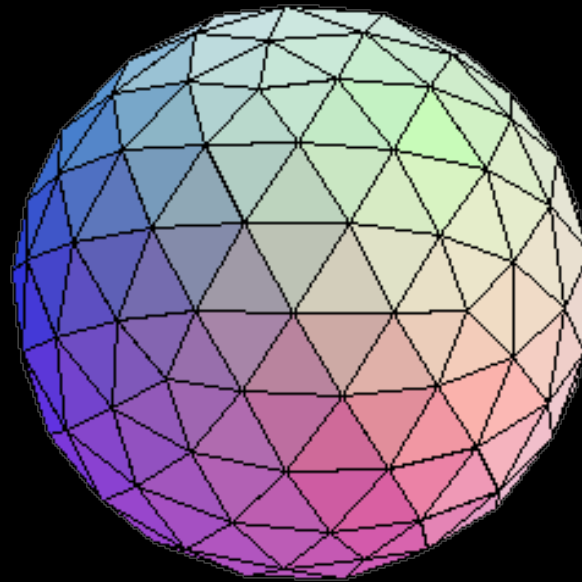


**Les approches régionales du type « mascons »**  
**Application aux données de la mission GRACE**



G. Ramillien

Equipe « Géodésie Spatiale », GRGS, Toulouse, Septembre 2010

1. Motivations

2. Problématique

3. La méthode « mascons » (NASA, JPL)

4. La/les approche(s) régionale(s) développée(s) au GRGS

4.1 Détermination des anomalies de potentiel

(Méthode de l'intégrale de l'énergie)

4.2 Détermination des densités superfaciennes de masse

(Méthodes d'inversion & de régularisation)

4.3 Application aux orbites de GRACE

pour le calcul de solutions régionales

5. Derniers résultats & Perspectives

# 1. Motivations

(Dans la perspective d'applications en hydrologie)

\*\*\* Meilleure localisation en temps et en espace

\*\*\* Moins d'effets de « leakage »

\*\*\* Prise en compte de contraintes spatiales

Potentiellement, meilleures résolutions

spatiale & temporelle

## 2. Problématique

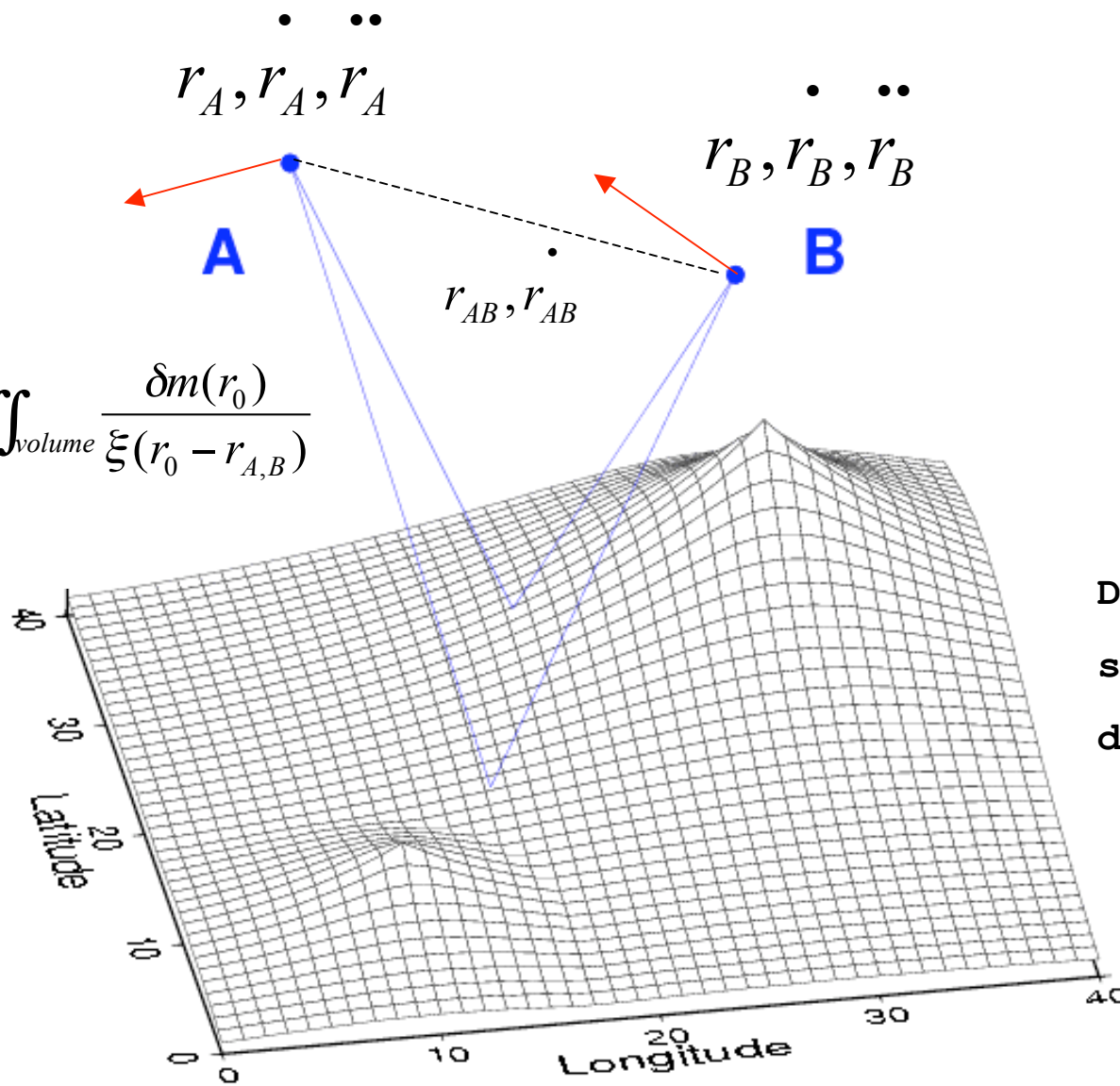
Détermination de la distribution régionale des masses

à la surface de la Terre

à partir des anomalies de la gravité déduites

des mesures satellites.

$$V_{A,B}(r_{A,B}) = G \iiint_{\text{volume}} \frac{\delta m(r_0)}{\xi(r_0 - r_{A,B})}$$

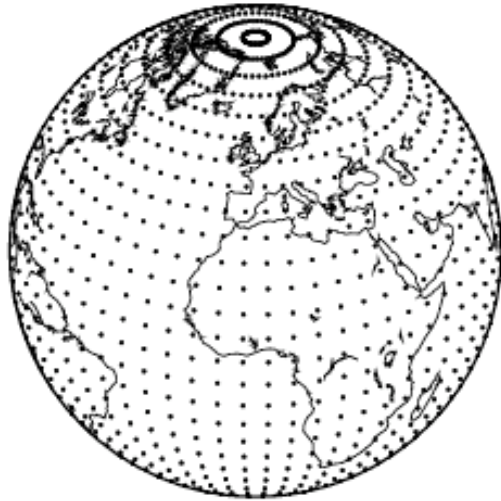


Distribution  
superficienne  
de masse

$$\sigma(\theta, \lambda, \Delta t)$$

Unités: [kg.m<sup>-2</sup>]

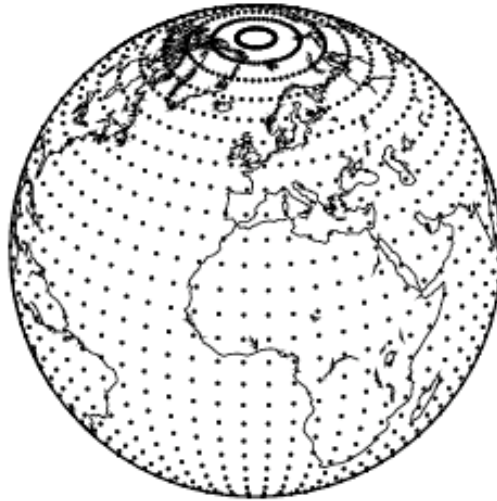
GEOGRAPHICAL



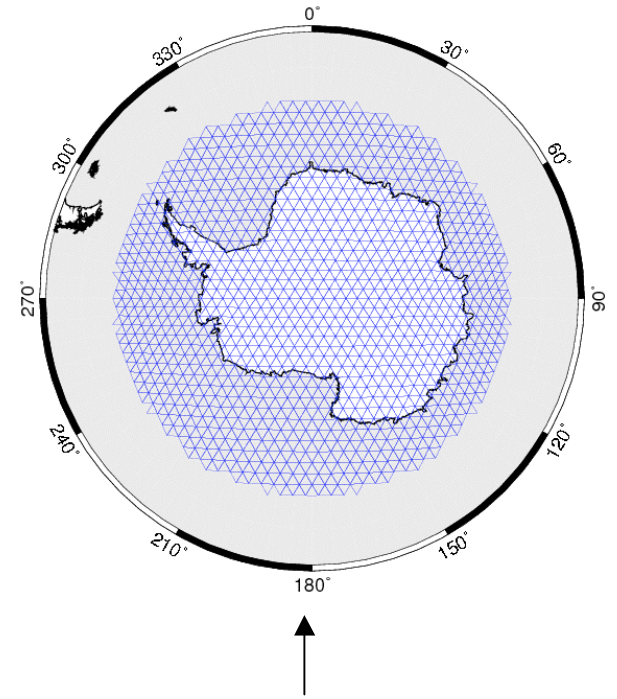
DRISCOLL-HEALY (1994)



GAUSSIAN



REUTER (1982)



TRIANGULAR (ICOSAERON)



### 3. La méthode des « mascons »

\* Concentration locale de masse à la surface de la Terre (bloc de  $4^\circ \times 4^\circ$ ) à l'instant  $t$ .

