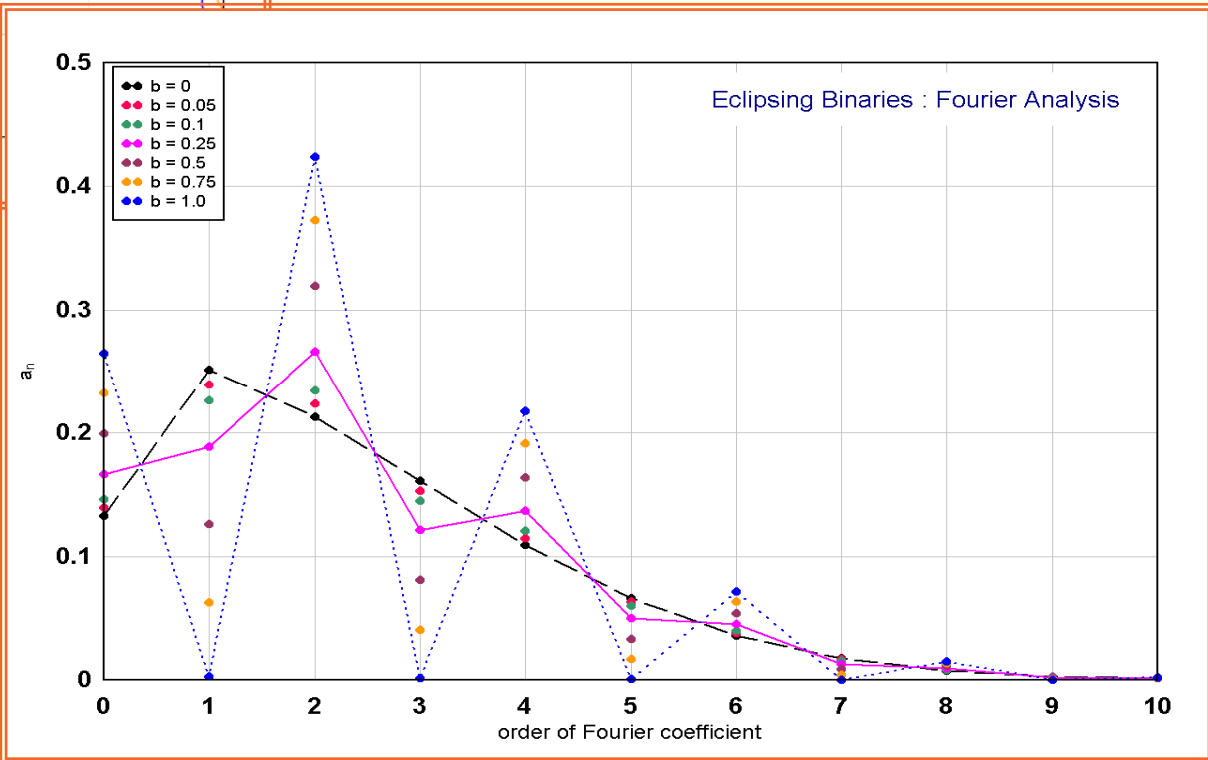


# Binaires à éclipse II.



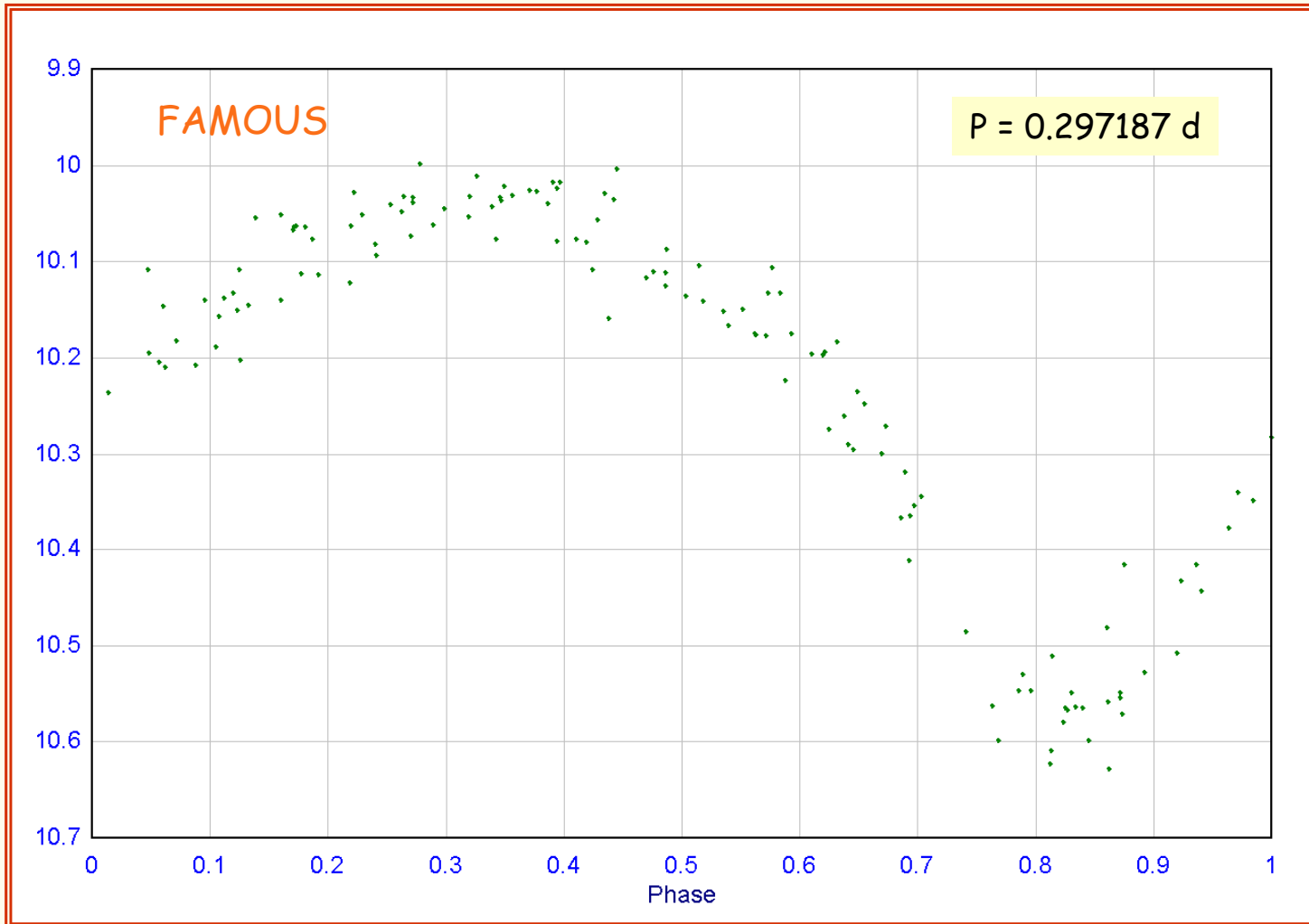
$b/a = 0.0 \text{ à } 1.0$

- Le premier harmonique est > fondamental si  $b/a > 0.1$
- la période trouvée peut être la moitié ou le double de la période réelle



