

Plan du cours

- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI Analyse en fréquence : FAMOUS

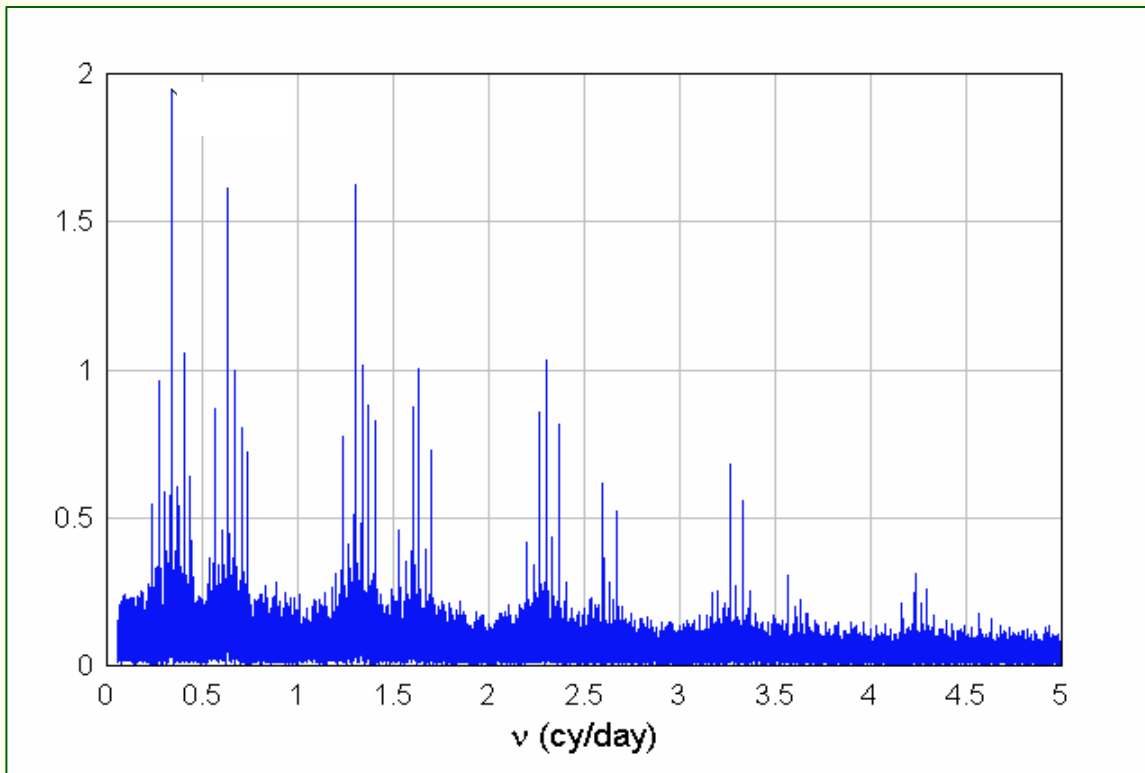
I. Objet du cours

Objectifs et contenu

- Quelques principes sur l'analyse spectrale
 - Signaux discrets
 - Echantillonnage quelconque
- Un peu de théorie et pas mal d'applications
 - théorie, pièges, recettes et outils pratiques
- Trucs et astuces
- Démonstrations complémentaires possibles après le cours

Principes et méthodes

- Question : Combien de lignes spectrales dans ce spectre
 - Périodogramme d'une série temporelle réelle
 - Échantillonnage irrégulier



- Réponse :

→ 1 ligne harmonique :

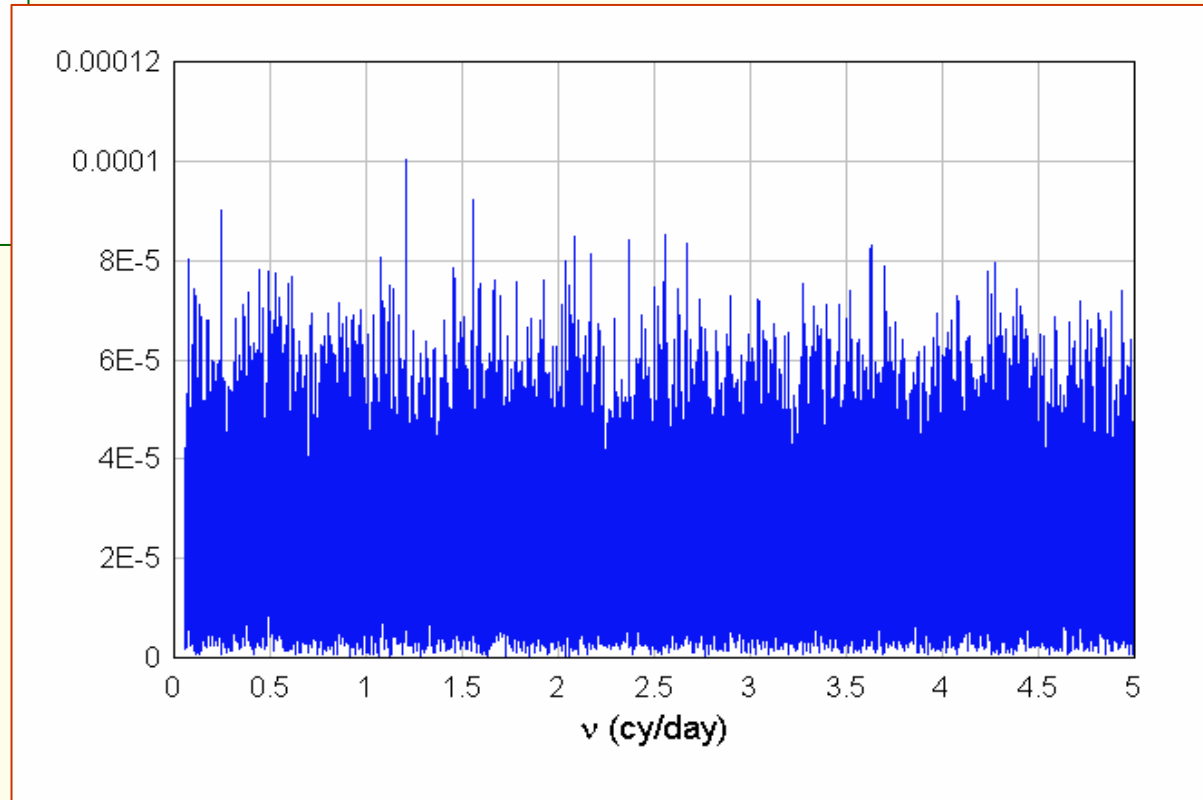
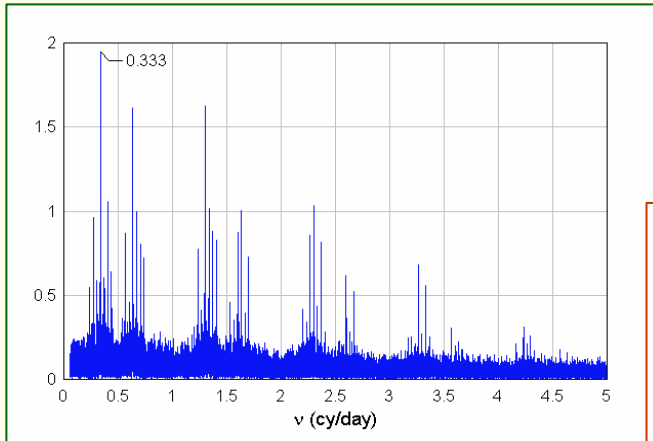
- période 3 jours
- amplitude 2.

- Preuve :

→ ce qu'il reste si on enlève cette ligne

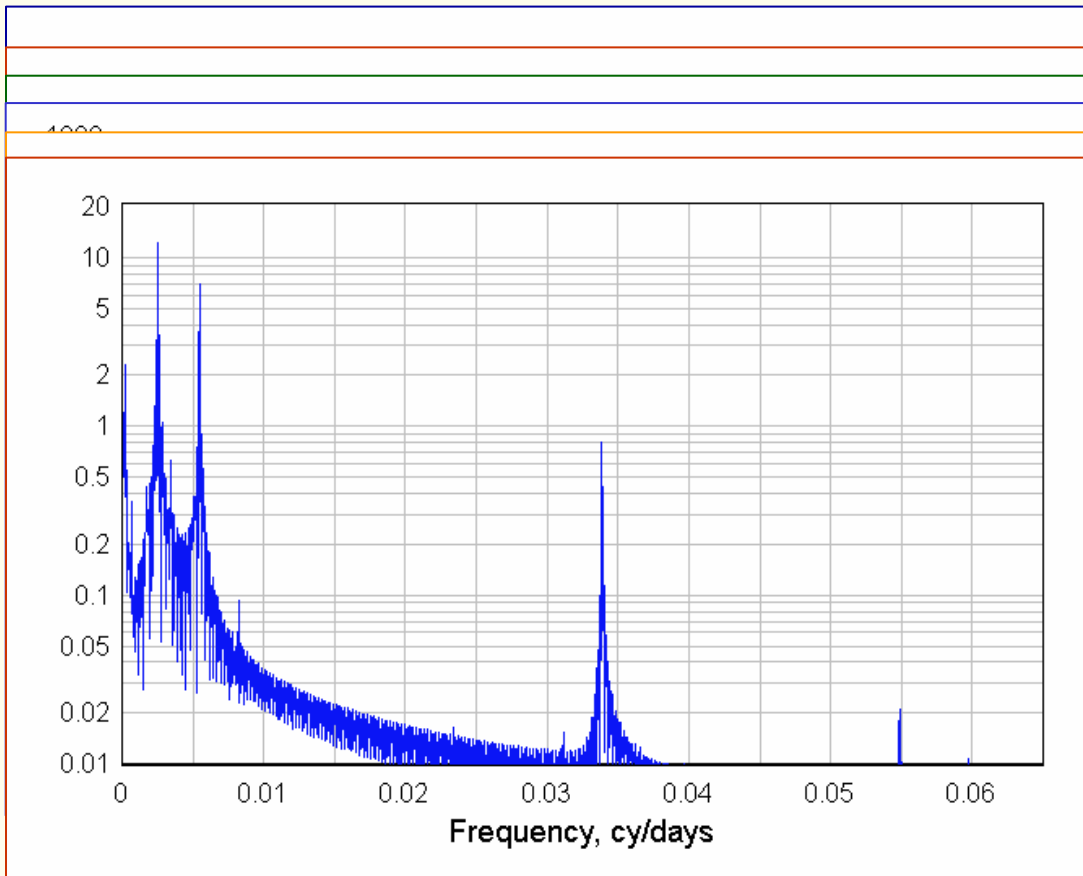
Principes et méthodes

- *Ce qu'il reste quand on enlève 'le haut' :*



Principes et méthodes

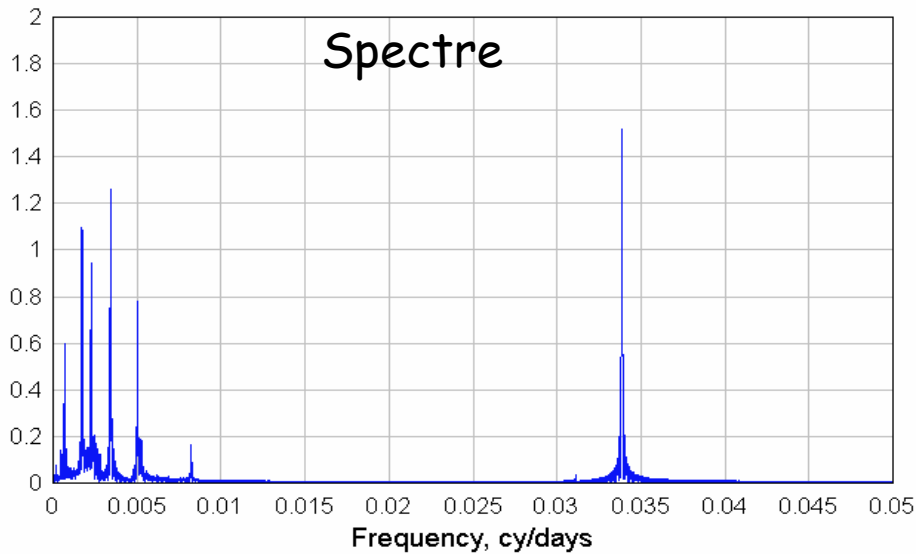
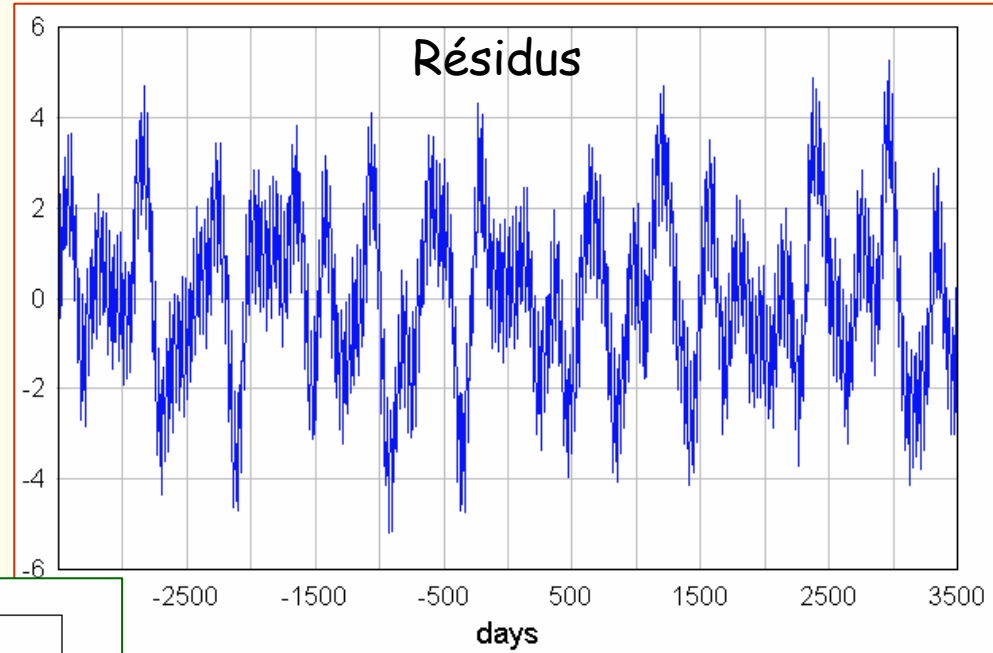
- Question : contenu fréquentiel d'un signal discret complexe
 - utilisation des outils classiques \rightarrow (si $t_{i+1} - t_i = \tau = \text{cte}$)
 - décomposition du signal en composantes \rightarrow analyse en fréquence



- est-ce une simple droite ?
- on enlève le 'trend'
 - calcul très précis
- FFT ??
- mieux en log ?
- peut on estimer et enlever la raie : 1 an ?
- on rejoue la partie n fois

Résidus et périodogramme

P(yr)	μs	origine
1.00	1656.68	Sun
1.09	22.42	J-S
0.5	13.84	2S
11.8	4.77	J
1.04	4.68	Sa-S
29.5	2.26	Sa
...



- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

Séries temporelles

- Les séries temporelles font partie des sciences d'observation
 - astronomie, géophysique, météorologie, océanographie
 - sociologie, démographie
 - économie et finance
- Elles sont analysées pour obtenir une description synthétique
 - Tendances, composantes périodiques, systèmes quasi-périodiques
- L'analyse de Fourier est l'outil privilégié depuis des années
 - Très adaptée aux signaux régulièrement échantillonnés
 - Avec de nombreuses limitations
 - Fréquence maximum, pas de liberté de l'échantillonnage en fréquence
 - Boite noire
 - Interprétation difficile : raies non orthogonales
 - Pas de standard de normalisation, difficile de récupérer l'amplitude
- Mais la FFT demeure indispensable

Échantillonnage régulier

- Problèmes rencontrés
 - Structure périodique dans l'espace des fréquences
 - répliques (aliasing)
 - Chaque ligne spectrale est répliquée une infinité de fois
 - Besoin d'une hypothèse supplémentaire pour lever l'ambiguïté
- Avantages de l'échantillonnage régulier
 - Pas de lignes fantômes sans signification
 - $\langle \exp i2\pi\nu t, \exp i2\pi\nu' t \rangle \sim 0$ si $\nu - \nu' \neq k/\tau$:: condition d'orthogonalité
 - Mais pour une durée finie T , $\nu - \nu'$ doit être $> 1/T \rightarrow$ lobes
 - Avec un spectre on possède toute l'information spectrale

Échantillonnage irrégulier

- Pas de définition précise de l'irrégularité
 - Évolution continue de la parfaite régularité au désordre total
 - L'échantillonnage aléatoire meilleure que "l'irrégulier structuré"
- Problèmes rencontrés
 - Nombreuses raies fantômes reliées aux raies 'bien placées'
 - $\langle \exp i2\pi vt, \exp i2\pi v't \rangle \neq 0$ pour de nombreuses paires (v, v')
 - Absence d'orthogonalité dans la projection
 - Avec un spectre il est difficile de retrouver l'information spectrale pertinente
- Avantages :
 - Pas de structure périodique dans l'espace des fréquences
 - Chaque ligne spectrale apparaît une seule fois dans le spectre

- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

Transformée de Fourier

- rappels sur la Transformée de Fourier
- signaux discrets et transformée discrète
- FFT
- périodogrammes

Transformée de Fourier

- Projection sur une base orthogonale de L_2

- TF :

$$X(f) = \int x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

- TF⁻¹ :

$$x(t) = \int X(f) e^{2j\pi f t} df$$

- Propriétés : voir cours universitaires

- linéarité, translation en t, échelles réciproques, convolution , symétries

- Importance : capitale

- sous la forme continue fondamentale pour établir des résultats généraux en optique, traitement du signal, fonctions aléatoires ...
 - Les vrais problèmes commencent avec les calculs pratiques

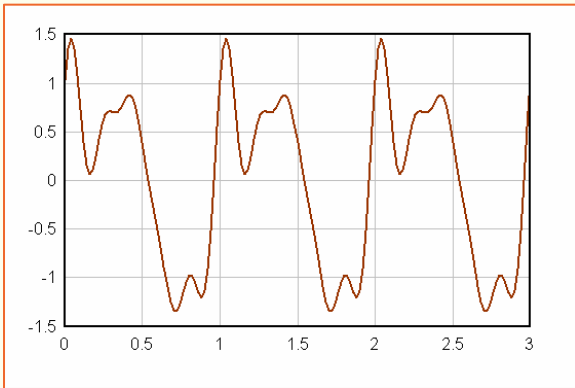
$$X(f) = \int x(u) e^{-2j\pi f u} du$$

- $X(f)$: spectre
- $|X(f)|$: spectre d'amplitude
- $|X(f)|^2$: spectre de puissance

variable	u	s
variable	f	s^{-1}
fonction	x	$m s^{-2}$
spectre	X	$m s^{-1}$
puissance		$m^2 s^{-2}$

Séries de Fourier I

- Cas d'un signal périodique de période T



$\phi(t)$: signal périodique $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \phi(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi_0(t - nT) = \phi_0(t) * \delta(t - nT)$$

$$\Phi(\nu) = \sum \int e^{-2j\pi\nu t} \phi_0(t - nT) dt = \sum \Phi_0(\nu) e^{-2j\pi\nu nT} = \Phi_0(\nu) \sum e^{-2j\pi\nu nT}$$

$$\sum_n e^{-2j\pi\nu nT} = \sum_k \delta(\nu T - k) = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0(\nu) \delta(\nu - n/T) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta(\nu - n/T)$$

- Spectre de raies enveloppé dans la TF du motif
 - raies espacées de $\nu = 1/T$

Séries de Fourier II

- Avec la transformée inverse :

$$\phi(t) = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) F^{-1}[\delta(v - n/T)] = \frac{1}{T} \sum \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) e^{2j\pi nt/T}$$

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi nt/T} \quad c_n = \frac{1}{T} \Phi_0\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_0(t) e^{-2j\pi nt/T} dt$$

$$\phi(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt$$

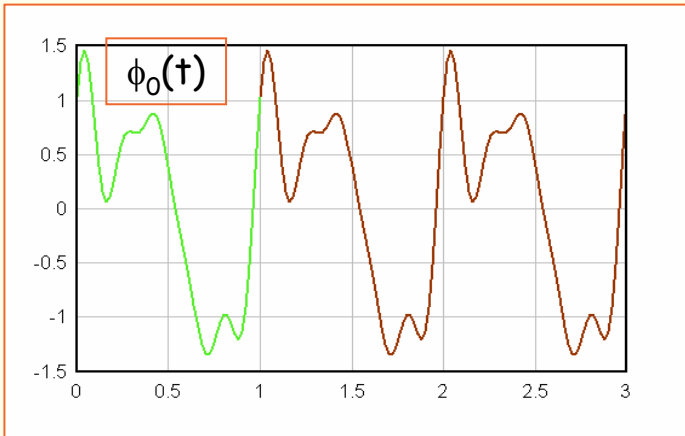
$$a_k = \frac{1}{2T} \int_0^T \phi(t) \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{1}{2T} \int_0^T \phi(t) \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt$$

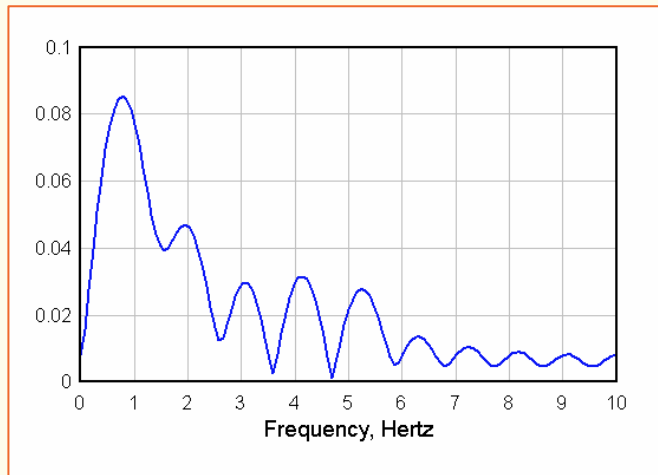
Séries de Fourier III

- Exemple par synthèse d'une série de Fourier

$$\phi(t) = \sin(2\pi t) + 0.5 \cdot \cos(4\pi t) + 0.3 \cdot \sin(6\pi t + 0.7) + 0.3 \cdot \cos(8\pi t - 0.8) + 0.2 \cdot \sin(10\pi t + 0.7)$$



Signal $\phi(t)$ et sa restriction $\phi_0(t)$

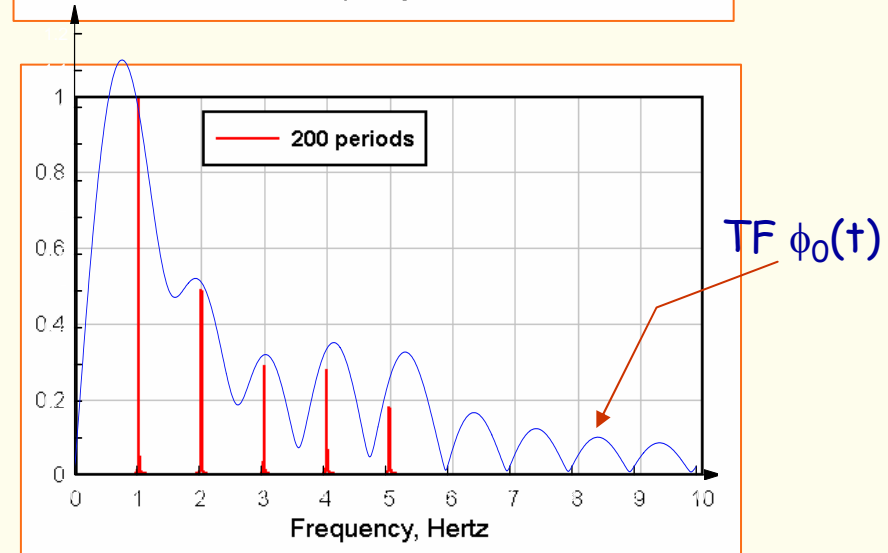
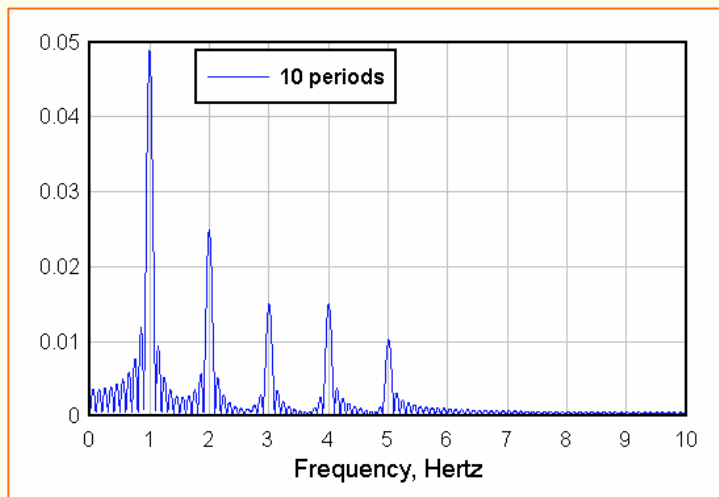
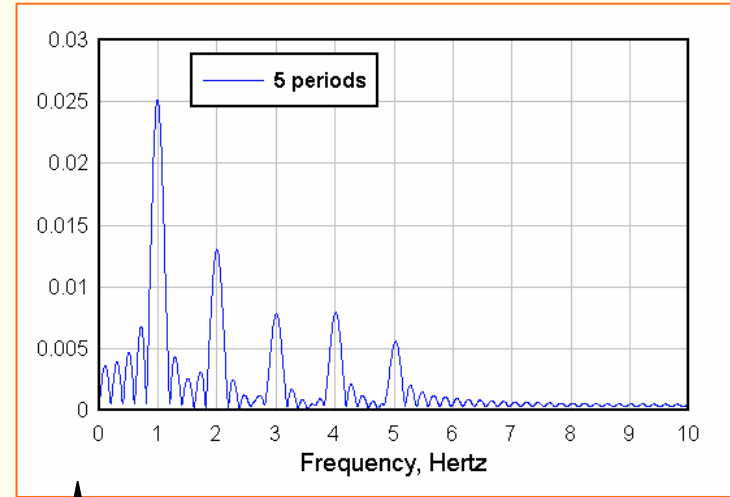
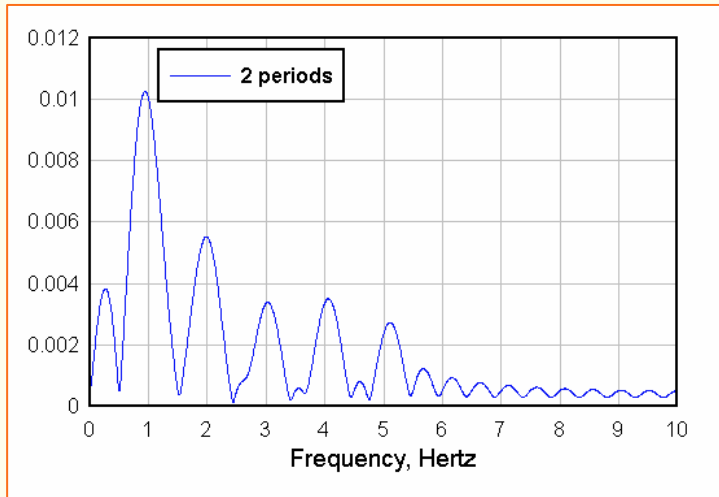


TF de $\phi_0(t)$

Q : comment faire ce calcul numériquement ?

