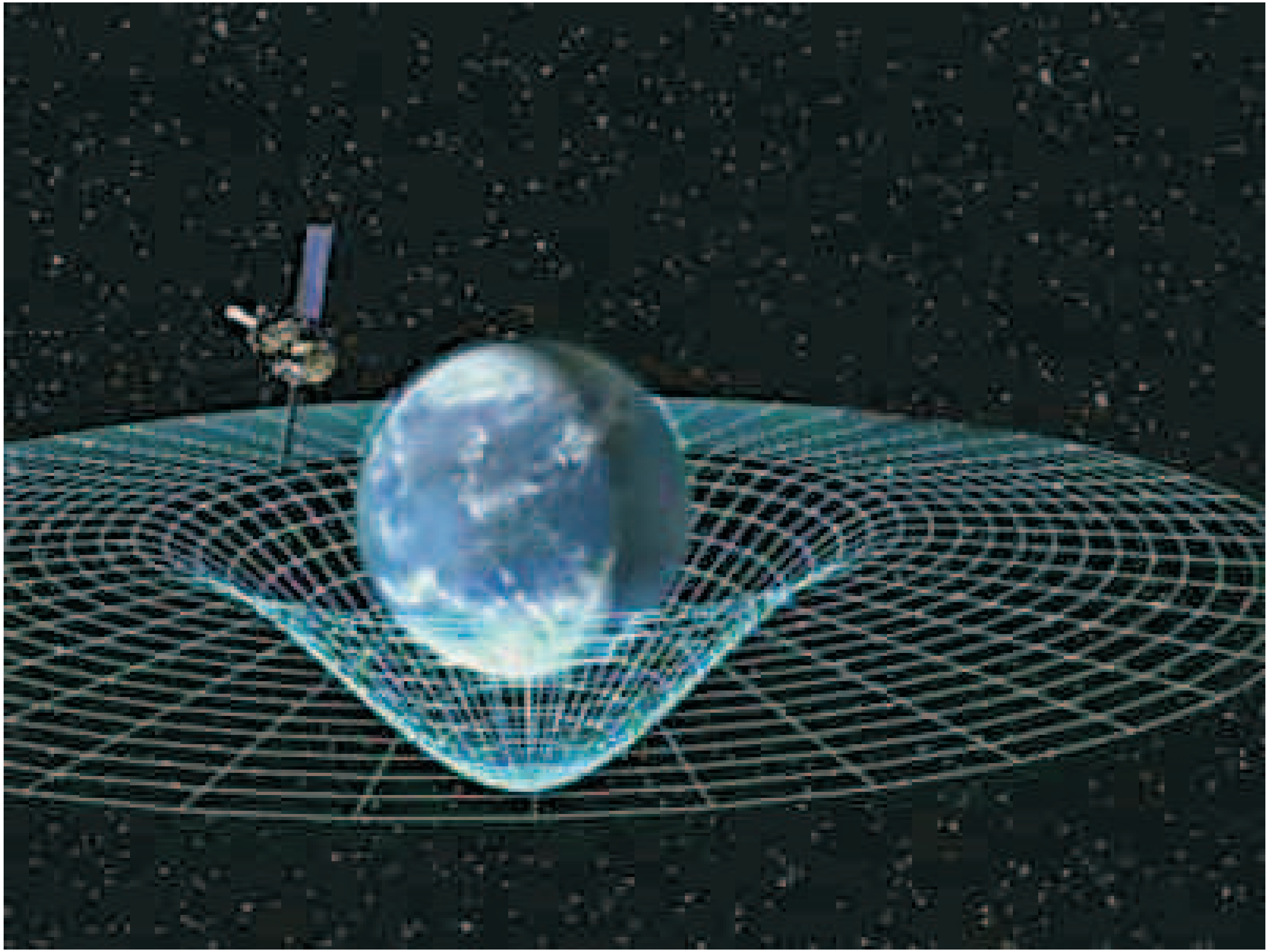
La gravitation est une propriété de l'espace

