

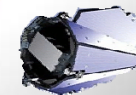
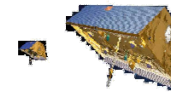
*Les ondelettes sur la sphère :  
un outil pour la représentation  
du champ de pesanteur*



**Isabelle Panet (IGN-LAREG / GSI)**

Remerciements à :

O. Jamet (IGN/LAREG), M. Diament (IPGP), M. Holschneider (univ. Potsdam)



Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

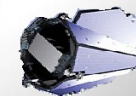
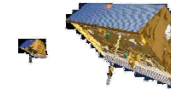
- Frames d'ondelettes : généralités

- Passage sur la sphère

- Des données à la représentation en ondelettes

- Exemples

Conclusion et perspectives

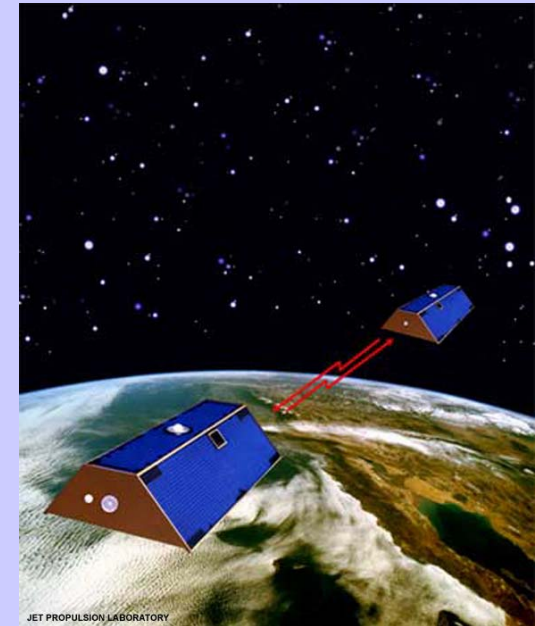


## Un contexte en pleine évolution



Mission GOCE

De nouvelles données spatiales qui révolutionnent notre connaissance du champ de pesanteur

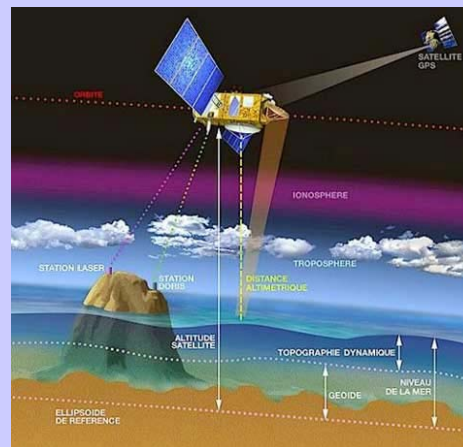


Mission GRACE

## Comment exploiter au mieux ces données ?



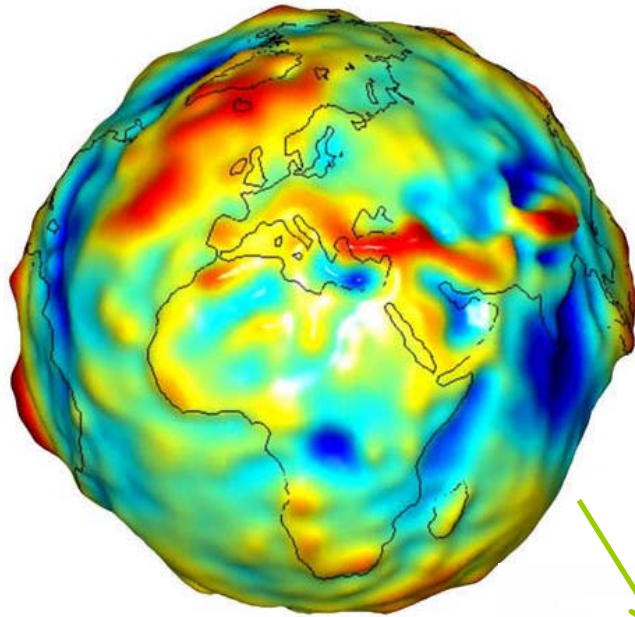
Les mesures sol...



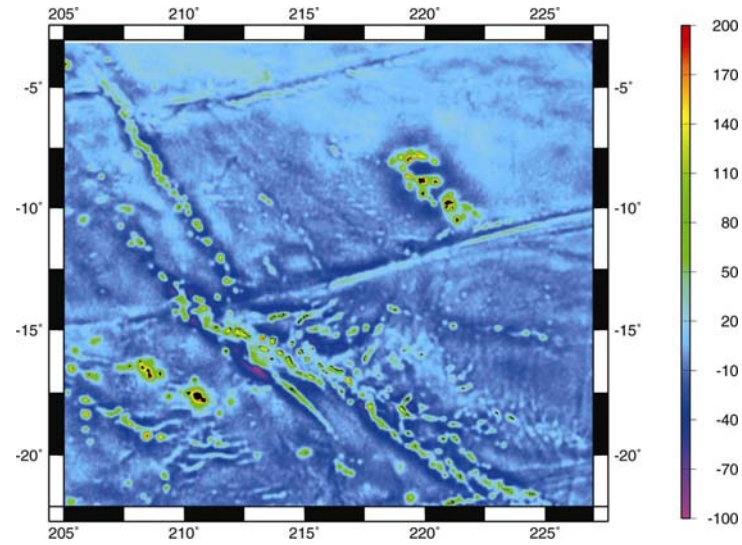
Altimétrie satellitaire



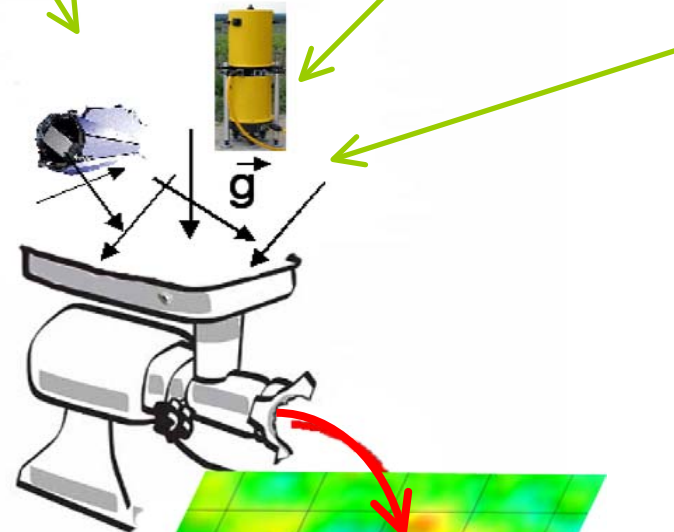
Gravimétrie absolue



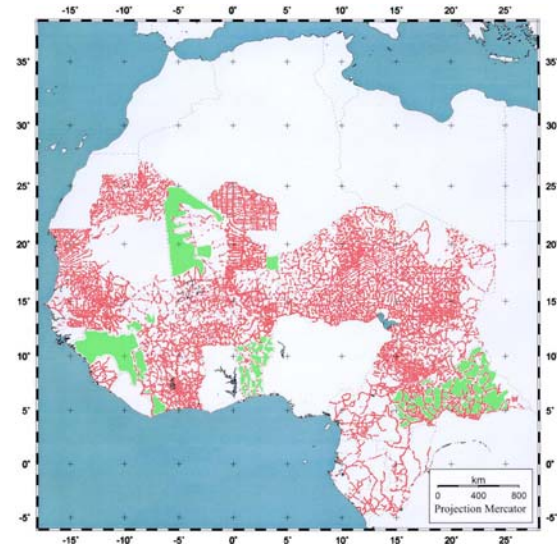
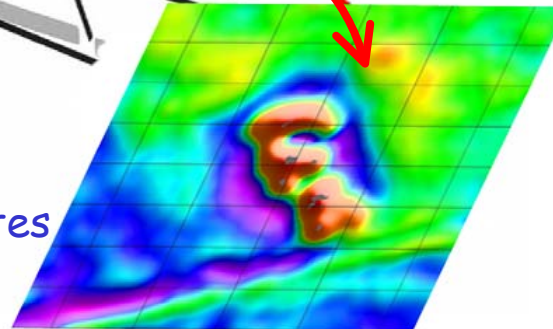
- Global
- Basse résolution



- Régional
- Moyenne résolution



- Local/haute résolution
- Cohérent avec les données globales
- Estimation correcte de toutes les longueurs d'ondes



- Local
- Haute résolution

Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

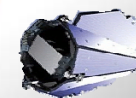
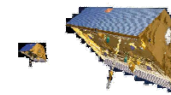
- Frames d'ondelettes : généralités

- Passage sur la sphère

- Des données à la représentation en ondelettes

- Exemples

Conclusion et perspectives



## Un peu d'histoire...

**1940's** : transformée de Fourier à fenêtre, transformée de Wigner-Ville

**1984** : *Jean Morlet*, introduction des ondelettes pour l'analyse de signaux sismiques chez Elf (*Grossmann*, 1985).

On s'est ensuite demandé comment sélectionner un sous-ensemble d'ondelettes qui formerait un ensemble générateur de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . La construction d'une base orthogonale d'ondelettes régulières semblait problématique. *Meyer* et *Lemarié* prouvèrent le contraire, d'où :

**1991**, *Daubechies* : théorie des bases orthogonales d'ondelettes

Utilisation néanmoins limitée car calculs lents... Jusqu'à :

**1989**, *Mallat* : analogie ondelettes/bancs de filtres et naissance de la transformée en ondelettes rapides. D'où :

Développement de nombreuses applications dans de nbx domaines.

**Milieu des années 1990** : passage sur la sphère...

# Ondelettes

## Conditions d'admissibilité

Moyenne nulle : fonction oscillante

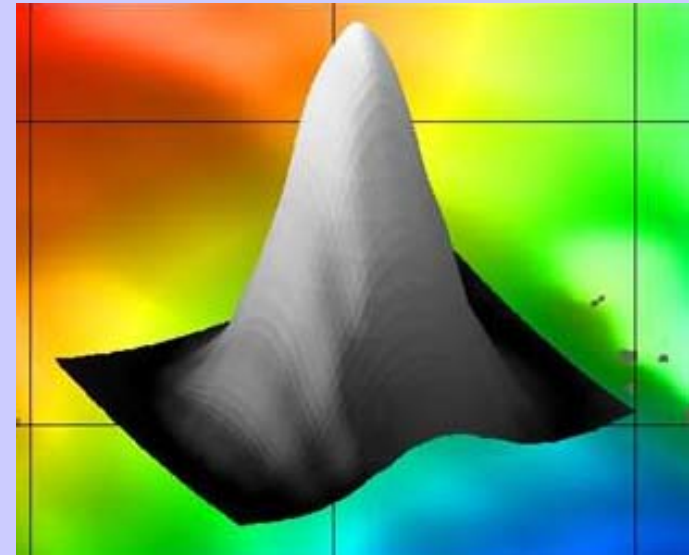
Energie finie

## Conditions facultatives

On peut choisir une ondelette plus ou moins régulière, plus ou moins bien localisée spatialement, etc., en ajoutant des conditions à satisfaire, mais c'est facultatif.