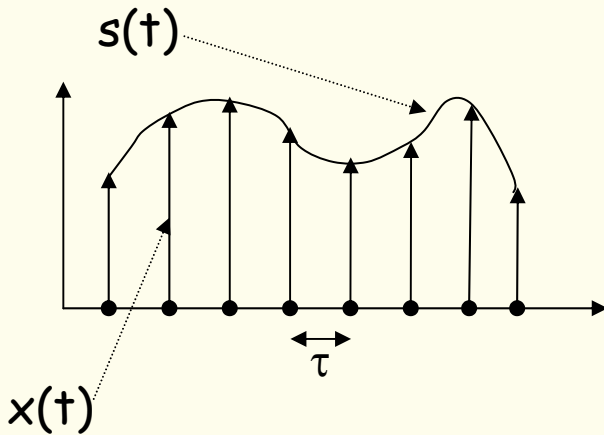
Séries de Fourier III

- Visualisation de la convergence vers la série de Fourier
 - TF du signal sur différents intervalles



Transformée à temps discret (TFTD)

- Signal de mathématicien $x(t)$ continu avec $-\infty < t < \infty$
- Signal de physicien : échantillonnage temporel



$$\begin{aligned}x(t) &= s(t) \sum \delta(t - n\tau) = \sum s(t) \delta(t - n\tau) \\ &= \sum s(n\tau) \delta(t - n\tau) \\ &= \{s(\tau), s(2\tau), \dots, s(N\tau)\} \\ x(t) &= \{x(\tau), x(2\tau), \dots, x(N\tau)\}\end{aligned}$$

TF du signal acquis : $X(\nu) = S(\nu) * \sum \delta(\nu - n/\tau) = \sum S(\nu - n/\tau)$

Transformée à temps discret (TFTD)

- Signification de $X(\nu)$: $X(\nu) = S(\nu) * \sum \delta(\nu - n/\tau) = \sum S(\nu - n/\tau)$
- Répétition périodique (période $1/\tau$) du motif de la TF de $s(t)$
 - résultat rigoureux pour le signal discret
 - pas encore très utile pour le calcul
 - si $s(t)$ est à bande limitée $< 1/2\tau$, alors on a toute l'information sur la TF
- Formule de calcul de $X(\nu)$:

$$x(t) = \sum s(t) \delta(t - n\tau) = \sum s(n\tau) \delta(t - n\tau)$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum s(n\tau) \int \delta(t - n\tau) e^{-2j\pi\nu t} dt = \sum s(n\tau) e^{-2j\pi\nu n\tau} \\ &= \sum x(t_n) e^{-2j\pi\nu n\tau} \end{aligned}$$

Propriétés de la TFTD

- Définition :
$$X(\nu) = \sum x(t_n) e^{-2j\pi\nu n\tau}$$

Transformée de Fourier à temps discret

- continue en fréquence
- périodique de période $1/\tau$
- c'est exactement la TF du signal discret

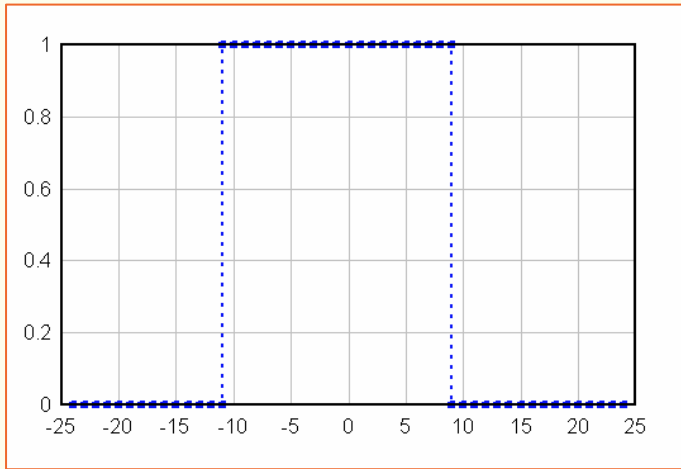
- Transformée inverse :

$$x(n\tau) = \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} X(\nu) e^{2j\pi\nu n\tau} d\nu$$

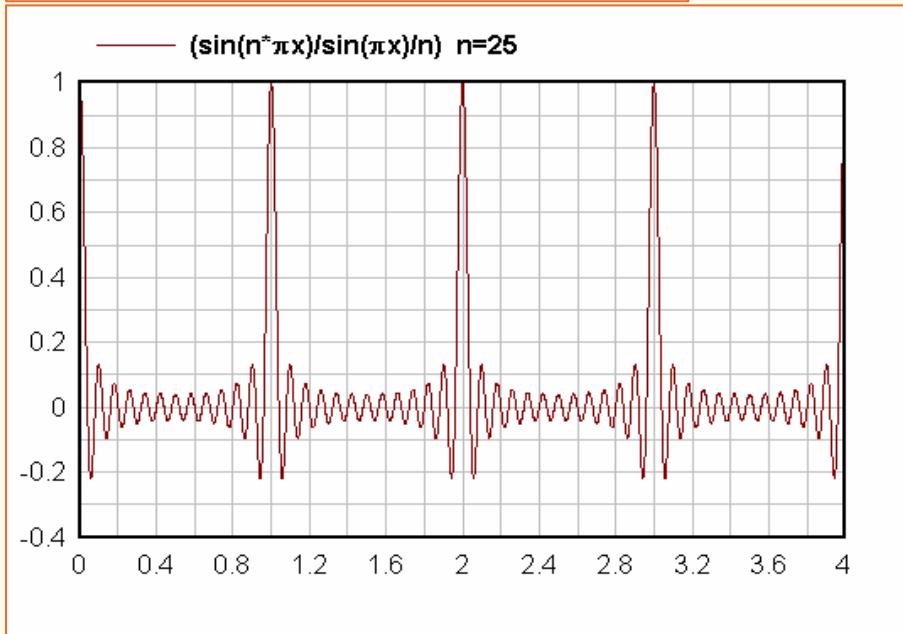
Problème de calcul numérique : il faut échantillonner ν dans $X(\nu)$

Exemple

- Calcul analytique pour une porte de $2N+1$ points de $-N$ à N



$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-N}^N x(n\tau) e^{-2j\pi\nu n\tau} = \sum_{k=-N}^N e^{-2j\pi k\nu} \\ &= e^{2j\pi N\nu} \left(1 + e^{-2j\pi\nu} + e^{-4j\pi\nu} + \dots + e^{-2j\pi(2N+1)\nu} \right) \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi\nu}{\sin \pi\nu} \end{aligned}$$



- structure périodique
- période $\eta = 1/\tau$
- symétrie par rapport à $\eta/2$

Transformée discrète

- Une réponse à l'évaluation numérique de la TFTD

- Signal temporel $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ $\implies \tau = 1$

- TF $X(v) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi v n} \implies \text{Periode} = 1$

- Echantillonnage de v sur L valeurs de 0 à $L-1$: $v_k = k/L$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/L}$$

- On choisit $L = N$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) W_N^{kn} \quad W_N = e^{2j\pi/N}$$

- Pour ces fréquences la TFD = TF d'une fonction à bande limitée

Transformée discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) e^{2j\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$W_N = e^{2j\pi/N}$$

- W^{kn} : matrice hermitienne $\rightarrow W^{-1} = W^{*\top}$ (à $1/N$ près)
- Donc on a la transformée inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X(k) e^{-2j\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

- Normalement calcul avec N^2 opérations arithmétiques
 - mais algorithme de la FFT en $N \log N$
 - Transforme N données $x(t_k)$ en N valeurs de $X(v_k)$
 - v de 0 à $1/2\tau$ pour les signaux réels

Sommaire des TF

Définition mathématique

Signal continu



$$X(f) = \int x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int X(f) e^{2j\pi f t} df$$

Définition mathématique

Signal discret



$$X(f) = \sum x(t_k) e^{-2j\pi f t_k}$$

$$x(t_k) = \int_{-1/2\tau}^{1/2\tau} X(f) e^{2j\pi f t_k} df$$

Transformée discrète

Signal discret

Echantillonnage en fréquences

Calcul avec FFT



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2j\pi kn/N}$$

Périodogramme

- Décomposition d'un signal sur un signal périodique de référence



$$x(t) := \alpha + \beta e^{2j\pi\nu t}$$

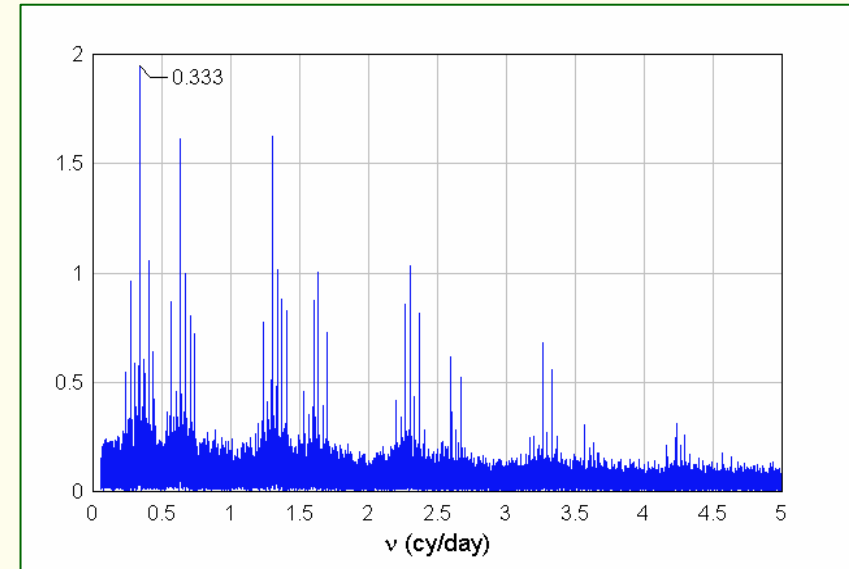
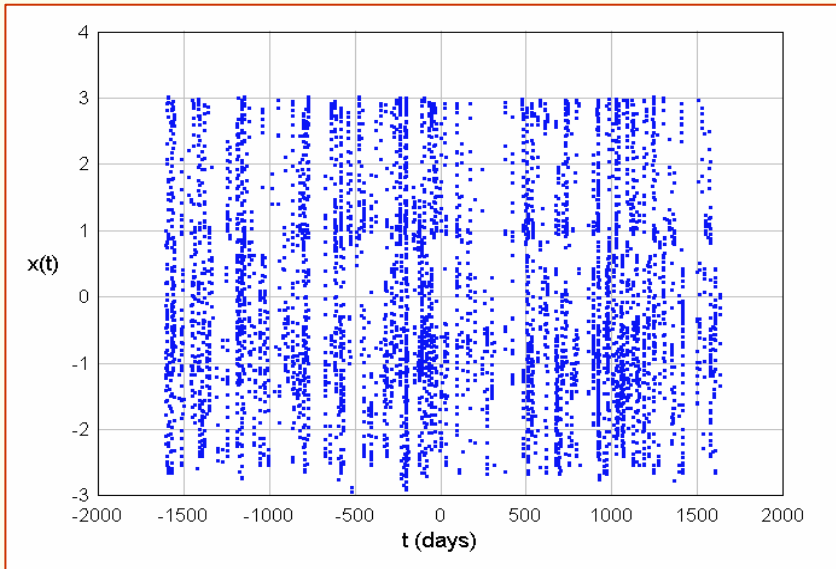
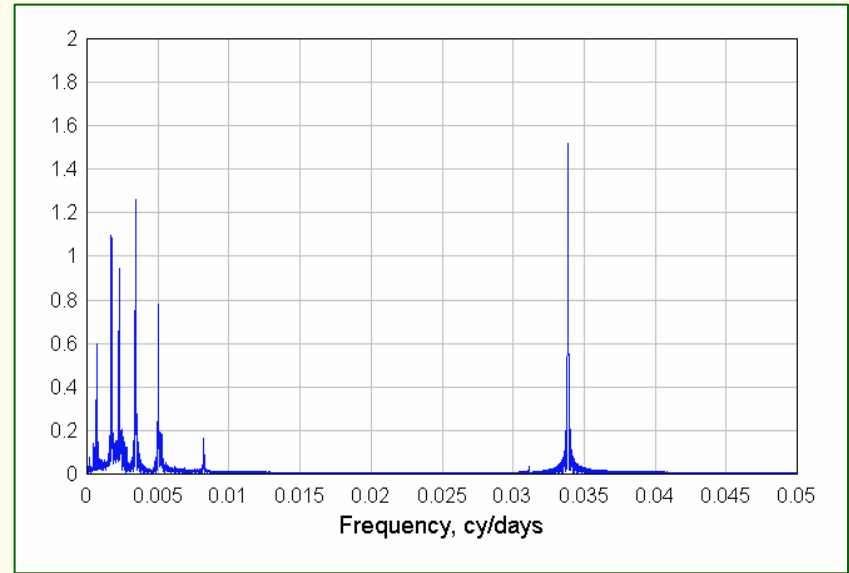
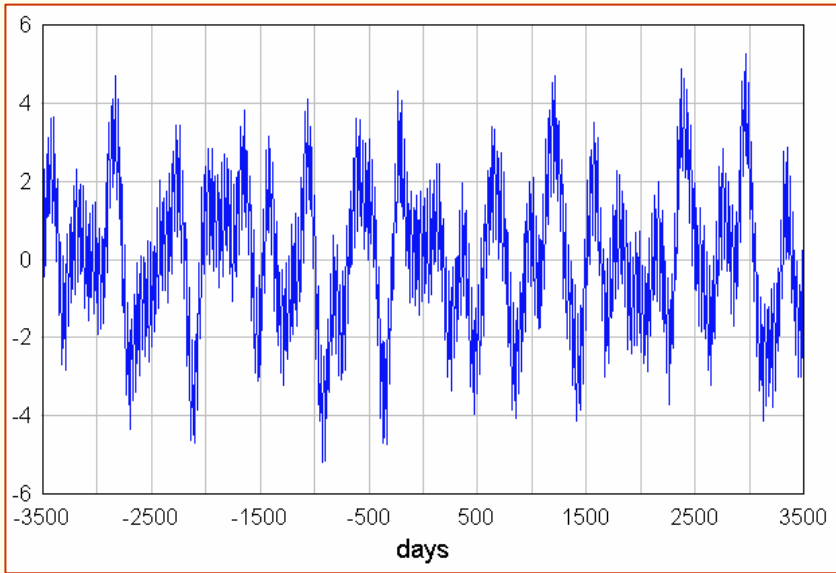
$$x(t) := a_\nu + b_\nu \cos 2\pi\nu t + c_\nu \sin 2\pi\nu t = \phi_\nu(t)$$

- Pour chaque fréquence on calcule la puissance $P(\nu)$

$$P(\nu) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \phi_\nu^2(t_k) \quad [\text{en général } \neq b_\nu^2 + c_\nu^2]$$

- Le périodogramme sera la représentation de $[P(\nu)]^{1/2}$
- Calcul pratique : ajustement de moindres carrés de $x(t)$ sur $\phi_\nu(t)$
 - doit être très optimisé → calcul sur des milliers de fréquences

Exemples



- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

Usage de la FFT

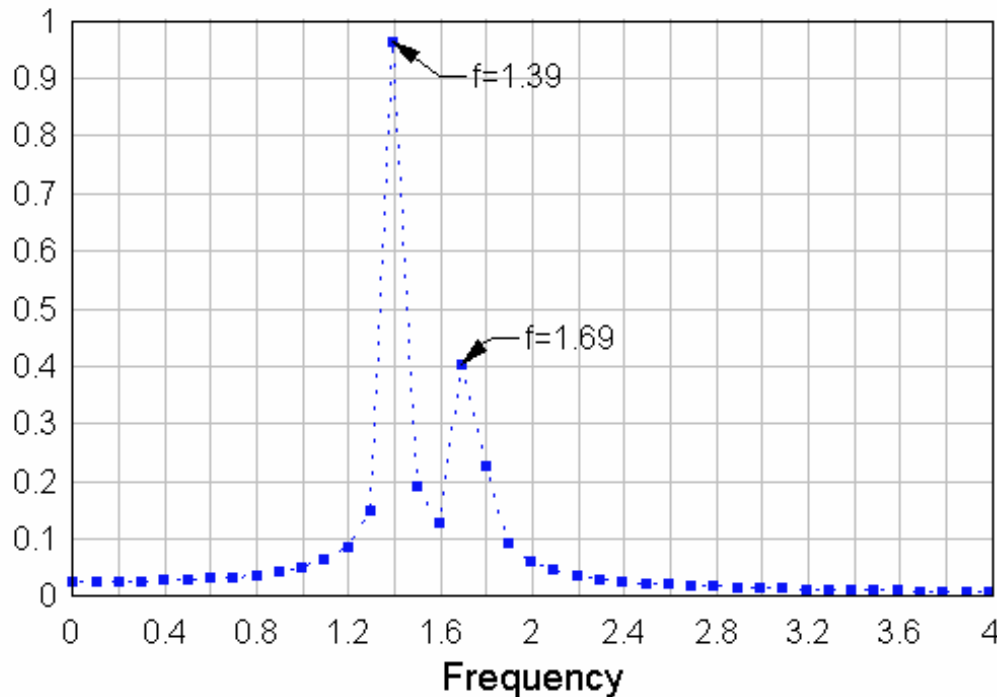
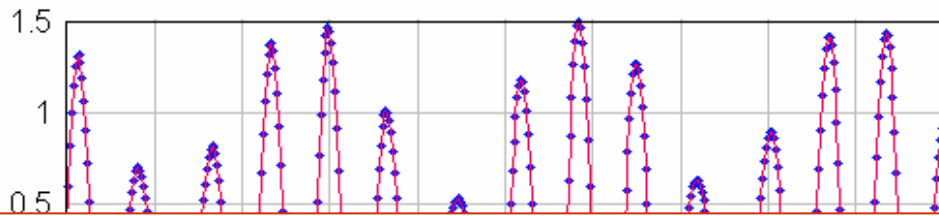
- Nombreuses implémentations disponibles
 - routines dans toutes les bibliothèques de programmation
 - fonction disponible dans les applications PC ou station
 - Matlab, Scilab, Maple, logiciels graphiques
- Les contraintes
 - fichier de données sous forme d'un vecteur (x_1, x_2, \dots, x_n)
 - le temps peut être utilisé, mais en général non
 - FFT échantillonne le temps selon $1, 2, \dots, N$
 - demande ou ne demande pas $N = 2^k$
 - complète ou non avec des zéros au plus petit $2^k > N$
 - cela ne change pas la fréquence de Nyquist
 - mais cela influe sur la normalisation

Usage de la FFT

- Les problèmes
 - sortie d'un fichier FFT sans échelle des fréquences ν
 - il y a N (ou $N/2$) valeurs de 0 à $1/\tau$ ($1/2\tau$) et faire $\nu = k/(N\tau) = k/T$
 - sortie avec une échelle de fréquence
 - soit de 1 à n , 1 à $n/2$, 0 à 1 avec N valeurs
 - soit avec la bonne échelle si le vecteur temps est utilisé
 - diverses normalisations de l'amplitude
 - $1, 1/N, 2/N \dots \rightarrow$ interprétation difficile
- Test de l'échantillonnage régulier ?
 - seulement si le vecteur temps est demandé
 - sinon par hypothèse $t = 0:1:N$
 - mais attention aux troncatures des fichiers ascii !
 - gare aux changements d'échelles
 - pas (*steps*) de calcul réguliers en jours et output en années

Exemples

$$x(t) = a_1 \sin 2\pi f_1 t + a_2 \sin (2\pi f_2 t + \pi / 4)$$



Domaine temporel

$$a_1 = 1.0 \quad a_2 = 0.5$$

$$f_1 = 1.414 \quad f_2 = 1.732$$

$$\eta = 1/\tau = 50 \quad (\sim 30 \text{ pts/période})$$

$$t = 0..1.0 \text{ soit } 500 \text{ points}$$

Domaine fréquentiel

$$f_{\max} = 25$$

$$\rho = 1/T = 0.1 \quad (\text{échantillonnage en } f)$$

$$\text{largeur des lobes} \sim \rho$$

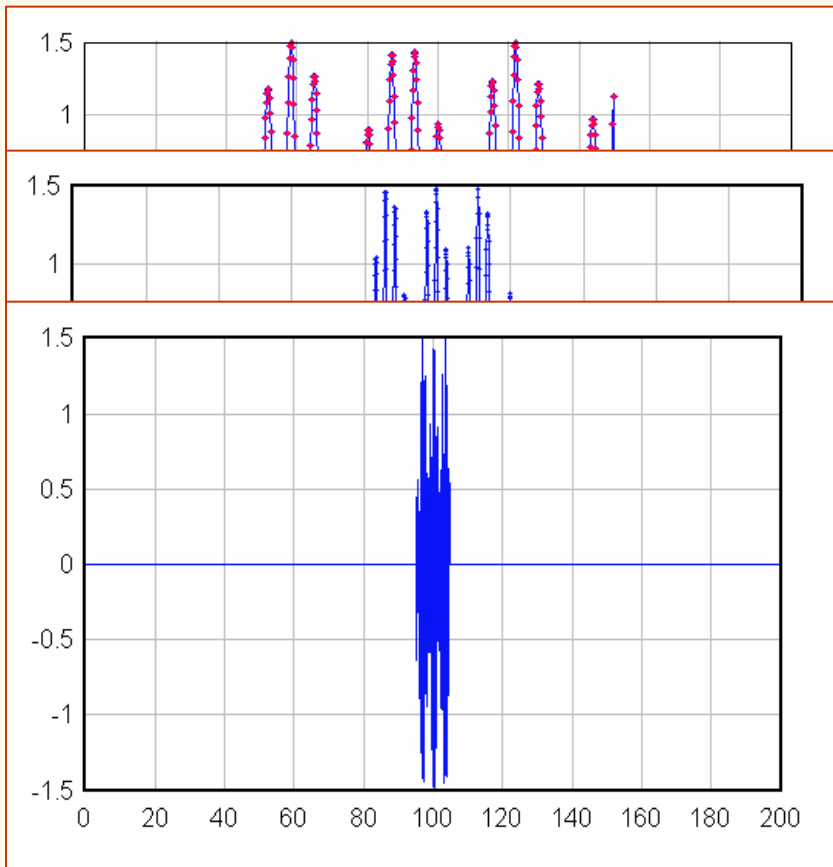
$$f = 0..25 \text{ soit } 250 \text{ points}$$

Problèmes

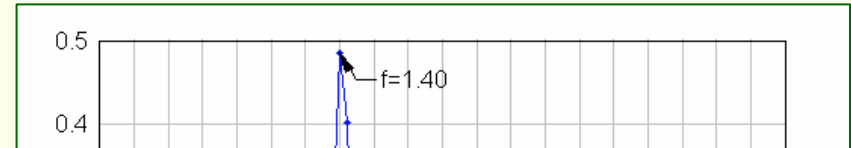
- fréquence des lignes \rightarrow résolution
- amplitude des lignes

'Zero-Padding'

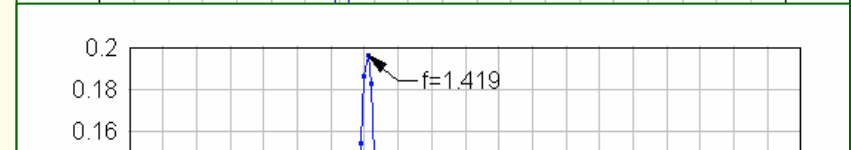
- Solution pour calculer une TFTD avec une FFT
 - on borde le signal réel avec des zéros sur une longue durée
- On peut ainsi améliorer l'échantillonnage en fréquence
 - on change la précision, pas la résolution !