# Recherche de la période

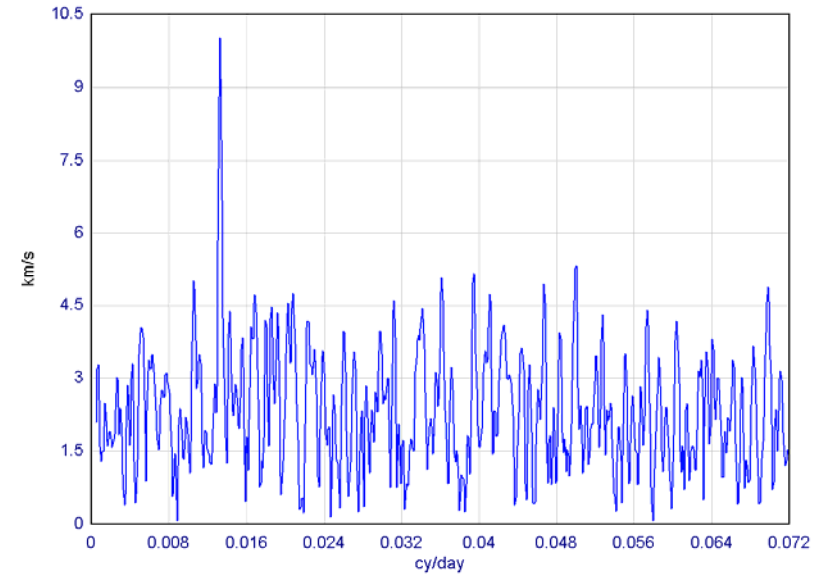
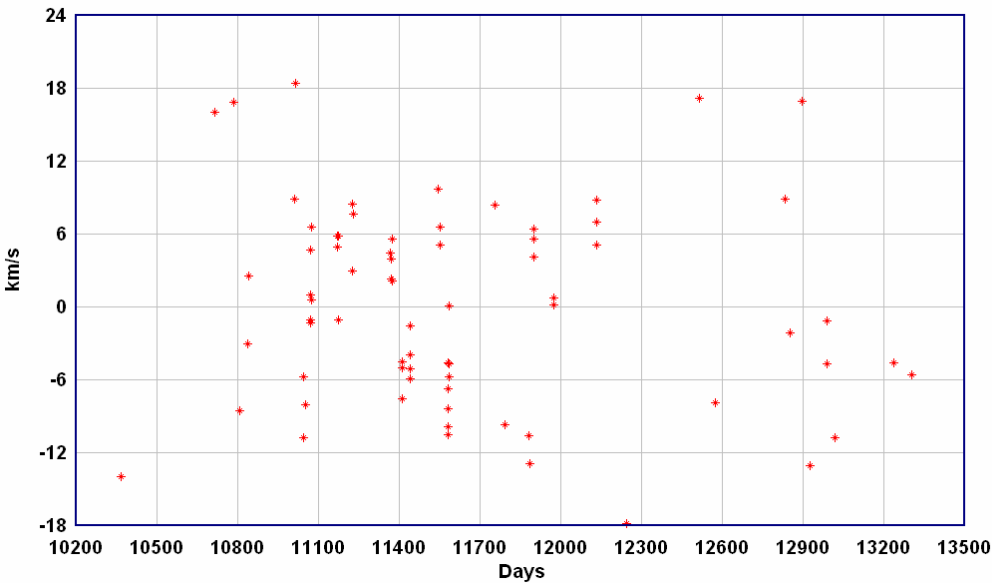
- Hip 1387 = AQ Tuc





# Exoplanète : vitesse radiale

RV of HD 16141 ( Marcy, et al. 2000)



Frequency

Period

$\sigma(f)/f$

amplitude

0	$t^0$	0.00000000E+00			1.556802E-01
1	$t^0$	1.32451952E-02	7.54990758E+01	1.040E-03	1.158680E+01
2	$t^0$	2.65706477E-02	3.76355147E+01	2.026E-03	2.731950E+00

Période : 75.499 $\pm$  0.08 d (valeur publiée : 75.560 days).









- 2e ligne à 2v

- rapport des amplitudes = 2e

- FAMOUS est disponible en ligne :
  - avec tout le source Fortran,
  - documentation
  - tutoriel
  - série de tests commentés
  - le simulateur en prime
  - et jusqu'à maintenant l'assistance utilisateurs

## Index de ftp://ftp.obs-nice.fr/pub/mignard/Famous

[Vers un rép. de plus haut niveau](#)

 <a href="#">Fortran</a>			05/12/2005	00:00:00
 <a href="#">Test 1</a>			13/07/2005	00:00:00
 <a href="#">Test 2</a>			13/07/2005	00:00:00
 <a href="#">Test 3</a>			01/03/2005	00:00:00
 <a href="#">Test 4</a>			29/03/2005	00:00:00
 <a href="#">content.txt</a>	2 KB		13/07/2005	00:00:00
 <a href="#">famous doc.txt</a>	48 KB		05/12/2005	00:00:00
 <a href="#">readme first.txt</a>	2 KB		13/07/2005	00:00:00

# Annexes

---

- Projection - décomposition
- Golden sampling

# Projection et décomposition

- Pour un signal : projeter sur une base ou décomposer sur une base sont deux idées différentes.
- Dans un espace vectoriel la notion primitive est celle de décomposition :

$$\mathbf{V} = \sum_i a^i \mathbf{e}_i \quad a^i : \text{composantes de la représentation}$$

- pour un espace de fonctions on aura par exemple

$$x(t) = \sum_i a^i \phi_i(t)$$

- faire l'analyse revient à rechercher les  $a^i$
- l'équation est représentative du modèle
- la méthode des moindres carrés est un outil d'analyse
- on reconstruit le vecteur à partir des  $a^i$