Jérôme Perez

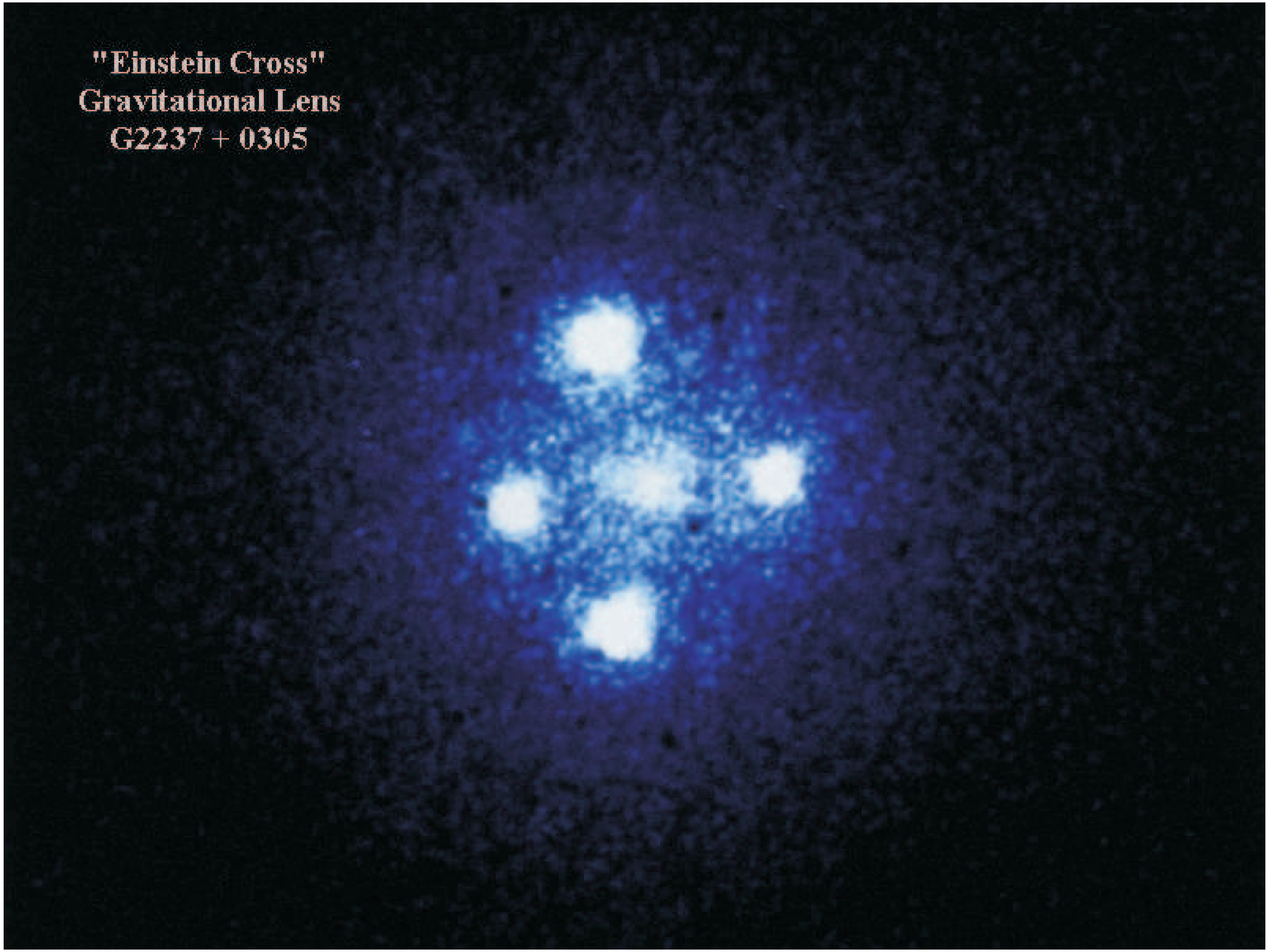
Laboratoire de Mathématiques Appliquées

ENSTA ParisTech