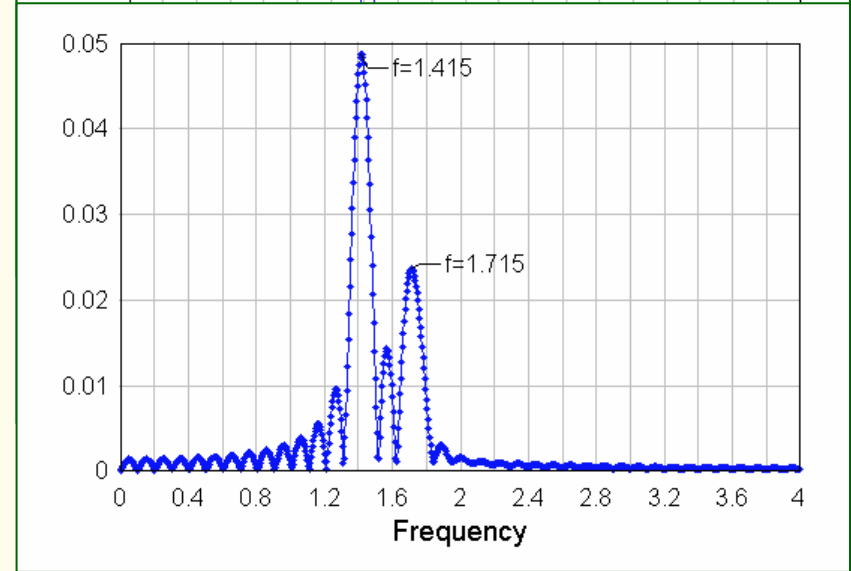
$r=2$



$r=5$

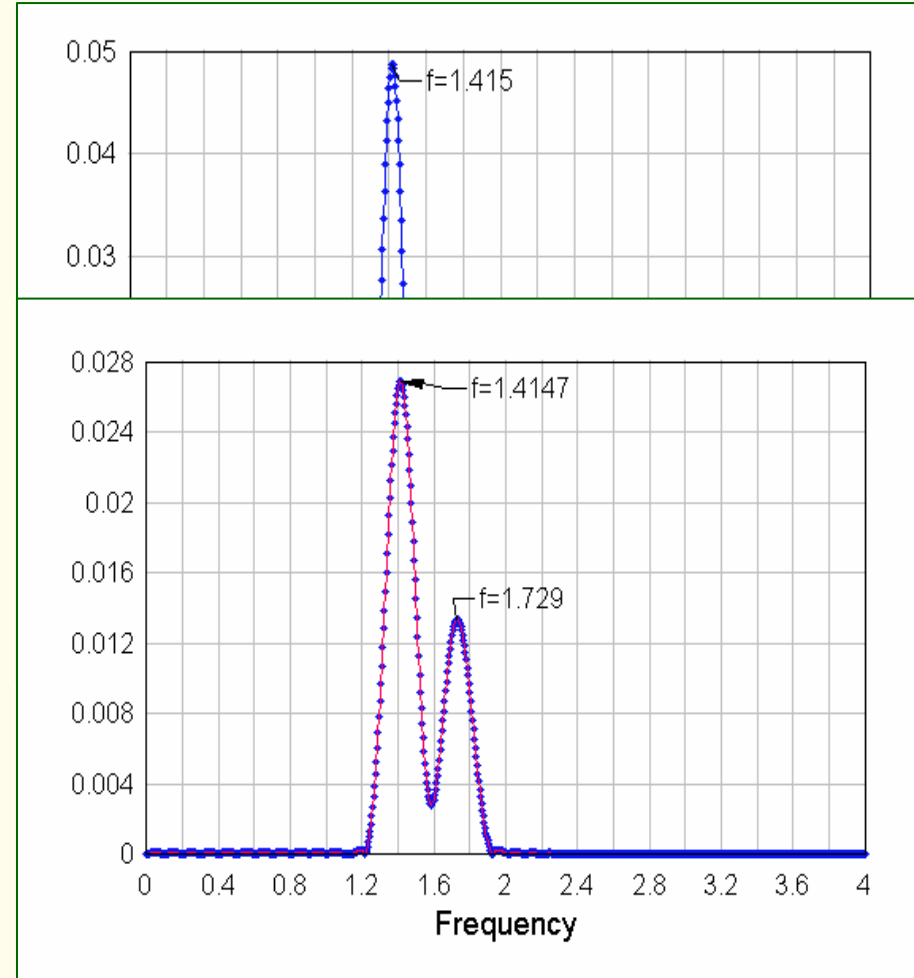
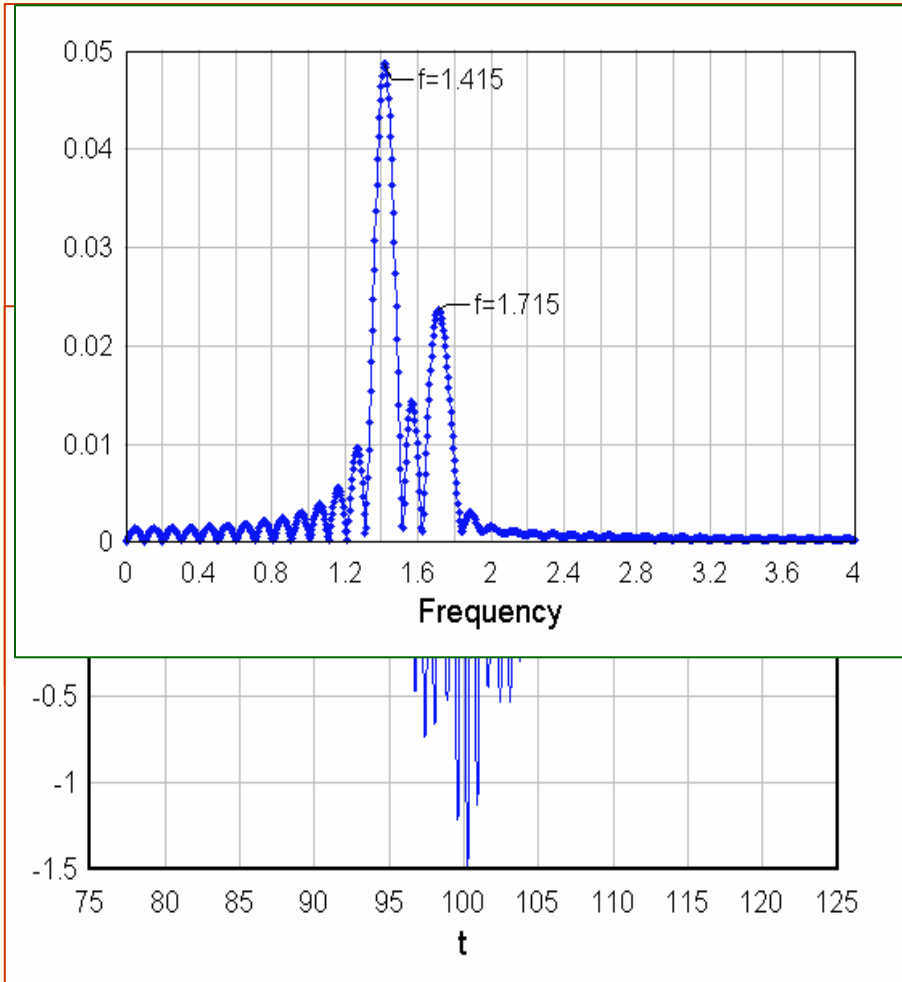


$r=20$



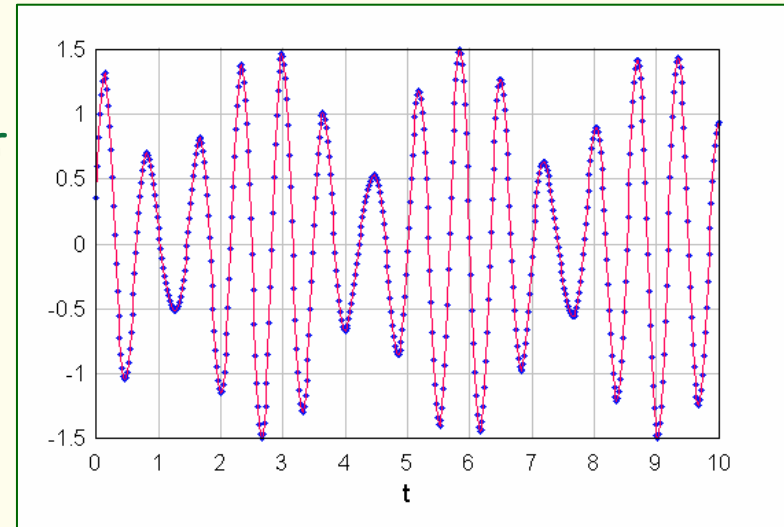
Fenêtre de Hamming

- Atténuation des lobes secondaires
 - fenêtre de Hamming : $0.54 - 0.46\cos(2\pi t/T)$



Pour se mettre en appétit :

- Résolution par une analyse en fréquence
 - solution parfaite pour un signal sans bruit
 - précision machine atteinte
- Inconnues :
 - nombre de fréquences
 - fréquences et amplitudes

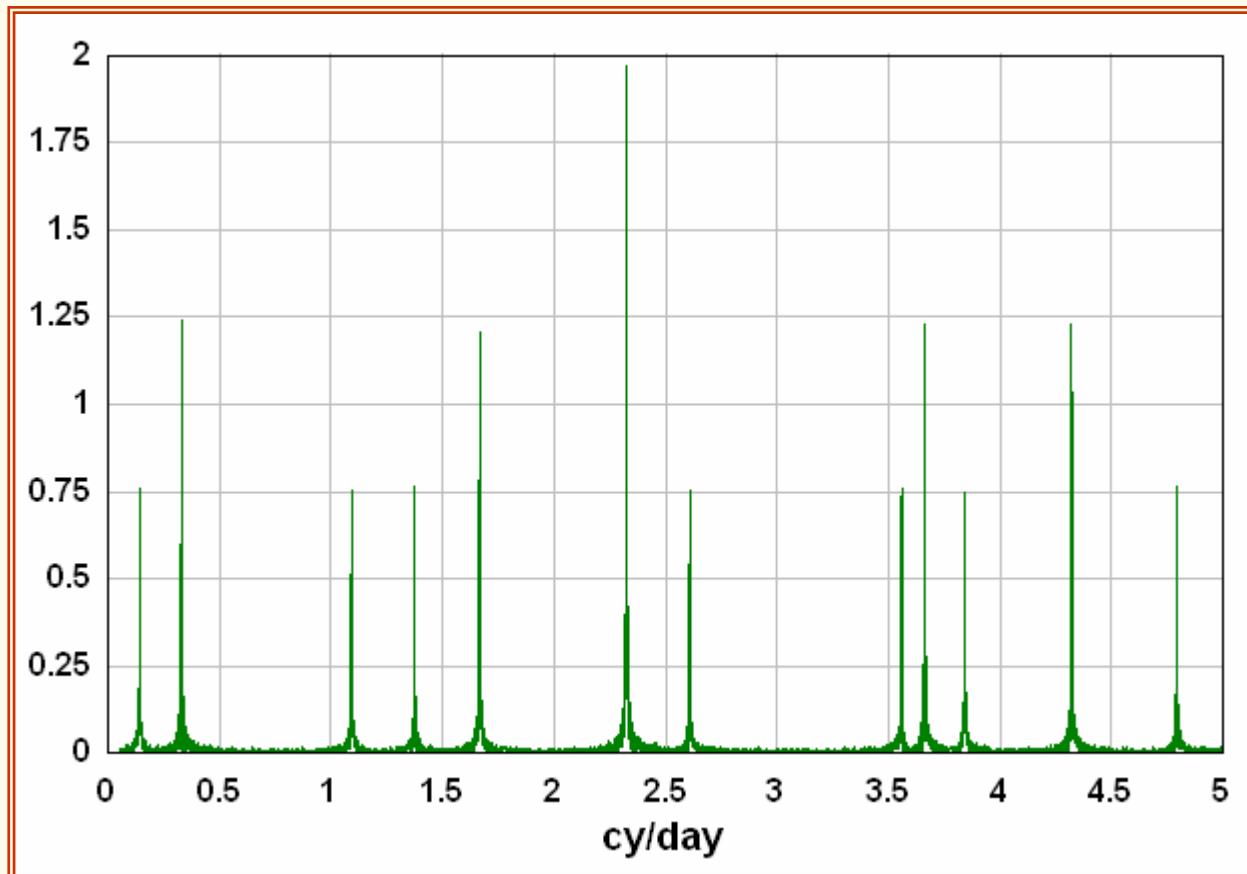


	Frequency	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N
0 t^0	0.00000000E+00		5.082557E-16	
1 t^0	1.41400000E+00	9.888E-18	1.000000E+00	9.13E+02
2 t^0	1.73200000E+00	1.646E-17	5.000000E-01	1.78E+15

'N' est très mal défini

- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

Réplication (= aliasing)



Répliques

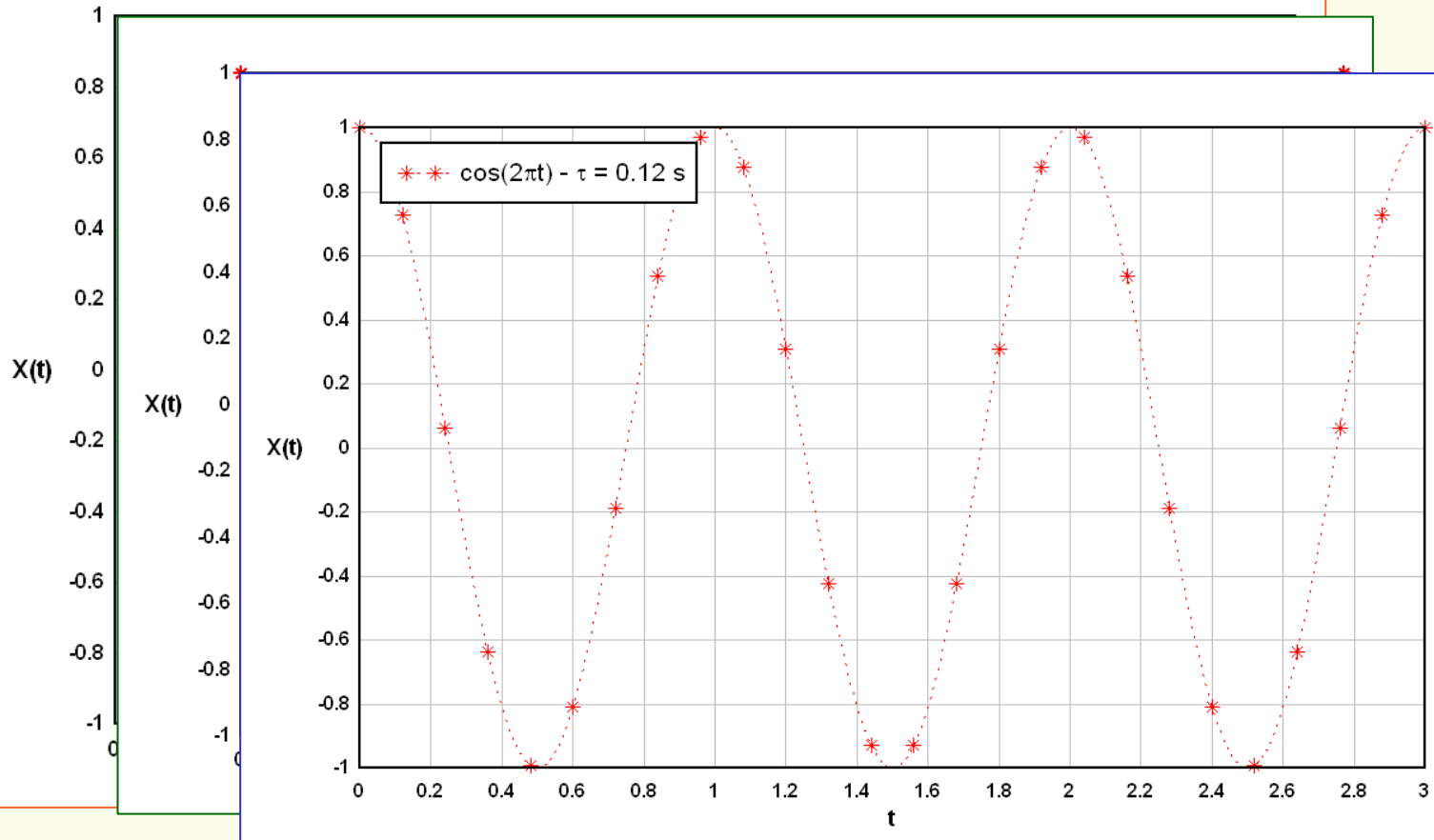
- Raies significatives à une mauvaise fréquence
 - elles correspondent à de véritables composantes
 - leur fréquence est totalement fausse en général
- Origine : spectre d'un signal échantillonné
 - le spectre est périodique et à bande limitée
 - Les raies de basses fréquences sont répliquées aux hautes fréquences
- Rapport étroit avec l'apparition de raies supplémentaires venant de la fenêtre d'observation

Formulation du problème

- L'effet réplique est bien connu en analyse fréquentielle
 - toujours présent dans les échantillonnages réguliers
 - beaucoup plus difficile à caractériser dans les autres cas
 - très lié aux 'irrégularités régulières' et aux effets d'agrégats de données
 - totalement absent avec un échantillonnage aléatoire
- Les répliques limitent le domaine de fréquence utile
 - Echant. régulier : $\nu_{\max} = 1/2\tau \rightarrow$ Fréquence de Nyquist
- Constatation : avec échant. irrégulier \rightarrow obtention de fréquences élevées possible
 - règles empiriques pour généraliser la notion de Fréquence de Nyquist :
 - inverse de l'intervalle le plus petit
 - inverse de l'intervalle moyen
 - pas de limite
 - paramètre essentiel pour conduire une exploitation avec sûreté

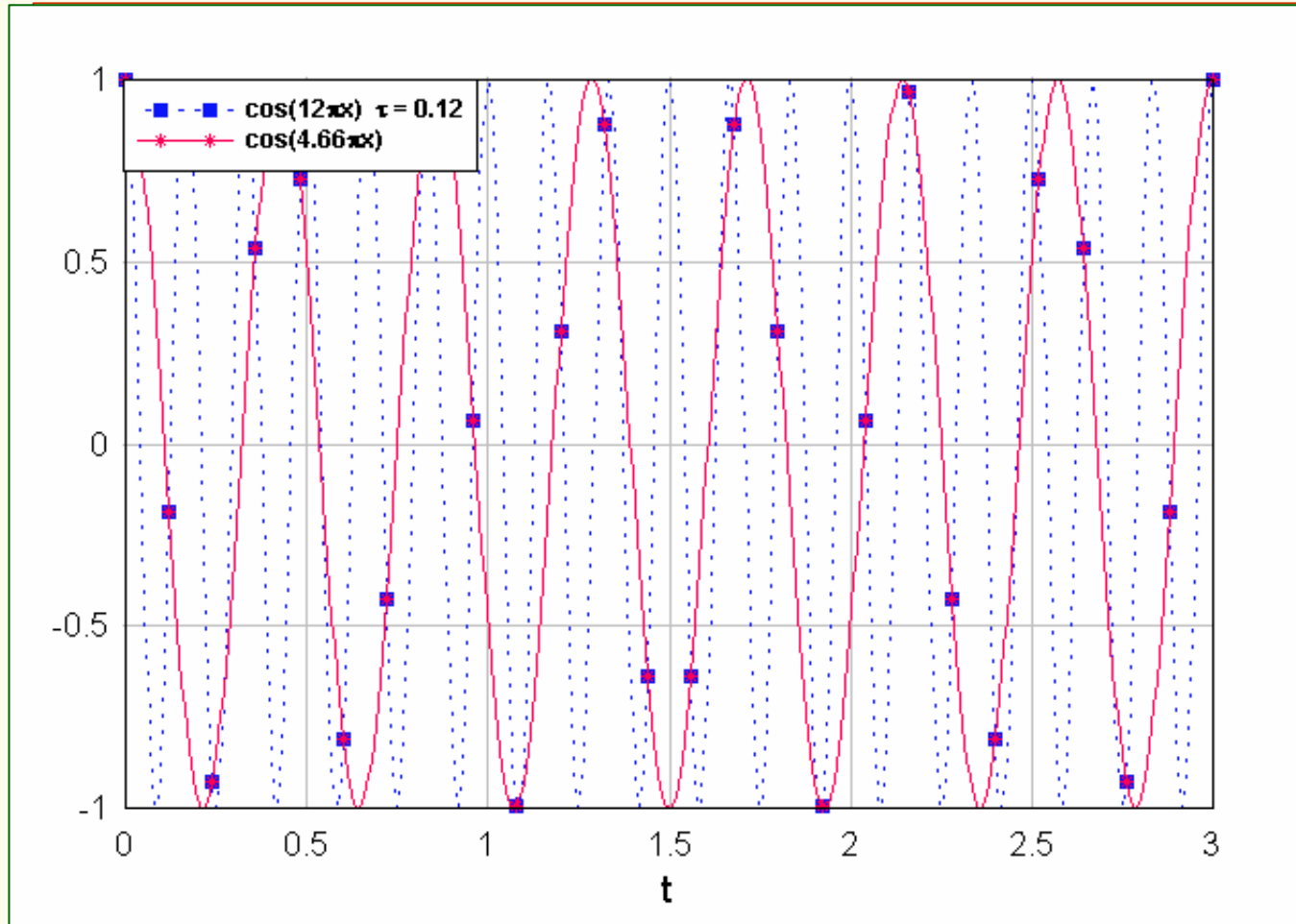
Signal harmonique simple

- Visualisation de l'échantillonnage



Le signal (sans bruit) peut être reconstruit à partir des mesures
- solution pour la fréquence et l'amplitude

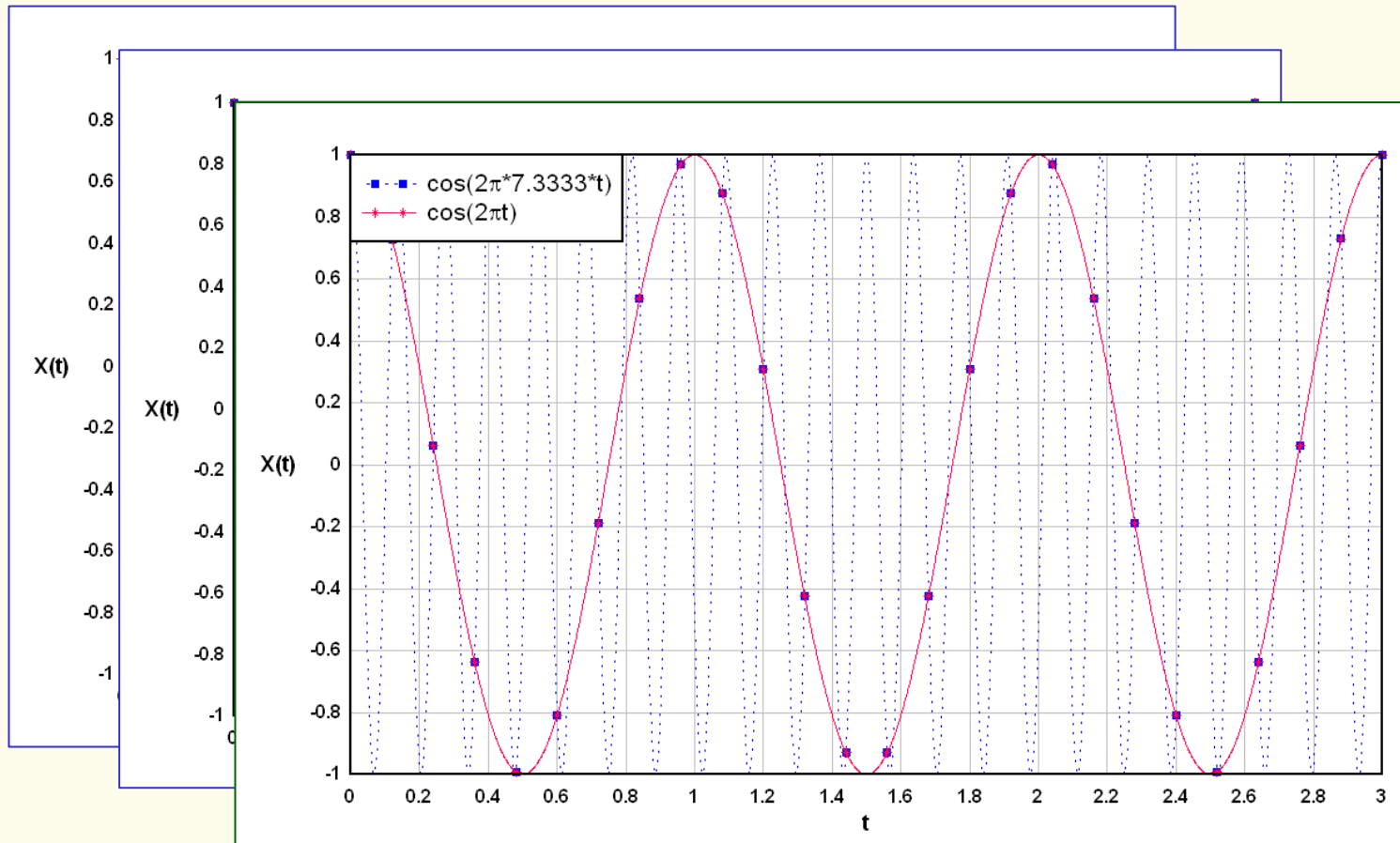
Répliques : HF vers BF



- Intuitivement il y a trop peu de mesures pour retrouver le signal
- Y a-t-il un (ou plus) signal de basse fréquence qui passe par les points ?