Exemple: nombre de moments nuls

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0$$



### *fonctions de Dirac*

- Localisation spatiale parfaite
- Aucune localisation en fréquence

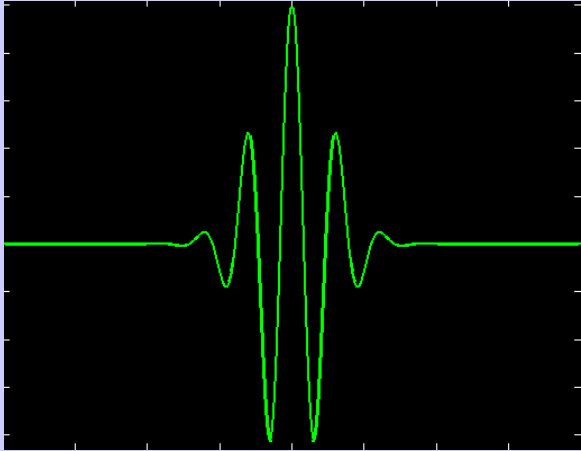
### *ondelettes*

- 'Bonne' localisation spatiale
- 'Bonne' localisation en fréquence

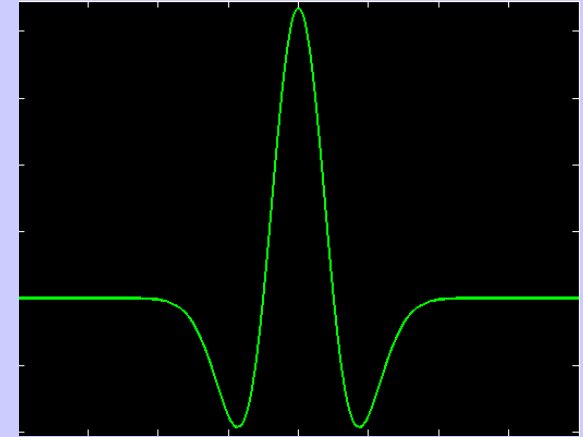
### *sinus/cosinus (Fourier)*

- Localisation en fréquence parfaite
- Aucune localisation spatiale

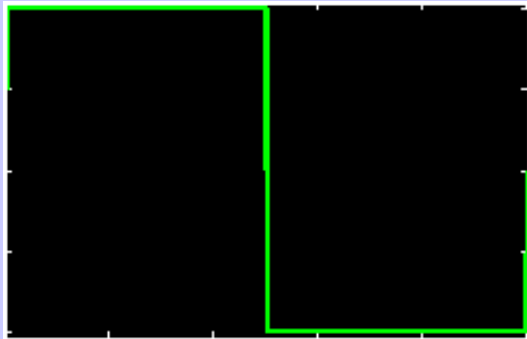
## Exemples



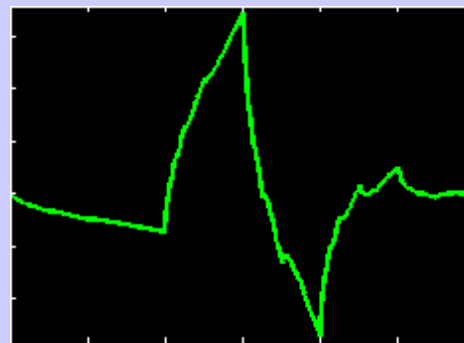
Morlet



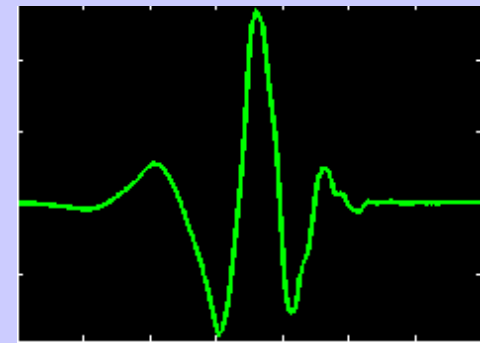
Chapeau  
mexicain



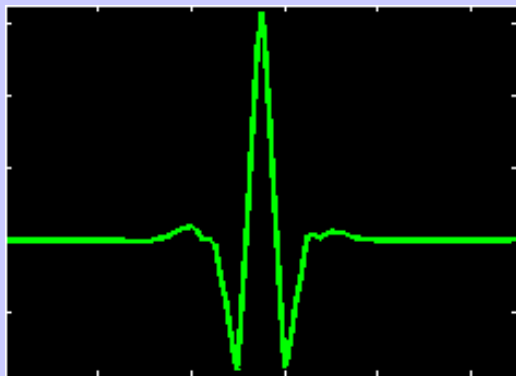
Haar



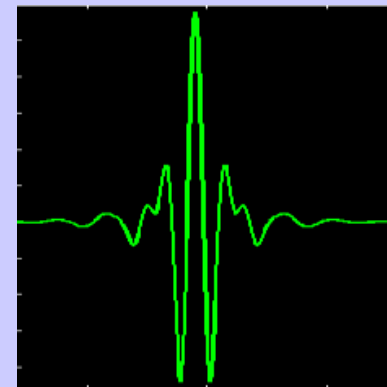
Daubechies 2



Daubechies 4



Coiflet 2



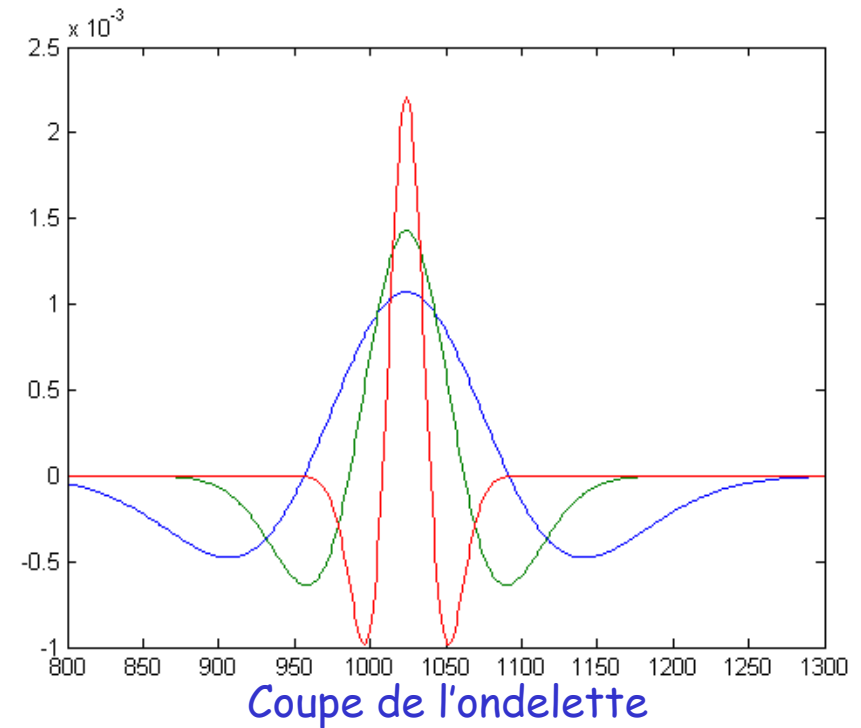
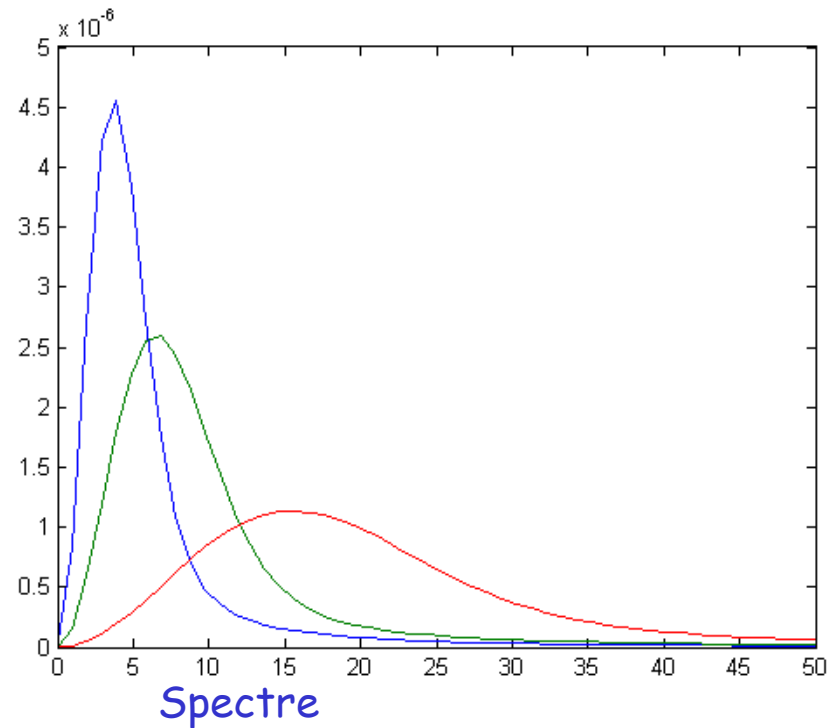
Meyer



# Caractéristiques spatiales et spectrales

Exemple du chapeau mexicain

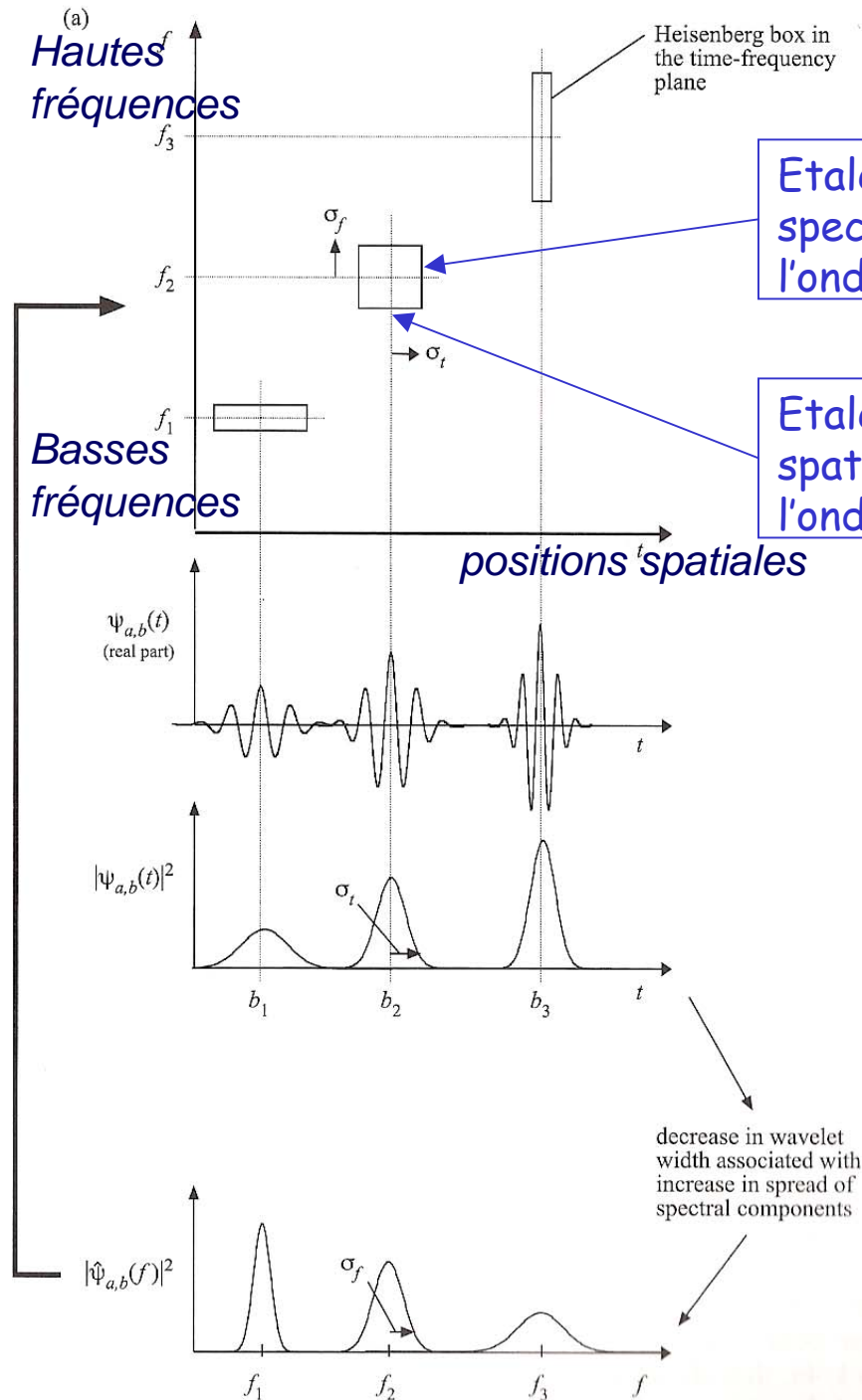
Ondelettes à **grande**, **moyenne** et **petite** échelle



Une fonction à deux paramètres: échelle  $a$  et position  $b$

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x}{a}\right)$$

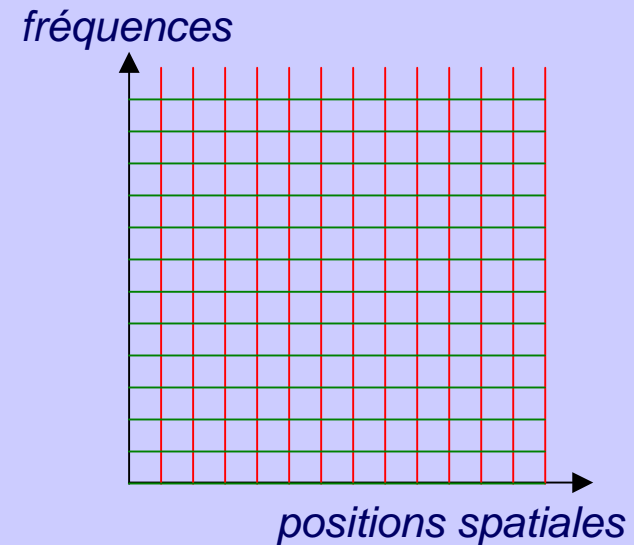
$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$



## Pavage du plan espace/fréquence

Chaque ondelette couvre une partie du plan espace/fréquence.

Pavages associés aux fonctions sinus ou Dirac:



Fourier

Dirac

## Transformée continue en ondelettes

- Corrélation entre la fonction  $f$  étudiée et une ondelette à une échelle  $a$  et une position  $b$  :

$$C_{ab}(f) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

- Reconstruction de  $f$  à partir de ses corrélations avec les ondelettes à toutes les échelles et toutes les positions :

$$f = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{da}{a} db$$

- Les coefficients  $C_{ab}(f)$  offrent une représentation équivalente de  $f$ , qui est fortement redondante. Ils vérifient en effet l'équation suivante:

$$C_{a,b} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{a',b'} \langle \psi_{a,b}, \psi_{a',b'} \rangle \frac{da'}{a'} db'$$

## Bases et frames d'ondelettes

- Soit  $f$  le signal étudié, et  $H$  l'espace auquel il appartient (ex: espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})\dots$ ).
- $f$  peut être représenté de manière équivalente par ses coordonnées sur une base ou un repère (frame) de  $H$ .
- Des bases ou des repères discrets peuvent être construits avec un ensemble d'ondelettes, **dilatées et translatées** d'une ondelette mère.

### Principe:

- 1 – on discrétise les échelles (séquence de dilatations)
- 2 – pour chaque échelle, on discrétise les positions (translations)

*Suivant la finesse de l'échantillonnage des échelles et des positions, on construit des familles d'ondelettes plus ou moins redondantes (repères).  
Lorsqu'il n'y a pas de redondance, on a des bases.*

# Bases et frames d'ondelettes

## Exemple 1: analyse continue

Les paramètres d'échelle et de position des ondelettes varient continûment. On obtient un repère continu de  $H$ , extrêmement redondant. Les coordonnées de  $f$  sur ce repère sont données par ses produits scalaires avec les ondelettes, et  $f$  est reconstruit à partir de ses coordonnées en utilisant une formule intégrale.

## Exemple 2: bases orthogonales

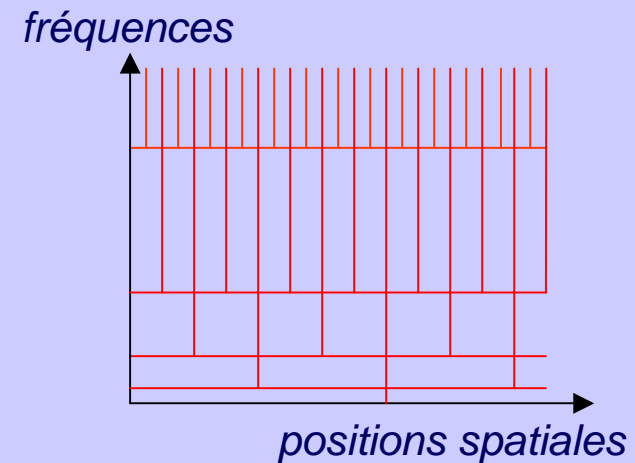
### Dilatations:

Les paramètres d'échelle suivent une progression géométrique, le plus souvent de raison 2:  $a_j = a_0 \cdot 2^j$

### Translations:

Pour chaque échelle  $a_j$ , on choisit un ensemble de positions  $b_j = n \cdot a_j$

Les boîtes de Heisenberg des ondelettes ne se recouvrent pas mais couvrent bien tout le plan (pas de 'trou').



## Repères de fonctions

La famille d'ondelettes est apte à représenter tout vecteur de  $H$  si elle forme un repère (*frame*) d'un espace  $H$

$H$  : ex = espace de Hilbert des fonctions  $\mathcal{L}^2$  sur la sphère unitaire

Repère de  $H \rightarrow$  Représentation complète et stable de  $H$

$$\{g_i\}_{i \in \Gamma} \text{ est un repère de } H \text{ si, } \forall s \in H:$$
$$A \|s\|^2 \leq \sum_{i \in \Gamma} \left| \langle s, g_i \rangle \right|^2 \leq B \|s\|^2 \text{ avec } 0 < A \leq B < \infty$$

$A, B$  : les bornes du repère.

**Exemple simple** : une base orthonormale est un repère non redondant de bornes  $A = B = 1$

Une base est un cas particulier de repère, pour lequel il n'y a pas de redondance.

## Bornes du repère et repère ajusté

### Exemples

Soit  $(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$  une base orthonormale. Alors  $A = B = 1$ .

$(g_1, g_1, g_2, g_2, \dots, g_n, g_n, \dots)$  :  $A = B = 2$

$(g_1, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$  :  $A = 1, B = 2$

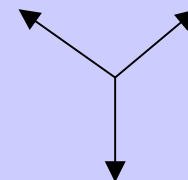
$(g_2, \dots, g_n, \dots)$  :  $A = 0, B = 1$  : on n'est pas générateur

$(g_1/1, g_2/2, \dots, g_n/n, \dots)$  : instable

En dimension finie, pour des fonctions normalisées à 1, les bornes du repère donnent la redondance.

Plus les bornes sont proches, plus le repère assure une couverture homogène dans toutes les directions.

Ex en dimension 2 : 3 vecteurs unitaires du plan séparés par des angles de  $120^\circ$  :  $A = B = 3/2$ .