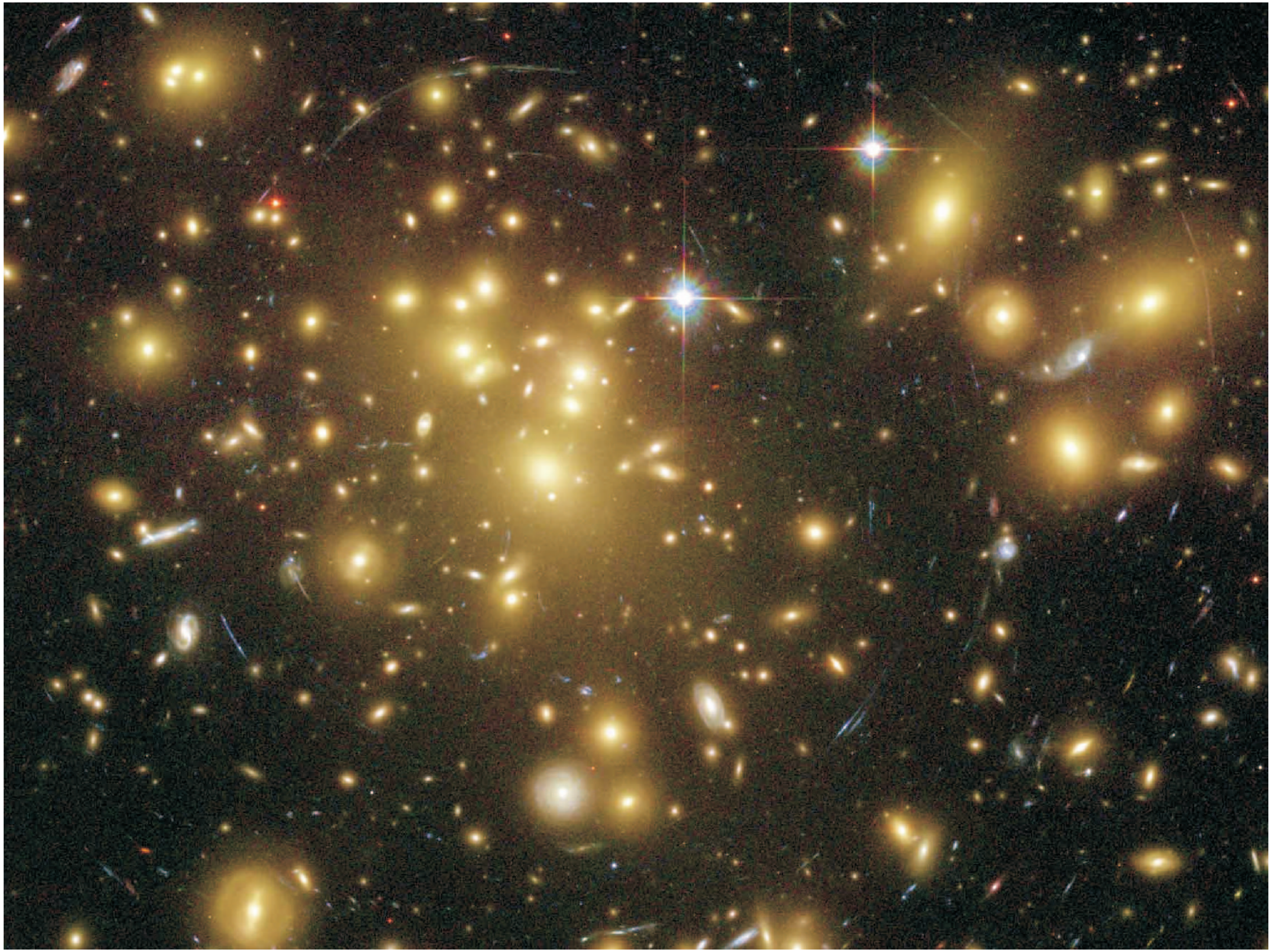
Tout le monde le sait ...



Tout le monde le sait ...