$\sigma_0(t) = 10 \text{ kg/m}^2$  à l'intérieur du bloc et 0 à l'extérieur

\* Perturbation du potentiel correspondante (en terme de coefficients de Stokes - expansion multipôles):

$$\delta A_{nm}(t) = \frac{(1 + k_n) R^2 \sigma(t)}{(2n + 1) M} \int Y_{nm}(\Omega) d\Omega$$

$N \sim 60$  pour des blocs de  $4^\circ \times 4^\circ$

\* Pour chaque bloc et à chaque instant,

on recherche le FACTEUR D'ECHELLE de chaque « mascon ».

\* On cherche une solution (facteurs d'échelle)  
au voisinage des  $\sigma_0(t)$  donc : **LINEARISATION**

\* Inversion au sens des moindres carrés « pondérés » :

$$P = (A^T W_0 A + B^T W_C B)^{-1} (A^T W_0 L_0 + B^T W_C L_C)$$

**A, B** : matrices des dérivées partielles

**W<sub>0</sub>, W<sub>C</sub>** : matrices diagonales des poids

**L<sub>0</sub>, L<sub>C</sub>** : vecteurs des résidus obs. et contraintes.

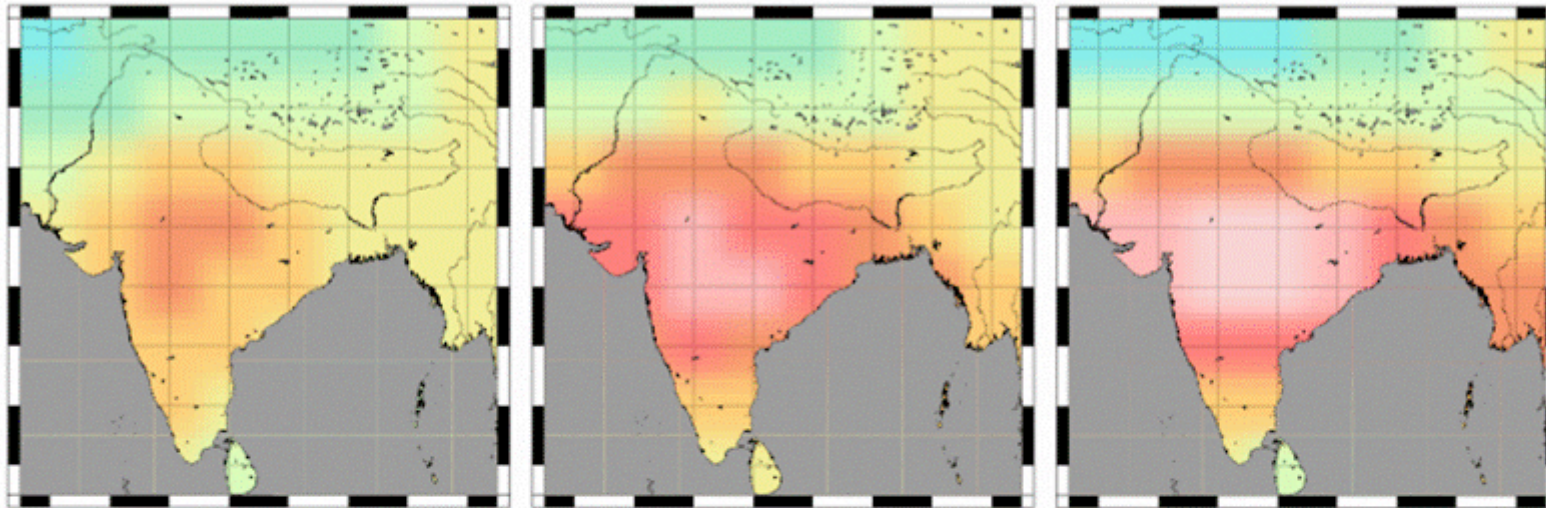
\* **Contraintes : corrélations spatio-temporelles :**

$$\exp\left(2 - \frac{d_{ij}}{D} - \frac{t_{ij}}{T}\right)$$

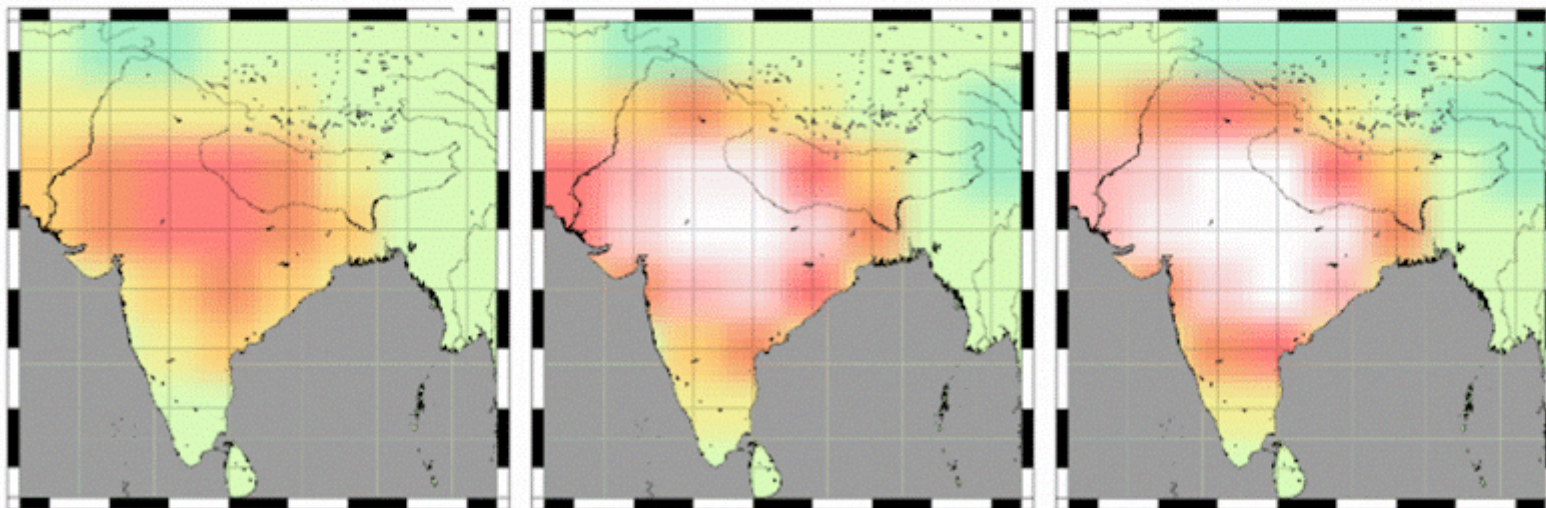
**D** ~ 400 km

**T** de 1 à 30 jours

GSFC GRACE 10-day mascon solutions vs. July 1 2003 10-day solution



GLDAS 10-day Hydrology vs. July 1 2003 10-day period



<http://grace.sgt-inc.com/>

## 4. L'approche régionale

développée au GRGS de Toulouse

## 4.1 Etape 1

La détermination des anomalies  
de potentiel à l'altitude du satellite

## PARTONS D'UN CAS SIMPLE . . .

\* **Référentiels:** Galiléen (quasi-inertiel)

(J2000 : 01/01/2000 - 12h00)

\* **Système:** le satellite S en orbite autour de la  
Terre assimilé à un point matériel de masse m

\* **Bilan des forces:**

g: conservatives (type gravitationnelles)

f: non-conservatives, dissipatives

\* **Seconde loi de Newton :**

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} + \vec{f}$$

$$\int \ddot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} dt = \int \frac{1}{2} d\left[(\dot{\vec{r}})^2\right] = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}})^2 + \text{const}$$

Energie  
cinétique T

$$\int \dot{\vec{r}} \vec{f} dt = \int \vec{f} d\vec{x}$$

Travail W des forces  
non-conservatives

$$\int \dot{\vec{r}} \vec{g} dt = \int \left( \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt = V - \int \frac{\partial V}{\partial t} dt + \text{const}$$