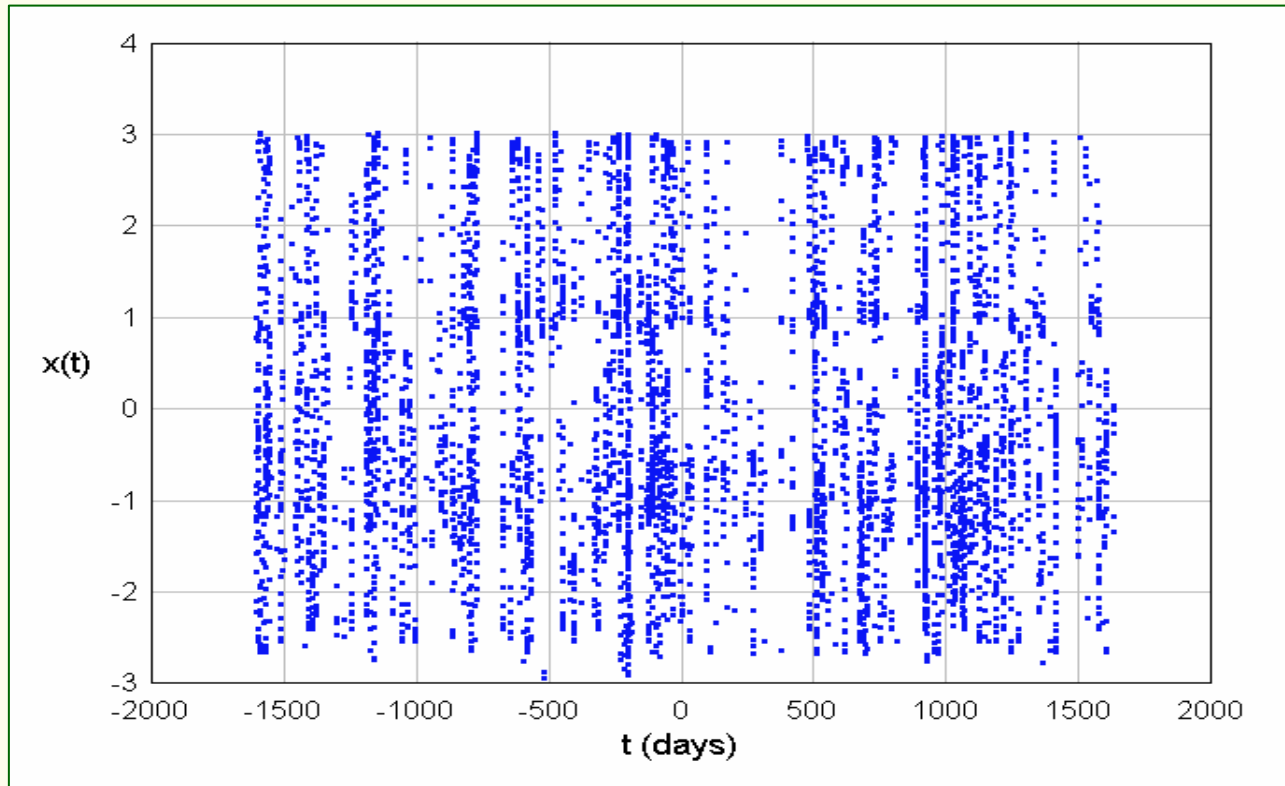
Répliques : BF vers HF

- Raies significatives à une mauvaise fréquence
 - elles correspondent à de véritables composantes



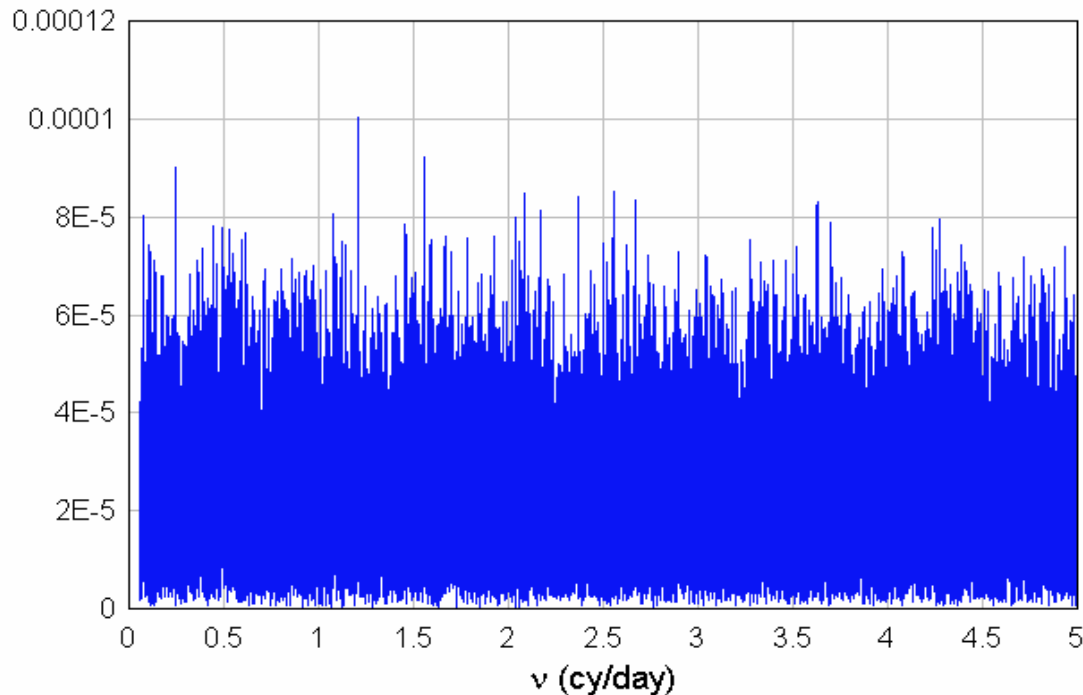
Fenêtre spectrale d'observation

- Signaux simples sur la fenêtre temporelle du Laser Lune
 - 5000 dates d'observations sur 10 ans
 - intervalles allant de qq minutes à plusieurs mois
 - régularités sous-jacentes : jours, semaine, mois lunaire, saisons



Fenêtre Laser Lune

- $x(t) = 2 \cdot \cos(2\pi t/T) + N(\sigma=0.001)$ $T = 3$ jours $\nu = 0.3333$
- Etude de la puissance spectrale.



- trace de réplique avec $\eta \sim 1$
- effet régulier de 1 jour

Le spectre doit se répéter :

$$\nu = 0.33, 1.33, 2.33 \dots$$

et

$$\nu = 0.66, 1.66, 2.66 \dots$$

Répétition approximative en amplitude : on retrouve la ligne majeure
Toutes les autres lignes sont artificielles y compris le 'fond'
→ preuve sur la figure suivante (spectre du signal - la ligne trouvée)

Mélange des spectres

- $x(t) = a_1 \cos(2\pi t/T_1) + a_2 \cos(2\pi t/T_2)$
 - $a_1 = 2$ $T_1 = 2.5$ jours $v_1 = 0.4$
 - $a_2 = 1$ $T_2 = 0.555$ jours $v_2 = 1.8$
- t_k avec la fenêtre laser-lune

Le spectre doit se répéter :

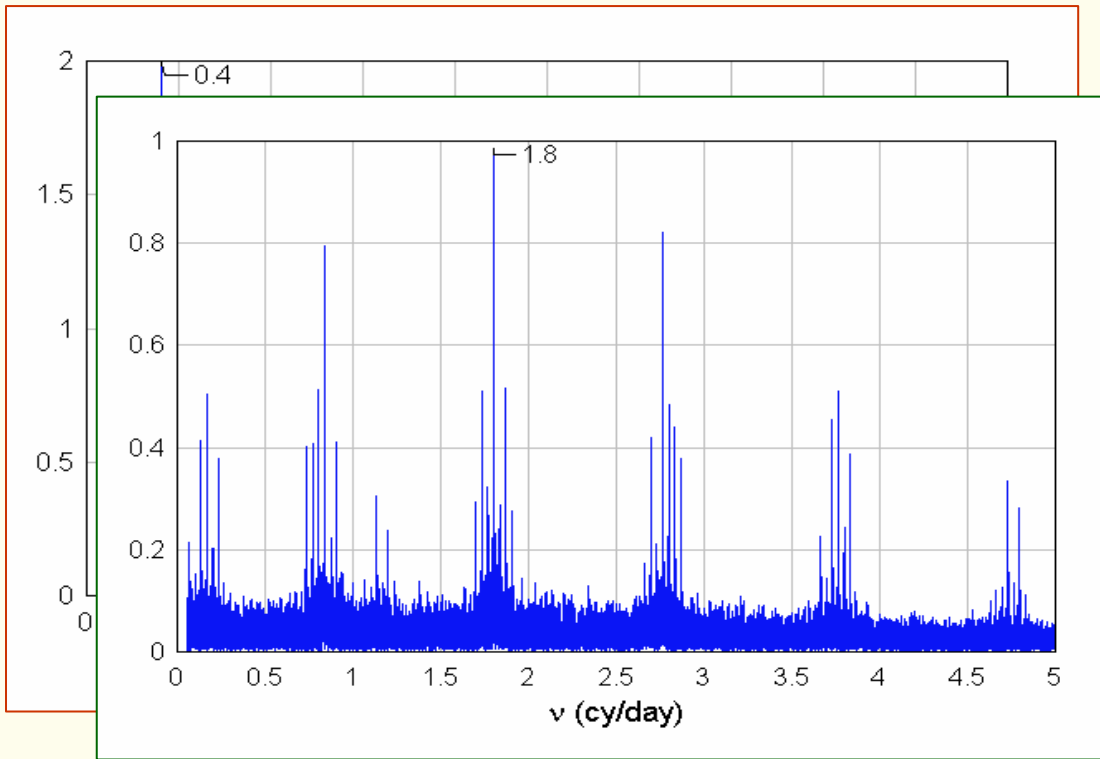
$$v = 0.4, 1.4, 2.4 \dots, 0.6, 1.6, 2.6 \dots$$

et

$$v = 0.8, 1.8, 2.8 \dots 0.2, 1.2, 2.2$$

Mélange des spectres

- Les spectres sont relativement séparés
- les lignes majeures ont les bonnes amplitudes

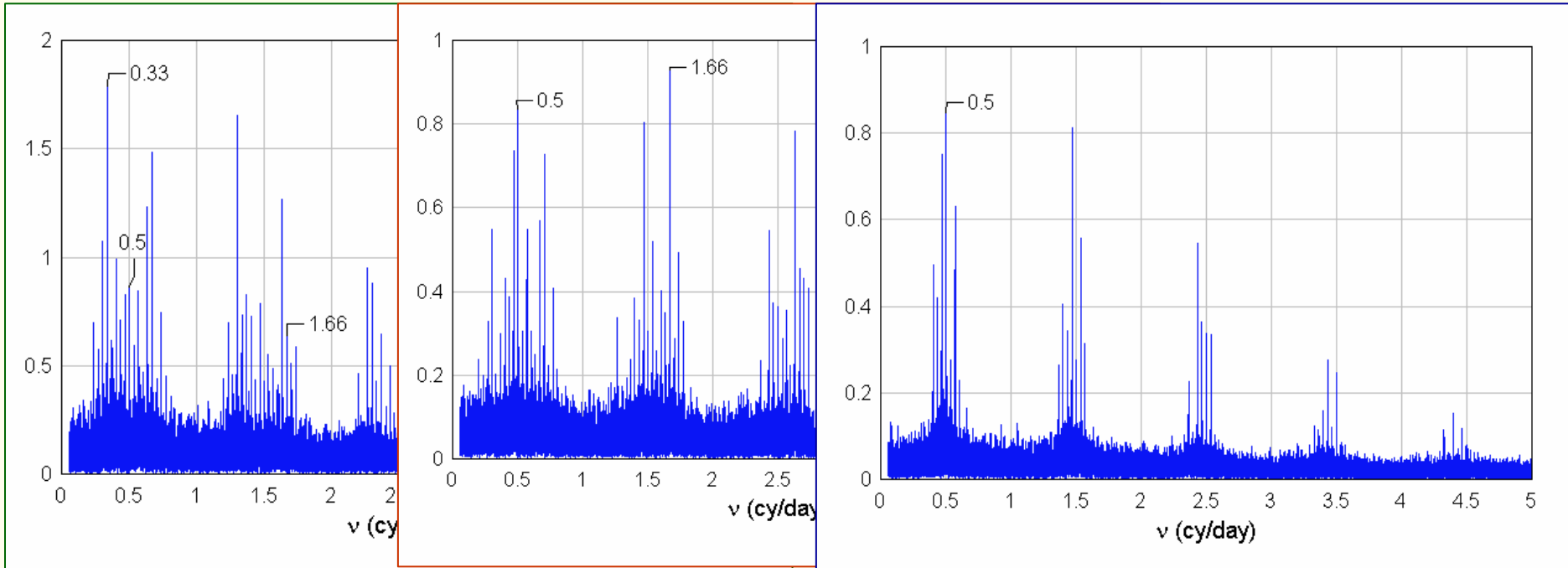


- On identifie et enlève la ligne $\nu = 0.4$

	Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N	
1	t^0	4.00000001E-01	2.49999999E+00	4.295E-09	2.000013E+00	4.43E+01
2	t^0	1.80018002E+00	5.55500001E-01	1.864E-09	1.000022E+00	3.20E+04
3	t^0	1.20407976E+00	8.30509768E-01	2.896E-05	9.741412E-05	3.16E+00

Mélanges des spectres

- Trois lignes dans le signal 3, 0.6, 2 jours ($\alpha = 2, 1, 0.7$) [$\nu = 0.33, 1.66, 0.5$]
- Les spectres se recouvrent,
- Les amplitudes sont incertaines



	Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude	S/N	
1	t^0	3.33333334E-01	2.99999999E+00	5.054E-09	1.999986E+00	2.98E+01
2	t^0	1.66666667E+00	6.00000000E-01	2.101E-09	1.000027E+00	2.50E+01
3	t^0	5.00000016E-01	1.99999994E+00	1.418E-08	7.000089E-01	2.79E+04
4	t^0	1.20408133E+00	8.30508685E-01	2.958E-05	9.609074E-05	3.14E+00

Un peu de théorie

Répliques avec échantillonnage régulier

Signal: $x(t)$ défini dans le domaine temporel

mesures : $x(t_k) = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$

Spectre : $X(\nu)$ défini dans le domaine des fréquences

Puissance: $P(\nu)$ " " "

Analyse en fréquence : projection de $X(t)$ sur un espace de fonctions

$$X(\nu) = \Re(X, e^{2j\pi\nu t}) \text{ avec } \Re \text{ opérateur linéaire et } P(\nu) = (XX)^{1/2}$$

Exemples: *TF, projection sur un base, LSQR*

Echantillonnage régulier : $t_{k+1} - t_k = \tau \quad \forall k \quad \Rightarrow t_k = t_0 + k\tau$

Echantillonnage quelconque : $t_k - t_{k-1} = \tau_k$

Répliques avec échantillonnage régulier

$$t_k = t_0 + k\tau \quad \Rightarrow \quad e^{2i\pi\nu t} = e^{2j\pi\nu t_0} \cdot e^{2j\pi\nu k\tau}$$

soit $\nu \rightarrow \nu + m/\tau$:

$$e^{2j\pi(\nu+m/\tau)k\tau} = e^{2j\pi km} \cdot e^{2j\pi\nu k\tau} = e^{2j\pi\nu k\tau} \quad \forall m \in \mathbf{Z}$$

donc avec $\eta = 1/\tau$ on a $\forall \nu$:

$$X(\nu + \eta) = X(\nu) ; \quad P(\nu + \eta) = P(\nu)$$

$$X(\nu + k\eta) = X(\nu) ; \quad P(\nu + k\eta) = P(\nu) , \quad k \in \mathbf{Z}$$

Attention : propriété due à l'échantillonnage régulier

mais : $P(\nu) = P(-\nu) \Rightarrow \quad P(\nu) = P(\eta - \nu) \quad : \text{symétrie en } \eta/2$

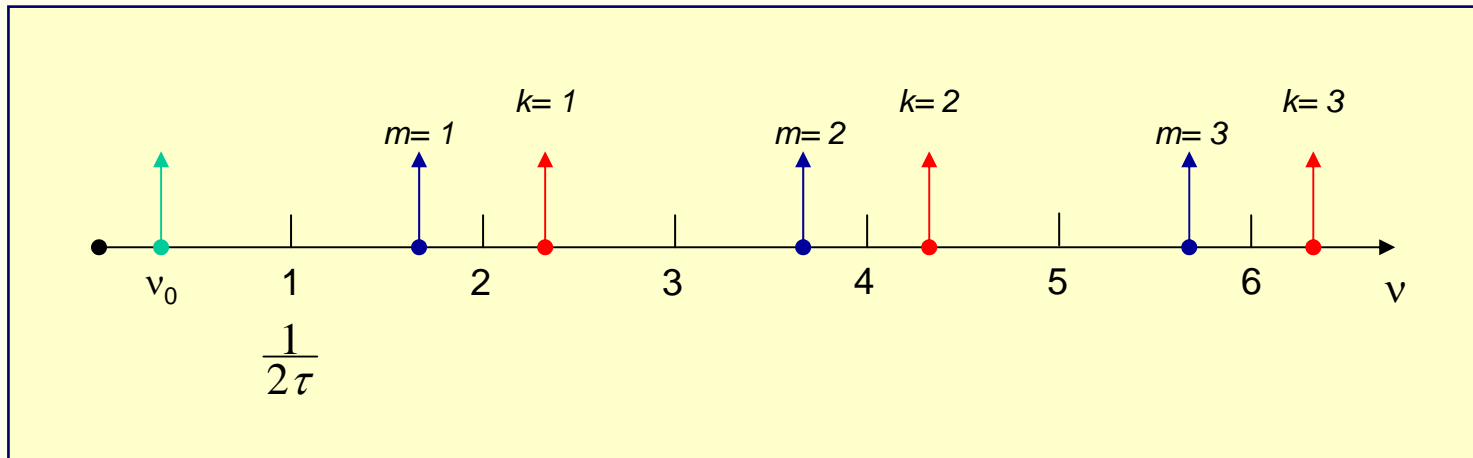
$$\frac{1}{2\tau} = \frac{\eta}{2} : \text{Fréquence de Nyquist}$$

Structure des répliques en fréquence

- Une ligne spectrale sur $0 < \nu < \eta/2$ a une double infinité d'images :

$$\nu_+ = \nu + k\eta, \quad k = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

$$\nu_- = -\nu + m\eta, \quad m = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

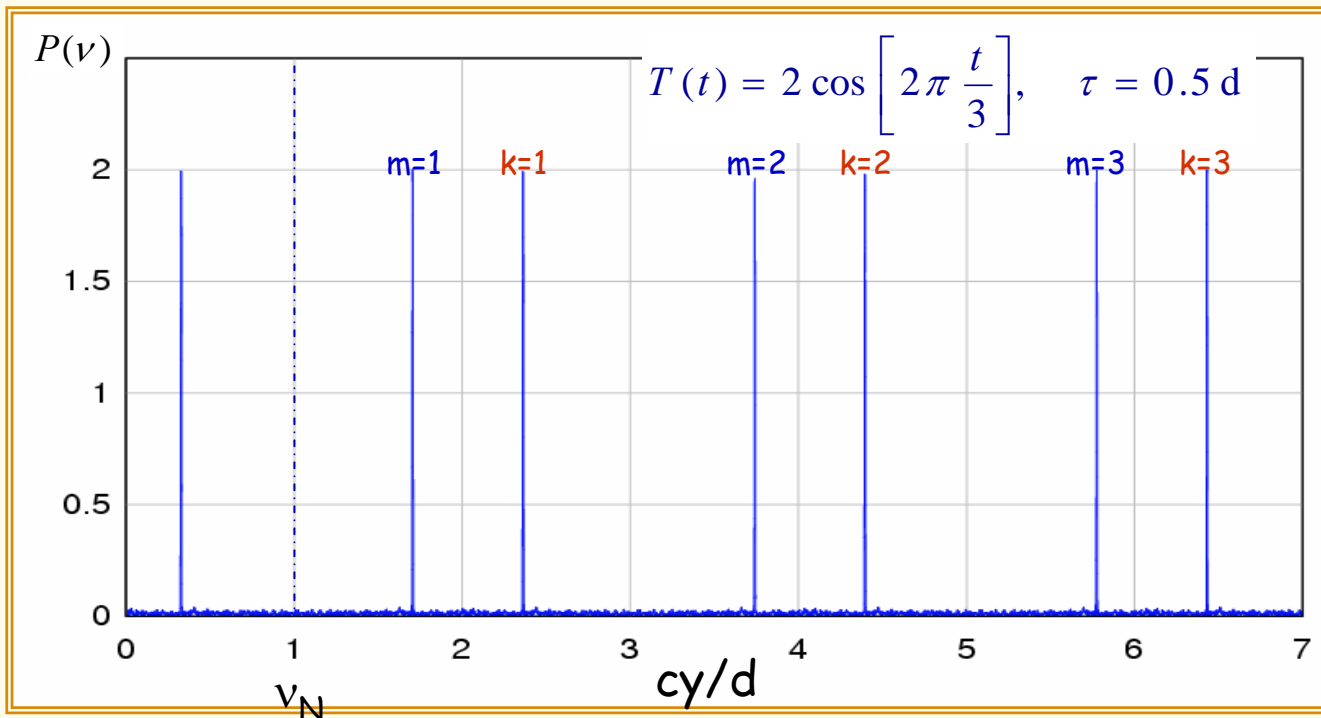


- Conséquence usuelle :
 - Dans une série temporelle régulière on ne peut récupérer une ligne de fréquence $\nu > 1/2\tau$!
- Meilleure formulation :
 - Dans une série temporelle régulière on peut récupérer sans ambiguïté toute ligne dans un intervalle de fréquences de longueur $1/2\tau$ (e.g $1/\tau : 3/2\tau$)

Exemple

- En général on se limite à $0 < \nu < \eta/2$ qui contient toute l'information fréquentielle.
 - Mais une fréquence élevée peut se trouver imagée dans cet intervalle

Périodogramme avec 1000 mesures, $\nu = 1/3$ et $\tau = 0.5$ d ; $\eta/2 = 1$ cy/d