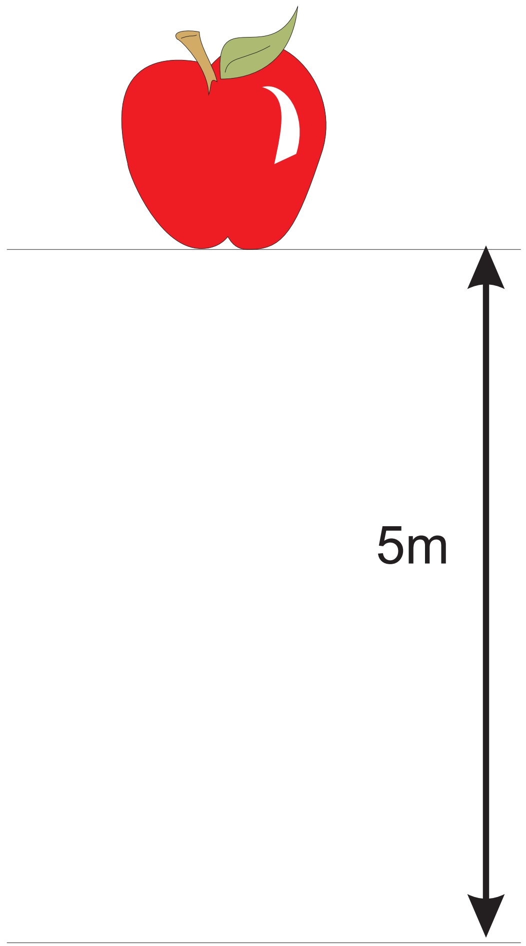


Tout le monde le sait ...



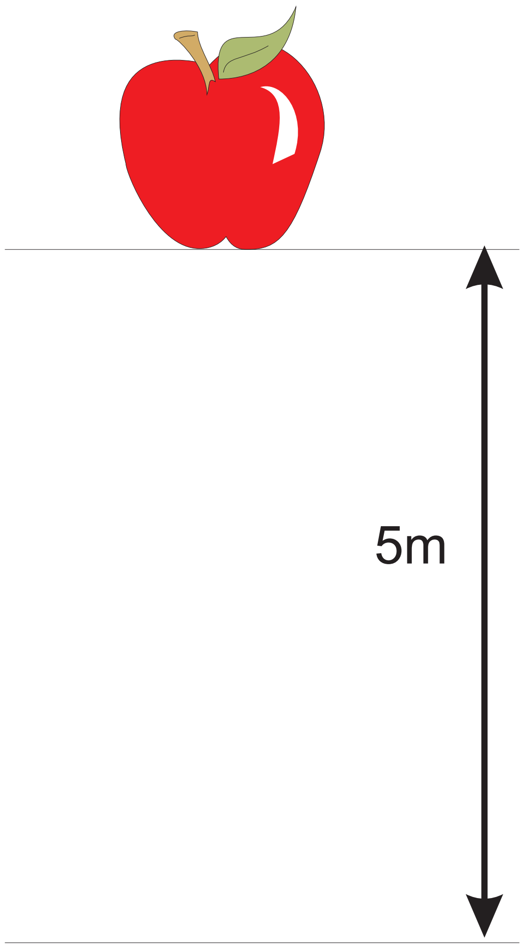
La chute !

Chute d'une pomme



Temps de chute ?