Potentiel gravitationnel V

+ Potentiel de « rotation »  $\Phi$

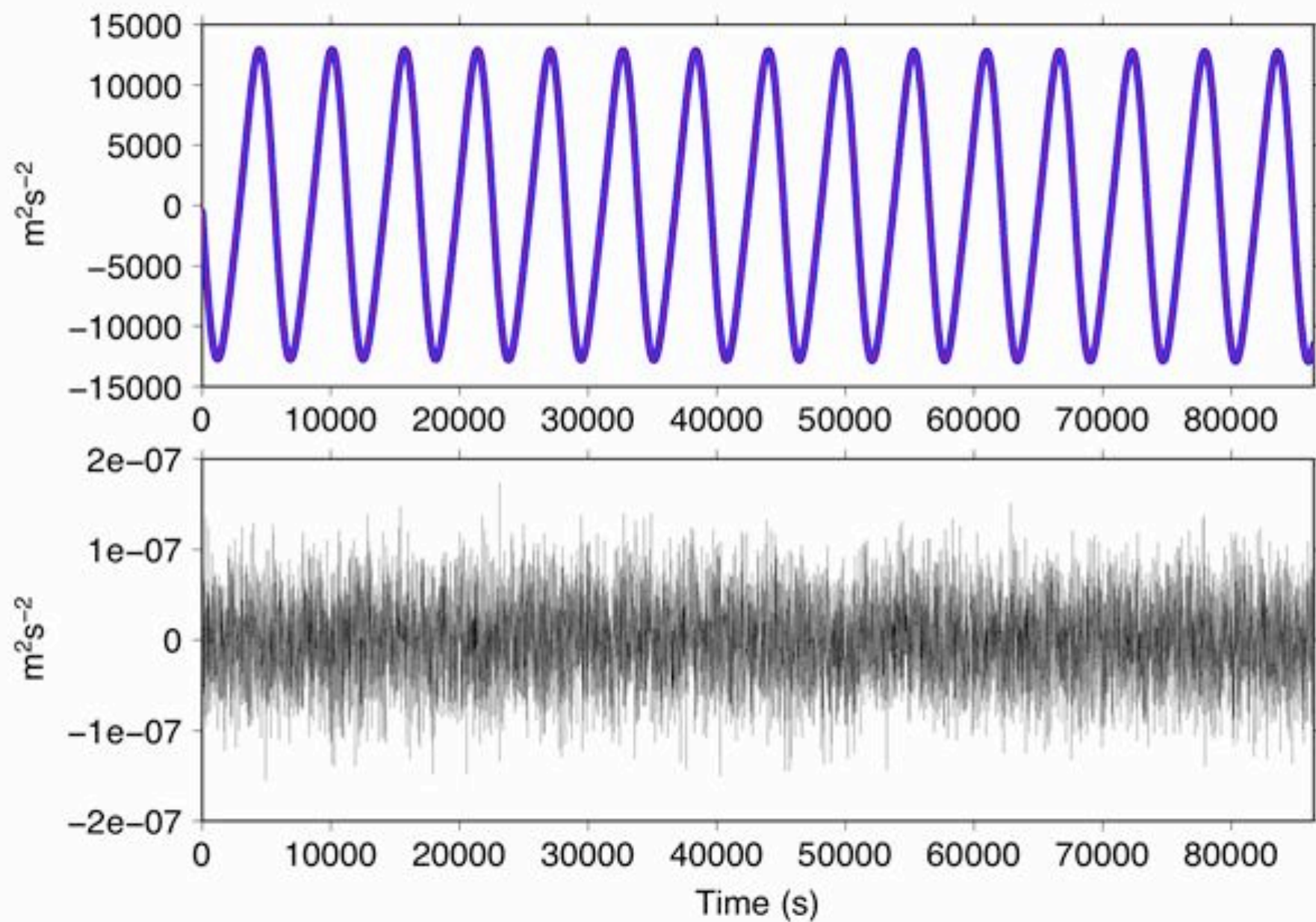
cf. Jekeli (1999)

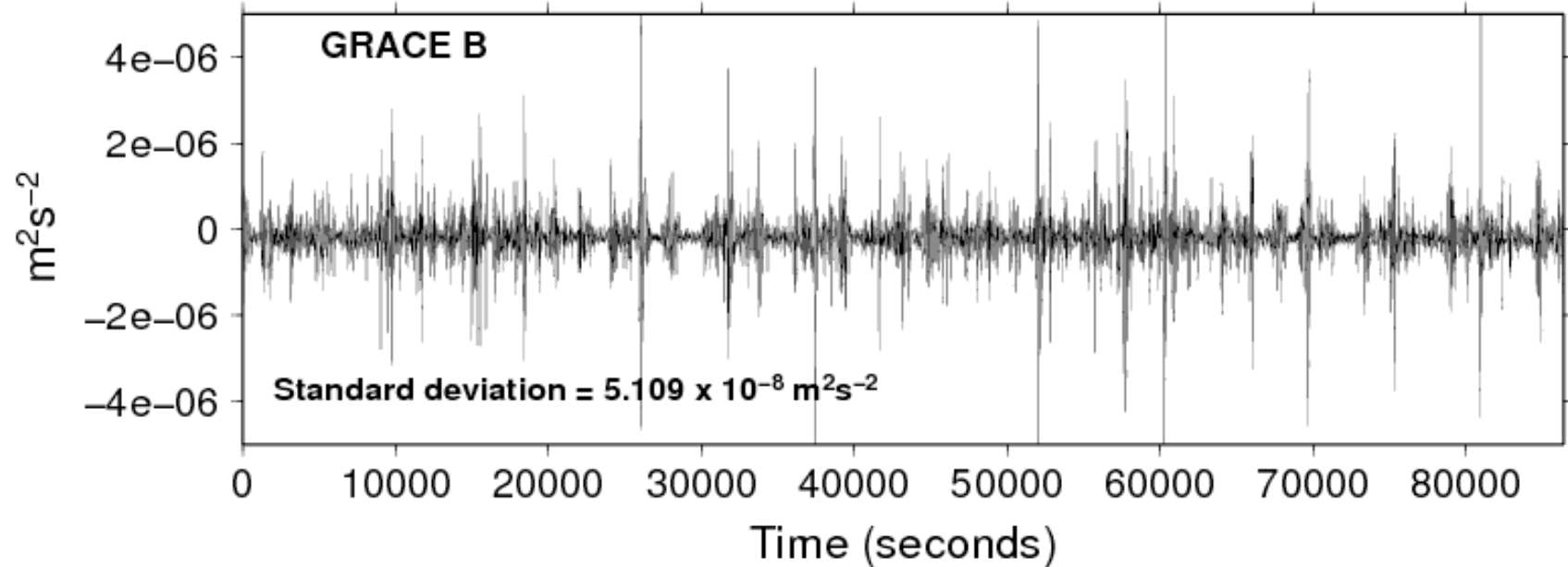
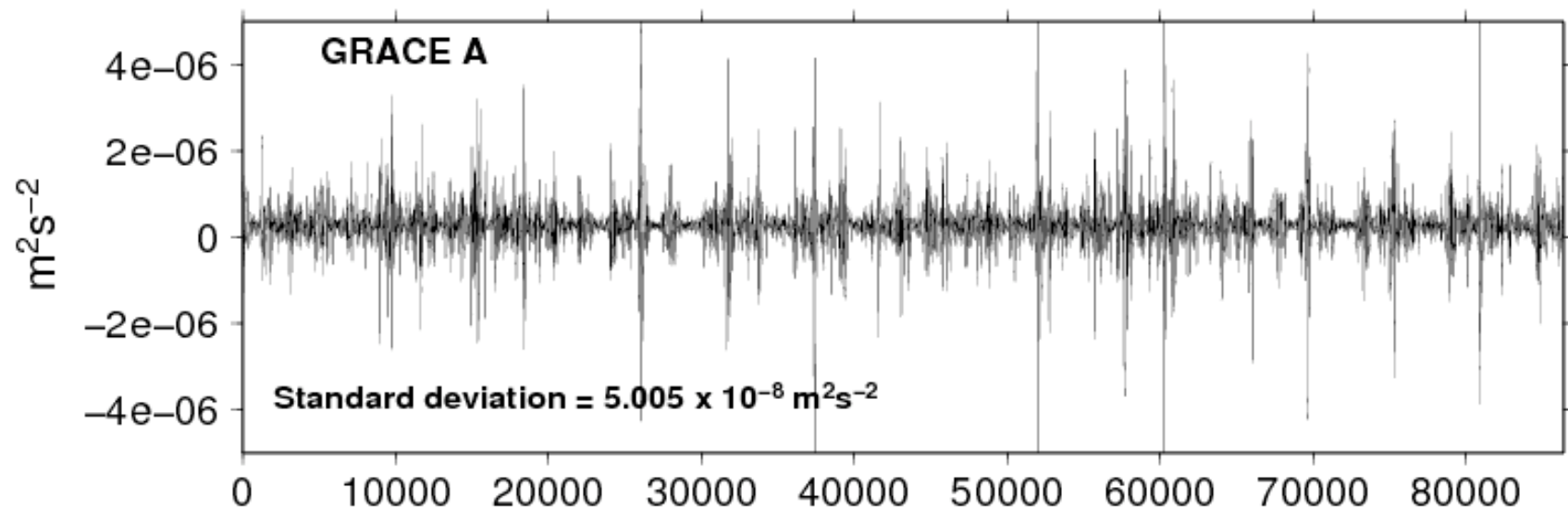
$$T = V + W - \Phi + \text{const}$$

$$T_{AB} = T_B - T_A = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}_B)^2 - \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}_A)^2 = \dot{\vec{r}}_{moy} (\dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A)$$

$$\dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A = \alpha_{AB} \dot{\vec{u}}_{AB} + \dot{\vec{v}}_{AB}$$


### ALONG-TRACK POTENTIAL DIFFERENCE $V_{AB}$





Conservation  
du moment linéaire

$$m \ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \vec{0}$$

$\int$

$$m \dot{\vec{r}} - \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{P}$$

Conservation  
du moment angulaire

$$m \ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{r} \wedge$

$$m \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} - \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$\int$

$$m \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} - \int_{t_0}^t \vec{r} \wedge \vec{F} dt = \vec{L}$$

Conservation  
de l'énergie totale

$$m \ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \vec{0}$$

$\dot{\vec{r}}$

$$m \dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}} \vec{F} = 0$$

$\int$

$$\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 - \int_{t_0}^t \dot{\vec{r}} \vec{F} dt = E$$

(Ilk and Löcher, 2003)

## 4.2 Etape 2

La détermination de la densité  
de surface (ou hauteurs équivalentes d'eau)

$$Y = \Gamma X$$

$Y$  → DDP  
 (obs)