# Projection et décomposition

- Si l'espace vectoriel est Euclidien (normé par un produit scalaire) alors on peut aussi projeter les vecteurs

$$b_i = (\mathbf{V}, \mathbf{e}_i) \quad b_i : \text{composantes de la projection}$$

- pour un espace de fonctions on aura par exemple

$$b_i = (x(t), \phi(t))$$

- le calcul des  $a_i$  est explicite
- on ne peut pas retourner au vecteur sans information complémentaire
- la transformée de Fourier est un outil de projection



# Relation entre projection et décomposition

- On se donne les projections mutuelles des vecteurs de base

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad g_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$$

- ce qui donne 
$$b_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

- la matrice  $g_{ij}$  est symétrique, définie positive  $\rightarrow$  inversible

$$a^i = \sum_j h^{ij} b_j$$

- La matrice est diagonale si la base est orthogonale
  - dans ce cas il y a une quasi équivalence entre les deux formes
  - la matrice  $g_{ij}$  est aussi la matrice des équations normales pour le modèle des moindres carrés



# Relation entre projection et décomposition

- En analyse spectrale pour un signal discret

$$\phi_\nu(t) = e^{-2j\pi\nu t}$$

- et le produit scalaire est défini sur les points  $t_k$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_k \phi_i(t_k) \cdot \phi_j(t_k)$$

- Pour un échantillonnage régulier on a

$$(\phi_i, \phi_j) \approx N\delta_{ij} \quad (\text{sauf pour } \nu_j - \nu_j = k/\tau \Rightarrow \text{répliques})$$

et transformée de Fourier et analyse en fréquence sont à peu près équivalents

- ce n'est plus vrai pour un échantillonnage quelconque
- il faut des outils plus élaborés que la simple projection



# Relation avec les moindres carrés

- Soit le modèle de moindres carrés

$$\mathbf{V} \approx a^i \mathbf{e}_i \quad \text{ou} \quad x(t) \approx a^i \phi_i(t) \quad (\text{r\`egle de sommation implicite})$$

- On recherche les  $a^i$  qui minimisent la forme quadratique

$$\begin{aligned} Q &= (\mathbf{V} - a^i \mathbf{e}_i, \mathbf{V} - a^i \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{V}, \mathbf{V}) - (\mathbf{V}, a^i \mathbf{e}_i) - (a^i \mathbf{e}_i, \mathbf{V}) + a^i a^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{V}, \mathbf{e}_i) = g_{ij} a^j$$

décomposition

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & g_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ \cdots \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}, \mathbf{e}_1) \\ \cdots \\ \vdots \\ (\mathbf{V}, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