## Opérateur de repère et repère dual

A tout repère de fonctions  $\{g_i\}_{i \in \Gamma}$  est associé un opérateur de repère  $U$  :

$$U : H \rightarrow \ell^2(\Gamma)$$
$$\forall i \in \Gamma, \quad (Us)[i] = \langle s, g_i \rangle$$

Et l'adjoint de  $U$  est :

$$U^* : \ell^2(\Gamma) \rightarrow H$$
$$U^*(\alpha) = \sum_{i \in \Gamma} \alpha_i g_i$$

**Propriétés** :  $U$  est injectif (inégalité de borne inférieure).  $U$  n'est bijectif que si le repère est une base.

On définit le **repère dual** par :

$$\forall i, \quad \tilde{g}_i = (U^*U)^{-1}g_i$$

**injection** : 2 éléments différents de l'espace de départ ont deux images distinctes. Si ces 2 images sont confondues, alors les 2 éléments aussi.



## Reconstruction avec le repère dual

Si le repère est redondant, plusieurs jeux de coefficients peuvent produire le même signal (non-unicité de la représentation). Une reconstruction particulière de  $s$  sur le repère est :

$$s = \sum_i \langle s, \tilde{g}_i \rangle g_i = \sum_i \langle s, g_i \rangle \tilde{g}_i$$

Ce jeu de coefficients vérifie une propriété de norme minimale. En effet, considérons un jeu de coefficients  $\{c_i / i \in \Gamma\}$  tel que :  $s = \sum_i c_i g_i$

Alors : 
$$\sum_{i \in \Gamma} |\langle s, \tilde{g}_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \in \Gamma} |c_i|^2$$

Et on retrouve le cas de la base orthonormale :  $U^* U = \text{Id}$  et

$$s = \sum_i \langle s, g_i \rangle g_i$$

## Repère ajusté (« tight frame »)

Pour un repère ajusté :  $U^* U = A \cdot Id$  et :  $f = \frac{1}{A} \sum_i \langle f, g_i \rangle g_i$

Si le repère est presque ajusté, on peut approximer le signal par :

$$f = \frac{2}{B + A} \sum_i \langle f, g_i \rangle g_i + R$$

Avec :  $R = Id - \frac{2}{A + B} L$

$$|\langle Rf, f \rangle| \leq \delta \|f\|^2$$

$$\delta = \frac{B - A}{B + A}$$

## Parenthèse : lien avec l'échantillonnage

La théorie des repères a été initialement développée pour la reconstruction de signaux  $f$  à bande limitée à partir d'un échantillonnage non-uniforme:

$$x_P = f(t_P)$$

$$f(t_P) = \langle f, h_P \rangle = U_h[p]$$

Si les fonctions  $h_n$  forment un repère, l'opérateur  $U_h$  est inversible sur son image et on peut reconstruire  $f$  à partir de ses échantillons.

Le pseudo-inverse de  $U_h$  vérifie pour tout signal  $f$  :  $\tilde{U}^{-1}Uf = f$

Avec :  $\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$

Alors :  $\tilde{U}^{-1}x = \sum_P x_P \tilde{h}_P$

Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

■ Frames d'ondelettes : généralités

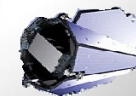
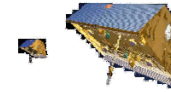
■ Passage sur la sphère

■ Des données à la représentation en ondelettes

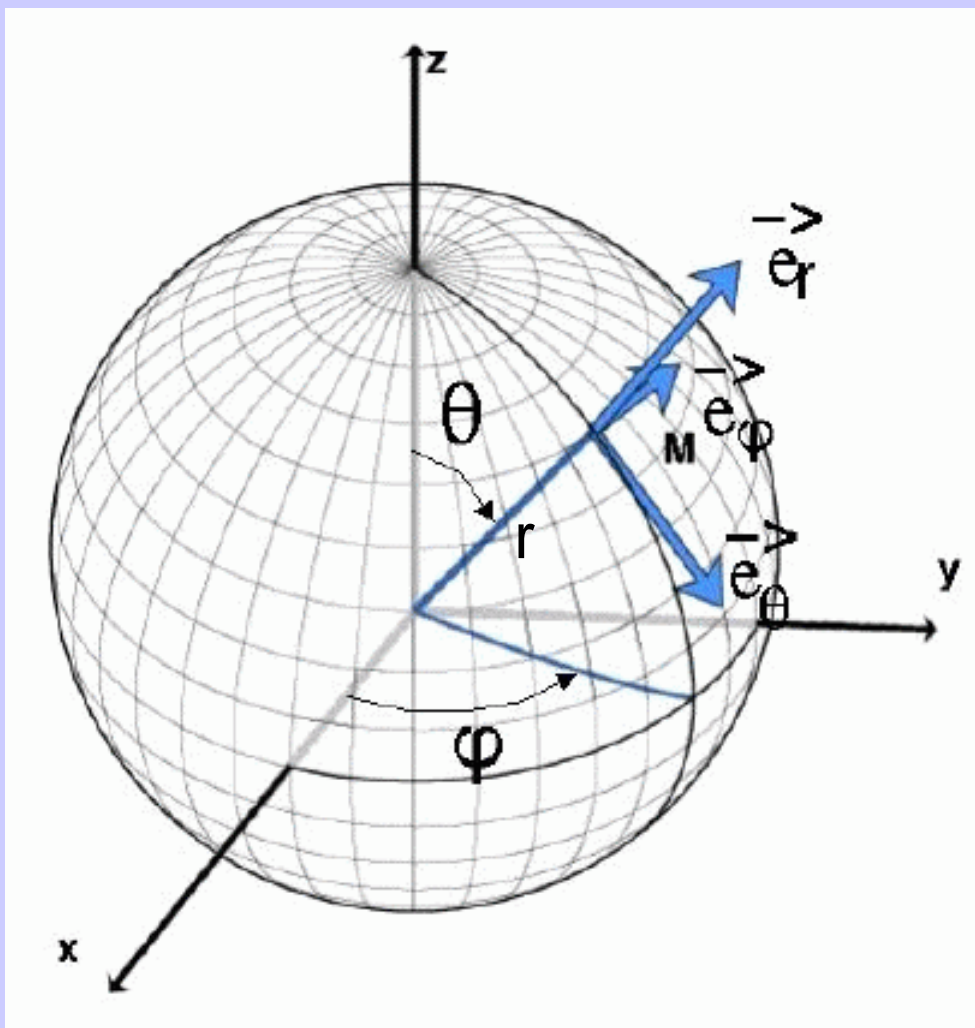
■ Exemples

Conclusion et perspectives

*Définitions et  
généralités*



## Paramétrisation



$\theta$  = colatitude

$\varphi$  = longitude

$r$  = rayon

géocentrique

## Notations et définitions

- Soit  $\Sigma$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$ .
- $H = L^2(\Sigma)$  est l'espace des fonctions de carré intégrable sur la sphère.
- $\langle f, g \rangle = \int_{\Sigma} f(\vec{r})g(\vec{r})d\sigma(\vec{r})$  est le produit scalaire sur la sphère.

$H = L^2(\Sigma)$  a une base naturelle qui est la base des harmoniques sphériques de surface  $Y_{\ell,m}$ , et se décompose en sous-espaces orthogonaux :  $H_{\ell}$

$$H = L^2(\Sigma)$$

$$H = \bigoplus_0^{\infty} H_{\ell}$$

avec  $H_{\ell}$  l'espace généré par les harmoniques sphériques de degré  $\ell$

## La base des harmoniques sphériques

**Espace de travail:** espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur une sphère, admettant un prolongement harmonique à l'extérieur.

**Les harmoniques sphériques**  $Y_{\ell,m}^{ext} = f_{\ell}(\vec{r}) \cdot Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$

- Solutions de l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$

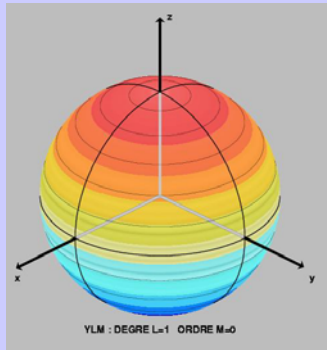
$$f_{\ell}(\vec{r}) = C_{\ell} r^{\ell} + \frac{D_{\ell}}{r^{\ell+1}} \quad C_{\ell} = 0$$

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = P_{\ell,m}(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

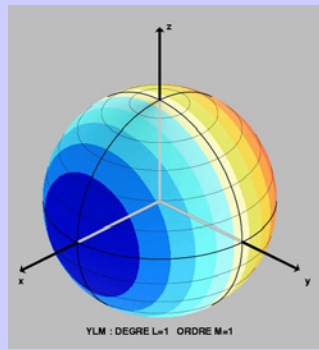
$\theta$  colatitude,  $\phi$  longitude,  $r$  rayon géocentrique

- $Y_{\ell,m}^{ext}$  = potentiel d'une source multipolaire au centre de la sphère
- Partie angulaire  $Y_{\ell,m}$  = base de Fourier sur la sphère
- 3D : toute fonction définie sur la sphère et harmonique à l'extérieur s'écrit comme combinaison linéaire des  $Y_{\ell,m}^{ext}$

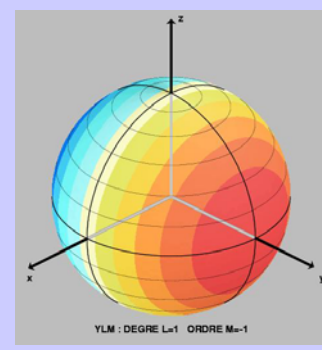
# Les harmoniques sphériques



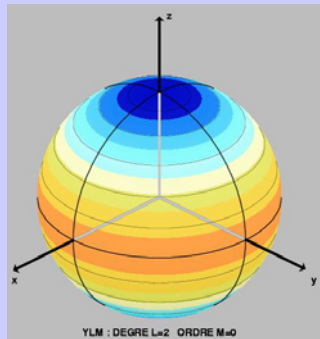
1,0



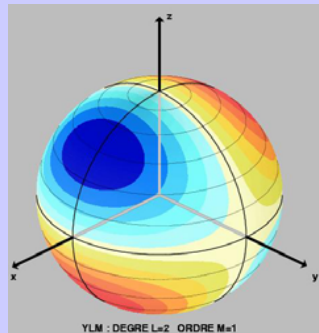
1,1



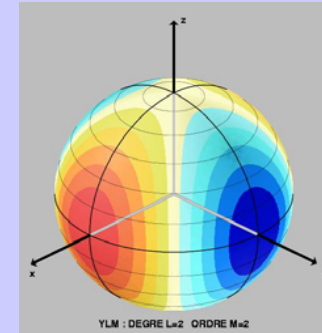
1,-1



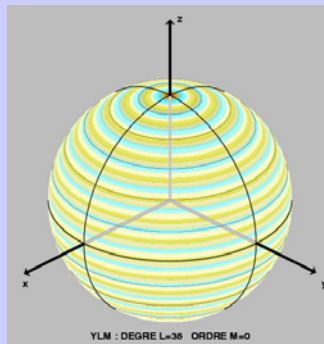
2,0



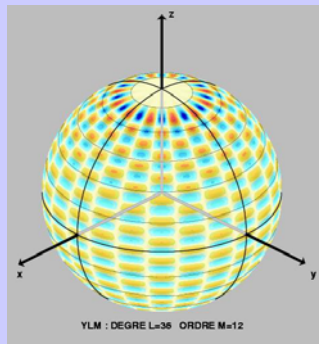
2,1



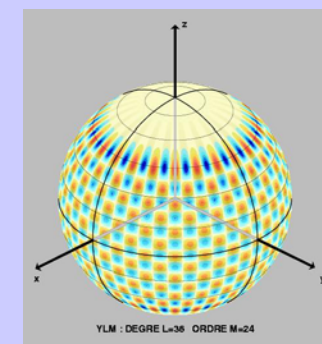
2,2



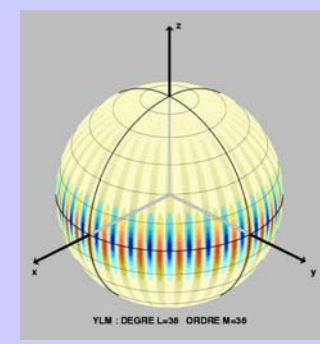
36,0



36,12



36,24



36,36



## Décomposition en harmoniques sphériques

$$V_G(r, \theta, \phi, t) = \frac{GM}{R_{Eeq}} \sum_{\ell=0}^N \sum_{m=0}^{\ell} \left( \frac{R_{Eeq}}{r} \right)^{\ell+1} (C_{\ell}^m(t) \cos m\phi + S_{\ell}^m(t) \sin m\phi) P_{\ell}^m(\cos \theta)$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

Coefficients de la décomposition



$P_{\ell}^m(\cos \theta)$  = Fonctions associées de Legendre

V = potentiel de pesanteur dit : potentiel perturbateur (l'effet d'un ellipsoïde massique a été retiré)

# Fonctions zonales et noyaux sur la sphère

## Fonctions zonales

- Une fonction qui ne dépend que de  $\vec{r}_0 \cdot \vec{r}$  est zonale. Les fonctions  $f$  zonales sur la sphère sont identifiées avec les fonctions  $\tilde{f}$  définies sur  $[-1 ; 1]$ , avec :

$$f(\vec{r}) = \tilde{f}(\vec{r} \cdot \vec{r}_0) = \tilde{f}(\cos \theta) \text{ et } \cos \theta = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}$$

- Pour simplifier on ne distingue plus entre  $f$  et  $\tilde{f}$  dans la suite.

## Noyau reproduisant

Chaque espace  $H_\ell$  admet un noyau zonal  $Q_\ell$  tel que :

$$\forall f \in H_\ell, \langle f(\vec{r}), Q_\ell(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}) \rangle_{\vec{r}} = f(\vec{r}_0)$$

Ce noyau est lié aux harmoniques sphériques par le théorème d'addition :

$$Q_\ell(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\vec{r}_0) Y_{\ell,m}(\vec{r})$$

## Produit scalaire – harmoniques sphériques

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $H$  :

$$f = \sum_{\ell,m} c_{\ell,m} Y_{\ell,m}$$

$$g = \sum_{\ell,m} d_{\ell,m} Y_{\ell,m}$$

■ Produit scalaire de  $f$  et  $g$  :

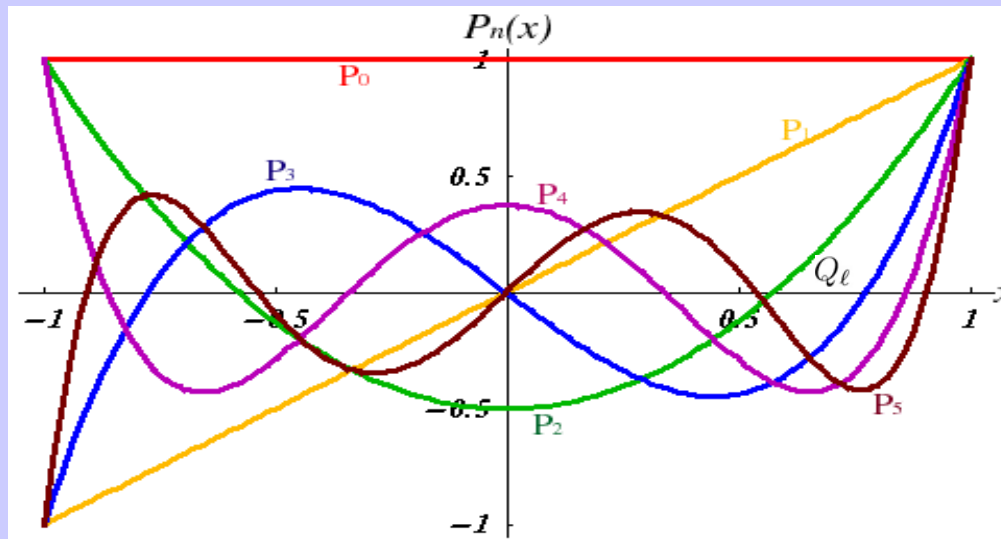
$$\langle f, g \rangle = \sum_{\ell,m} c_{\ell,m} d_{\ell,m}$$

■ Produit scalaire avec le noyau reproduisant :

$$\langle f(\vec{r}), Q_{\ell}(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}) \rangle = \sum_m c_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\vec{r}_0) = f_{\ell}(\vec{r}_0)$$

## Les polynômes de Legendre $P_\ell(\cos \theta)$

Les polynômes de Legendre  $P_\ell$  sont des fonctions zonales liées au noyau reproduisant  $Q_\ell$  par :  $Q_\ell = (2\ell + 1)P_\ell$



$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

■ Frames d'ondelettes : généralités

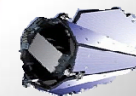
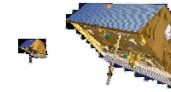
■ Passage sur la sphère

■ Des données à la représentation en ondelettes

■ Exemples

Conclusion et perspectives

*Construction de  
frames d'ondelettes*



# Définir une transformée en ondelettes sur une sphère

## Conditions

- Le signal et les ondelettes sont définis sur une sphère
- Des opérateurs de dilatation et de translation sont définis
- La limite plane est respectée aux petites échelles

### ■ Les translations

Deviennent des rotations

### ■ Le problème des dilatations

Sur la sphère, il n'existe pas d'opérateur de dilatation global...  
On peut au mieux définir des opérateurs locaux. Ainsi les ondelettes ne sont pas de vraies dilatées d'une fonction mère...  
Et le paramètre d'échelle n'est pas un vrai paramètre de dilatation.