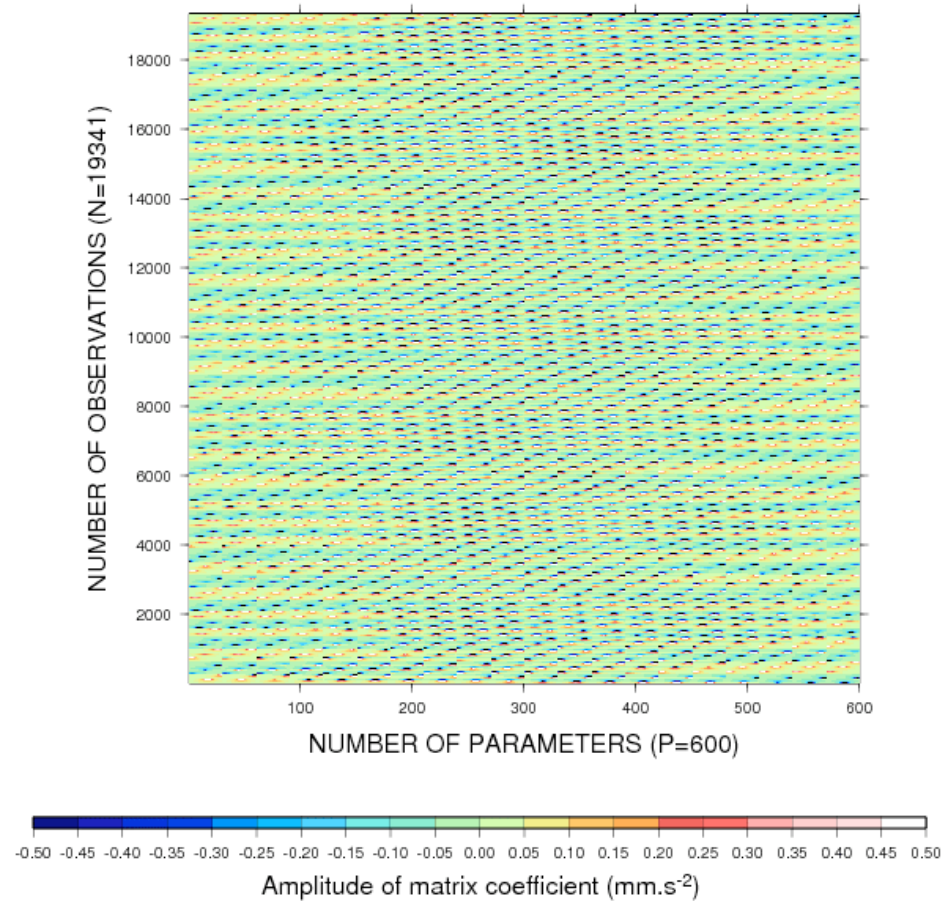
$X$  → Hauteurs d'eau  
 (paramètres à déterminer)

Systeme

d'equations normales :

$$\Gamma^T \Gamma X = \Gamma^T Y$$

DIRECT NEWTONIAN OPERATOR FOR AMAZON REGION



LE SYSTEME EST MAL-CONDITIONNE . . .

Stabiliser le système linéaire

Réduire les effets du bruit

numérique & dans les observations (lissage)

SOLUTION 1 : Méthode de régularisation

Factorisation SVD, Pré-conditionnement, . . .

SOLUTION 2 : Matrices de pondération :

Covariances, corrélations spatio-temporelles

SOLUTION 3 : Combinaison avec des données indépendantes :