projection

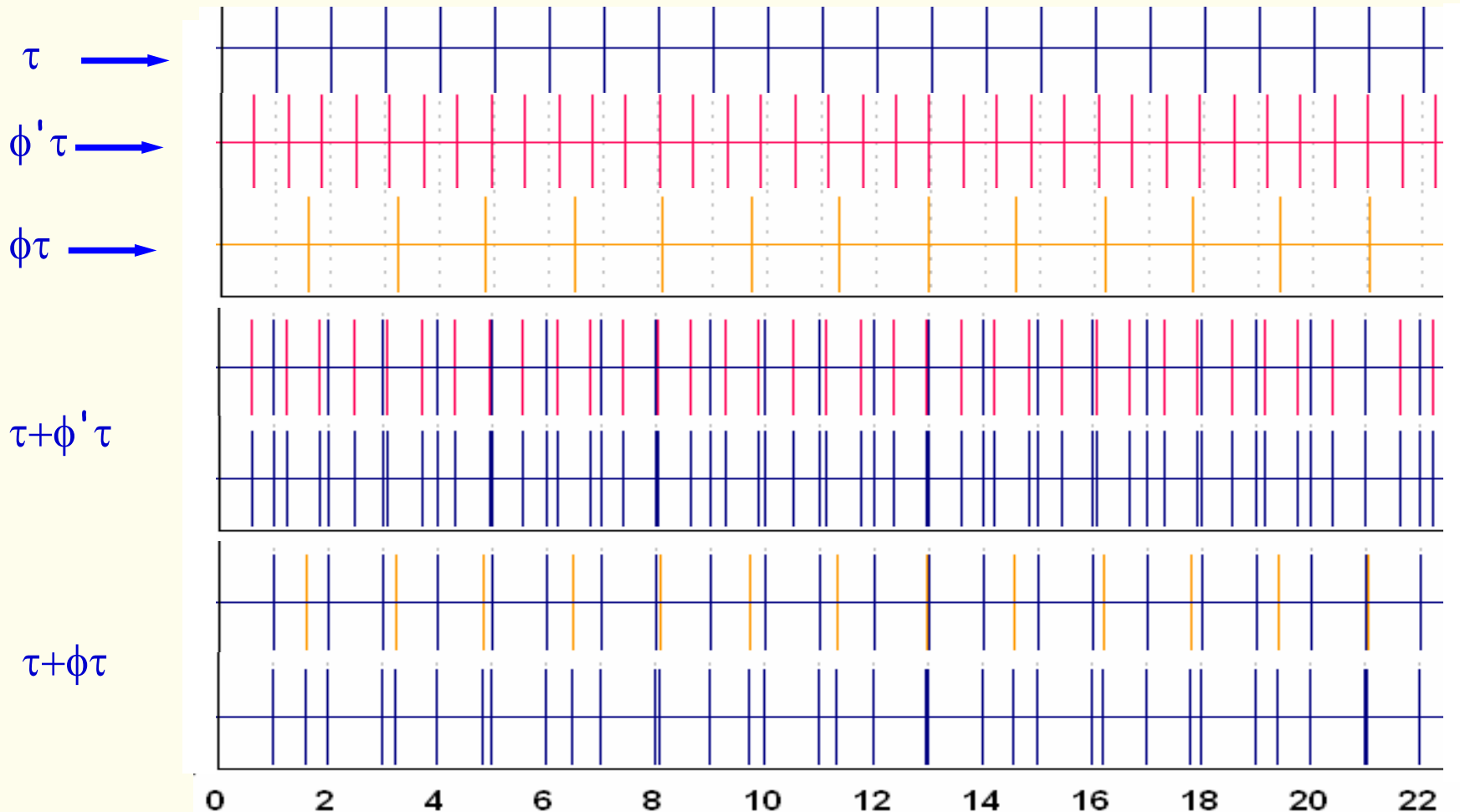


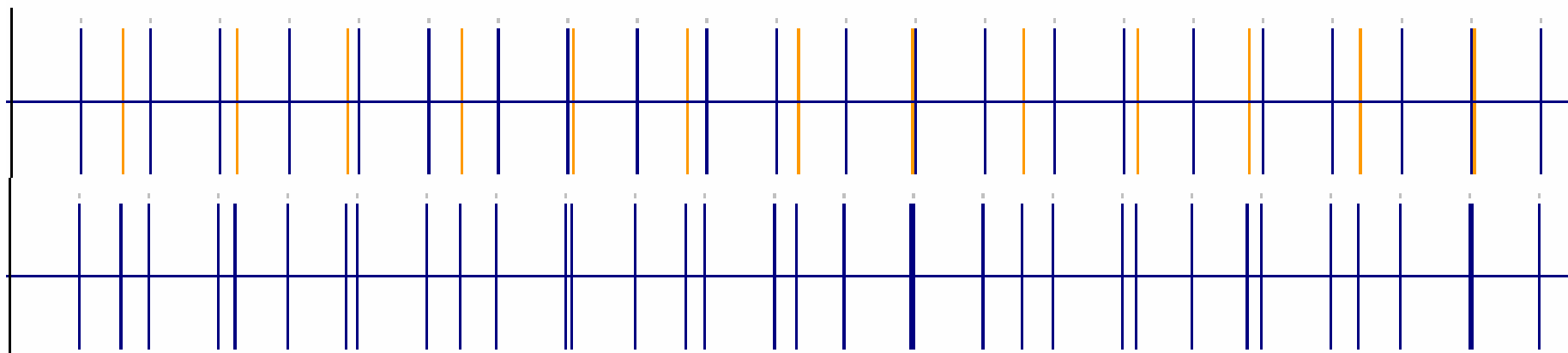
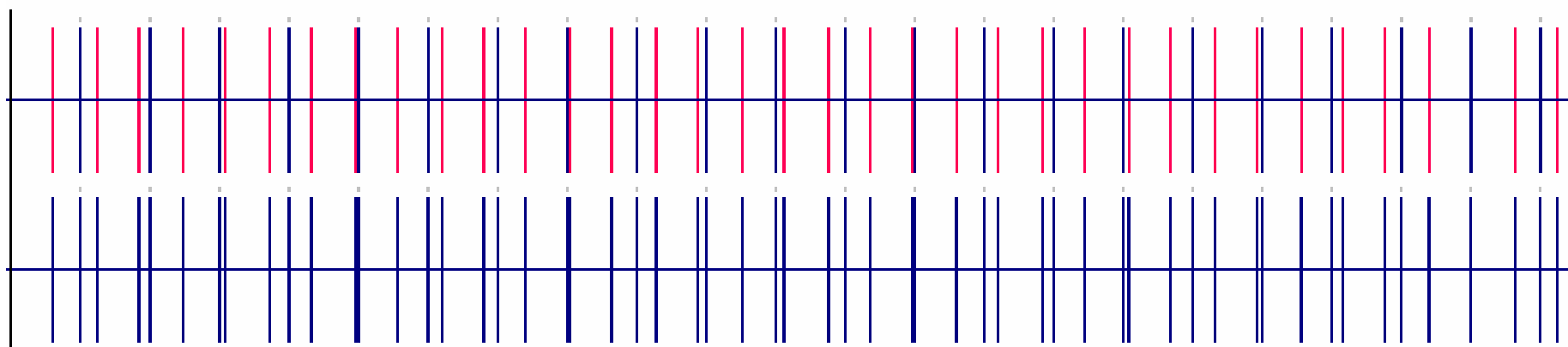
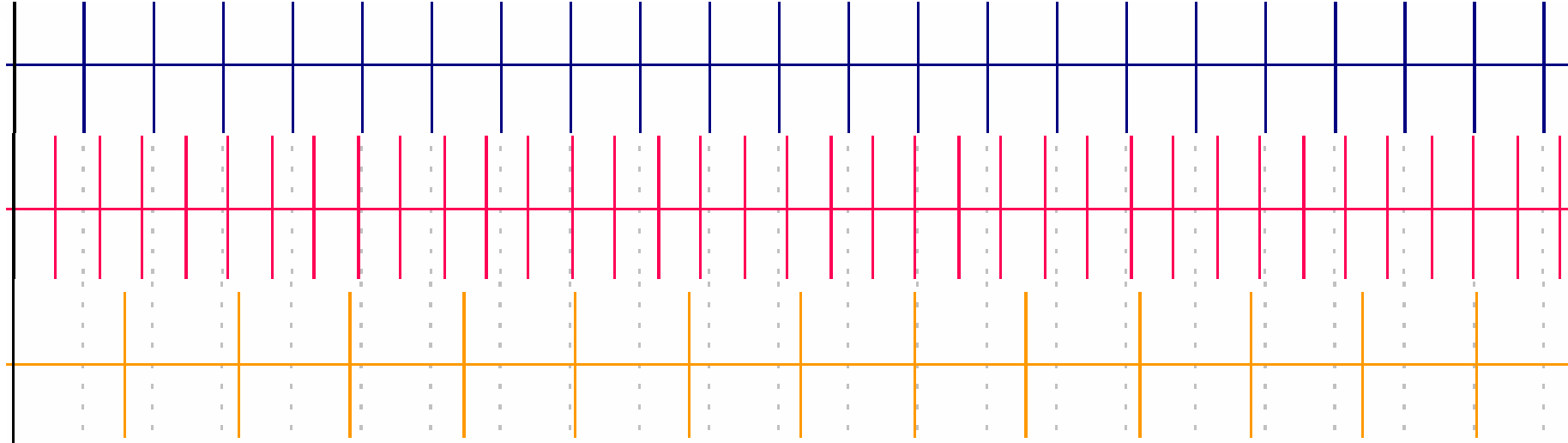


# Echantillonnage 'irrationnel'

- Golden sampling

- superposition de deux échantillonnages réguliers de pas  $\tau$  et  $\phi\tau$  ou  $\phi'\tau$
- $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$  ou  $\phi' = (\sqrt{5}-1)/2$  (le 'moins rationnel' des nombres)





0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22