## Diverses approches

- **Dalke et al. (1995)** : définition d'ondelettes sur la sphère par une bijection appliquée à des ondelettes planes. La sphère est paramétrée par deux angles latitude/longitude. Gros problèmes de distorsion aux pôles, qui ne peuvent être réduits que par des calculs lourds.
- **Narcowich et Ward (1996), Freedon et al. (1998)** : définir les ondelettes à partir des harmoniques sphériques et des polynômes de Legendre (radial basis functions), afin de travailler directement en géométrie sphérique. Les fonctions ne sont cependant pas très bien localisées, et restent très proches des harmoniques sphériques.
- **Holschneider (1996)** : introduction des dilatations par un paramètre abstrait soumis à certaines contraintes
- **Antoine et Vandergheynst (2000)** : approche basée sur la théorie des groupes

## Ondelettes axisymétriques sur une sphère

- Directionnelles/axisymétriques
- Ondelettes axisymétriques: se développent en série de Legendre

Formulation générale: ondelette d'échelle  $a$  placée en  $e$

$$\psi_{a,\vec{e}}(\hat{x}) = N_a \sum_{\ell} c(a, \ell) Q_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

Echelle  $a$

Position  $e$

Fonction de noyau

Notations :  $\hat{e} = \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}$  vecteur unitaire et  $N_a$  facteur de normalisation.

Prolongement harmonique

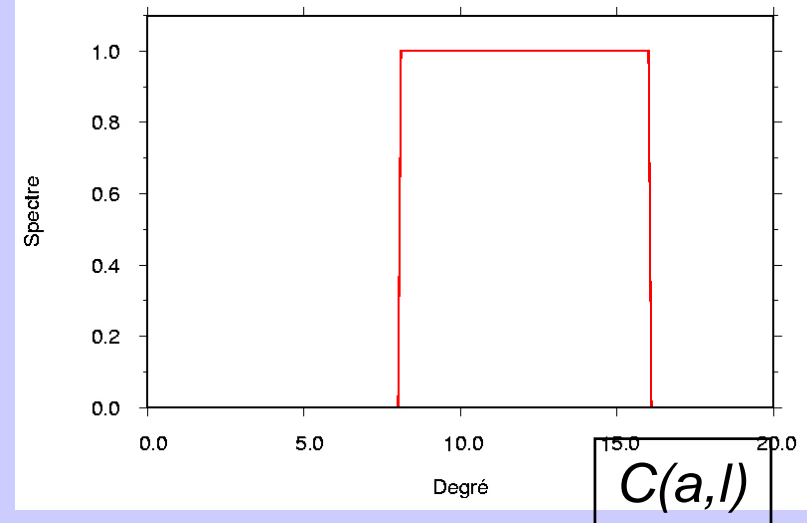
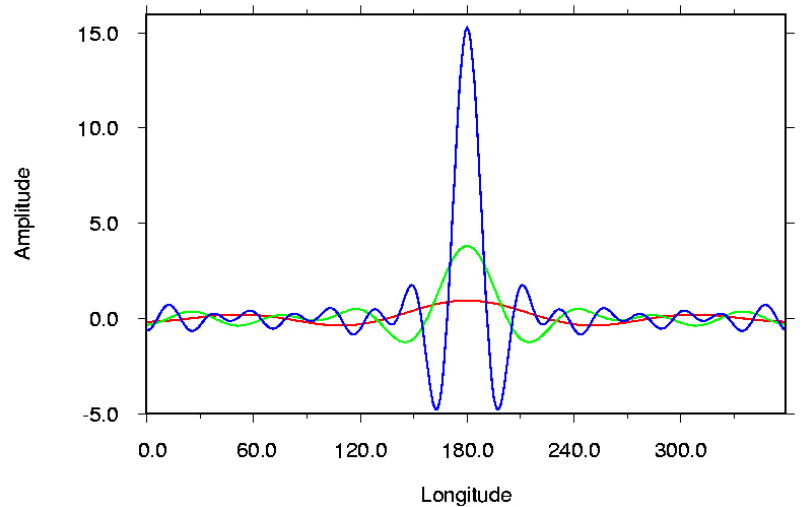
$$\psi_{a,\vec{e}}(x) = \frac{N_a}{\|\vec{x}\|} \sum_{\ell} c(a, \ell) \left( \frac{\|\vec{e}\|}{\|\vec{x}\|} \right)^{\ell+1} Q_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

L'ondelette satisfait l'équation de Laplace.

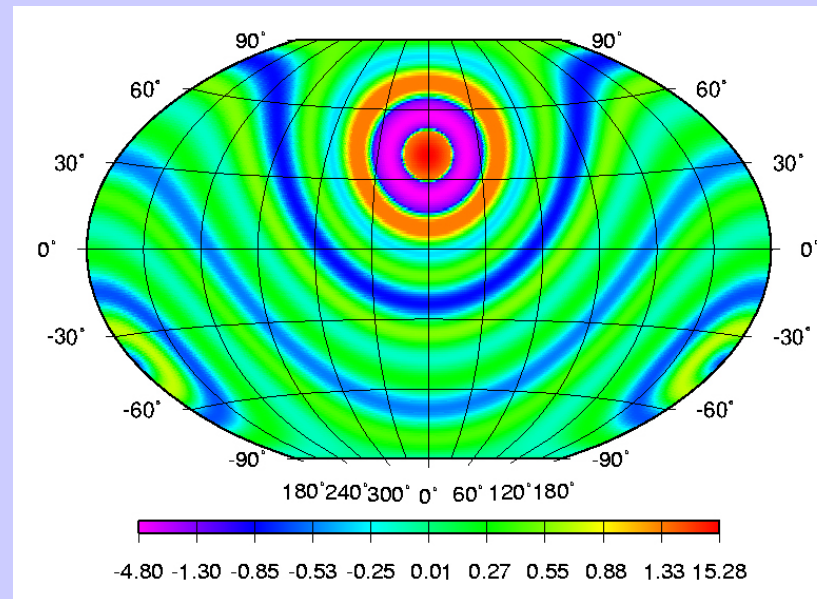


# Exemple : ondelettes de Shannon (Freeden et al., 1998)

Etalement spectral de l'ondelette

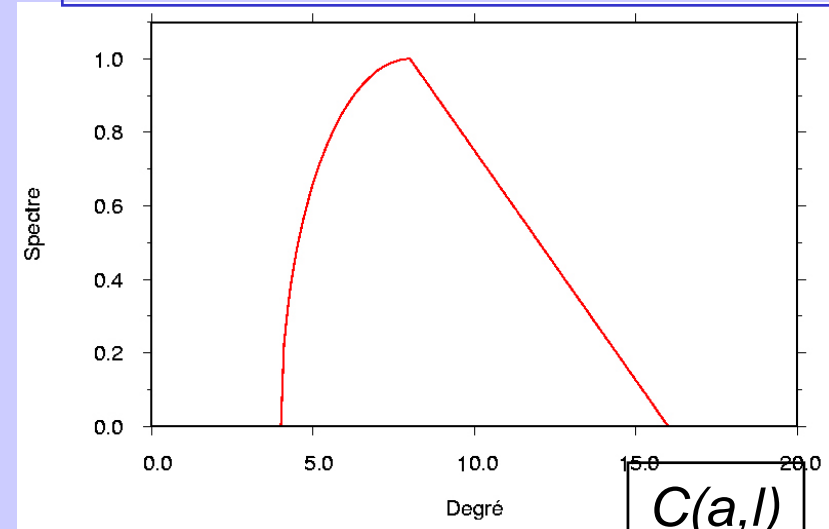
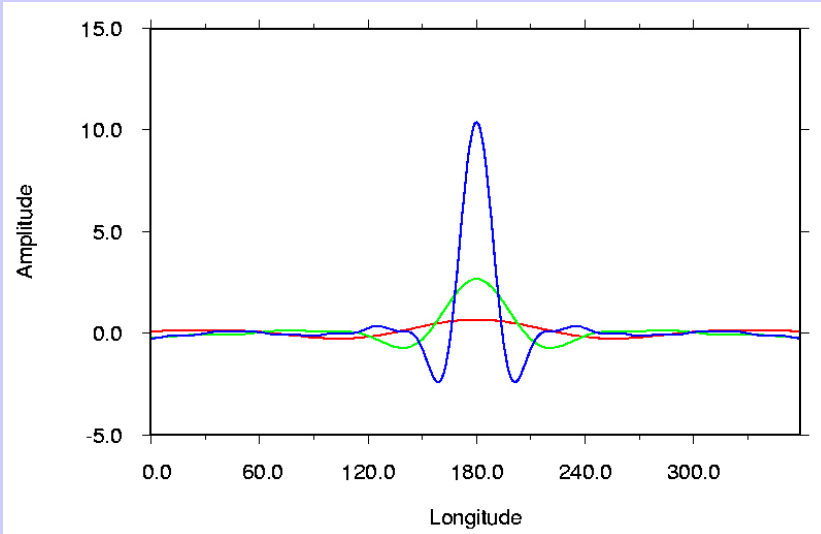


Etalement spatial de l'ondelette



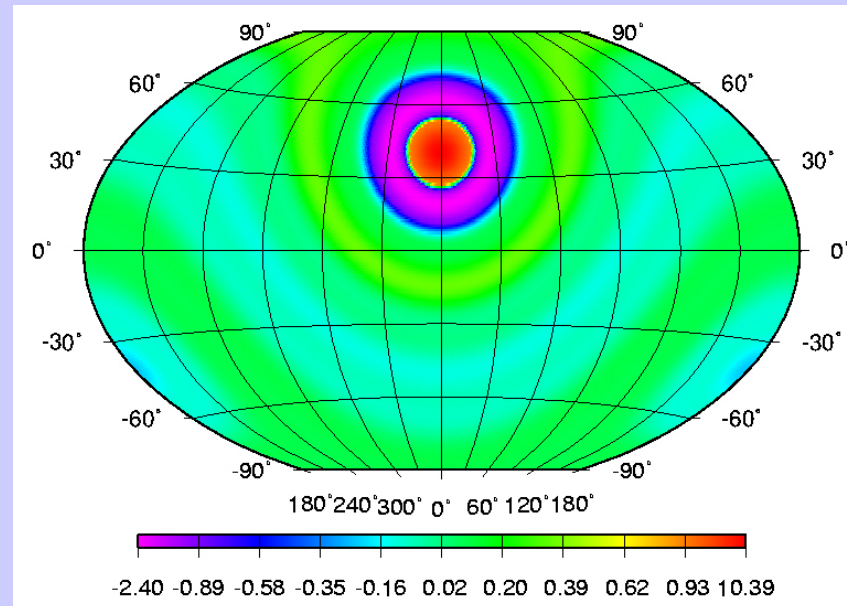
# Exemple : ondelettes De La Vallé Poussin (Freeden et al., 1998)

Etalement spectral de l'ondelette



$C(a, l)$

Etalement spatial de l'ondelette



## Les multipoles de Poisson (Holschneider et al., 2003)

### Expression en série de Legendre

$$\psi_{a,\vec{e}}^m(\hat{x}) = N_a \sum_{\ell} (a\ell)^m e^{-a\ell} Q_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

Paramètre d'échelle  $a$

Paramètre de position  $e$

$m$  = ordre du multipole, typiquement 2 ou 3.

Si  $m$  augmente, l'ondelette est de plus en plus oscillante et de moins en moins bien localisée spatialement. Son spectre est de plus en plus localisé.

L'échelle de l'ondelette est liée au paramètre de position par :

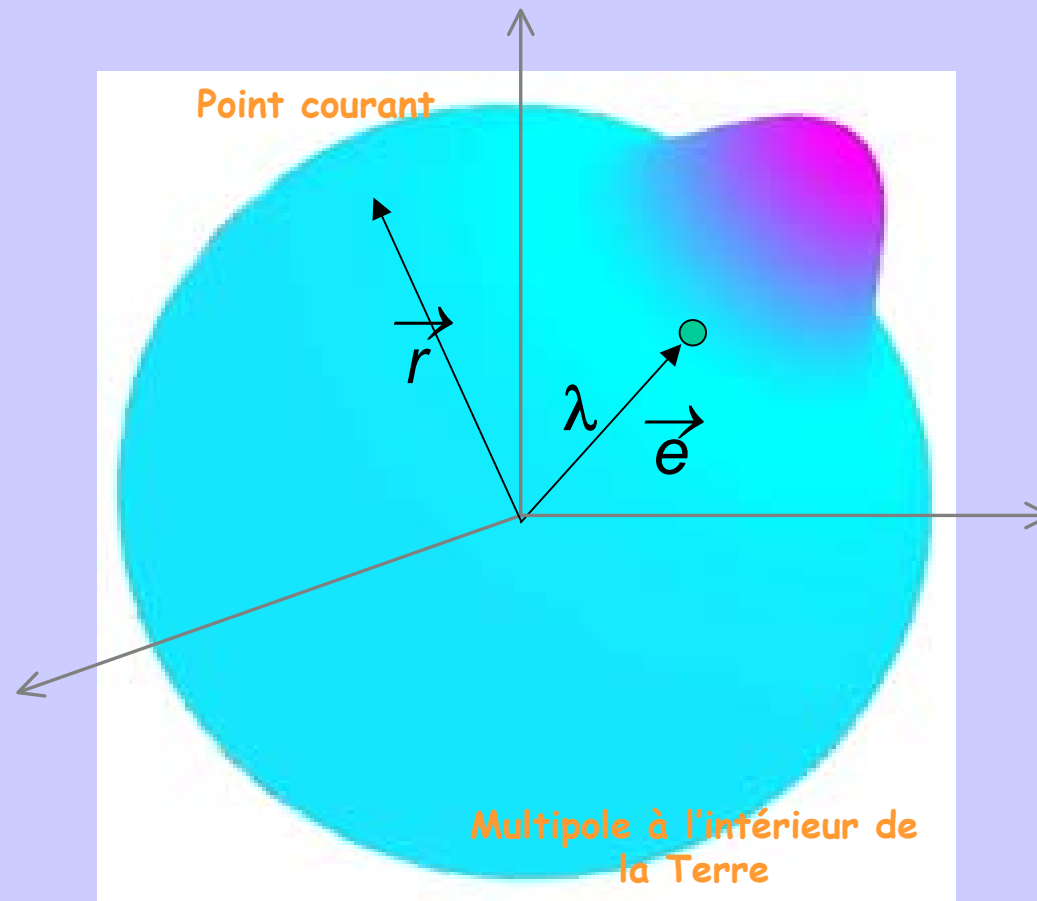
$$\|\vec{e}\| = e^{-a}$$

On a en fait un multipole en  $e$ .