Observations in situ, sorties de modèle hydrologiques

### 3.1 Pseudo-inverse par TSVD

Décomposition SVD:  $A_{N \times M} = USV^T$

$$U^T U = U U^T = Id_{N \times N}$$

$$V^T V = V V^T = Id_{M \times M}$$

**S**: matrice diagonale contenant les valeurs singulières

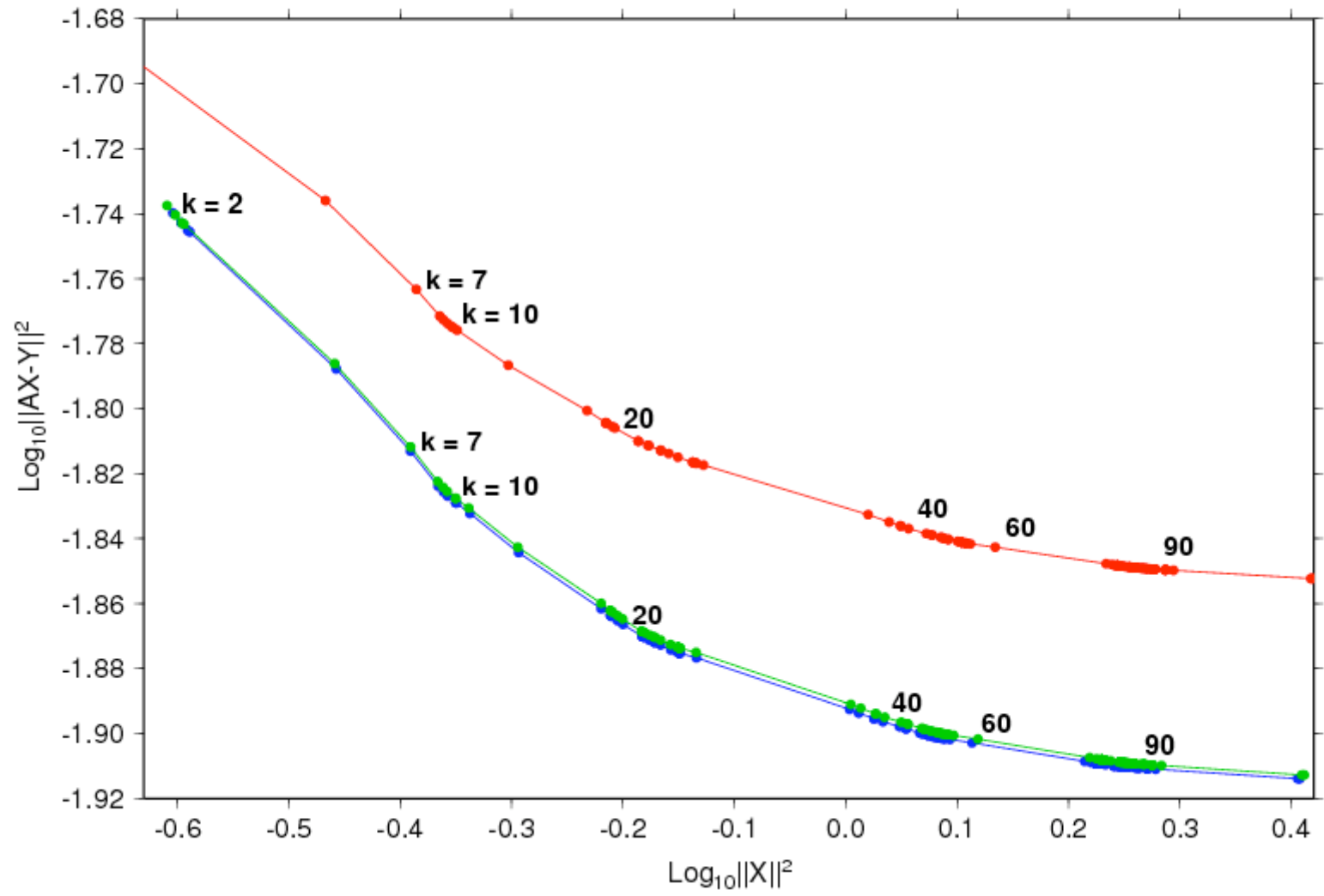
Pseudo-inverse:  $A^* = V S_k^{-1} U^T$

$$\left\{ S^{-1} \right\}_{ii} = 1 / \left\{ S \right\}_{ii}$$

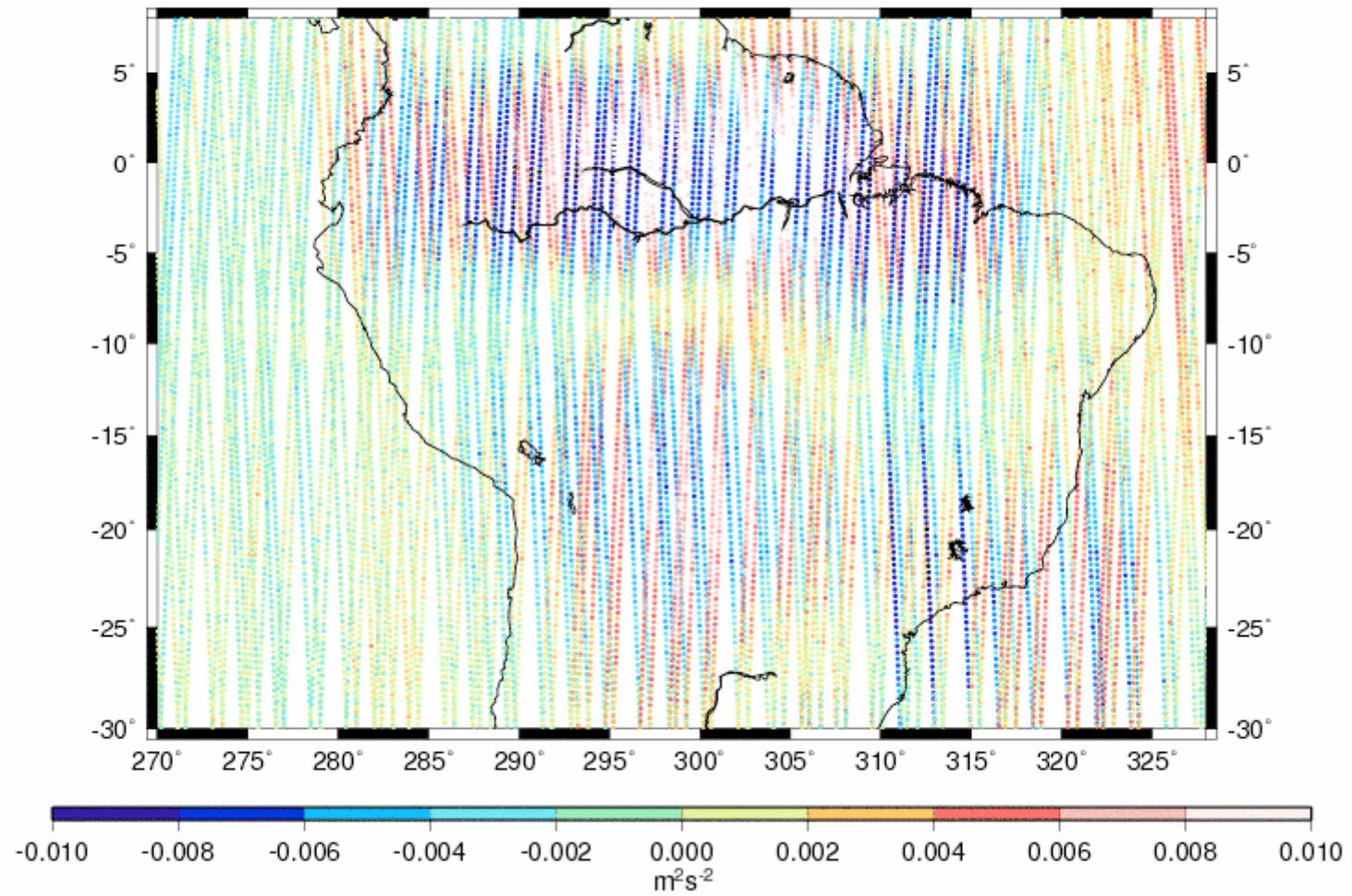
si  $i \leq k$  et 0 sinon

Solution:  $X_{TSVD} = A^* Y$

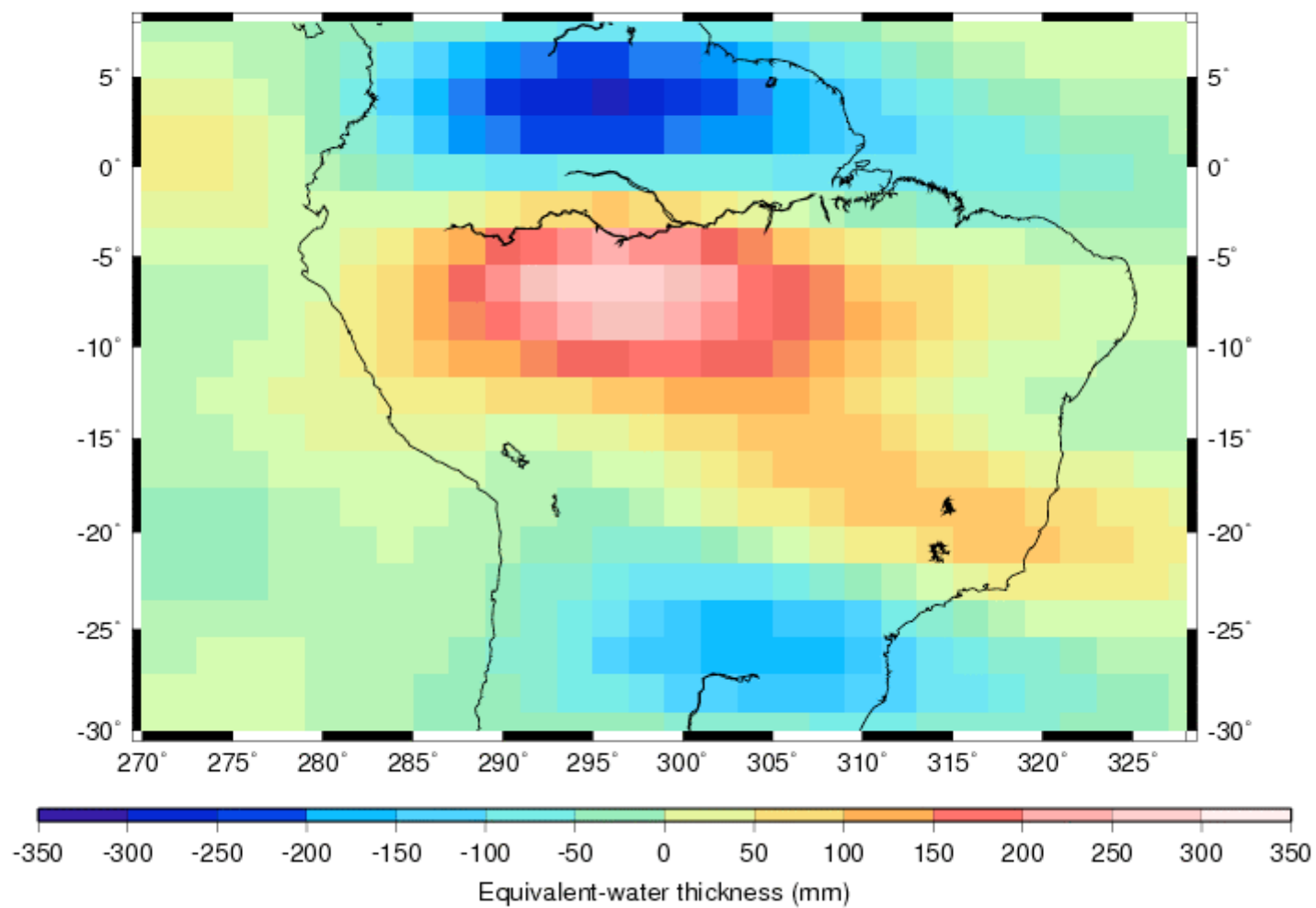
L-CURVE REGULARIZATION --- MAXIMUM RANK = 600



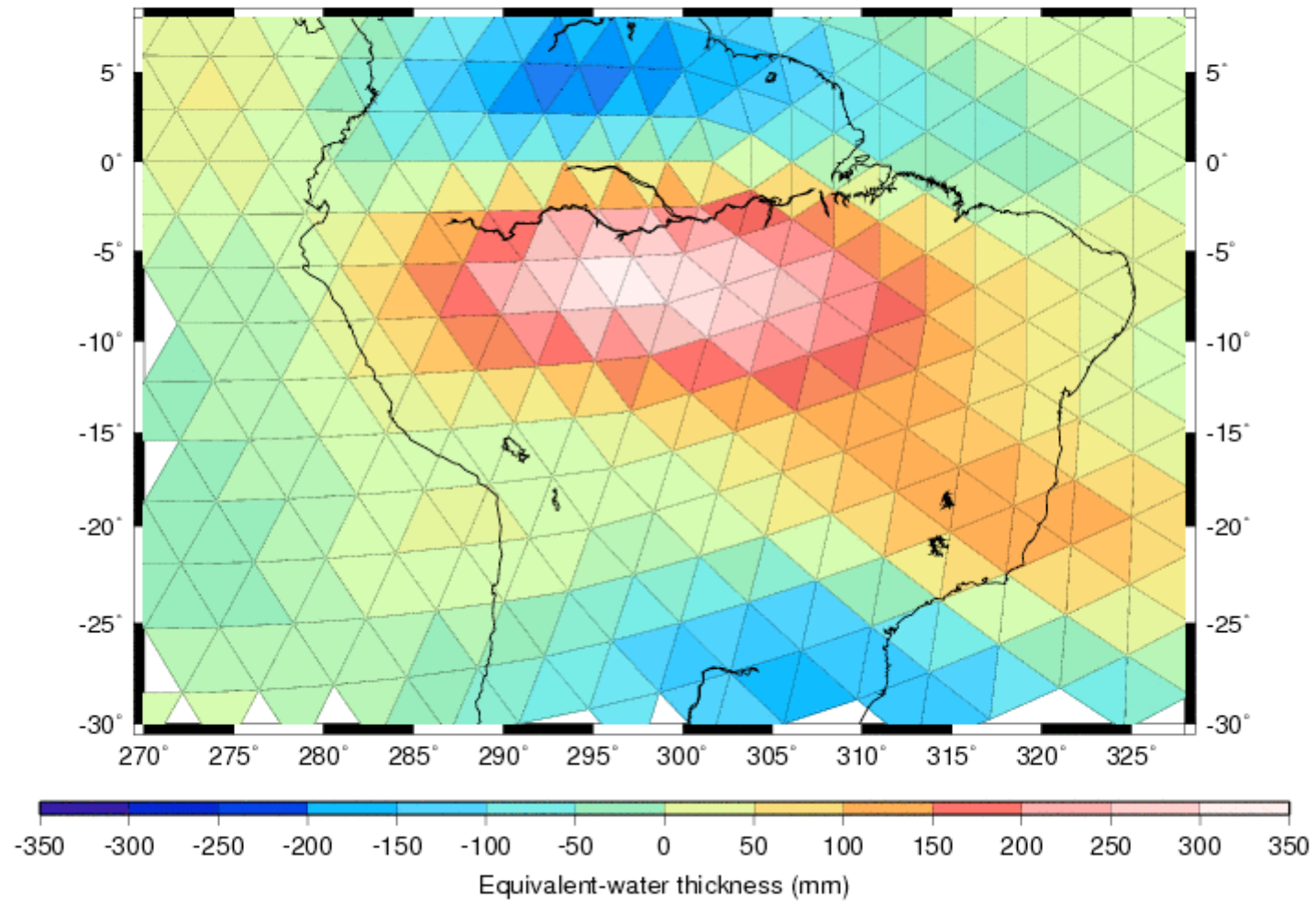
ALONG-TRACK POTENTIAL DIFFERENCES --- SIMULATION FOR LAND HYDROLOGY



REGIONAL METHOD --- RECTANGULAR TILES --- 2 DEG. x 2 DEG.