Chute d’une pomme



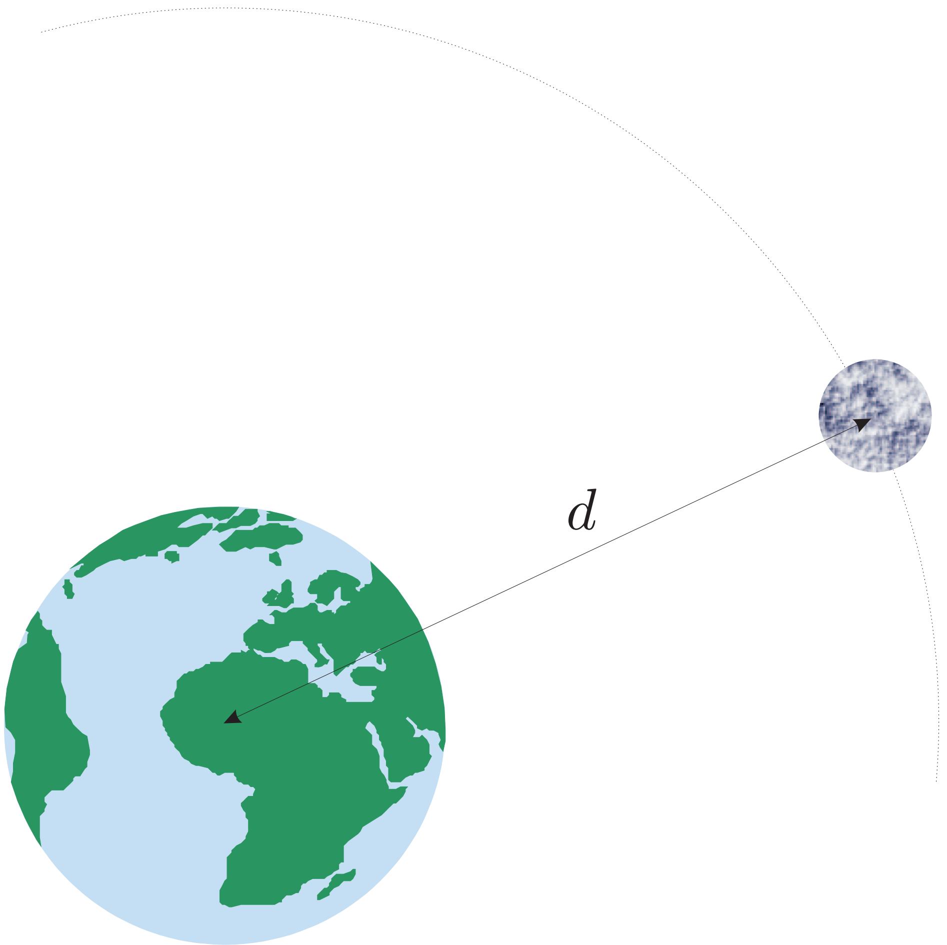
Temps de chute ?

1 seconde

Faites l’expérience vous-même !

Chute de la Lune

Chute de la Lune



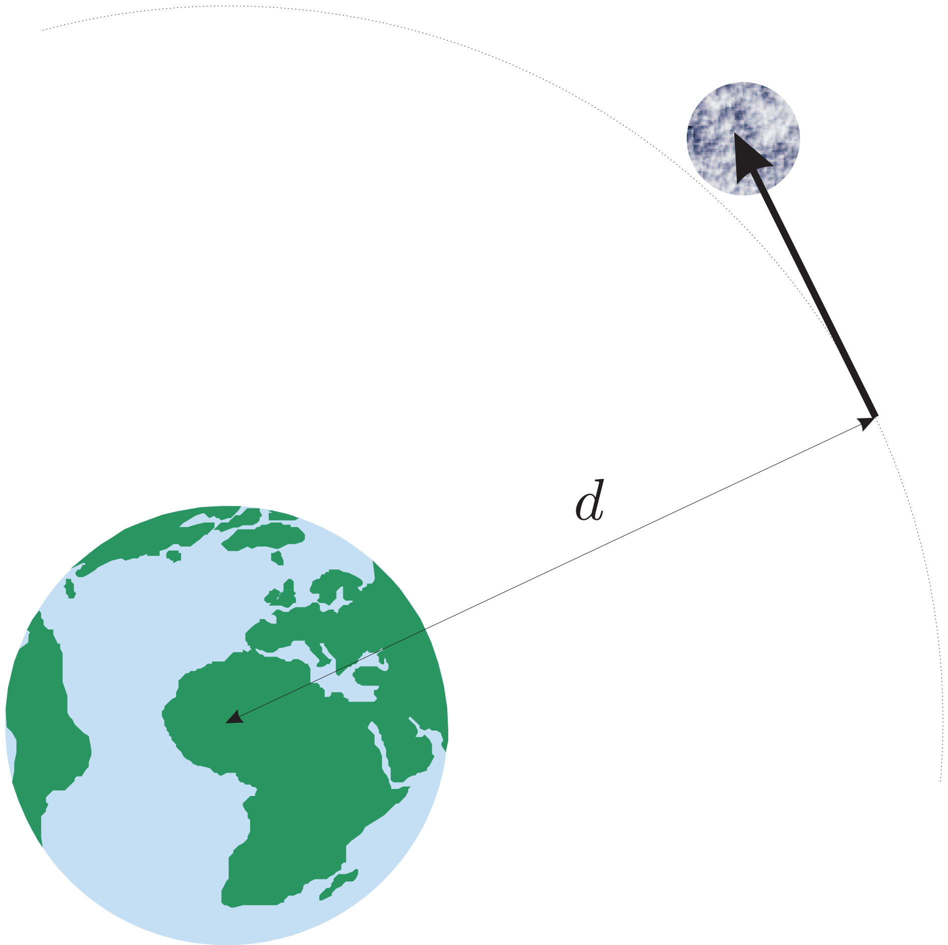
T $\approx$ 27,371 jours
C $\approx$ 2π x 384 000 km