Expression équivalente :

$$\psi_{a,\vec{e}}^m(\vec{x}) = \frac{a^m N_a}{\|\vec{x}\|} \sum_{\ell} \ell^m \left( \frac{\|\vec{e}\|}{\|\vec{x}\|} \right)^{\ell} Q_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

## Les multipôles de Poisson

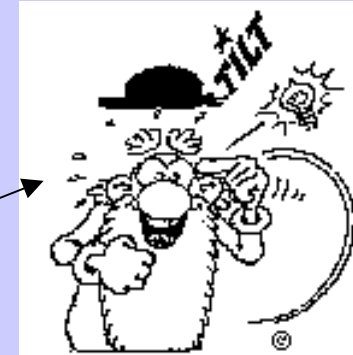
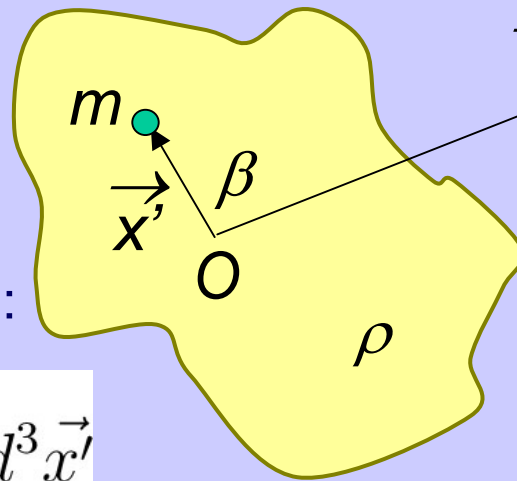


Plus le multipole est en profondeur, plus l'ondelette est lisse (grande échelle).

## Développements multipolaires

Observateur en  $x$ , masse ponctuelle en  $x'$

$$V(\vec{x}) = \frac{Gm}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



Formulation volumique :

$$V(\vec{x}) = \int_{\Omega} \frac{G\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

Développement multipolaire de l'effet en  $x$  de  $m$  en  $x'$  :

$$V(\vec{x}) = \frac{Gm}{|\vec{x}|} \sum_{\ell} \left( \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \beta)$$

## Des potentiels multipolaires excentrés (Holschneider et al., 2003)

Effet en  $x$  d'un monopole situé en  $\lambda e$  :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \lambda \hat{e}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \sum_{\ell} \left( \frac{\lambda}{|\vec{x}|} \right)^{\ell} P_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

**Multipole :** 
$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \left( \frac{1}{|\vec{x} - \lambda \hat{e}|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \sum_{\ell} (\ell)^m \left( \frac{\lambda}{|\vec{x}|} \right)^{\ell} P_{\ell}(\hat{e} \cdot \hat{x})$$

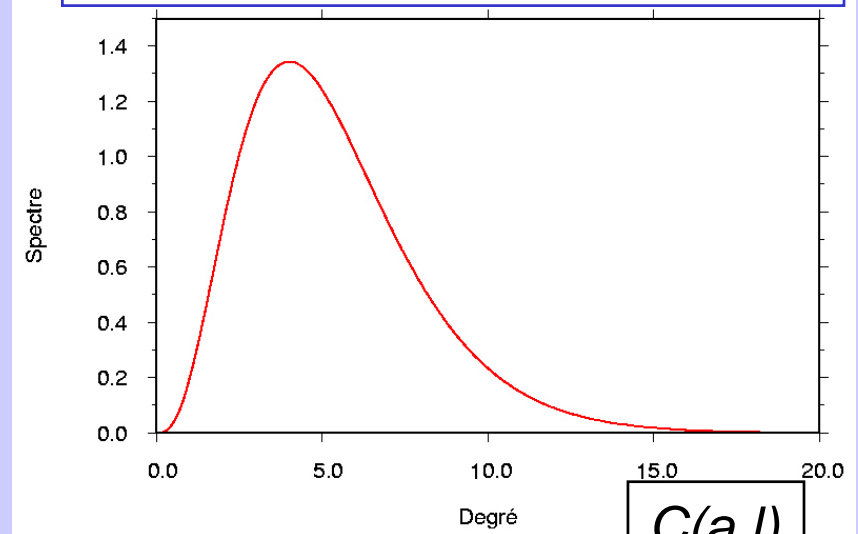
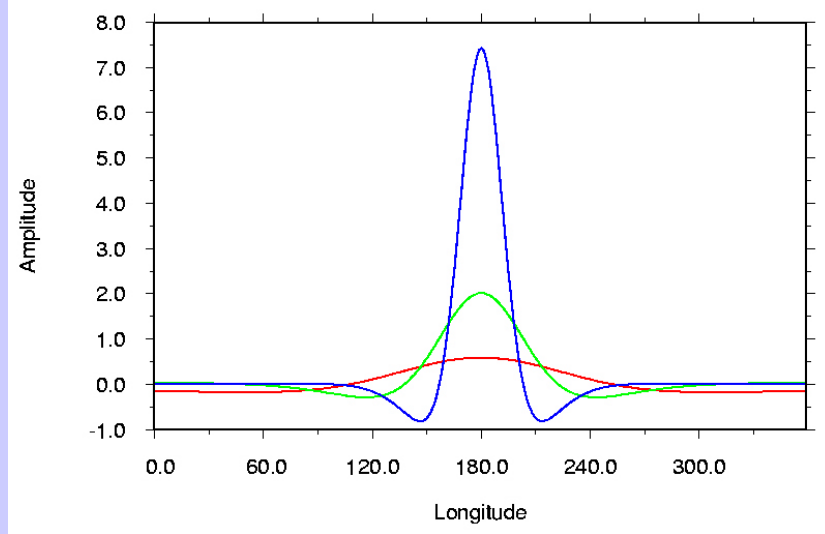
On montre ainsi que :

$$\psi_{a, \vec{e}}^m = H_a^m + \frac{2}{a} H_a^{m+1}$$

$$H_a^m(\vec{x}) = a^m \left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \left( \frac{1}{|\vec{x} - \lambda \hat{e}|} \right)$$

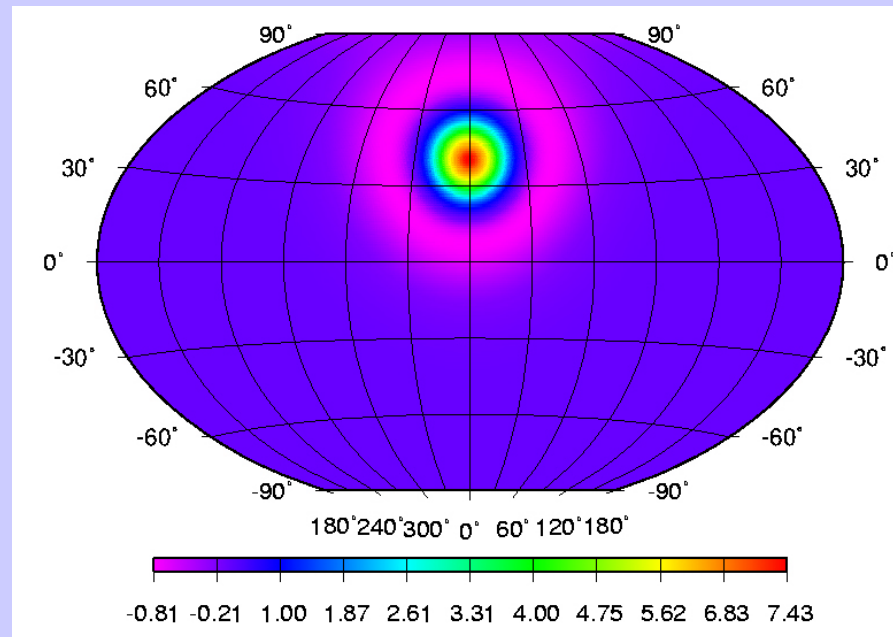
# Les multipoles de Poisson (m=3)

Etalement spectral de l'ondelette



$$C(a,l)$$

Etalement spatial de l'ondelette



## Transformée continue en ondelettes sur la sphère

Revenons sur les conditions d'admissibilité dans le cas sphérique (d'après Holschneider et al., 2003).

$\gamma(\omega)$  fonction continue par morceaux est un générateur admissible si :

$$C_\gamma = \int_0^\infty |\gamma(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} < \infty$$

Conservation de l'énergie

$$\exists C < \infty, \forall a > 0, a^2 \sum_0^\infty (2\ell + 1) |\gamma(a\ell)|^2 < C$$

Pas de structures à trop grande échelle :  
sphère = domaine borné

On note alors  $g_a$  l'ondelette d'échelle  $a$  (et **ce n'est pas une dilatation !!**) :

$$g_a = \sum_0^\infty \gamma(a\ell) Q_\ell$$

$$\|g_a\|^2 < C/a^2$$

Analyse continue sur la sphère = ensemble des produits scalaires

$$C_s(a, e) = \langle g_{a,e}, s \rangle$$



## Paramètre d'échelle

Attention au paramètre d'échelle, ce n'est pas une dilatation !!!

Dans le cas des ondelettes multipoles de Poisson, le paramètre  $a$  présente une signification directe puisqu'il donne la profondeur du multipole. Plus la source est profonde, plus elle produit une structure à grande échelle : cf les sources du champ de pesanteur.

On trouve ainsi une définition adaptée au domaine sphérique : les dilatations sont remplacées par un déplacement à des profondeurs variables.

## Reconstruction du signal

(d'après Holschneider et al., 2003)

$\chi$  est un second générateur admissible, et  $h_a = \sum_0^{\infty} \chi(al)Q_l$

Alors  $(\gamma, \chi)$  est un **couple analyse/reconstruction** si :

$$\int_0^{\infty} \gamma^*(\omega)\chi(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = 1$$

avec  $\gamma^*(\omega)$  complexe conjugué de  $\gamma(\omega)$

La **reconstruction** du signal s'effectue suivant :

$$s = \int_0^{\infty} \frac{da}{a} \int_{\Sigma} d\sigma(e)C_s(a, e)h_{a,e}$$

NB : Si  $c_{\gamma} = 1$  alors  $(\gamma, \gamma)$  est un couple analyse/reconstruction.

## Construction d'un repère discret

avec les ondelettes multipole de Poisson.

- Choix d'une séquence d'échelles et de positions afin de discrétiser l'intégrale de la formule de reconstruction.

S'approcher d'un repère ajusté : discrétisation la plus régulière possible.

Analogie avec l'exemple à une dimension : progression géométrique des échelles.

- La difficulté : échantillonnage régulier des positions lorsqu'on travaille sur une sphère ... de plus, condition de famille génératrice à satisfaire (le nombre de positions doit être suffisant par rapport au nombre de degrés de liberté).

Ondelettes à bande limitée : règles de quadratures exactes pour discrétiser l'intégrale spatiale (= théorème d'échantillonnage sur la sphère) et construire des bases.

## Systèmes de points sur la sphère

- Les ensembles de points qui mènent à des règles de quadrature sur la sphère s'appellent des systèmes fondamentaux.
- Il y en a de toutes sortes, qui mènent à des quadratures plus ou moins régulières :
  - exemples de grilles dans *Freeden et al.* (1998).
  - systèmes extrémaux : meilleure régularité mais calcul lourd nécessitant l'optimisation d'un déterminant
- Systèmes fondamentaux en dimension infinie : comptent un nombre infini de points.
- NB : systèmes de points basés sur une distribution de particules chargées à l'équilibre

## Systèmes fondamentaux

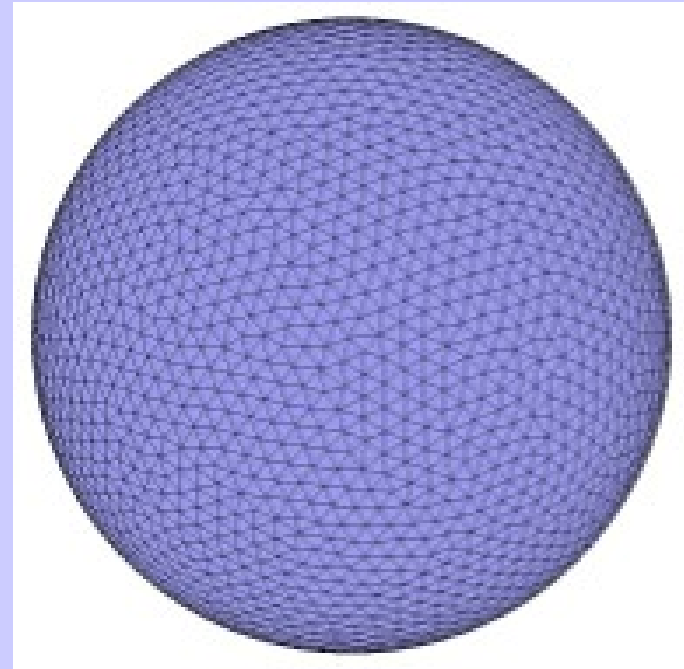
- Exemple : soit  $f$  une fonction appartenant à  $W_L = \bigoplus_0^L H_\ell$
- Un système fondamental  $S_L$  de  $W_L$  est un ensemble de points  $\{\vec{p}_i\}_i$  tel que la matrice  $G$  de terme général :

$$G_{i,j} = K_L(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)$$

$$K_L = \sum_{\ell=0}^L Q_\ell$$



est non dégénérée.

- Son déterminant doit être non nul : cette condition permet de calculer le système de points (notamment : systèmes qui maximisent le déterminant, etc.). Ce système de points mène à une quadrature sur  $W_L$  (le seul élément de  $W_L$  qui vaut zéro en chaque point du système est le vecteur nul).