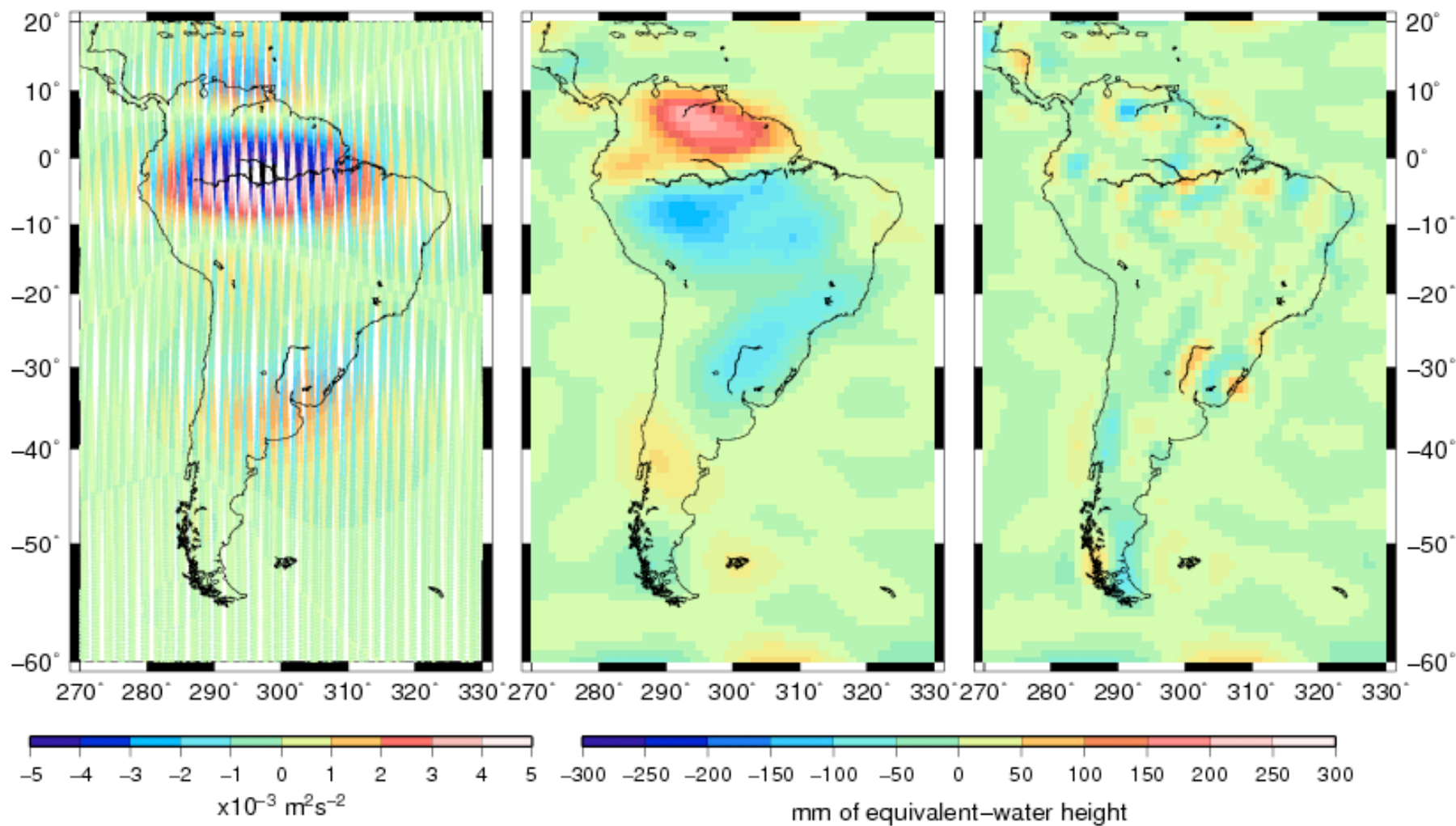
REGIONAL METHOD --- ICOSAEDRON TYPE --- S = 60 000 km<sup>2</sup> --- rank = 25

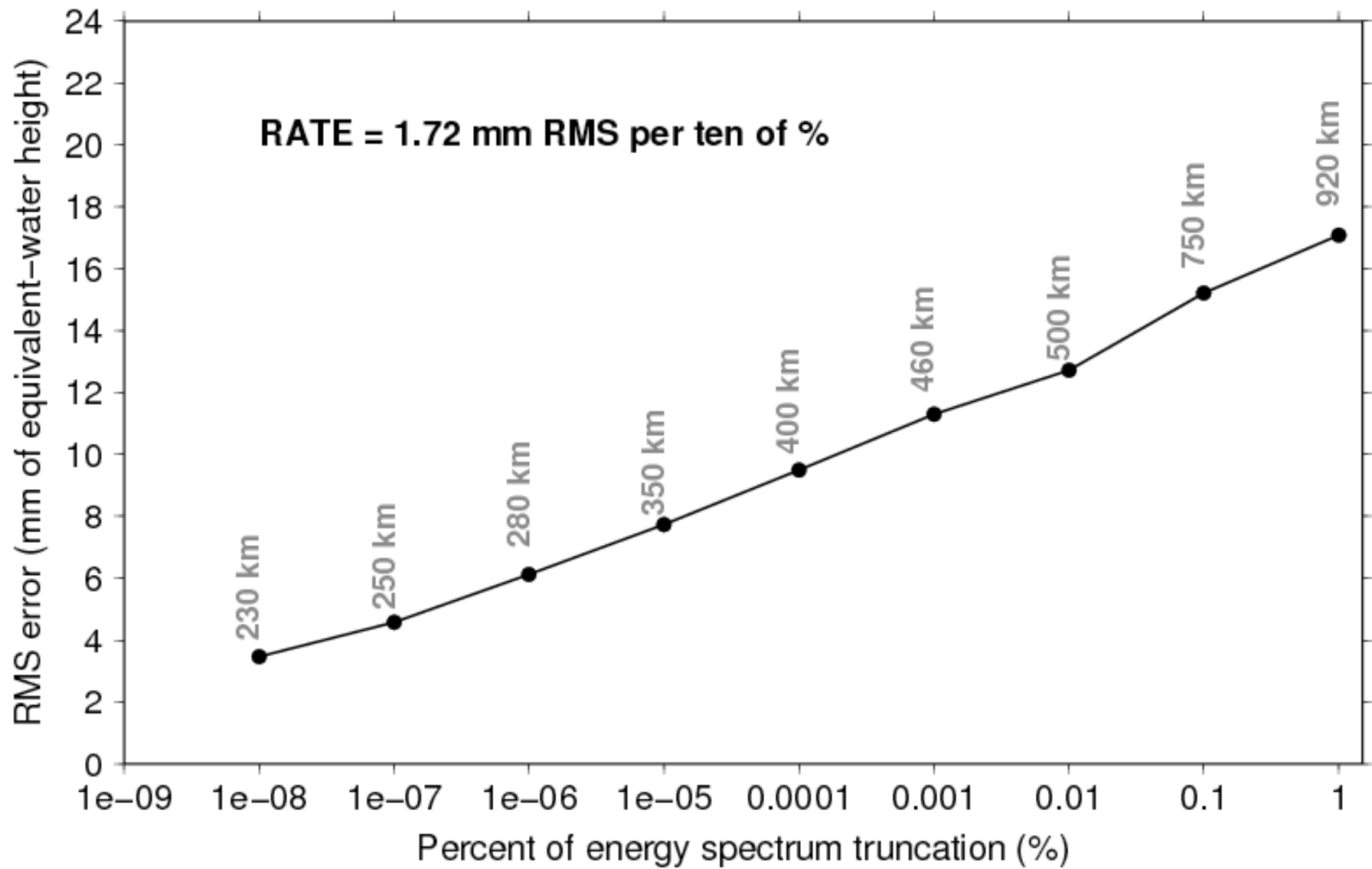


(a)