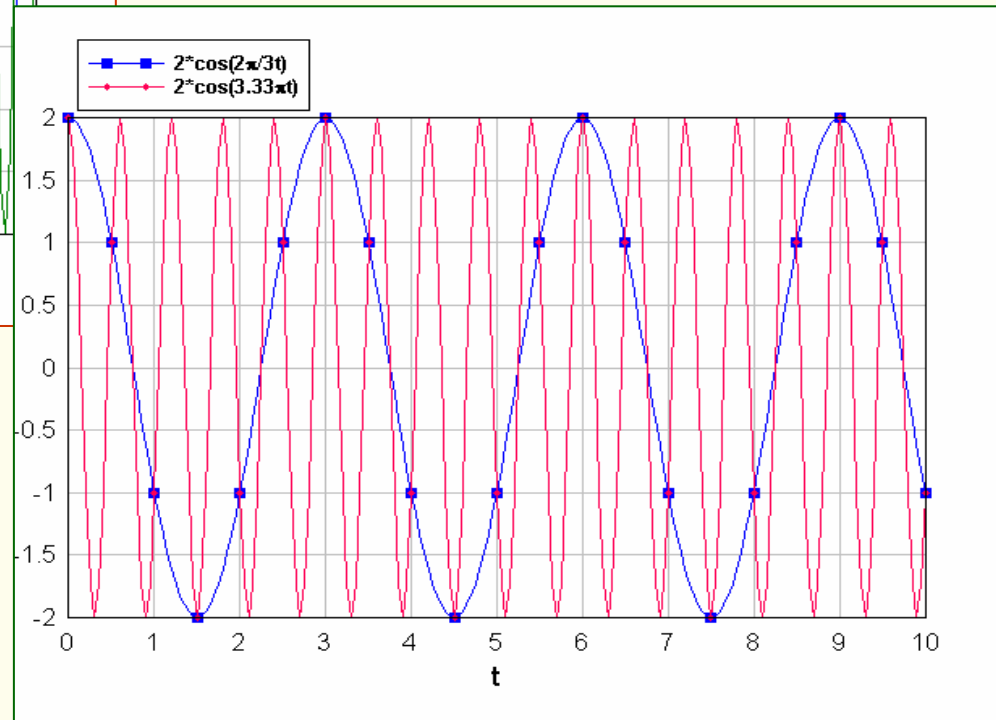
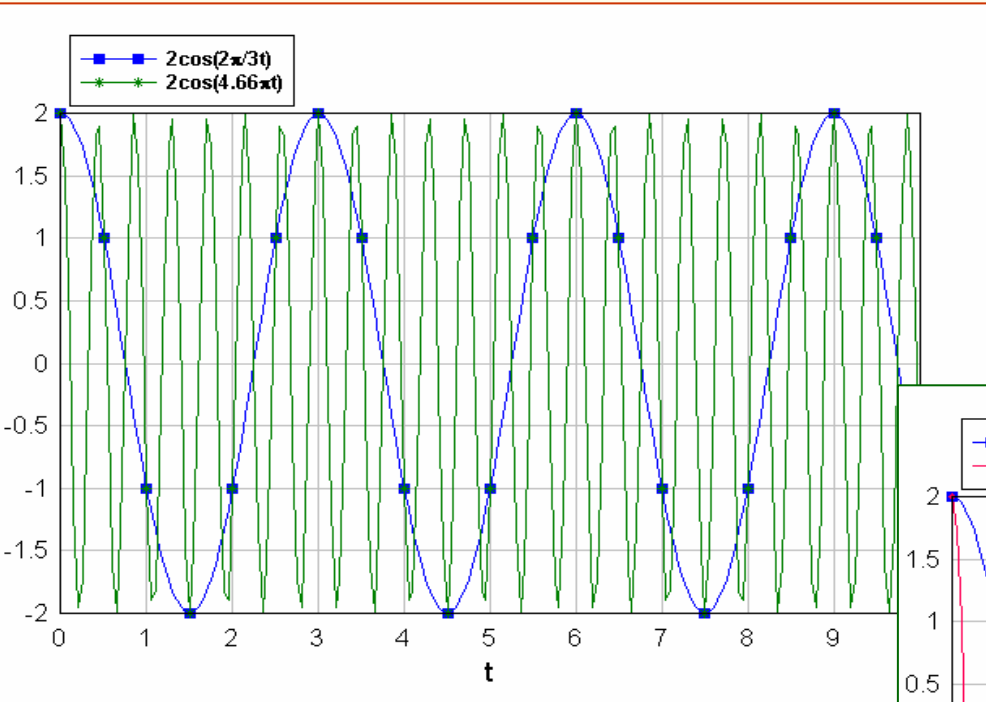
$$\nu_+ = \nu + k\eta$$

$$\nu_- = -\nu + m\eta$$

Origine des répliques

$$v_+ = 0.33 + 2k : \{ 0.33, 2.33, 4.33 \dots \}$$

$$v_- = -0.33 + 2m : \{ 1.67, 3.67, 5.67 \dots \}$$



Cas général

- Echantillonnage arbitraire : t_1, t_2, \dots, t_n with $t_{k+1} - t_k = \tau_k$
- la réplique apparaît si $P(\nu)$ est périodique.
- Avec la linéarité on a : $P(\nu) = \sum \alpha_k e^{-2j\pi\nu t_k}$
- Périodicité si : $\exists \eta / 2\pi\nu t_k = 2\pi(\nu + \eta)t_k + \phi \quad \forall k$
avec η et ϕ indépendants de k

$$\eta\tau_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

Systeme de n-1 équations à résoudre en η

Pas de solution en général \rightarrow pas de répliques

Cas particuliers

- Echantillonnage régulier : $\tau_k = \tau \rightarrow \eta\tau \equiv 0 \pmod{1} \rightarrow \eta = 1/\tau$ (or m/τ)
- Echant. pseudo régulier : $\tau_k = p_k\tau$, $k = 1, 2, \dots, n-1$

-les τ_k sont des multiples d'un même élément (et donc de ses diviseurs)

-ex : observations à 12h tous les jours ... de ciel clair !

- parmi les possibilités l'un est le plus grand $\tau \rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = 1$

[un autre $\tau' < \tau$ est un diviseur de τ , donc les p'_i sont des multiples des p_i et ont un diviseur commun d]

$$\eta\tau p_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

- système invariant par changement d'unité de temps. On prend $\tau = 1$ ou de façon équivalente, la véritable inconnue est $\eta\tau = \sigma$

Cas particuliers

$$\sigma p_k \equiv 0 \pmod{1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

Pour k donné on a les solutions : $\sigma = \frac{m}{p_k}, \quad m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sigma \in \mathbf{Q}$

Solution générale :

$$\sigma = \frac{r}{s} \quad \text{avec} \quad (r, s) = 1 \Rightarrow s \mid p_k \forall k \Rightarrow (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \neq 1$$

Donc $s=1$ et la plus petite solution est $r=1$:

$$\sigma = 1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{\tau}$$

Remarque : τ peut être « que le plus petit intervalle et donc η sera très élevé

• Echant. pseudo irrégulier :

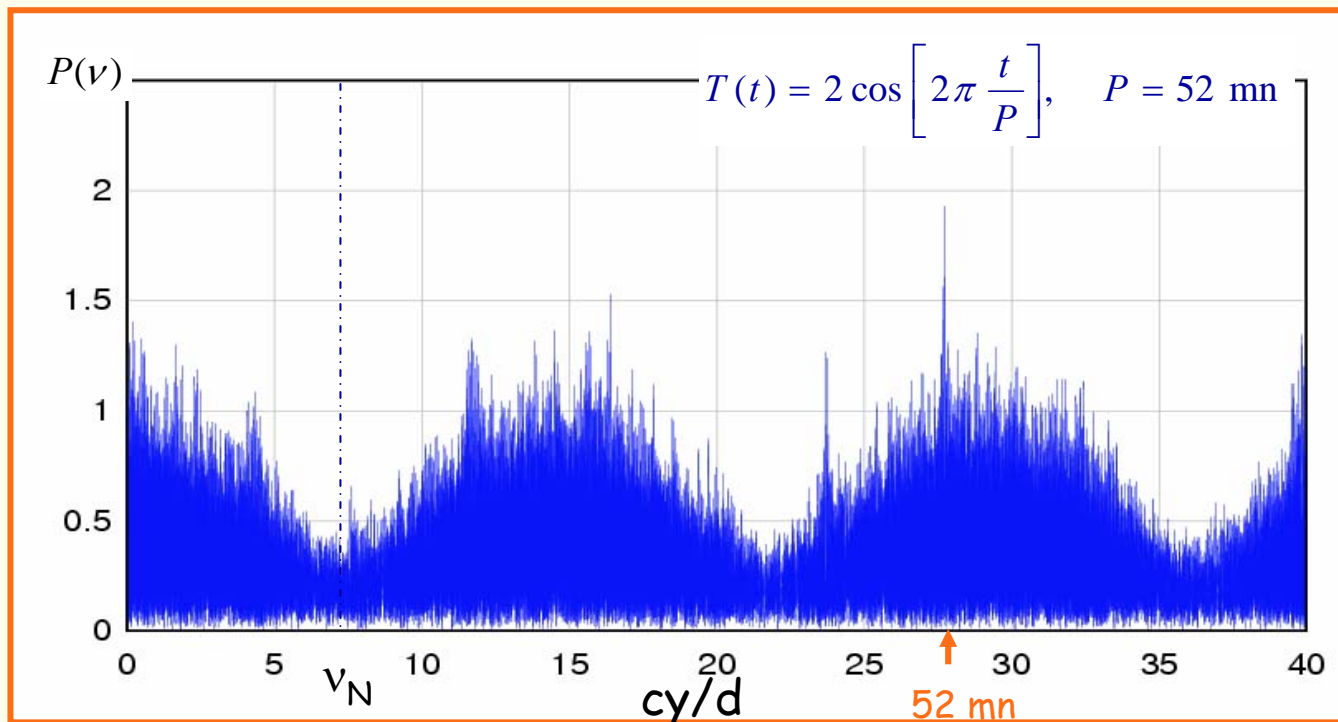
• approximation diophantienne $q\tau_k/\tau_m \approx p_k \rightarrow \eta \approx q/\tau_m$

Conséquences

- Fréquence maximum que l'on peut extraire d'un signal
 - Echant. régulier = $\eta/2 = 1/2\tau \sim$ inverse du pas de mesure
- Pour un échantillonnage général diverses règles proposées
 - $1/\tau_{\min}, 1/\langle\tau\rangle, \dots$
- Pour le mathématicien : pas de réplique
 - pas de limitation sur la fréquence max
- En pratique c'est la notion d'irrégularité qui est difficile
 - régulier + une observation manquée ?
 - intervalle moyen bien défini ou non avec une distribution uniforme
 - distribution pas paquets avec de larges lacunes (astro, géophysique)
- Il faut essayer de mieux caractériser la distribution des t_k

Exemple : échantillonnage de Gaia

- Exploitation des données photométriques
 - études des étoiles variables
 - recherche de périodes
- Plus petit intervalle entre deux mesures : $t = 100 \text{ mn} \rightarrow \nu_N \sim 7.2 \text{ cy/d}$
 - pas de réplique visible à plus haute fréquence
 - des variables de très courtes périodes pourront être étudiées



- I Objet et méthodes du cours
- II Signal et échantillonnage
- III Transformée de Fourier
- IV FFT et usage de la FFT
- V. Répliques : signaux réguliers et irréguliers
- VI. Analyse en fréquence : FAMOUS

FAMOUS

Frequency Analysis Mapping On Unusual Samplings

- analyse en fréquence
- description de FAMOUS
- illustrations et performances

Analyse en fréquence

- Méthode pour analyser les signaux quasi-périodiques

$$s(t) = \sum_k a'_k e^{2\pi j\nu'_k t}$$

- Il est possible de trouver une approximation quasi-périodique de $s(t)$ sur $[0, T]$ bien plus précise que par l'analyse de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=0}^{k=N} a_k e^{2\pi j\nu_k t}$$

- Les fréquences ν_k et les amplitudes complexes a_k sont déterminées par l'algorithme
- La méthode est très utilisée pour les systèmes dynamiques pour représenter les résultats d'une intégration numérique.
 - par construction échantillonnage régulier en t
- FAMOUS étend le principe aux séries temporelles observationnelles

FAMOUS : Présentation

- FAMOUS réalise la décomposition d'une série temporelle :

$$\phi(t) = c_0 + \sum c_k \cos(2\pi\nu_k t) + s_k \sin(2\pi\nu_k t), \quad k = 1, \dots, n$$

- c_k et s_k sont des constantes ou des polynomes du temps
- On résoud également pour les fréquences ν_k
- Les lignes spectrales sont orthogonales par rapport aux τ_k (aussi bien que possible)
- FAMOUS n'utilise jamais la FFT
- Il fonctionne sur tout type d'échantillonnage
- Un système interne détermine le meilleur échantillonnage en fréquences
- Il détecte les distributions régulières → calculs optimisés
- Il a un mode spécial pour les signaux périodiques $\nu_k = k\nu_1$
- Il estime la précision et le niveau de signification de chaque ligne
- Plusieurs modes de sortie pour examen détaillé des résultats

Modèle de décomposition

Avec k fréquences identifiées on a le modèle :

$$\psi(t) = c_0 + \sum_1^k c_i \cos(2\pi \nu_i^0 t) + s_i \sin(2\pi \nu_i^0 t)$$

où

c_0, c_1, \dots, c_k et s_0, s_1, \dots, s_k sont :

constantes ou des polynômes du temps :

$$C_i = a_i^0 + a_i^1 t + a_i^2 t^2 + \dots + a_i^p t^p$$

$$S_i = b_i^0 + b_i^1 t + b_i^2 t^2 + \dots + b_i^p t^p$$

avec $p = p(i)$: degré sélectionnable pour chaque ligne

Pour $i = 0$ c'est donc un ajustement des très basses fréquences sur un polynôme → théories planétaires à variation séculaire.

Solution avec k fréquences

Lorsque k fréquences ont été trouvées on ajuste le modèle par MC non-linéaire :

$$(a_i^r, b_i^r, \nu_i) :: \text{least - squares fit} \Rightarrow \min |S(t) - \psi(t)|^2$$

Cette étape est très sensible aux conditions initiales

On résoud en deux temps :

- SVD avec $\nu_i = \nu_i^0$ and
- Optimisation de Levenberg-Marquardt avec toutes les inconnues

Résultat : meilleure décomposition de $S(t)$ sur le modèle à k fréquences

Les fréquences sont donc réajustées à chaque étape

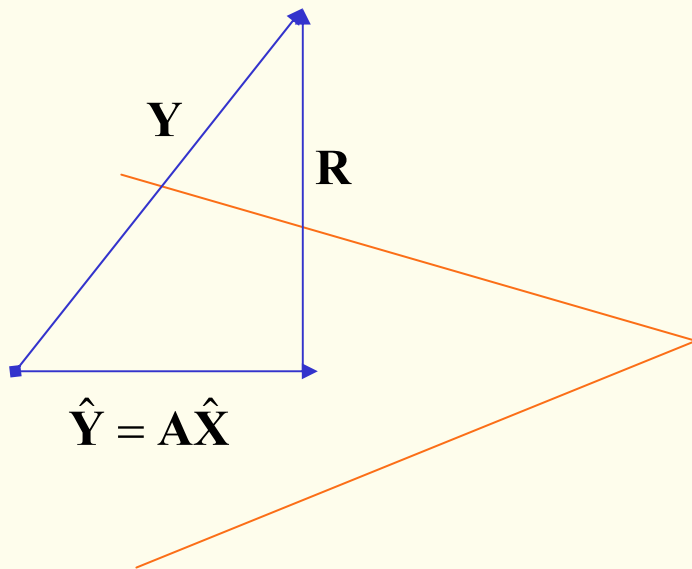
Étape suivante : recherche de la k+1 fréquence

Orthogonalité de la $(k+1)^e$ fréquence

Avec la solution par moindres carrés :

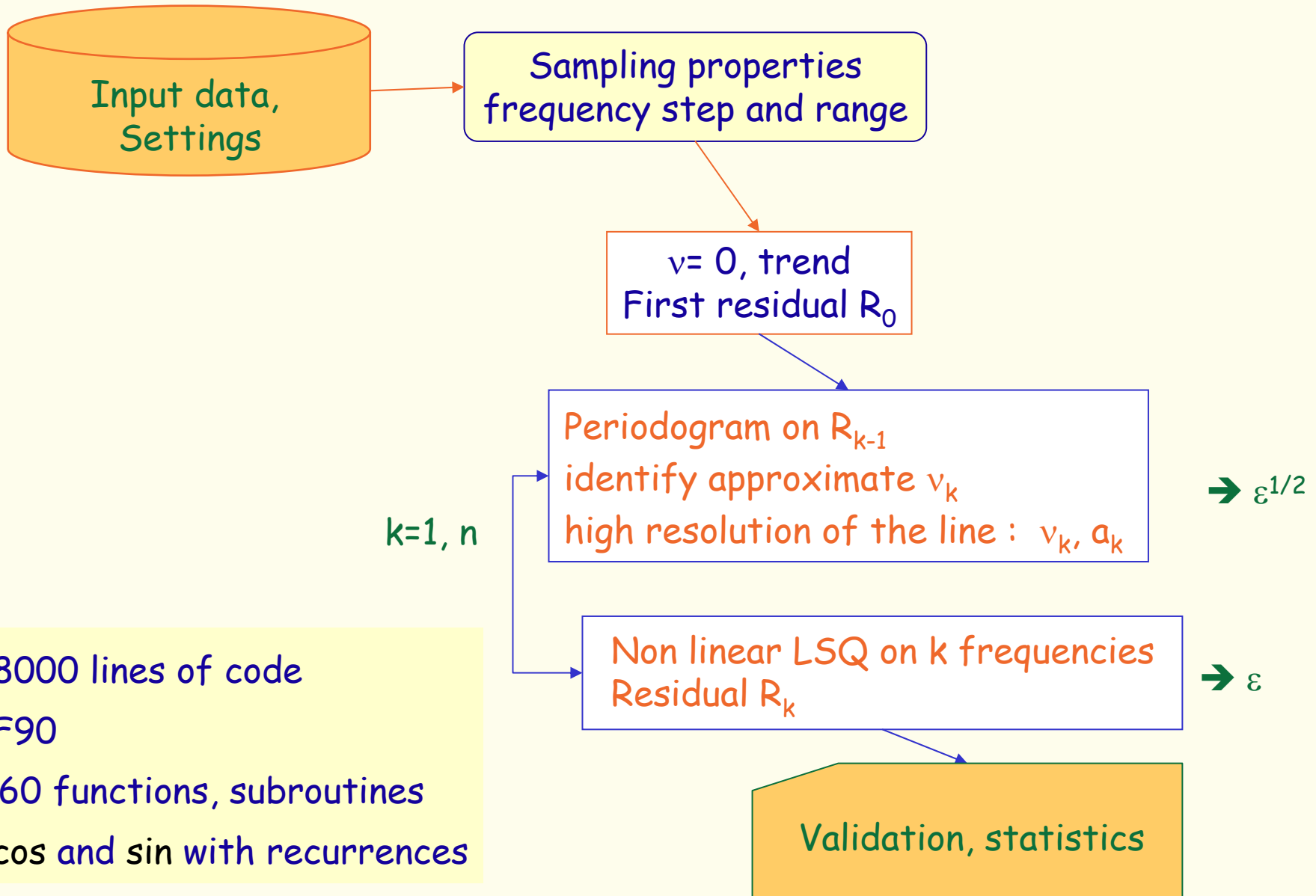
$$\mathbf{Y} \prec \mathbf{AX} :: \text{MC ajuste } \hat{\mathbf{X}} \Rightarrow \min |\mathbf{Y} - \mathbf{AX}|^2$$

Propriété caractéristique : $\mathbf{R} = (\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}) \perp \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$



Une nouvelle ligne trouvée dans les résidus est orthogonale à l'espace linéaire du modèle précédent

Etapes de l'algorithme FAMOUS



- 8000 lines of code
- F90
- ~ 60 functions, subroutines
- cos and sin with recurrences

Settings of FAMOUS

- **file_in** Input filename with the data $y(x)$ as xx, yy on each record
- **icolx** index of the column with the time data in **file_in**
- **icoly** index of the column with the observations in **file_in**
- **file_out** output filename
- **numfreq** search of at most **numfreq** lines
- **flmulti** multiperiodic (true) or periodic (false) search in the signal.
- **flauto** automatic search (true) or preset value (false) of the max and min frequencies
- **frbeg** preset min frequency in preset mode
- **frend** preset max frequency in preset mode
- **fltime** automatic determination (true) or preset value (false) of the time offset
- **tzero** preset value of the origin of time if **fltime** = .false. e
- **threshold** threshold in S/N to reject non significant lines ($<$ threshold)
- **flplot** flag for the auxiliary files (power spectrum and remaining signal after **k** lines)
- **isprint** control of printouts (0 : limited to results, 1 : short report, 2 : detailed report)
- **iresid** control the output of the residuals
- **fldunif** flag for the degree of the mixed terms (true : uniform degree for all terms)
- **idunif** degree if **fldunif** = .true.
- **idegf(k)** degree of each line if **fldunif** = .false. , $k=0, \text{numfreq}$

Paramètres fondamentaux

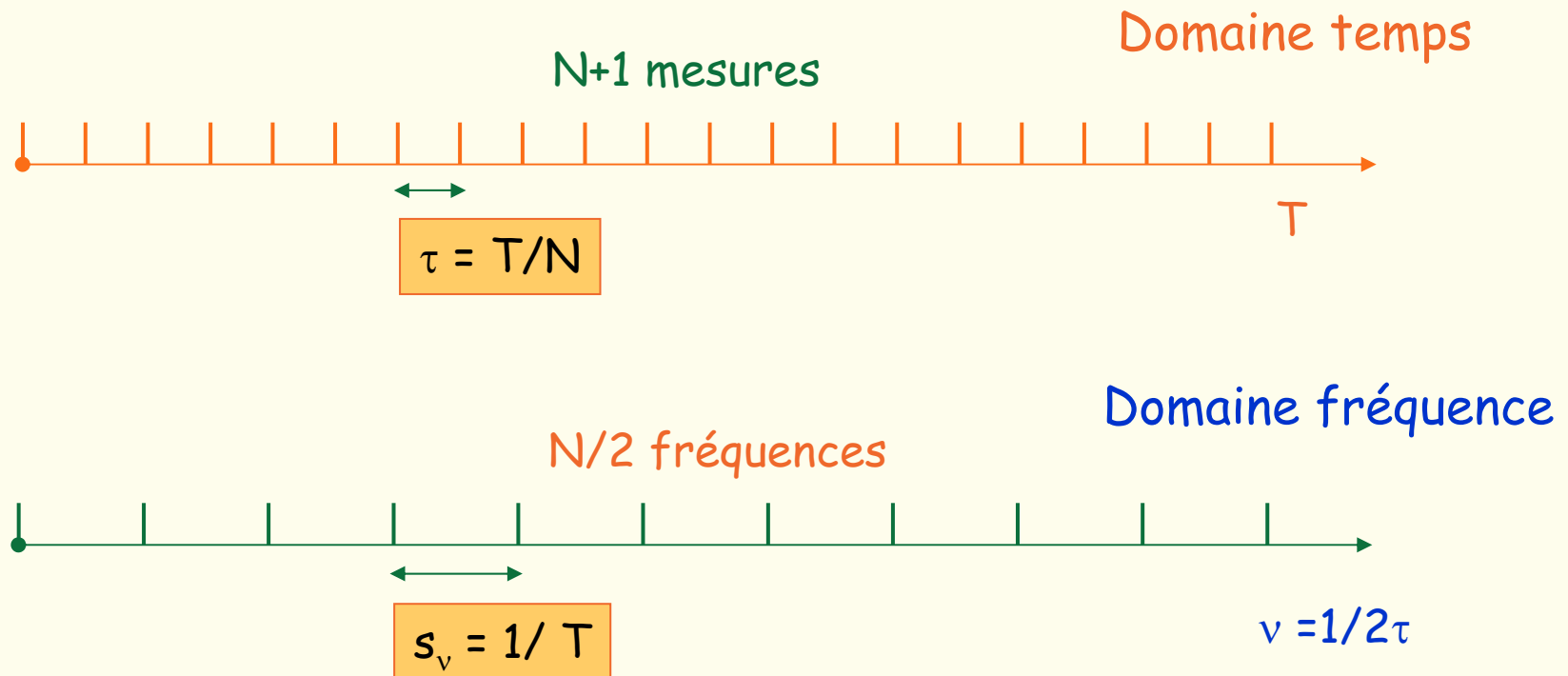
- Pas du calcul dans le domaine fréquentiel
 - comment trouver la valeur optimale
 - il faut avoir la résolution pour trouver toutes les lignes
 - l'utilisateur peut aussi souhaiter un sur-échantillonnage
 - limiter la quantité de calculs
 - échantillonnage uniforme en $v \rightarrow$ les phases sont en progression arithmétique à t donné.
 - calcul des lignes trigonométriques par récurrence
- FAMOUS doit avoir un système interne automatique
 - recherche empirique de la bonne résolution