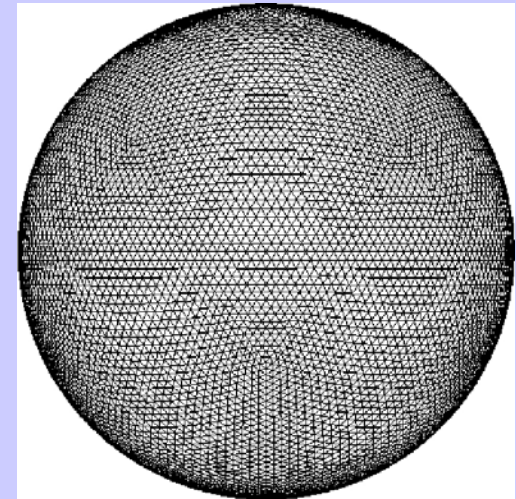
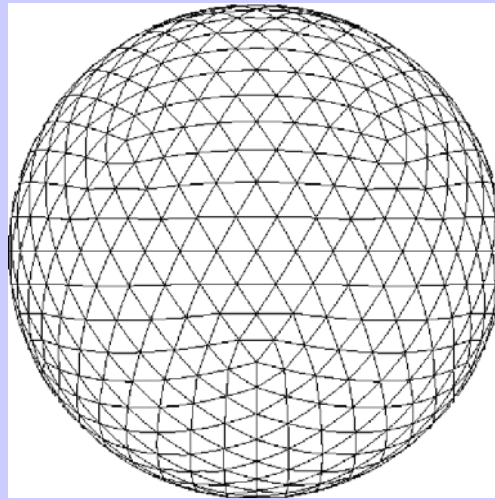
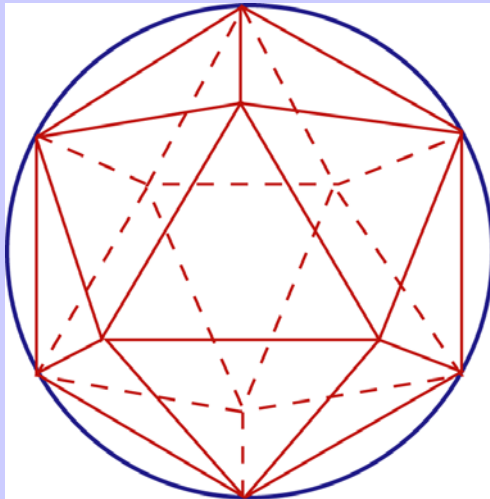
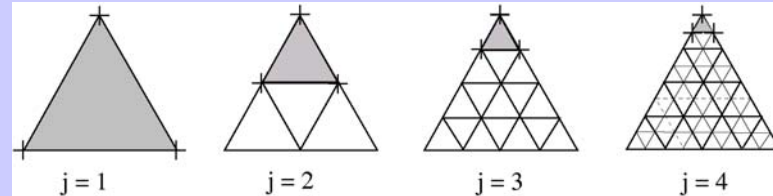
Exemple de système fondamental - Womersley et Sloan

## Discrétisation des positions

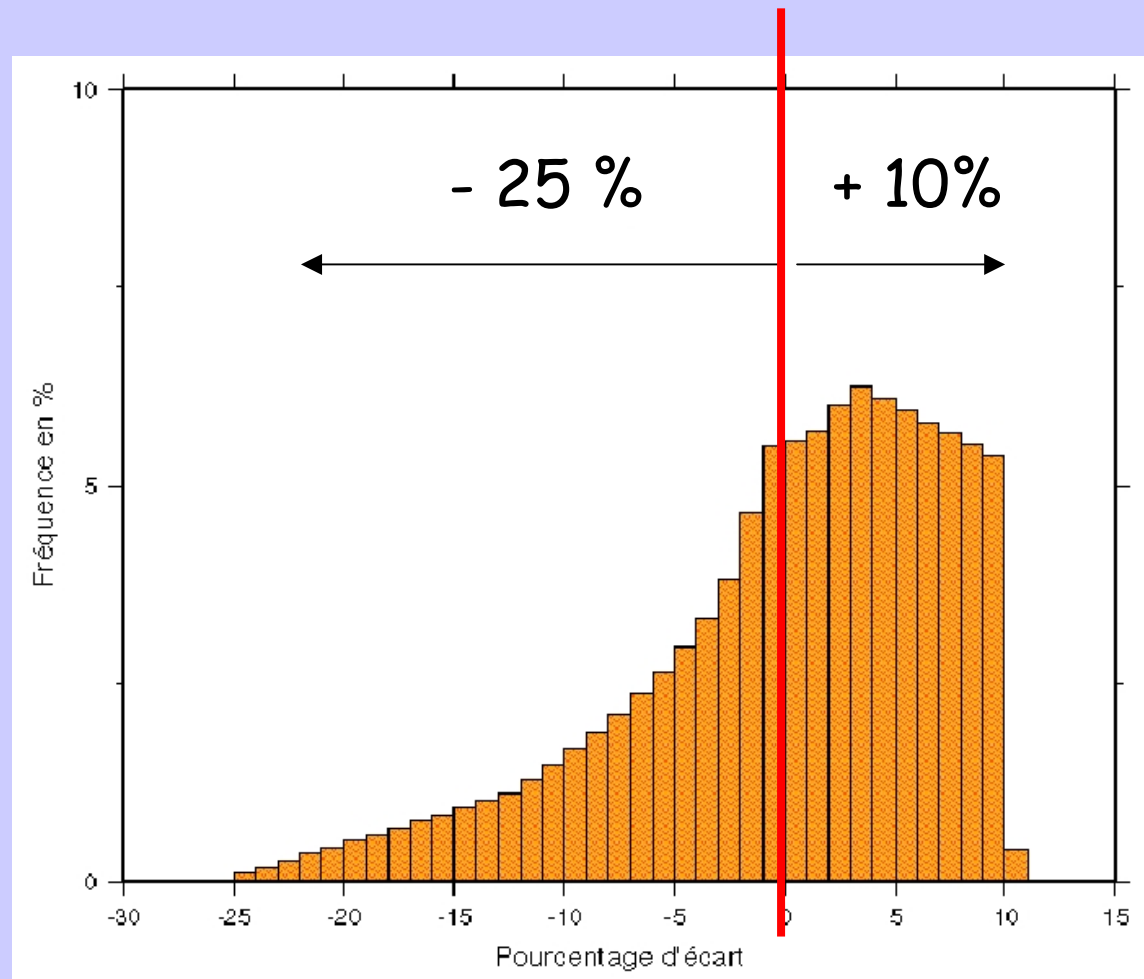
**Contraintes:**  Indépendante du système de coordonnées  
 Aussi régulière que possible

Choix pratique: implémentation simple d'une séquence de maillages hiérarchisés à partir des subdivisions successives des faces d'un polyèdre régulier placé au centre de la sphère.

➤ l'icosaèdre



## Régularité des maillages obtenus



Longueur moyenne

## Discrétisation des échelles (1)

A chaque maillage est associée une échelle

### Contraintes

- ⊗ Générer les harmoniques sphériques
- ⊗ Couverture régulière du spectre

### Point de vue géométrique:

longueur des arcs de maillage ~ divisée par 2 entre deux niveaux consécutifs ⇒ il en va de même pour le rayon d'influence des ondelettes

⊗ Progression géométrique



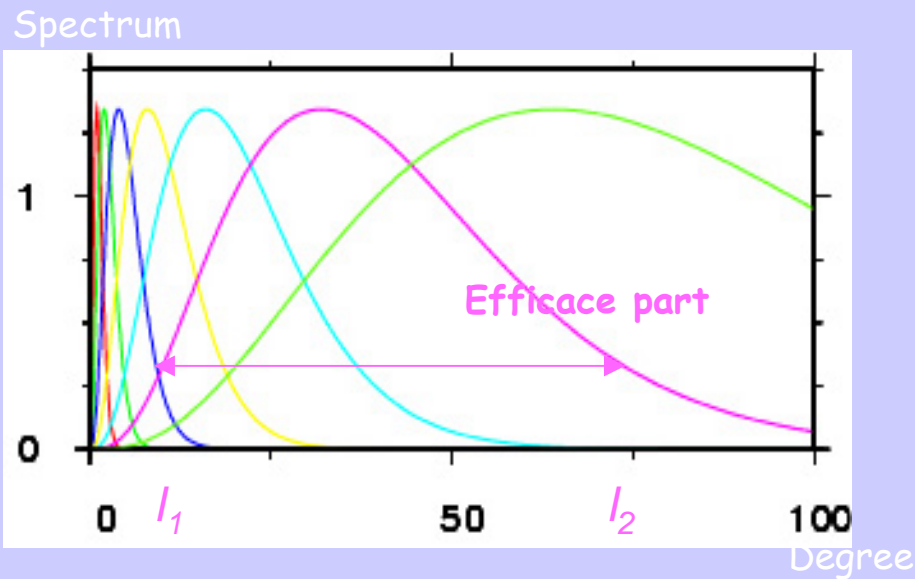
## Discrétisation des échelles (2)

### Génération des harmoniques sphériques:

Remplaçons les ondelettes par des fonctions à bande limitée :  $(l_1, l_2)$ , qui correspond à la partie efficace de leur spectre.

$D_l$  = nombre d'harmoniques sphériques jusqu'au degré  $l$

$N_l$  = nombre d'ondelettes bande-limitée avec une composante dans les degrés  $\leq l$



$N_l > D_l \rightarrow$

Les ondelettes peuvent représenter les harmoniques sphériques jusqu'au degré  $l$

Couverture régulière:  $N_l/D_l$  varie peu

⊗ Progression géométrique des échelles :  $a_j = C \cdot \gamma^{j-1}$

## Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

- Frames d'ondelettes : généralités
- Passage sur la sphère
- Des données à la représentation en ondelettes
- Exemples

Conclusion et perspectives



## Position du problème

- Soit  $T(r, \theta, \phi)$  le potentiel de pesanteur et  $T(r = R_\Sigma, \theta, \phi)$  sa valeur sur la sphère terrestre moyenne.

On note  $\psi_i$  l'ondelette  $i$  du repère, et  $\psi_{i,\Sigma} = \psi_i(r = R_\Sigma, \theta, \phi)$

Alors : 
$$T = \sum_i \alpha_i \psi_i \quad \text{avec : } \alpha_i = \langle T_\Sigma, \tilde{\psi}_{i,\Sigma} \rangle$$

- On note  $b$  les données, avec  $b = f(T)$ . En effet, en général on n'a pas des données sur le potentiel lui-même mais les données s'écrivent plutôt comme fonctionnelles du potentiel.

On note  $W$  la matrice de covariance du bruit des mesures, avec :

$$W_{ij} = \frac{1}{\sigma_j^2} \cdot \delta_{ij}$$

- Connaissant  $b$  et  $W$ , on veut calculer  $\alpha \dots$

## Equations d'observation : exemple

- Anomalies de pesanteur (approximation sphérique):

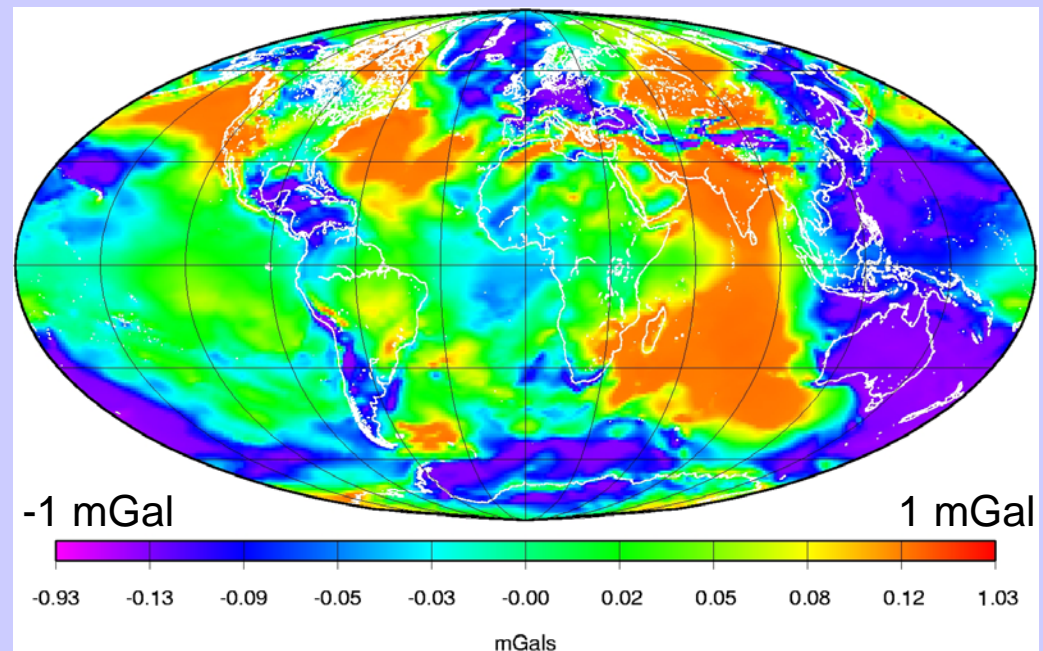
$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$$

- Anomalies de pesanteur (cas général):

Des termes perturbatifs  $\varepsilon$  prennent en compte l'effet de l'ellipticité et de la déviation de la verticale (Pavlis, 1988).

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T + \varepsilon$$

La correction  $\varepsilon$



## Cas continu idéal (1)

- Données non-bruitées sur le potentiel, distribution continue.

- Alors le système normal s'écrit : 
$$\sum_i \alpha_i \langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle b, \psi_j \rangle$$

➤ soit en notation matricielle : 
$$M^t \cdot M \cdot \alpha = M^t \cdot b$$

Et  $M^t \cdot M$  est la matrice de  $U U^*$ . Si le repère est redondant, cette matrice n'est pas inversible.

- Soit  $M^\dagger$  le pseudo-inverse de  $M$ .  $M^\dagger$  vérifie :

$$M^\dagger \cdot M \cdot x = x$$

$$(1) \quad M M^\dagger M = M$$

$$(3) \quad (M M^\dagger)^* = M M^\dagger$$

$$(2) \quad M^\dagger M M^\dagger = M^\dagger$$

$$(4) \quad (M^\dagger M)^* = M^\dagger M$$

## Cas continu idéal (2)

- Une solution du système est donnée par :  $\alpha = (M^t M)^\dagger M^t b$

avec :  $(M^t M)^\dagger M^t = M^\dagger$

Parmi tous les vecteurs  $\alpha$  tels que  $T = \sum_i \alpha_i \psi_i$ , la solution du pseudo-inverse est de norme minimale :

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \quad \text{min.}$$

On retrouve les coefficients définis avec le repère dual. Il s'agit de la solution qui n'a aucune composante dans le noyau de  $M^t \cdot M$ , ou, de manière équivalente, qui appartient à l'image de U (ou de M).

- Calcul pratique de  $M^\dagger$  par décomposition en valeurs singulières.

## Décomposition en valeurs singulières

- Décomposition en un produit de 3 matrices :

$$M = V^t \Sigma U \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec :  $V$  et  $U$  matrices orthogonales ( $V^{-1} = V^t$ ,  $U^{-1} = U^t$ ).

$\Sigma_+$  matrice diagonale strictement positive ( $r \times r$ ).

Dimensions :  $M$  ( $m \times n$ ),  $V$  ( $m \times m$ ),  $U$  ( $n \times n$ ).