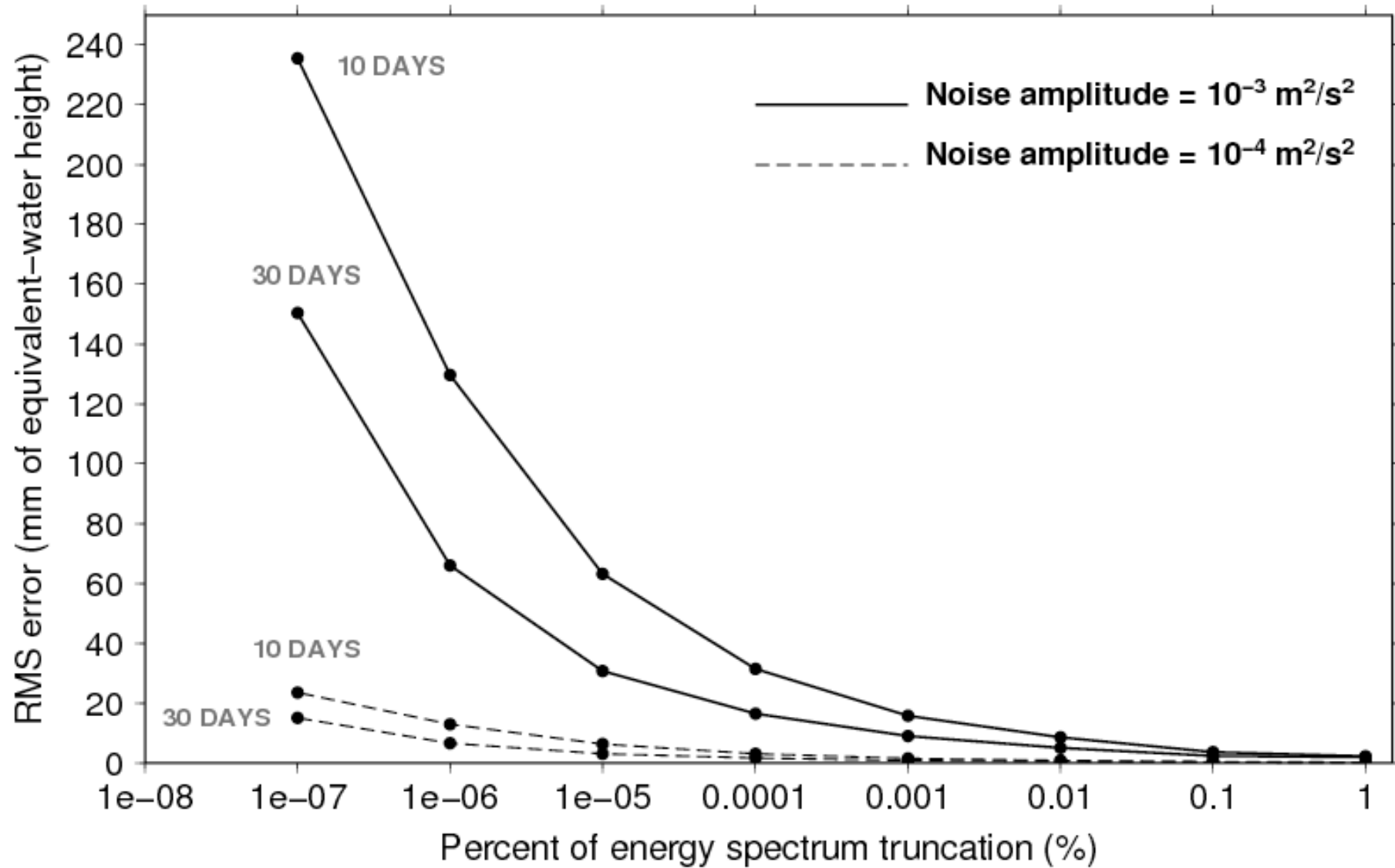
(b)

(c)





Source: Ramillien et al., 2010



Source: Ramillien et al., 2010

## 4.3 Application aux données de GRACE

# CHAINE DE TRAITEMENT POUR UNE PERIODE PARTICULIERE $\Delta t$

Mesures L1 GRACE

Modèles a priori

GINs

Software

Orbite dynamique GRACE

$r, \dot{r}, KBR, ACC$

1

Intégrale de  
l'énergie

$$\delta V_{A,B} = \delta T_{A,B}^*$$

Anomalies de differences  
de potentiel

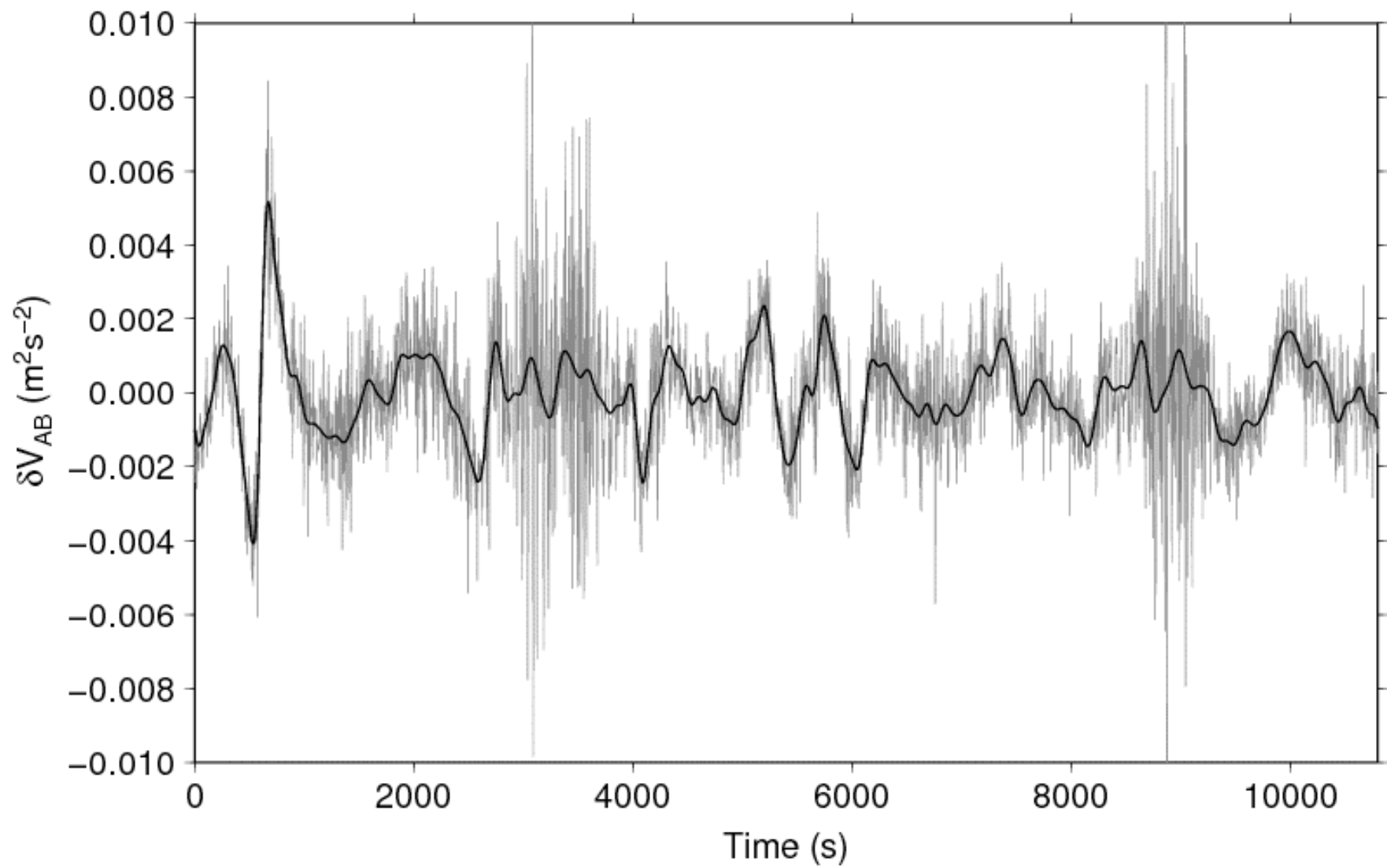
$$\delta V_{AB} = \delta V_B - \delta V_A$$

2

INVERSION  
(opérateur Newtonien)

Solution régionale

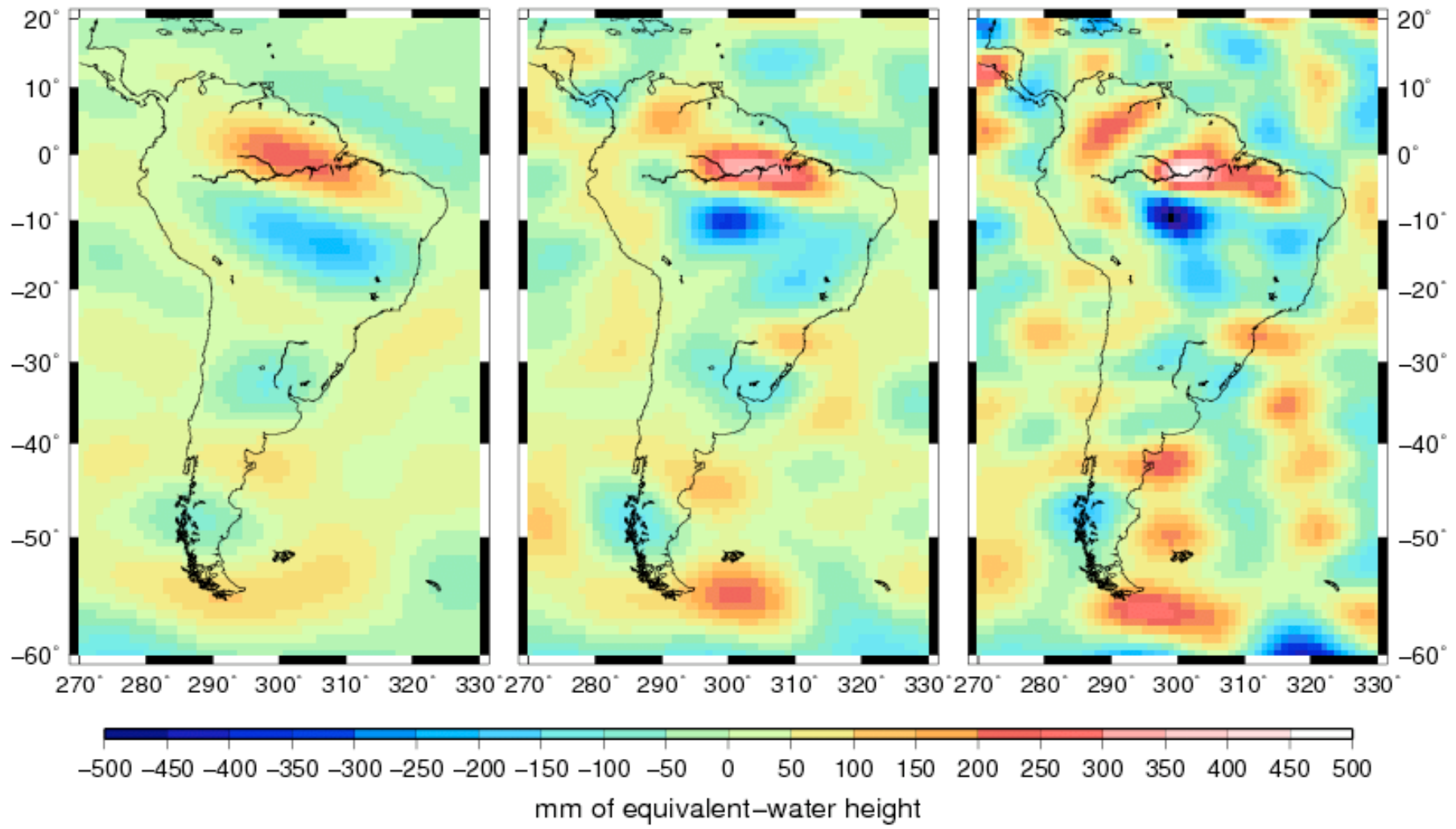
$$\delta \sigma_{solution}(\theta, \lambda, t)$$