Paramètres fondamentaux

- Domaine d'exploration des fréquences
 - question très difficile → avis de l'utilisateur d'un grand secours
 - explorer des hautes fréquences est très pénalisant en terme de calcul
 - règle simple pour l'échantillonnage uniforme en temps
 - rien de naturel pour les intervalles irréguliers
 - quelques règles pratiques bien utiles mais de portée limitée basées sur :
 - la moyenne du pas temporel
 - le plus petit pas dans le domaine temporel
 - la distribution des intervalles $t_1 - t_m$

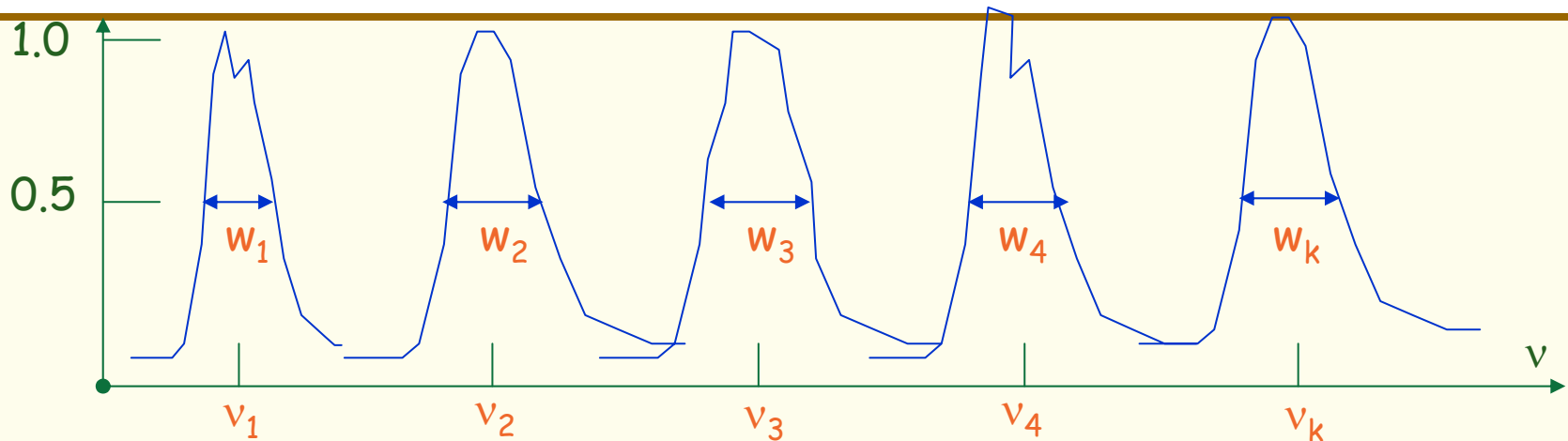
Pas en fréquence

- Pour la FFT avec pas régulier en temps : $N+1$ points sur $T \rightarrow s_v = 1/T$



- TFD avec échantillon régulier : plus de liberté pour s_v mais moins d'efficacité

Méthode empirique



- On détermine les lobes à haute résolution pour ~ 15 fréquences
- Fréquences bien réparties dans le domaine d'intérêt
 - Réponse du système à : $s(t) = \cos(2\pi \nu t)$, $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ in $\nu_{\min} \dots \nu_{\max}$
- Statistique des k largeurs à mi-hauteur
 - $k = 1$ pour τ uniforme (tous les lobes sont identiques)
 - $k \sim 15$ pour le cas irrégulier
- Nombreuses protections pour les lignes à forme anormale
- Puis on prend $s_\nu \sim \langle w \rangle / 6$ soit 6 points par lobe.
- Résolution suffisante pour avoir toute les lignes

Plus grande fréquence résoluble

- Le problème le plus ennuyeux rencontré durant le développement
- Très lié à la généralisation de la fréquence de Nyquist
- Solution bien comprise pour les échantillons réguliers
 - $v_{\max} = \text{Nyquist}$ ou un multiple
- Pas de solution générale dans les autres cas
 - inverse de l'intervalle le plus petit, moyen, médian ...
- Solution pratique adoptée dans FAMOUS :
 - soit :
 - v_{\max} fournie par l'utilisateur → solution la meilleure
 - sinon : recherche d'un pas temporel représentatif
 - statistique des intervalles à deux points
 - puis $\tau \sim 2^{\text{ème}} \text{ décile}$ et $v_{\max} = 1/2\tau$

Performances

La simulation

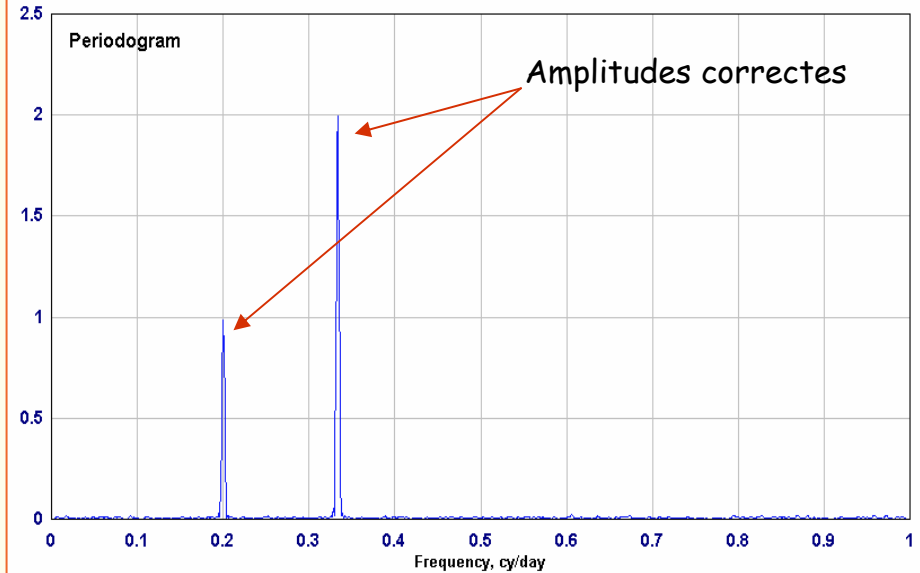
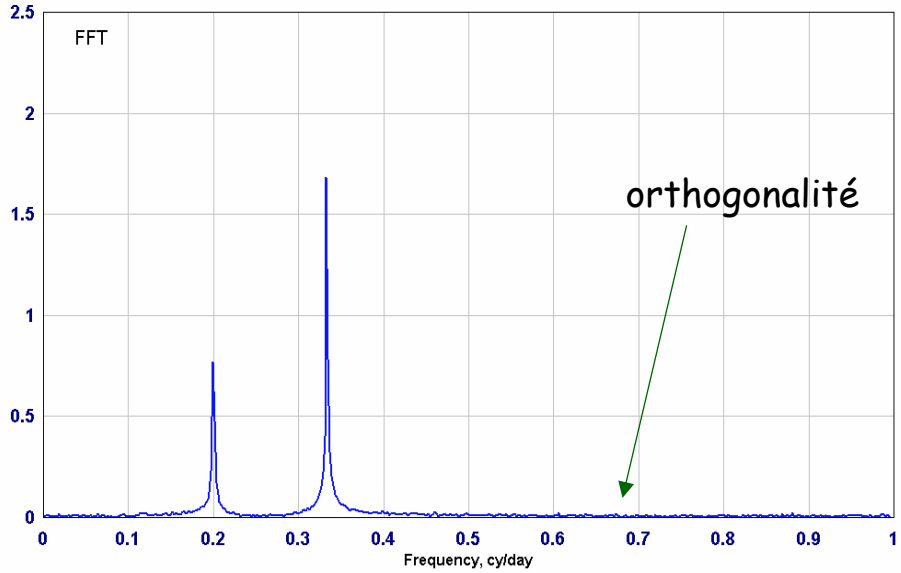
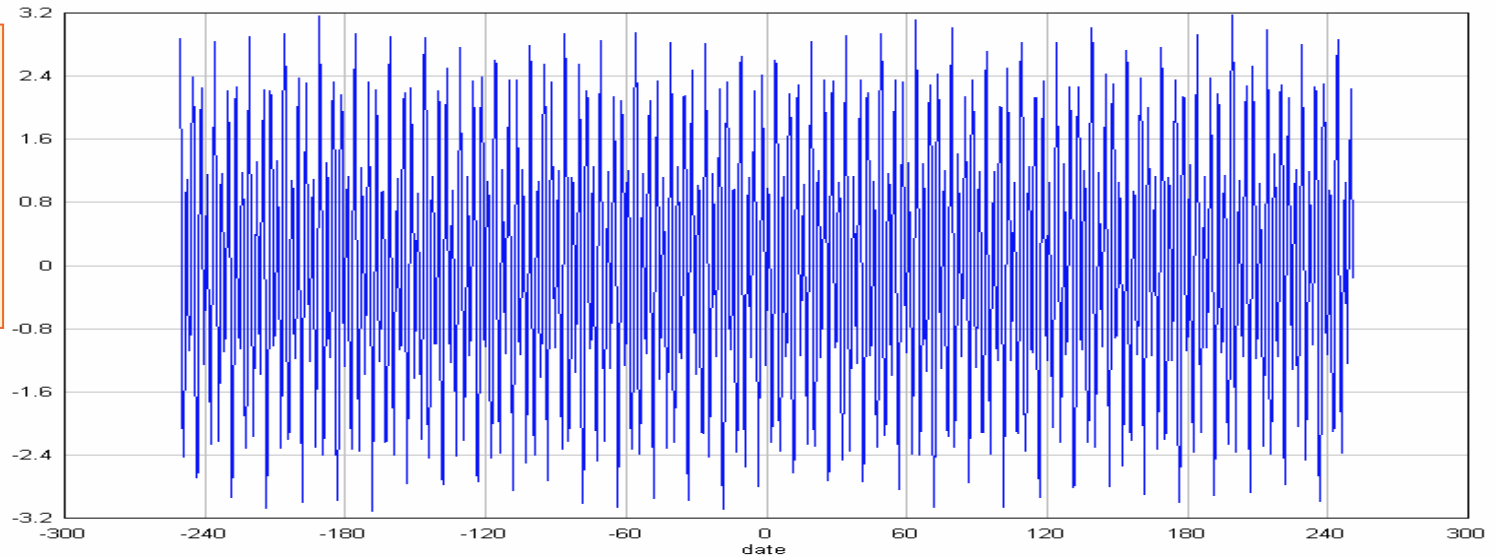
- Le mode simulateur génère des signaux périodiques ou multi-périodiques
- L'échantillonnage peut être périodique, semi-régulier, aléatoire..

$$x(t_k) = 2 \cos 2\pi \frac{t_k}{p_1} + \cos 2\pi \frac{t_k}{p_2}$$

- Bruit gaussien avec $\sigma = 0.1$
- $n = 1000$ points
 - $P = 3, 5, \dots$ jours
 - $T = 500$ jours
 - $\tau = 0.5$ jour (si régulier)
 - $1/\tau = 2$ cy/jour
 - $N_y = 1/2\tau = 1$ cy/jour

Exemple : cas d'école

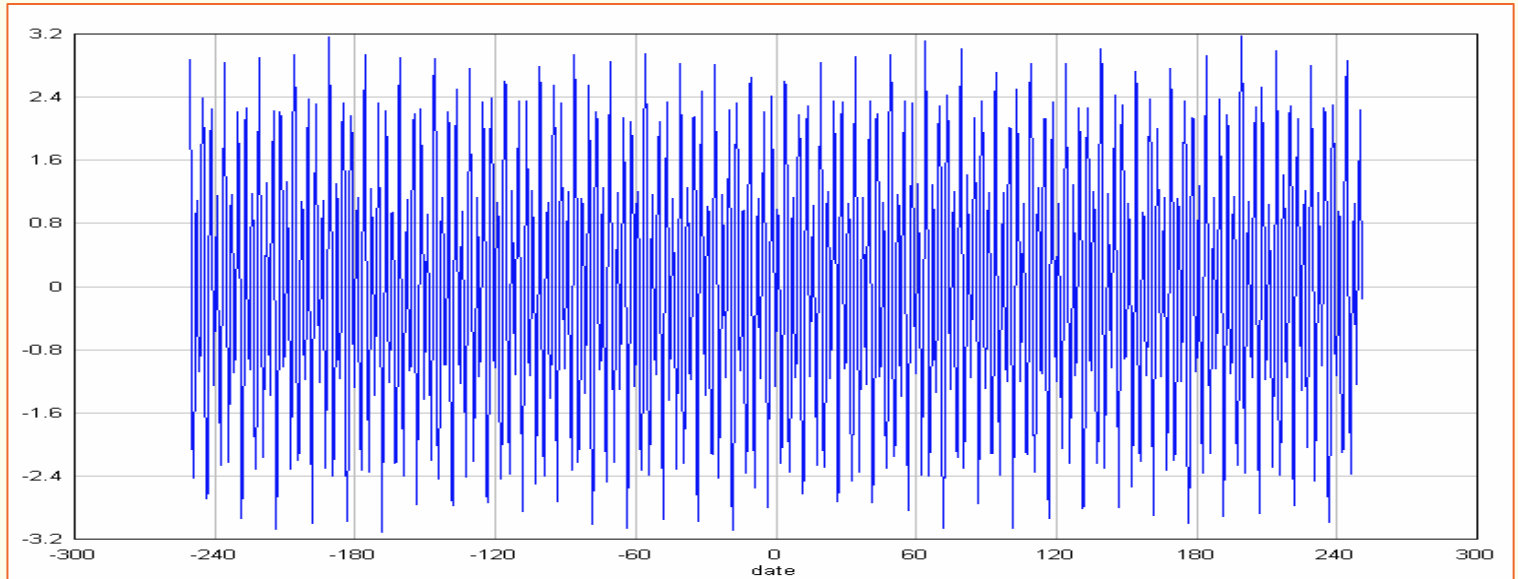
$p_1 : 3 \text{ d}$
 $p_2 : 5 \text{ d}$
 $\tau = 0.5 \text{ d}$
 $N_y = 1 \text{ cy/d}$



Exemple : au-delà de Nyquist I

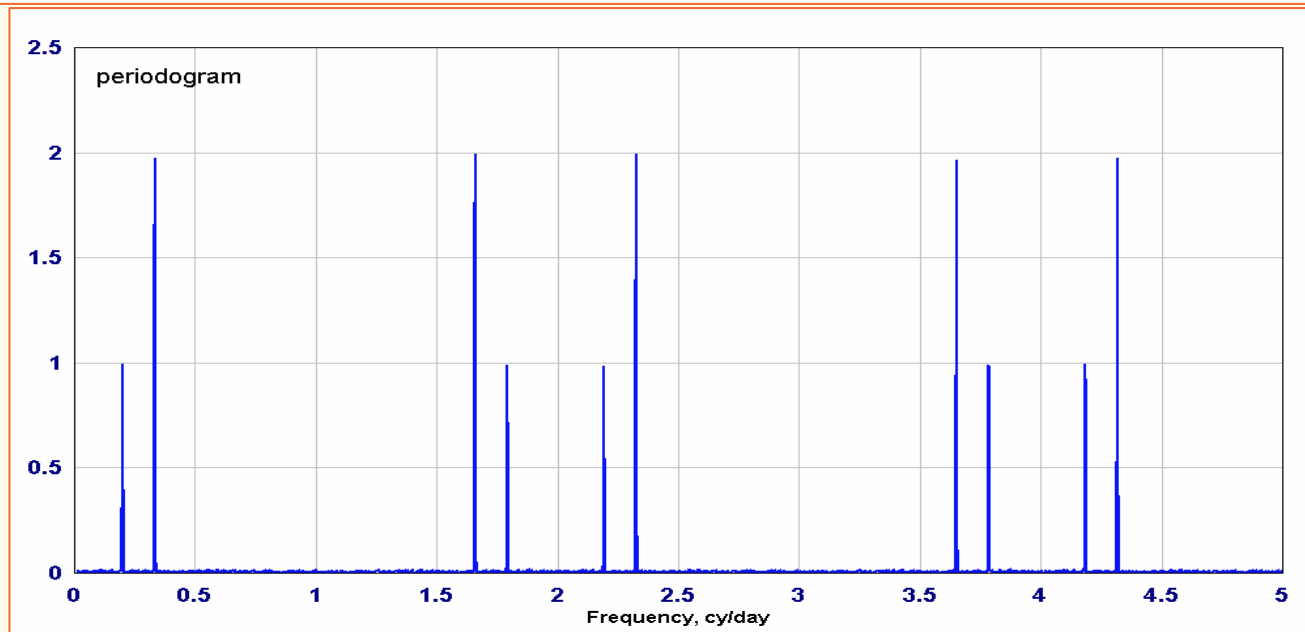
$p_1 : 3 \text{ d}$
 $p_2 : 5 \text{ d}$

$\tau = 0.5 \text{ d}$
 $N_y = 1 \text{ cy/d}$



$f_1 : 0.33 \text{ cy/d}$
 $f_2 : 0.2 \text{ cy/d}$

$N_y = 1 \text{ cy/d}$

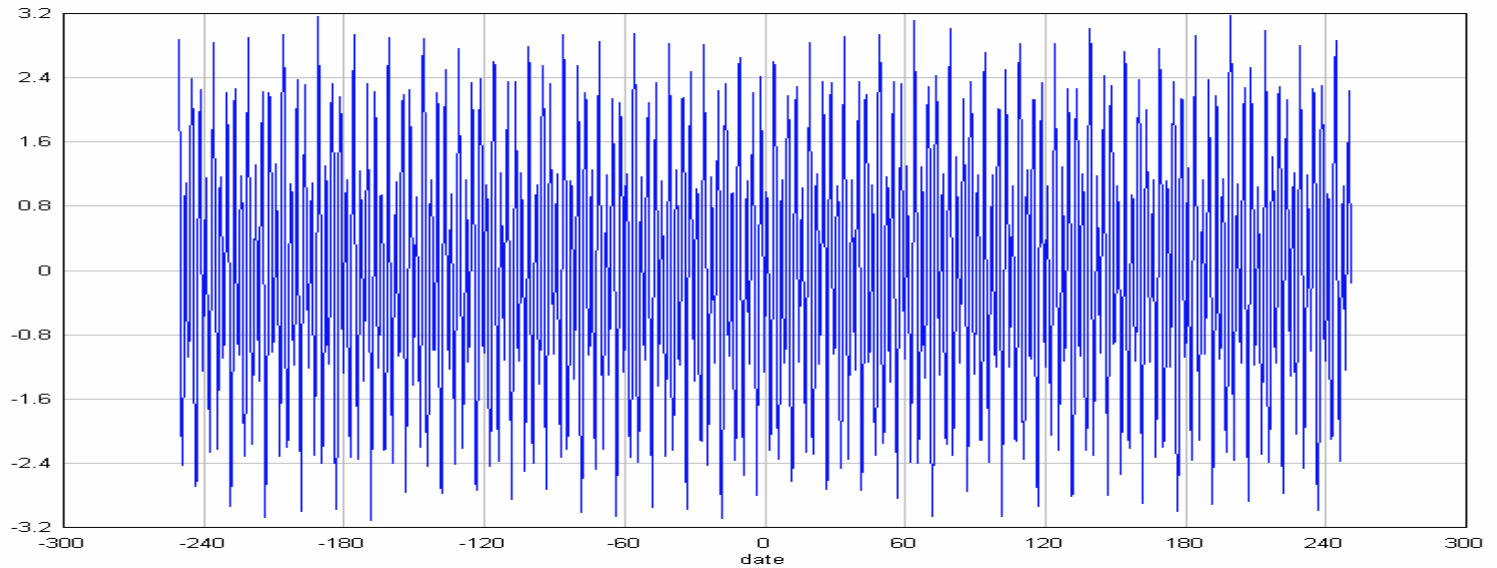


Exemple : au-delà de Nyquist II

$p_1 : 0.430 \text{ d}$
 $p_2 : 0.455 \text{ d}$

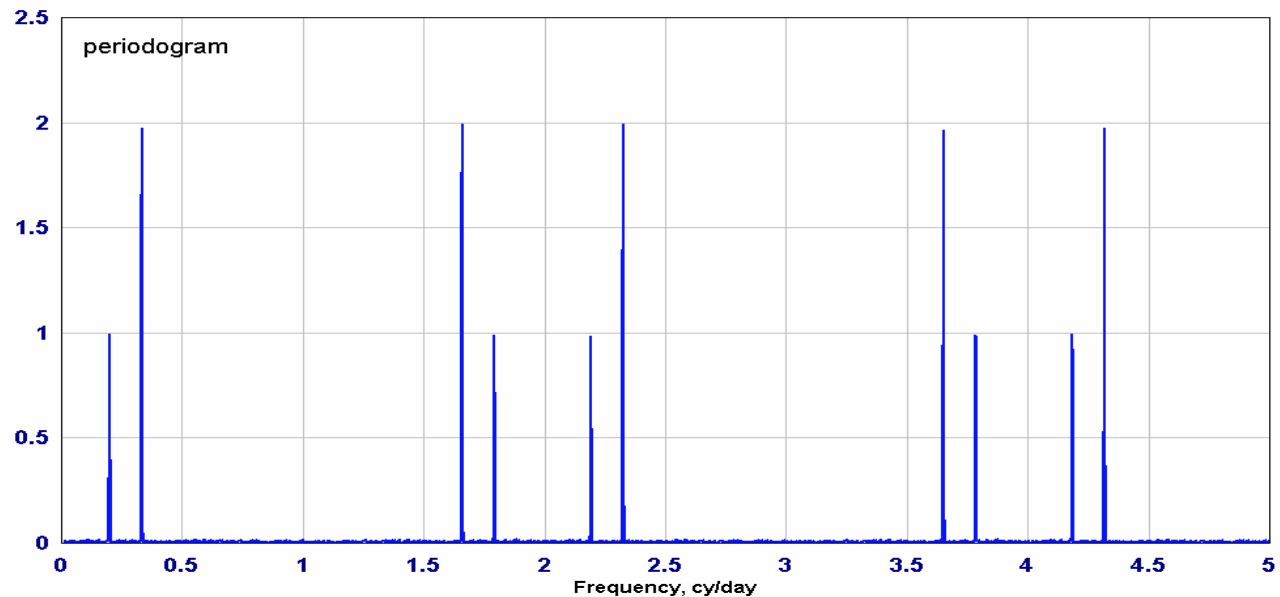
$\tau = 0.5 \text{ d}$

$\tau = 0.05 \text{ d}$



$f_1 : 2.33 \text{ cy/d}$
 $f_2 : 2.20 \text{ cy/d}$

$N_y = 1 \text{ cy/d}$



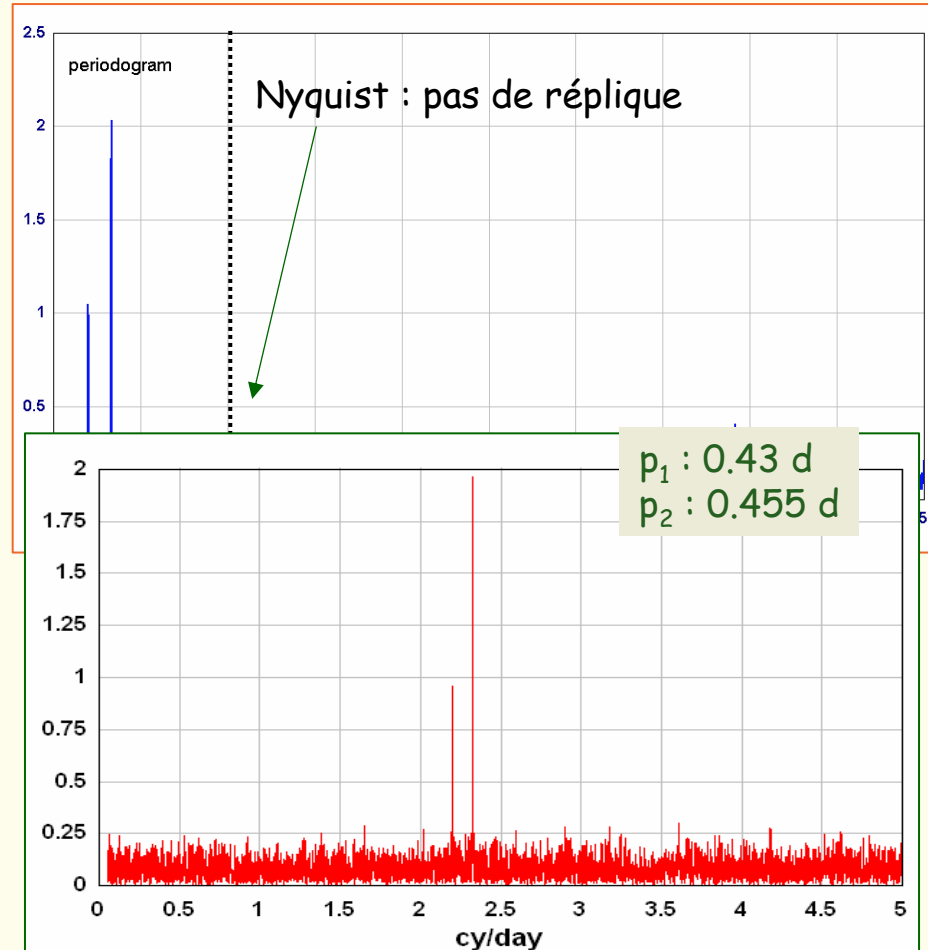
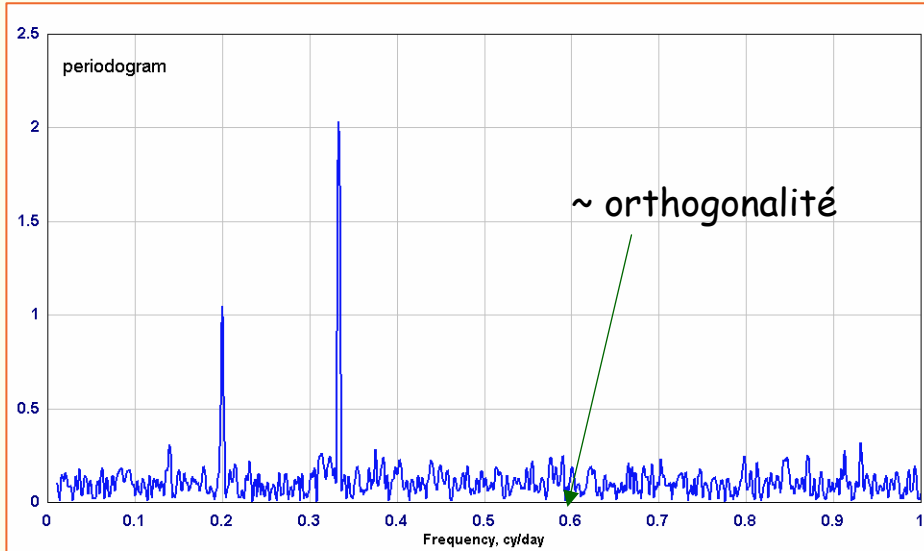
Echantillonnage aléatoire I

$p_1 : 3 \text{ d}$
 $p_2 : 5 \text{ d}$

$$S(t_k) = 2 \cos(2\pi t_k / P_1) + \cos(2\pi t_k / P_2)$$

$\langle \tau \rangle = 0.5 \text{ d}$ $\sigma = 0.1$

Tirage uniforme de 1000 dates sur 500 jours.