- Pour une matrice  $M$  symétrique :  $U = V$ , les  $r$  premières colonnes de  $V^t$  forment une base orthonormale de l'image de  $M$  et les suivantes forment une base orthonormale de son noyau.
- Le pseudo-inverse est défini par :

$$M^\dagger = U^t \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_+^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V$$

## Cas réaliste (discret, bruité)

- Les mesures, bruitées et en nombre fini, ne donnent qu'une connaissance partielle du potentiel de pesanteur : il faut donc ajouter une information a-priori sur la lisseur du potentiel. Alors il existe une seule fonction qui présente cette régularité et ajuste correctement les mesures.
- Cette unique fonction peut néanmoins s'écrire de différentes façons comme combinaison linéaire d'ondelettes à cause de la redondance du repère. Il faut donc choisir une décomposition. Le plus simple est de choisir celle du repère dual, pour laquelle on a une propriété de norme minimale du vecteur des coefficients.
- La solution minimise donc une fonction de coût comprenant l'ajustement des données, la régularité et le choix d'une décomposition sur le repère.



## Formulation probabiliste

- Espace  $\mathcal{D}$  des données

= espace de toutes les mesures possibles

Espace  $\mathcal{M}$  des modèles

= espace de toutes des combinaisons linéaires d'ondelettes

L'information disponible sur les deux jeux de paramètres (observables et coefficients) est décrite à l'aide de distributions de probabilités définies sur ces deux espaces.

- **Les coefficients**  $\alpha$  = réalisation d'une distribution gaussienne  $\rho_M(\alpha)$  de moyenne nulle et de covariances a-priori  $K$ .

- **Les mesures**  $\mathbf{b}$  = réalisation d'une distribution gaussienne  $\rho_D(\alpha)$  centrée sur les données, de covariance  $W$  (du bruit des mesures).

$$\rho_M(\alpha) \propto e^{-\frac{1}{2}\alpha^t \cdot K^{-1} \cdot \alpha}$$

$$\rho_D(\alpha) \propto e^{-\frac{1}{2}(A\alpha - b)^t \cdot W^{-1} \cdot (A\alpha - b)}$$

## Formulation probabiliste (2)

- La combinaison des deux sources d'information indépendantes (connaissance *a-priori* sur l'espace des modèles et résultat des mesures) permet de définir une information *a-posteriori* décrite par la densité de probabilité jointe :

$$\rho(\alpha) = \rho_D(\alpha) \cdot \rho_M(\alpha)$$

= vraisemblance d'un jeu de coefficients d'ondelettes étant donné les hypothèses faites *a-priori* et les mesures disponibles.

- Solution du problème = le jeu de coefficients qui maximise cette fonction de vraisemblance (ou : de probabilité maximale). Il faut donc maximiser :

$$(A\alpha - b)^t \cdot W^{-1} \cdot (A\alpha - b) + \alpha^t \cdot K^{-1} \cdot \alpha$$

- On retrouve la solution des moindres carrés régularisés :

$$\alpha = (A^t \cdot W^{-1} \cdot A + K^{-1})^{-1} A^t \cdot W^{-1} \cdot b$$

## Distribution gaussienne singulière

- Si le repère est redondant, la matrice  $K$  est dégénérée : on a une distribution singulière. La densité de probabilité ne peut plus être définie avec l'inverse de  $K$ . On fait intervenir le pseudo-inverse de  $K$  à la place.
- Pseudo-inverser  $K$  revient à dire que le vecteur des coefficients appartient à l'image de  $K$ . On peut montrer (thèse de I.Panet) que cela revient à choisir le jeu de coefficients définis à l'aide du repère dual, donc vérifiant :

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \quad \text{min.}$$

## Calcul de K

Covariances des coefficients d'ondelettes :

$$K_{i,j} = \text{cov}(\alpha_i, \alpha_j)$$

avec :  $\alpha_i = \langle T_\Sigma, \tilde{\psi}_{i,\Sigma} \rangle$        $\alpha_j = \langle T_\Sigma, \tilde{\psi}_{j,\Sigma} \rangle$

Notations :  $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$  est la fonction de covariance du potentiel.

$$(Kf)(\vec{r}) = \langle C(\vec{r}, \cdot), f(\cdot) \rangle$$

Alors par linéarité on obtient :

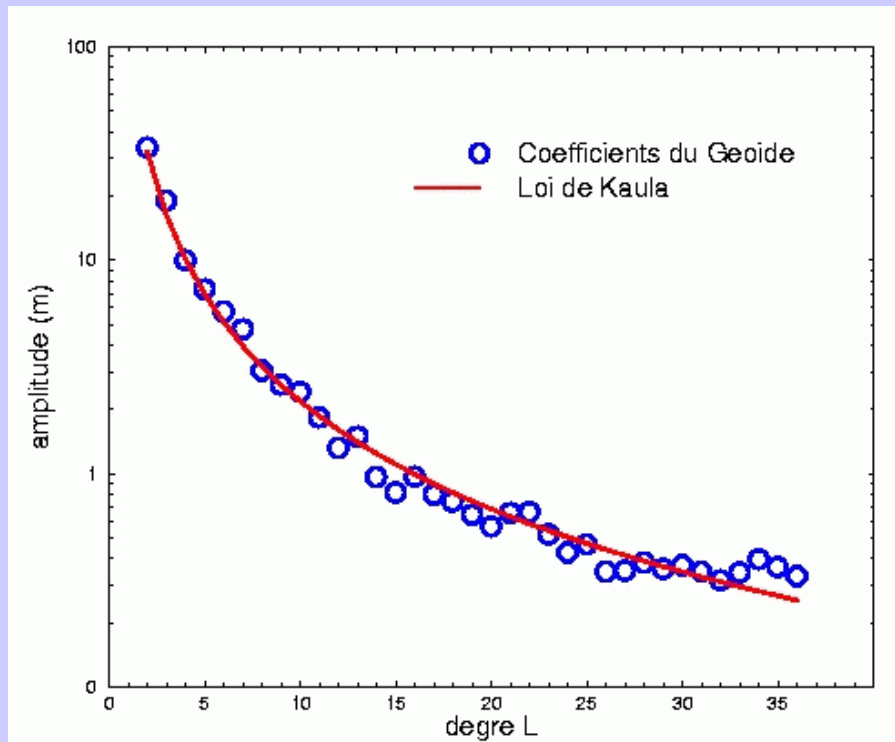
$$K_{i,j} = \langle K\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j \rangle$$

⊗ Il nous faut connaître  $C(\vec{r}, \vec{r}_1)$  et les ondelettes duales.

## Calcul de K

1 - **Loi de Kaula** : observée empiriquement. Traduit le comportement moyen (global) du champ.

$$C(\vec{r}, \vec{r}_1) = \sum_{\ell} c_{\ell} P_{\ell}(\vec{r} \cdot \vec{r}_1)$$



$$c_{\ell} = (\ell + 1)^2 (2\ell + 1) \frac{\eta}{\ell^4}$$

Décroissance quadratique du spectre

2 – **ondelettes duales** :  
approchées par proportionnalité  
avec les ondelettes (thèse de I.  
Panet, et article *Panet et al.,*  
2004)

## Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

- Frames d'ondelettes : généralités
- Passage sur la sphère
- Des données à la représentation en ondelettes
- Exemples

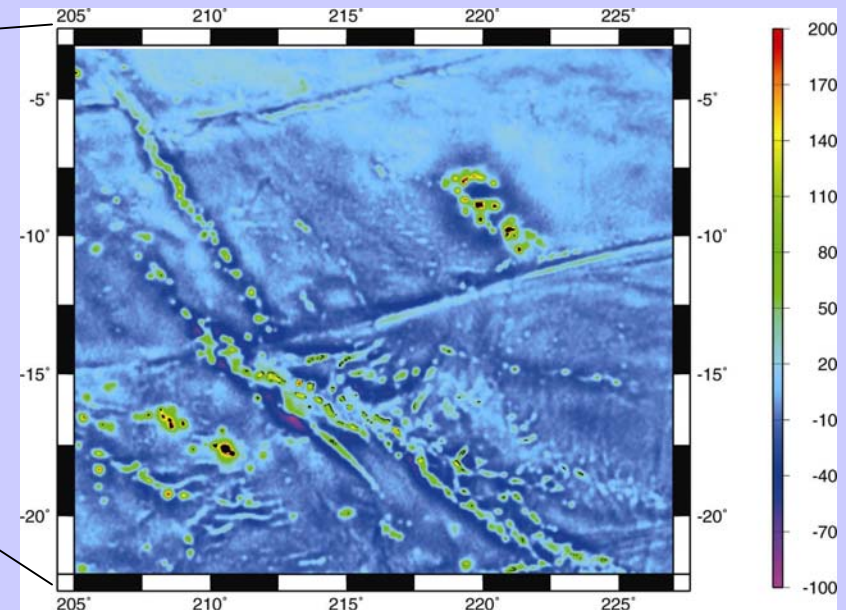
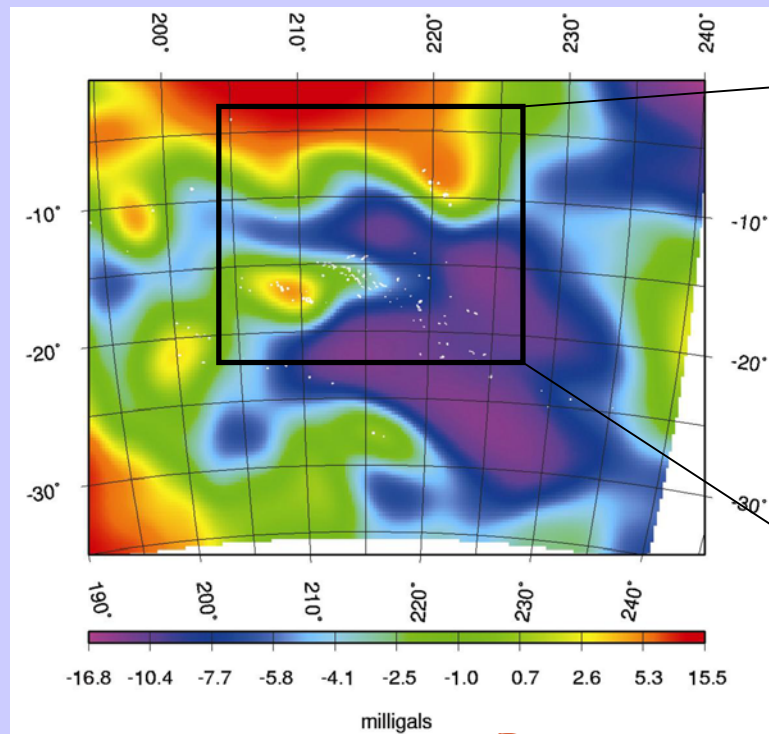
Conclusion et perspectives



## Gravity modelling over French Polynesia: data used

*large scale information from GGM02S model* (Tapley et al. 2004)

*local small scale refinement from KMS 2002 satellite derived grid* (Andersen & Knudsen).



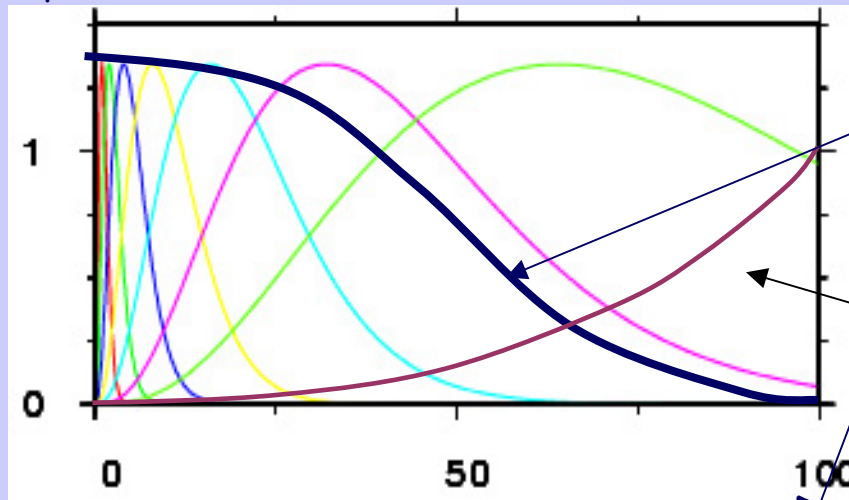
Free air anomalies in mGals from:

**GGM02S model**  
(resolution ~ 200 km)

**KMS 2002 satellite derived grid**

# Quelles ondelettes pour quelles données ? Domaine spectral

Spectrum

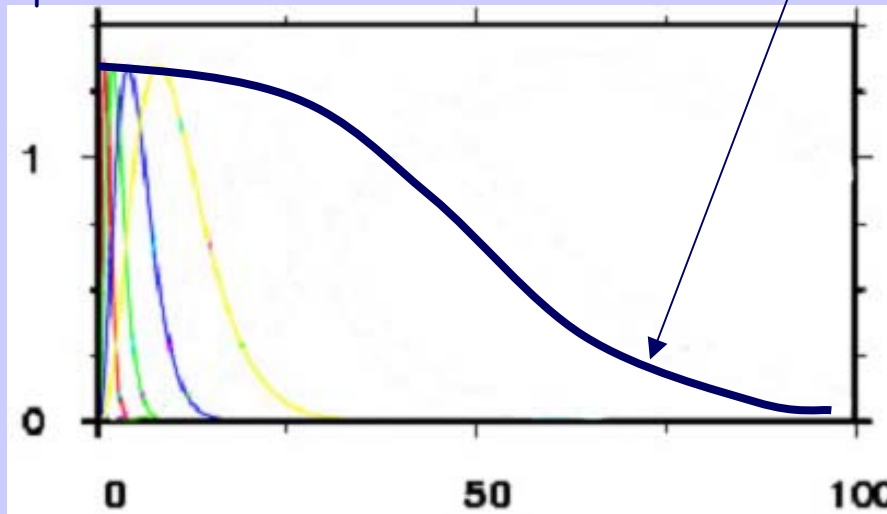


Contenu spectral  
des données

Cette échelle est trop mal  
contrainte et risque  
déstabiliser le calcul

Degree

Spectrum



Projection des données sur le  
sous-espace lisse généré par  
les ondelettes sélectionnées.