(a)

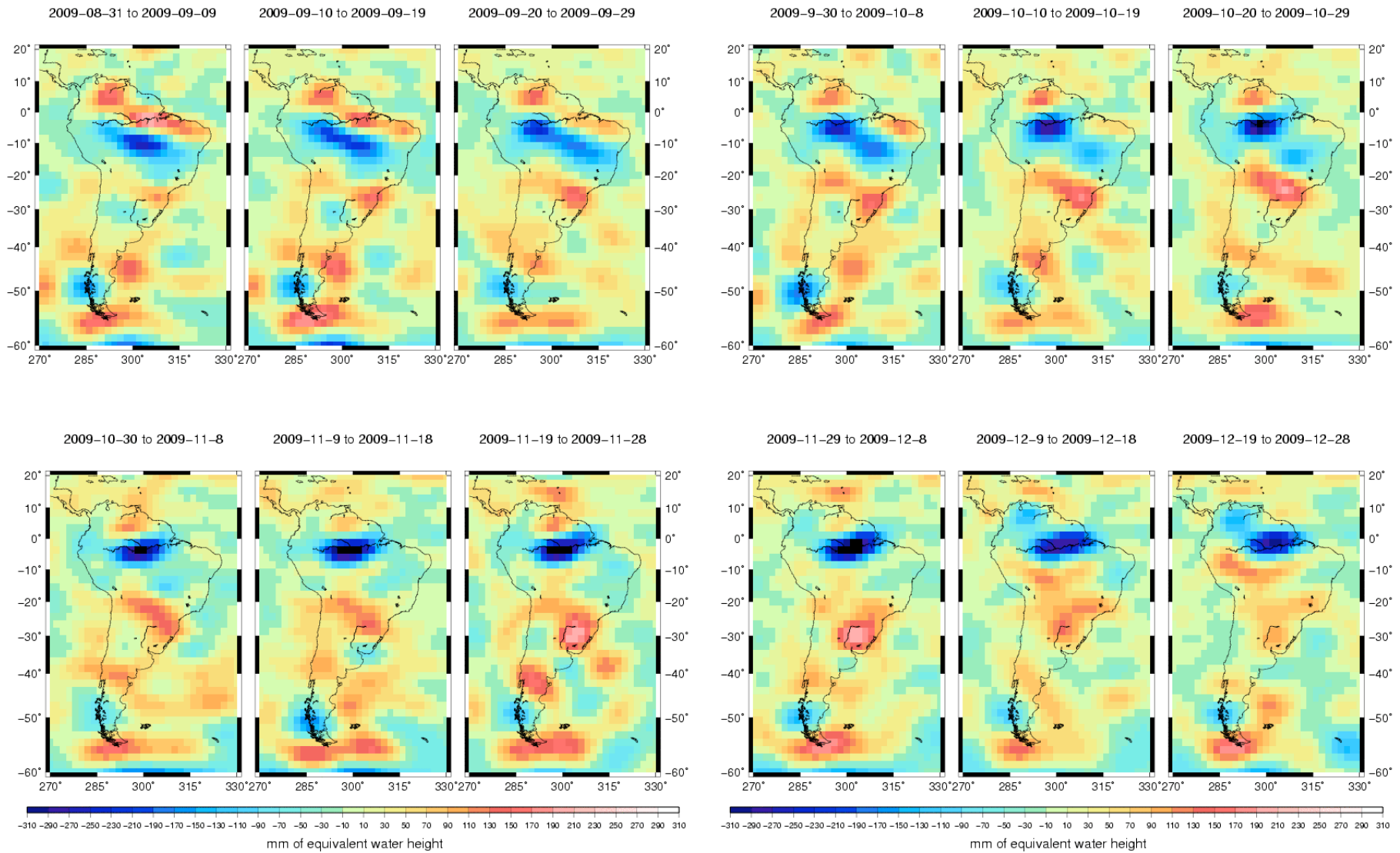
(b)

(c)



5. Derniers résultats

& Perspectives . . .

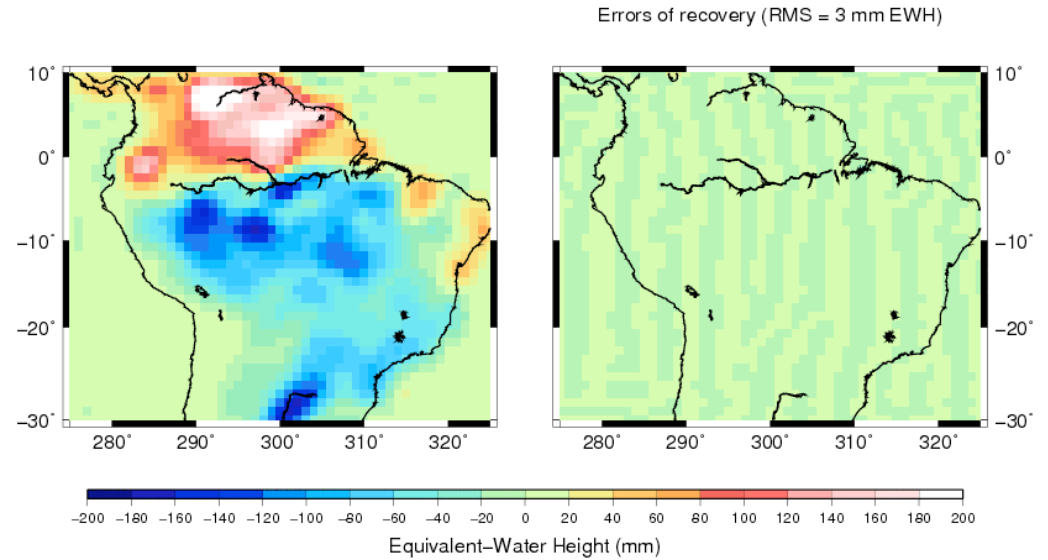


Source: L. Seoane, GRGS, Toulouse

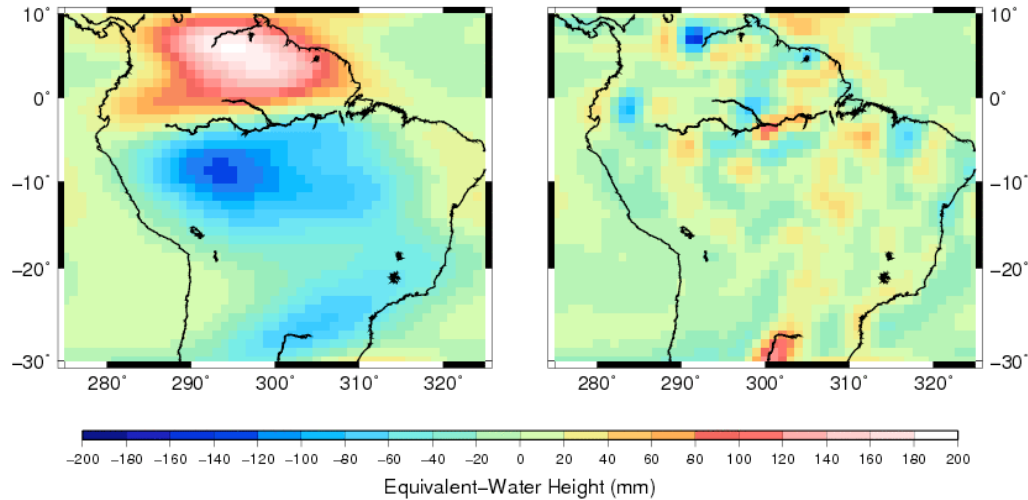
$\text{Sigma}_m = 0.1 \text{ m}$

$\text{Sigma}_d = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2$

**Error = 3 mm rms**



Errors of recovery (RMS = 21 mm EWH)



$\text{Sigma}_m = 0.1 \text{ m}$

$\text{Sigma}_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$

**Error = 21 mm rms**

## Perspectives . . . et nouveaux « challenges »

Sur la base de :

Séries temporelles de solutions régionales contraintes et/ou non contraintes  
à l'échelle d'un continent entier (AMN, AMS, AFR, AUS, EUR)  
. . . et suffisamment longues (plusieurs années) !

- \* Validation des principaux cycles hydrologiques (avec des données indépendantes).
- \* Suivi d'évènements locaux particuliers.

Contraintes temporelles *a priori* dans l'inversion ???

Non-stationnarité des signaux hydrologiques.