Soit

T $\approx$ 2 364 854 s
C $\approx$ 2 412 672 km

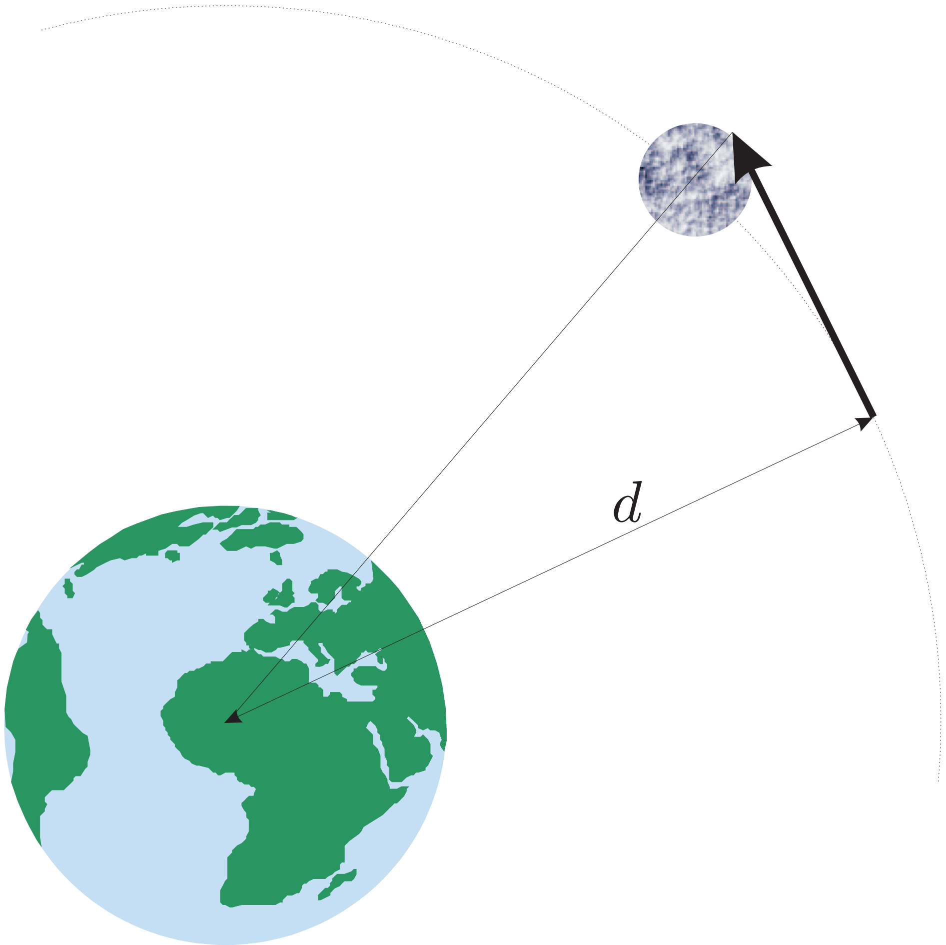
Vitesse $\approx$ 1 km/s

Chute de la Lune



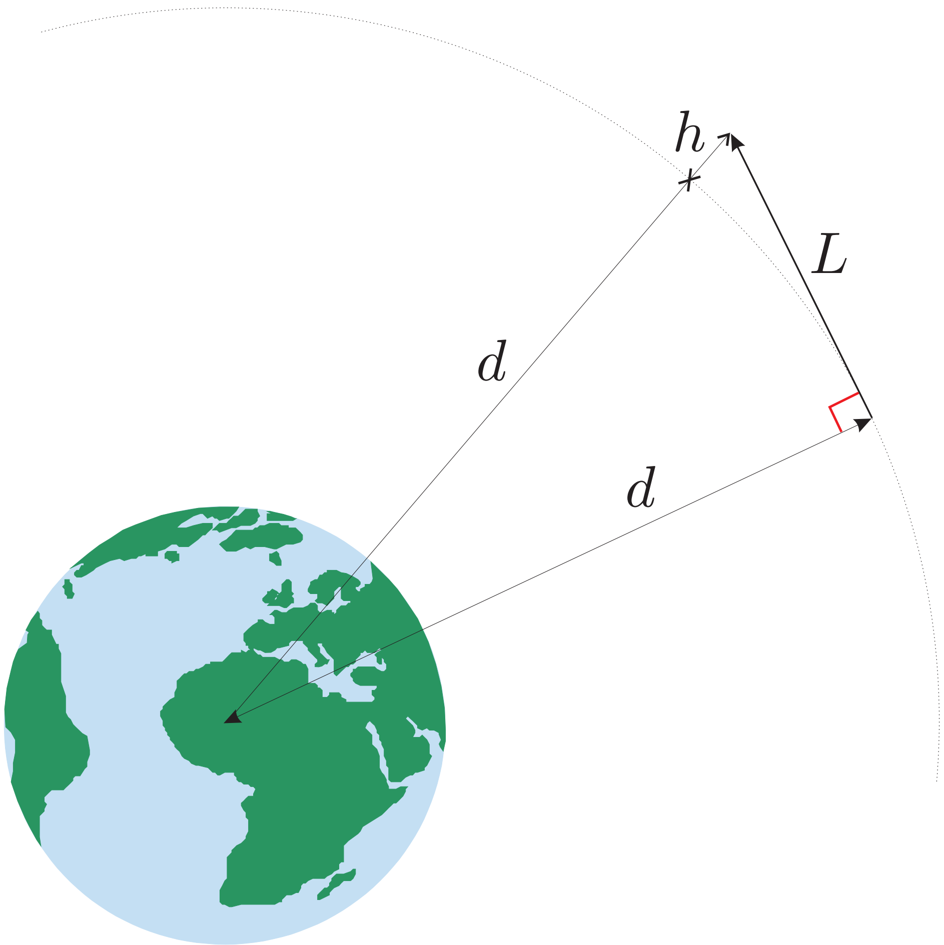
Si la Lune n'était pas attirée par
la Terre elle irait tout droit !

Chute de la Lune



En fait elle tombe un peu ...

Chute de la Lune



Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d+h)^2$$

Soit $h \approx L^2/2d$

pour 1 seconde, $L =$1km
$\Rightarrow\ h =$1,35 mm

Bilan 1

En une seconde ...

Bilan 1

En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

Bilan 1

En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

Bilan 1

En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance

Bilan 1

En une seconde ...

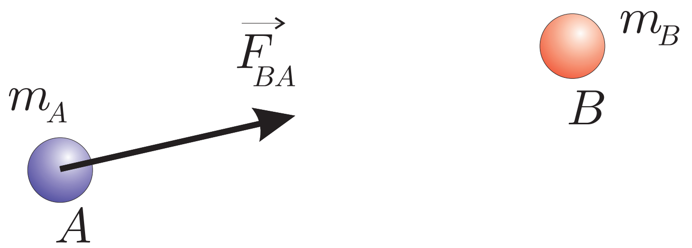
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Bilan 1

En une seconde ...