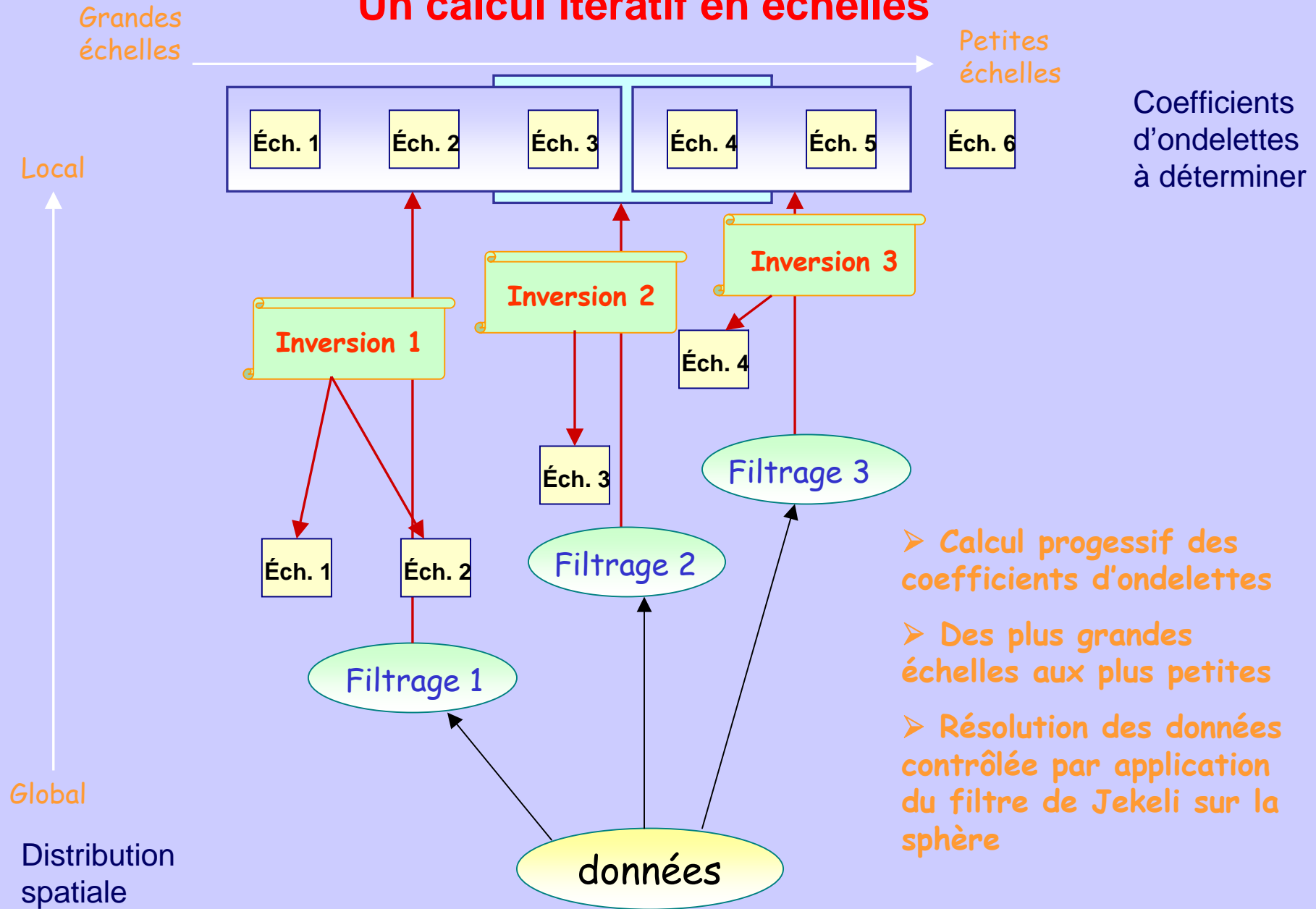
Degree



## Et dans le domaine spatial ...

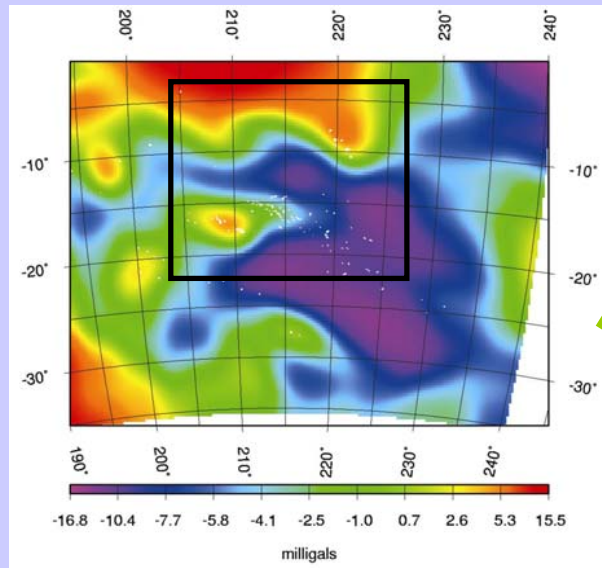
- Données dans une zone locale.
- Les trop grandes échelles ne sont pas correctement contraintes par une distribution locale de données... Compromis entre la dimension de la zone et l'échelle maximale au-delà de laquelle le modèle local ne coïncide plus avec une restriction du modèle global.
- D'où : processus de calcul itératif :
  - Les grandes échelles sont déterminées avec des données globales,
  - Calcul progressif des composantes à des échelles de plus en plus petites à partir de jeux de données dans des voisinages de plus en plus étroits de la zone d'étude.
- Démarche présentée dans : *Panet et al.*, JGR, 2006 (in press).

# Un calcul itératif en échelles

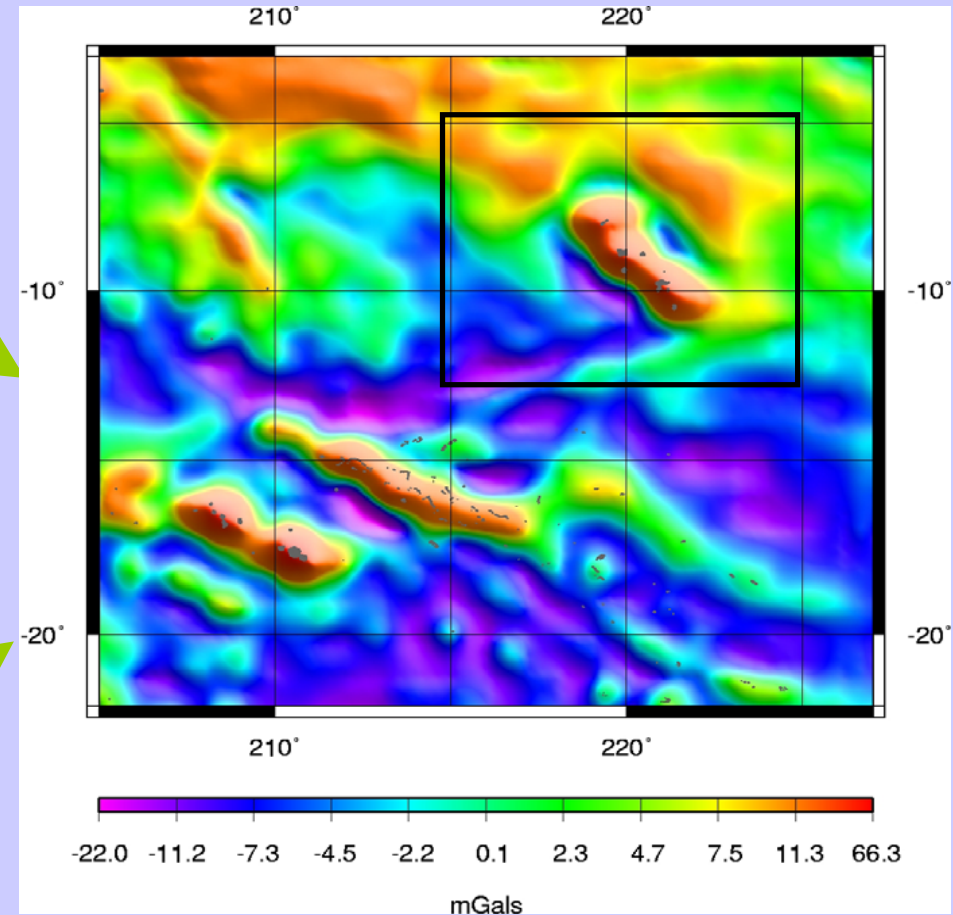


# Représentation en ondelettes du champ en Polynésie Française

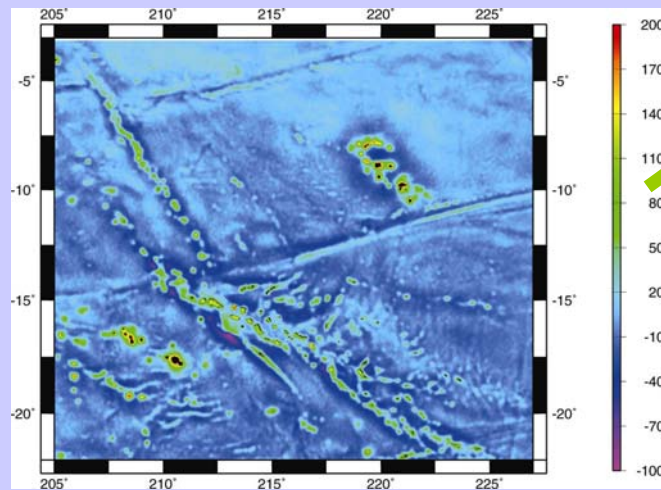
Données basse résolution (GGM02S)



Une représentation combinée

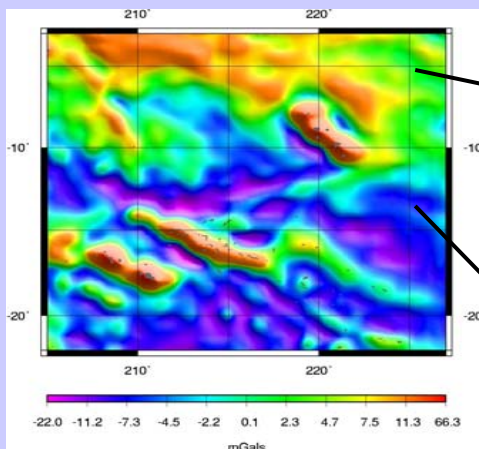


Données haute résolution (KMS2002)

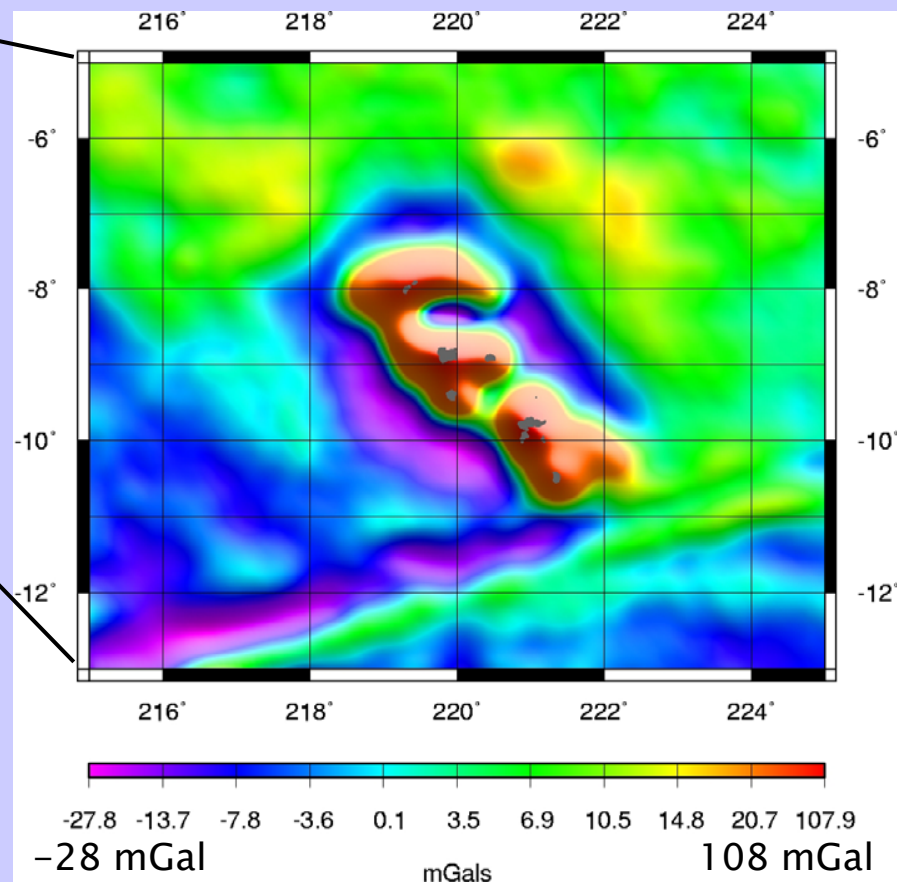


Anomalie à l'air libre  
9692 ondelettes, résolution ~ 75 km

## Zoom sur les îles Marquises



Accroissement local de résolution



→ Un modèle combiné à une résolution de 35 km et une précision d'environ 1 mGal.

9500 ondelettes au lieu de  
300 000 harmoniques sphériques

Anomalie à l'air libre

9651 ondelettes, résolution ~ 35 km

## Introduction : le champ de pesanteur, des données aux modèles

- Frames d'ondelettes : généralités
- Passage sur la sphère
- Des données à la représentation en ondelettes
- Exemples

Conclusion et perspectives



## Conclusions

- Une représentation utile pour le calcul de modèles locaux du champ de pesanteur à partir de données diverses.
- Non-unicité des coefficients de la représentation ! Le gain en flexibilité de cette représentation provient précisément du relâchement de la contrainte d'indépendance des fonctions, d'où une plus grande liberté dans la construction de la famille d'ondelettes.



La redondance n'est pas forcément un inconvénient !

- Que peut-on modéliser avec une distribution de données locale ? Pb de la coïncidence entre modèle local et restriction locale d'un modèle global, d'où la démarche itérative proposée.
- Pas de localisation parfaite, ni spatiale, ni spectrale

## Perspectives

- Améliorations de la contrainte de lisseur du modèle
- Implémentation d'algorithmes itératifs basés sur des découpages en blocs en plus du découpage en échelles afin de gérer de plus larges zones
- Utilisation des données de gravimétrie spatiale
- *Bref, un outil prometteur encore en plein développement !*



## Illustrations du cours

Les illustrations de la partie 'généralités sur les ondelettes' ce cours sont tirées du livre :

*The illustrated wavelet transform handbook, Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*, by Paul S. Addison, IOP Publishing, 2002.

Les illustrations dans la partie ondelettes sphériques sont tirées des articles *Chambodut et al. (2005)*, de *Panet et al. (2006)*, et de la thèse de I. Panet (2005).

Enfin, quelques illustrations (harmoniques sphériques) proviennent du cours de magistère online de C. Vigny (ENS Ulm).



## Références (non exhaustif !)

### Transformées en ondelettes et repères :

- Daubechies, I. (1992). Ten lectures on wavelets, SIAM.
- Holschneider, M. (1995). Wavelets: an analysis tool. Oxford Science Publications, Oxford.
- Mallat, S. (1999). A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 2nd edn.

### Frames d'ondelettes sur la sphère :

- Holschneider, M. (1996). Wavelet analysis on the sphere. J. Math. Phys., 37 (8), 4156-4165.
- Freedon W., Gervens, T. and Schreiner, M. (1998). Constructive Approximation on the Sphere (with applications to Geomathematics), Oxford Science Publication, Clarendon Press, Oxford.
- Holschneider M., Chambodut, A., Mandeau, M. (2003). From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames, Phys. Earth Planet. Inter., 135, 107-124.
- et aussi : Antoine et Vandergheynst, Dahlke, Sweldens ...

## Références (non exhaustif !)

Modélisation à l'aide d'ondelettes de Poisson sur la sphère (gravimétrie principalement) :

- Panet I., Jamet O., Diament M., Chambodut A. (2004). Modelling the Earth's gravity field using wavelet frames. Proceedings of IAG Symposium GGSM2004, 129, 48-53, Springer-Verlag.
- Chambodut A., Panet I., Mandeau M., Diament M., Holschneider M., Jamet O. (2005). Wavelet frames: an alternative to the spherical harmonics representation of potential fields., GJI, 163, 3, 875-899, doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02754.x.
- Panet I. (2005). Les ondelettes sphériques en gravimétrie spatiale. Applications en Polynésie Française et à l'étude du séisme de Sumatra-Andaman. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Panet I., Chambodut A., Diament M., Holschneider M., Jamet O. (2006). New insights on intraplate volcanism in French Polynesia from wavelet analysis of GRACE, CHAMP and sea-surface data, JGR, in press.