Périodes et amplitudes trouvées

2.99998 +/- 0.00002	1.995 +/- 0.005
4.99998 +/- 0.0001	1.005 +/- 0.005

Echantillonnage aléatoire II

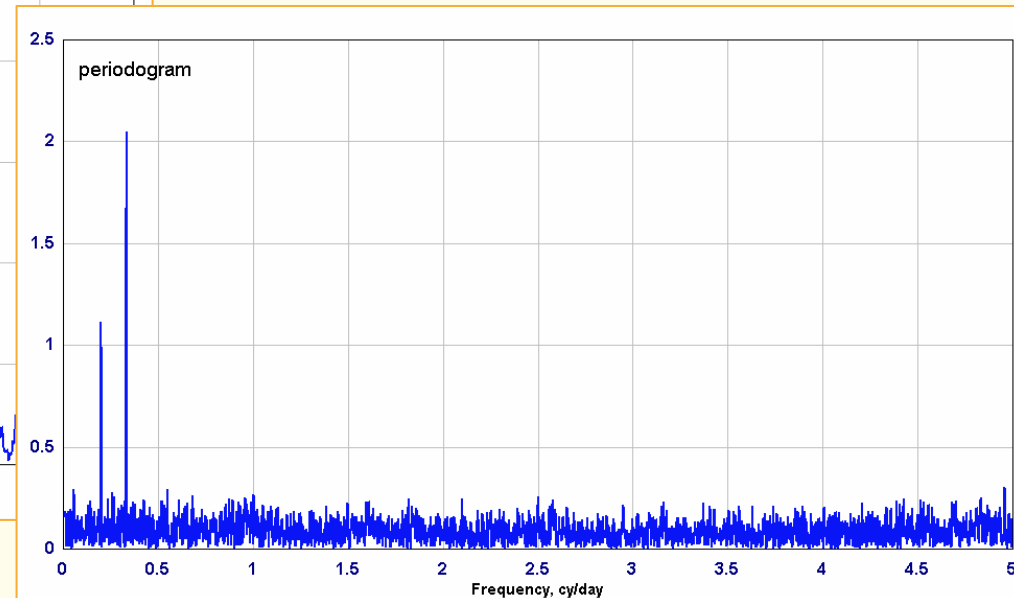
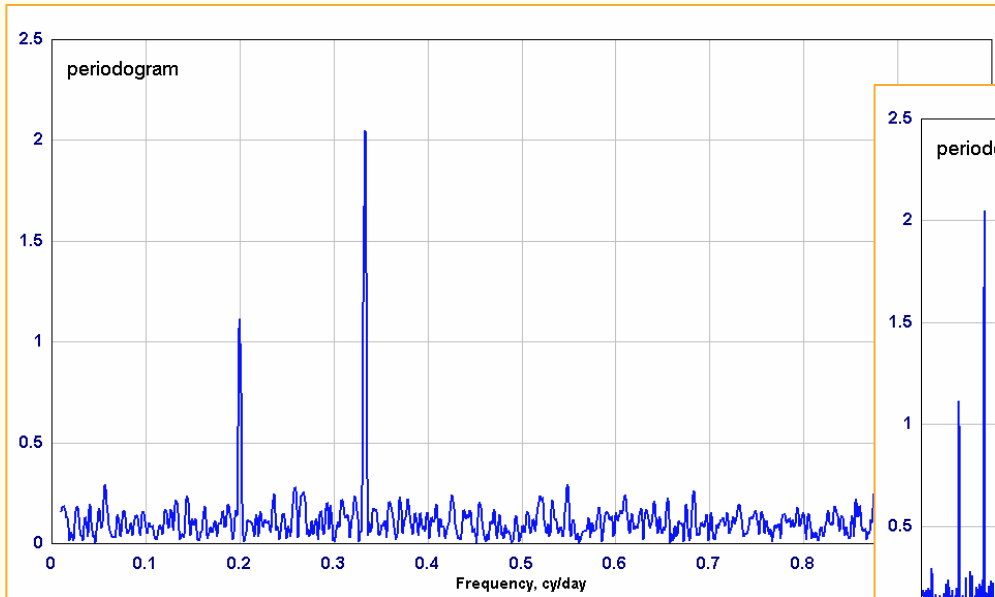
$p_1 : 3 \text{ d}$

$p_2 : 5 \text{ d}$

$$S(t_k) = 2 \cos(2\pi t_k / P_1) + \cos(2\pi t_k / P_2)$$

$\langle \tau \rangle = 0.5 \text{ d}$ $\sigma = 0.1$

Instants selon une loi de temps d'attente : 1000 points sur 500 jours.



Périodes and amplitudes trouvées

2.99999 +/- 0.00002 2.017 +/- 0.005

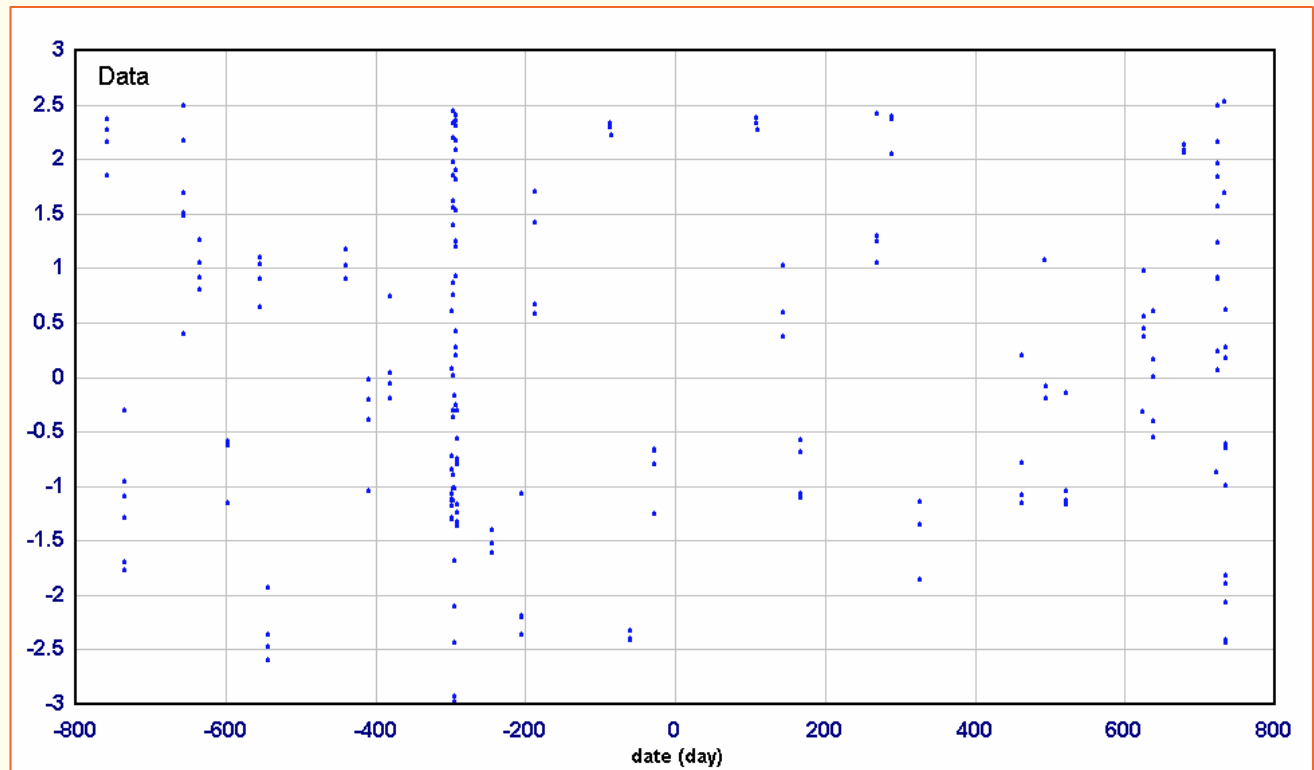
4.99994 +/- 0.00001 0.988 +/- 0.005

Echantillonnage creux

$$S(t) = \sum a_i \cos\left(2\pi \frac{t}{P_i}\right)$$

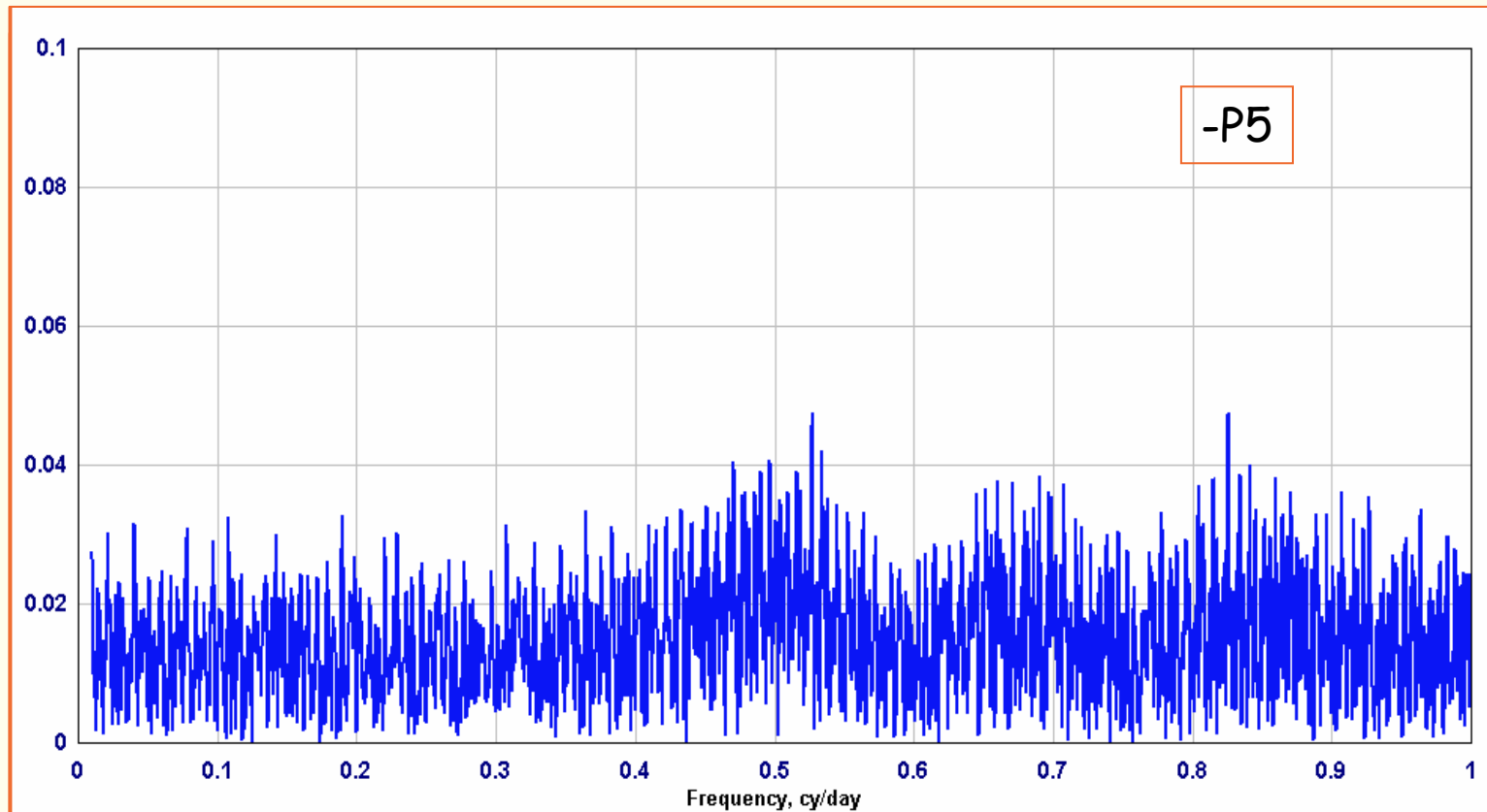
$\sigma = 0.1$; 220 mesures sur 1600 jours.

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1
4	7	0.5
5	20	0.2



Périodogrammes successifs

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1
4	7	0.5
5	20	0.2



Résultats numériques

- FAMOUS

Paramètres du signal simulé

i	P	a
1	3	2
2	5	1.5
3	1	1.0
4	7	0.5
5	20	0.2

Périodes

3	2.99998 +/- 0.00002
5	4.99995 +/- 0.00006
1	0.99999 +/- 0.00002
7	7.00008 +/- 0.0003
20	20.0083 +/- 0.008

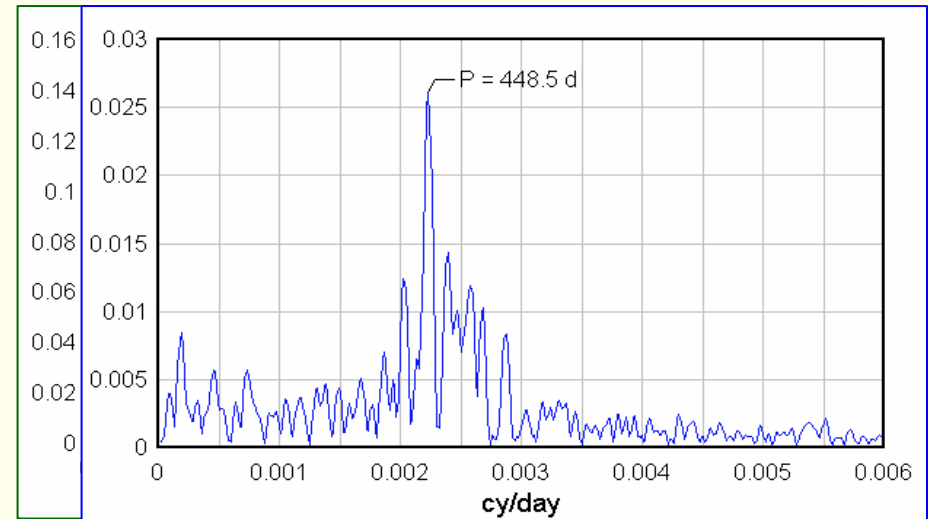
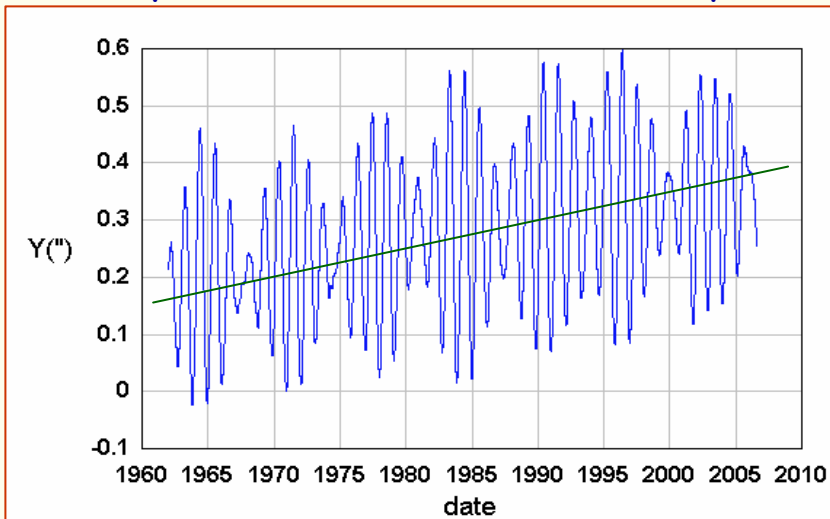
Amplitudes

2	1.993 +/- 0.02
1.5	1.523 +/- 0.02
1.0	0.990 +/- 0.02
0.5	0.483 +/- 0.02
0.2	0.187 +/- 0.02

Amplitudes polynomiales

- Les cas de dérive temporelle sont très fréquents sur les termes périodiques (mécanique céleste) ou sur le terme global
- Deux périodes très proches \sim amplitude $a + bt$
 - *très bon moyen d'améliorer la résolution*

Composante Y du mouvement du pôle

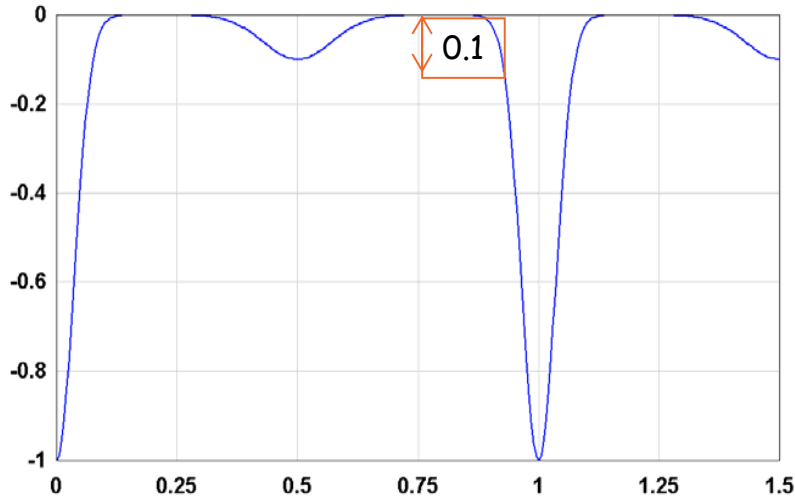


		Frequency	Period	$\sigma(f)/f$	amplitude
0	t^0	0.00000000E+00			2.803037E-01
0	t^1	0.00000000E+00			1.102813E-05
1	t^0	2.31154564E-03	4.32610970E+02	3.437E-05	1.565780E-01
2	t^0	2.74200218E-03	3.64697011E+02	5.610E-05	7.959194E-02
3	t^0	2.22947941E-03	4.48535203E+02	1.705E-04	2.717569E-02

Famous : signaux périodiques

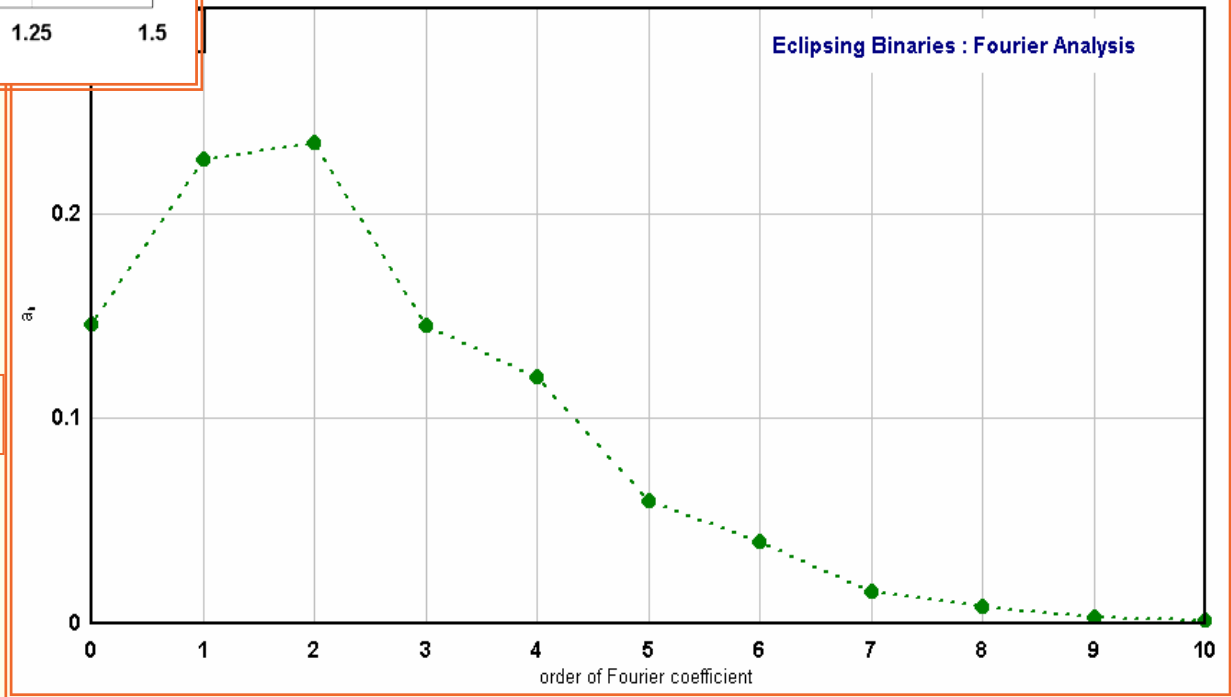
- FAMOUS n'a pas été optimisé pour les signaux périodiques
- Mais on peut toujours rechercher une seule ligne
 - Dans la plupart des cas cela conduit à la bonne période
 - mais : l'amplitude la plus large peut être celle d'un harmonique
 - Dans ce cas on trouve un diviseur de la période
- Si l'on prend deux fréquences on doit avoir : $\nu_2/\nu_1 = 2$ or $0.5 \rightarrow$ tests
- Cette remarque est généralisée pour trouver le fondamental
 - Recherche de la 1^{ère} fréquence (plus grande amplitude 1^{er} passage)
 - Recherche en bande étroite autour de $\nu_1/2, \nu_1/3, \nu_1/4,$ et $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$
 - Série de tests pour identifier le fondamental

Binaires à éclipse I.

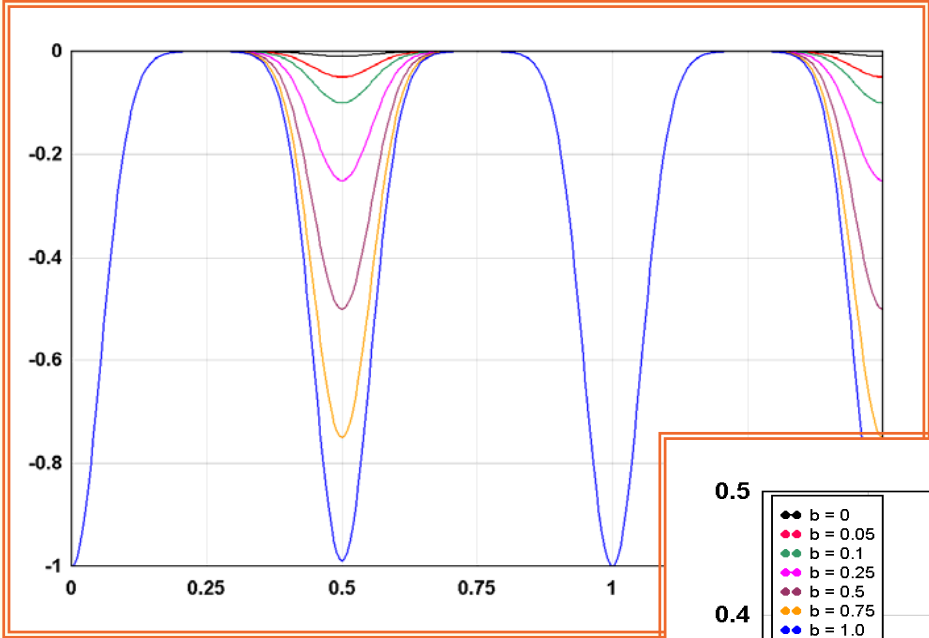


Etoiles EA avec $b/a = 0.1$

Coefficients de Fourier

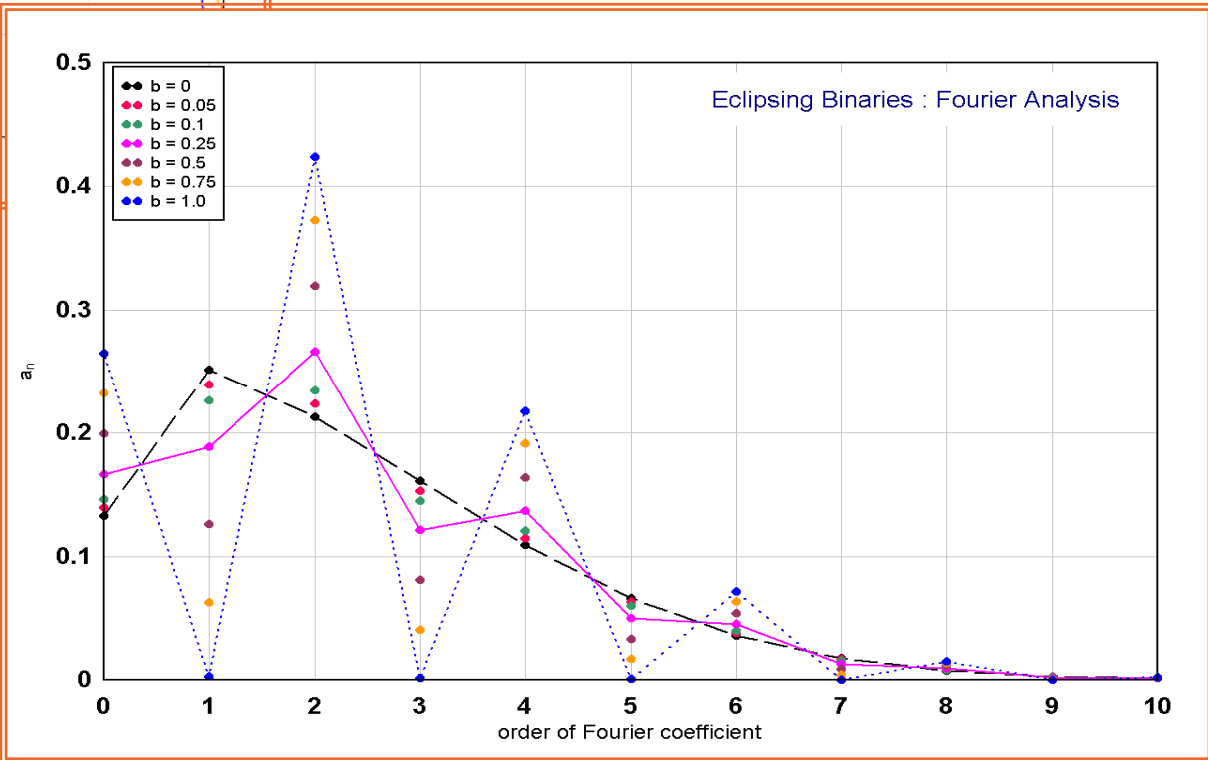


Binaires à éclipse II.



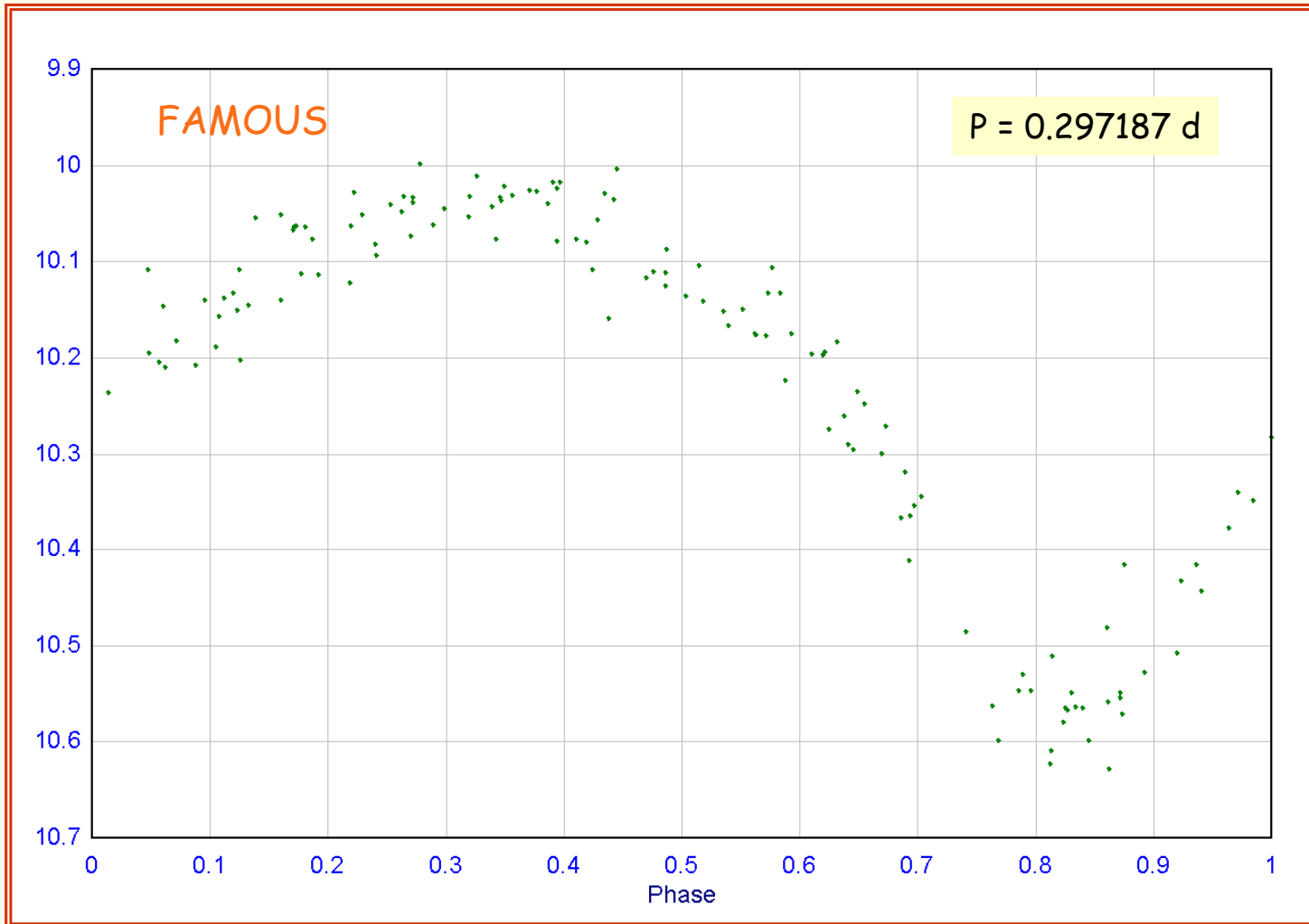
$b/a = 0.0 \text{ à } 1.0$

- Le premier harmonique est > fondamental si $b/a > 0.1$
- la période trouvée peut être la moitié ou le double de la période réelle



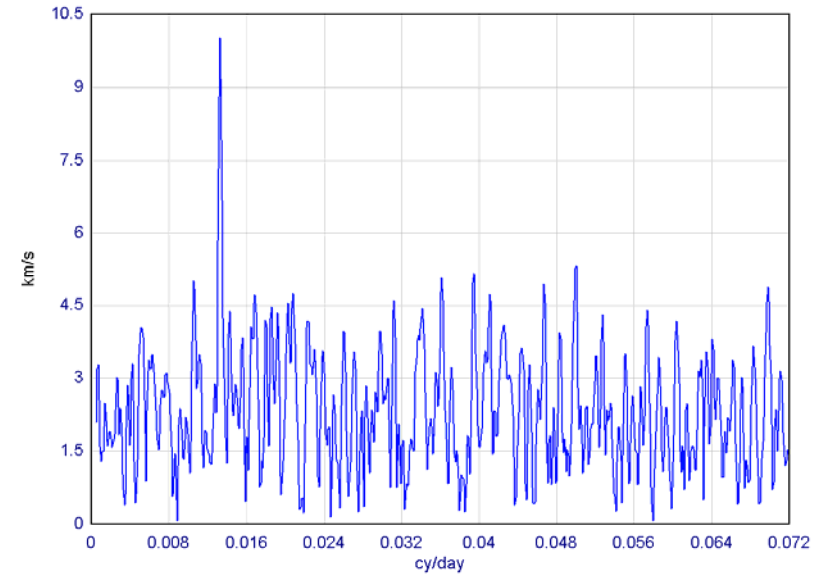
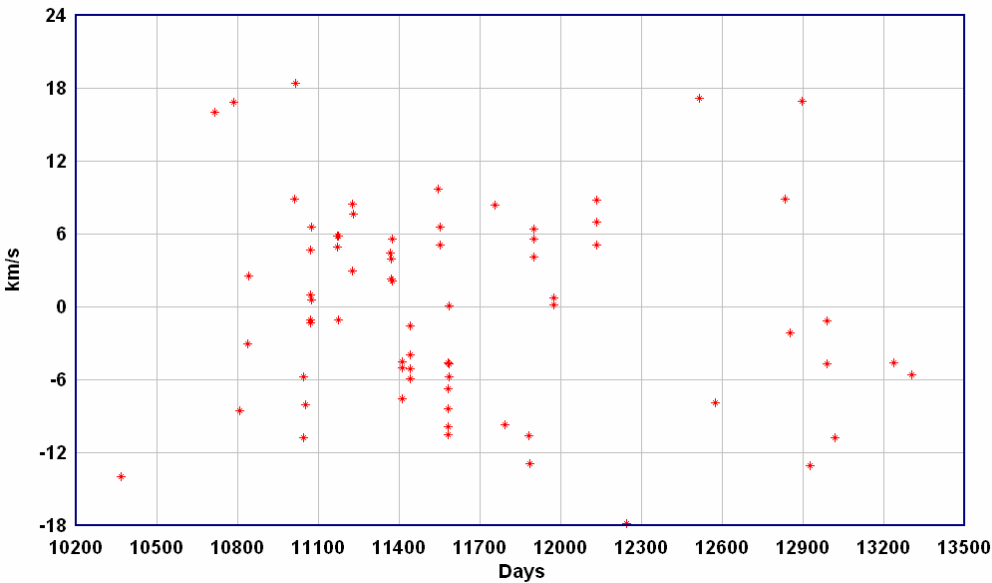
Recherche de la période

- Hip 1387 = AQ Tuc



Exoplanète : vitesse radiale

RV of HD 16141 (Marcy, et al. 2000)



Frequency

Period

$\sigma(f)/f$

amplitude

0	t^0	0.00000000E+00			1.556802E-01
1	t^0	1.32451952E-02	7.54990758E+01	1.040E-03	1.158680E+01
2	t^0	2.65706477E-02	3.76355147E+01	2.026E-03	2.731950E+00

Période : 75.499 ± 0.08 d (valeur publiée : 75.560 days).









- 2e ligne à 2ν

- rapport des amplitudes = $2e$

- FAMOUS est disponible en ligne :
 - avec tout le source Fortran,
 - documentation
 - tutoriel
 - série de tests commentés
 - le simulateur en prime
 - et jusqu'à maintenant l'assistance utilisateurs

Index de ftp://ftp.obs-nice.fr/pub/mignard/Famous

[Vers un rép. de plus haut niveau](#)

 Fortran		05/12/2005	00:00:00
 Test 1		13/07/2005	00:00:00
 Test 2		13/07/2005	00:00:00
 Test 3		01/03/2005	00:00:00
 Test 4		29/03/2005	00:00:00
 content.txt	2 KB	13/07/2005	00:00:00
 famous doc.txt	48 KB	05/12/2005	00:00:00
 readme first.txt	2 KB	13/07/2005	00:00:00

Annexes

- Projection - décomposition
- Golden sampling

Projection et décomposition

- Pour un signal : projeter sur une base ou décomposer sur une base sont deux idées différentes.
- Dans un espace vectoriel la notion primitive est celle de décomposition :

$$\mathbf{V} = \sum_i a^i \mathbf{e}_i \quad a^i : \text{composantes de la représentation}$$

- pour un espace de fonctions on aura par exemple

$$x(t) = \sum_i a^i \phi_i(t)$$

- faire l'analyse revient à rechercher les a^i
- l'équation est représentative du modèle
- la méthode des moindres carrés est un outil d'analyse
- on reconstruit le vecteur à partir des a^i



Projection et décomposition

- Si l'espace vectoriel est Euclidien (normé par un produit scalaire) alors on peut aussi projeter les vecteurs

$$b_i = (\mathbf{V}, \mathbf{e}_i) \quad b_i : \text{composantes de la projection}$$

- pour un espace de fonctions on aura par exemple

$$b_i = (x(t), \phi(t))$$

- le calcul des a_i est explicite
- on ne peut pas retourner au vecteur sans information complémentaire
- la transformée de Fourier est un outil de projection



Relation entre projection et décomposition

- On se donne les projections mutuelles des vecteurs de base

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad g_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$$

- ce qui donne
$$b_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

- la matrice g_{ij} est symétrique, définie positive \rightarrow inversible

$$a^i = \sum_j h^{ij} b_j$$

- La matrice est diagonale si la base est orthogonale
 - dans ce cas il y a une quasi équivalence entre les deux formes
 - la matrice g_{ij} est aussi la matrice des équations normales pour le modèle des moindres carrés



Relation entre projection et décomposition

- En analyse spectrale pour un signal discret

$$\phi_\nu(t) = e^{-2j\pi\nu t}$$

- et le produit scalaire est défini sur les points t_k

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_k \phi_i(t_k) \cdot \phi_j(t_k)$$

- Pour un échantillonnage régulier on a

$$(\phi_i, \phi_j) \approx N\delta_{ij} \quad (\text{sauf pour } \nu_j - \nu_i = k/\tau \Rightarrow \text{répliques})$$

et transformée de Fourier et analyse en fréquence sont à peu près équivalents

- ce n'est plus vrai pour un échantillonnage quelconque
- il faut des outils plus élaborés que la simple projection



Relation avec les moindres carrés

- Soit le modèle de moindres carrés

$$\mathbf{V} \approx a^i \mathbf{e}_i \quad \text{ou} \quad x(t) \approx a^i \phi_i(t) \quad (\text{r\`egle de sommation implicite})$$

- On recherche les a^i qui minimisent la forme quadratique

$$\begin{aligned} Q &= (\mathbf{V} - a^i \mathbf{e}_i, \mathbf{V} - a^i \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{V}, \mathbf{V}) - (\mathbf{V}, a^i \mathbf{e}_i) - (a^i \mathbf{e}_i, \mathbf{V}) + a^i a^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a^i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{V}, \mathbf{e}_i) = g_{ij} a^j$$

décomposition

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & g_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ \cdots \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}, \mathbf{e}_1) \\ \cdots \\ \vdots \\ (\mathbf{V}, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

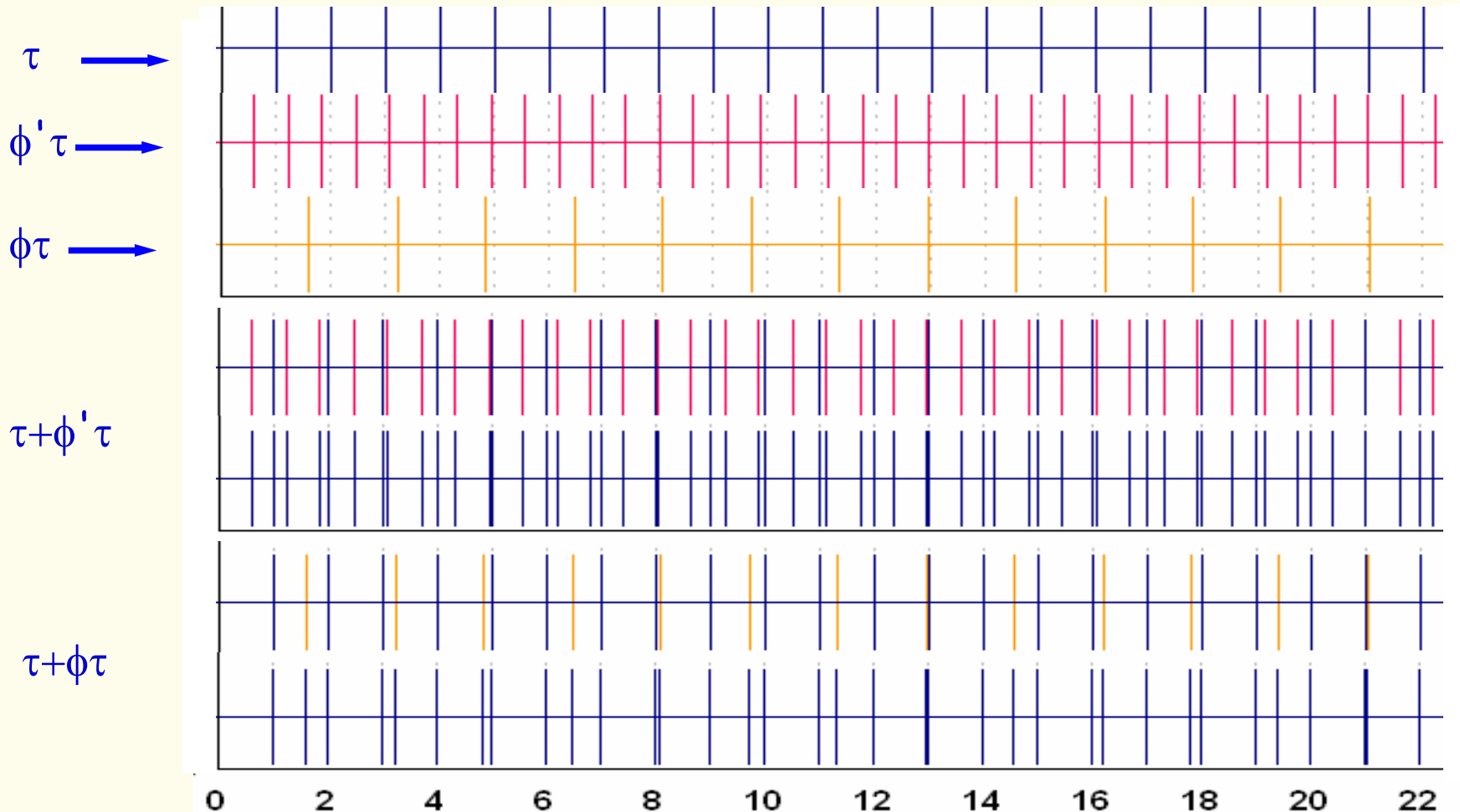
projection

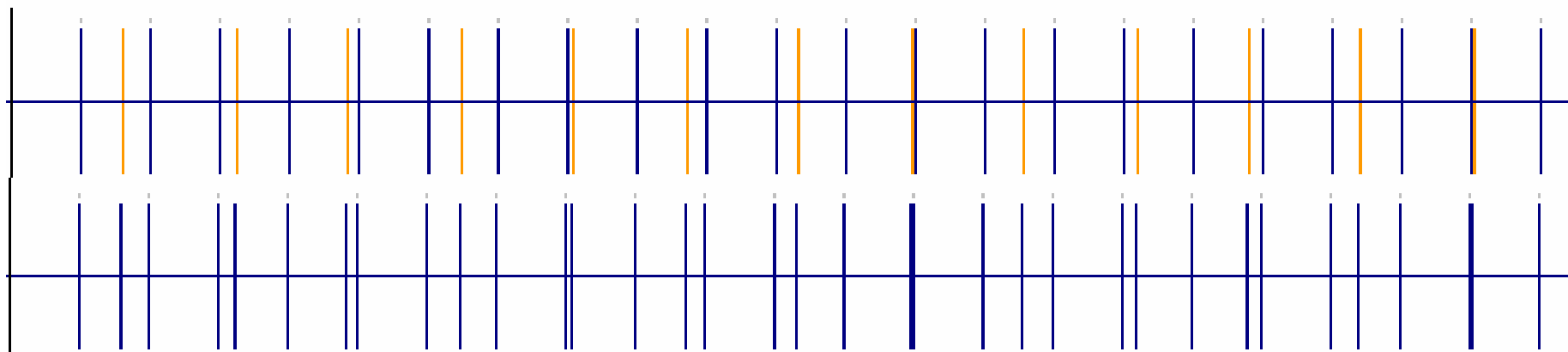
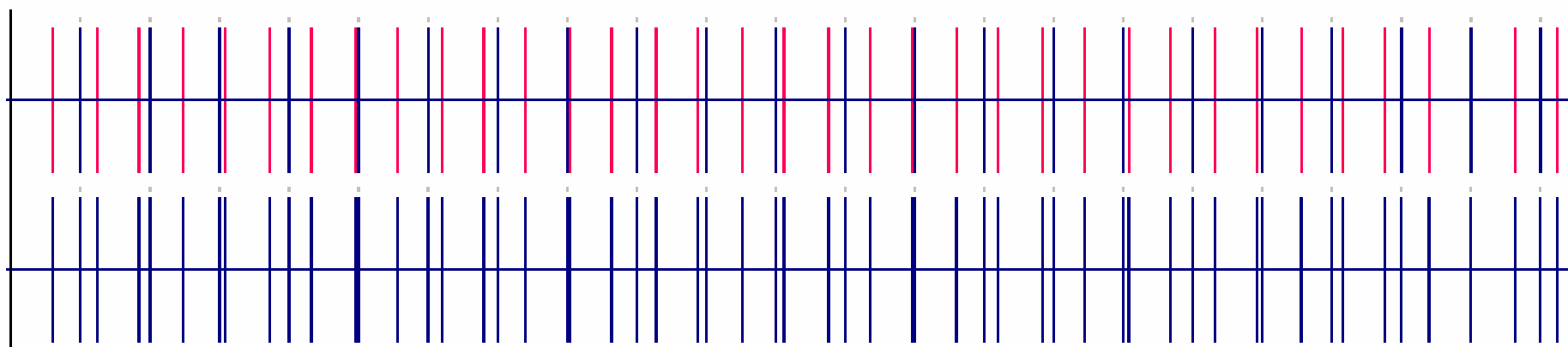
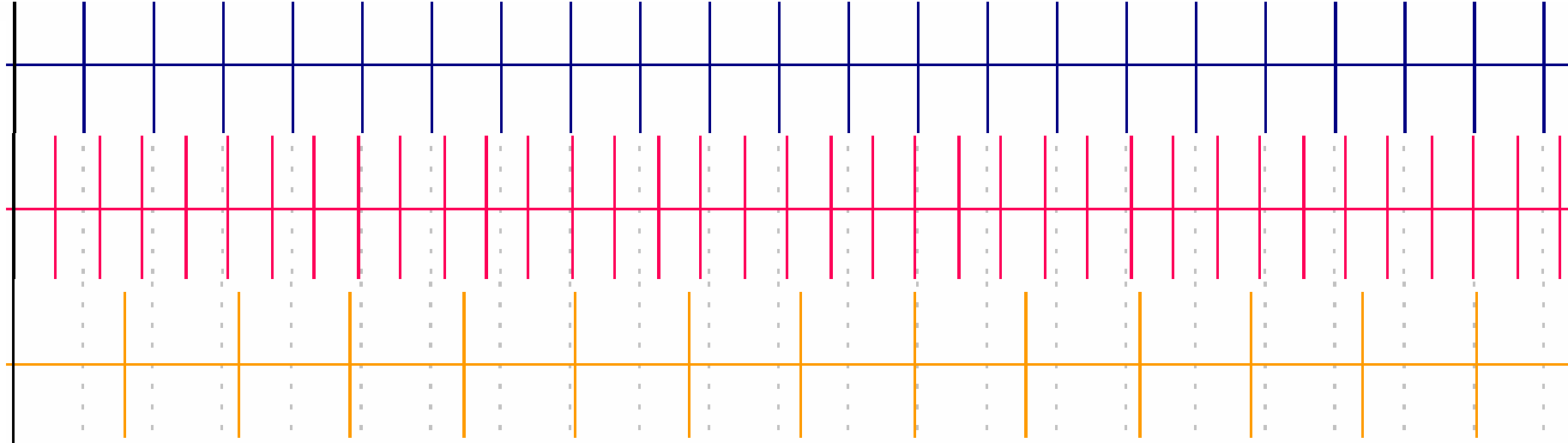


Echantillonnage 'irrationnel'

- Golden sampling

- superposition de deux échantillonnages réguliers de pas τ et $\phi\tau$ ou $\phi'\tau$
- $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ ou $\phi' = (\sqrt{5}-1)/2$ (le 'moins rationnel' des nombres)





0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22