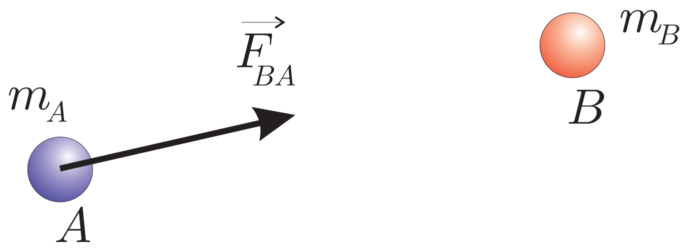
La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : attractive

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

Bilan 1

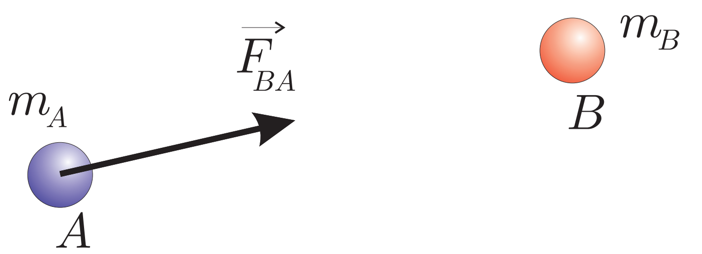
En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : dépend de m_A et m_B

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

Bilan 1

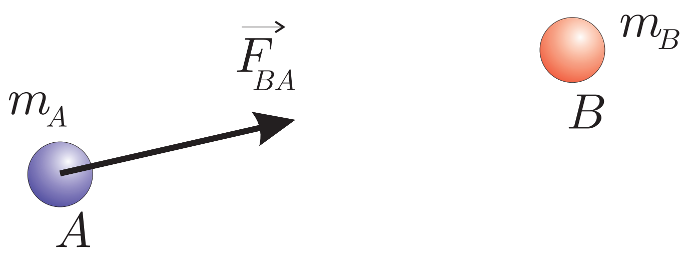
En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation : est une force !

$$\left.\begin{array}{c} \overrightarrow{F_{BA}} \\ [\mathtt{M}]\,.\,[\mathtt{L}]\,.\,[\mathtt{T}]^{-2} \end{array}\right\} \propto \left\{\begin{array}{c} -m_A m_B\,\overrightarrow{BA}/\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3 \\ [\mathtt{M}]^2\,.\,[\mathtt{L}]^{-2} \end{array}\right.$$

Bilan 1

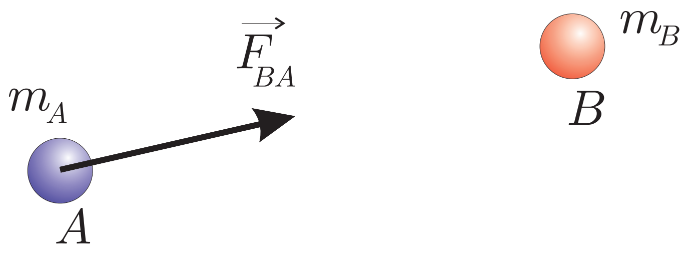
En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Constante de Newton

$$G \ = \ 6,64 \times 10^{-11} \ \mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$$

Bilan 1

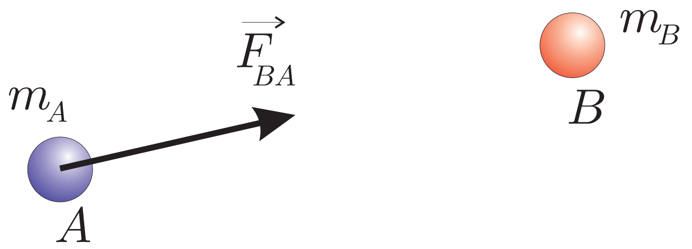
En une seconde ...

- La pomme tombe de 5 m,
  elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...
- La Lune tombe de 1,35 mm,
  elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !

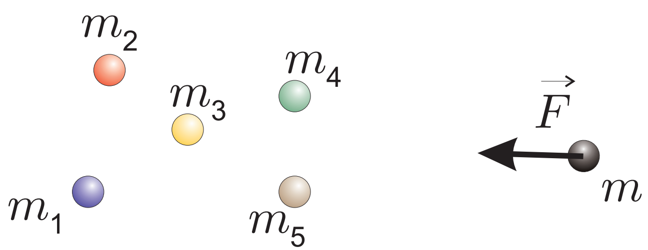
La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance



Force de gravitation

$$\overrightarrow{F_{BA}} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

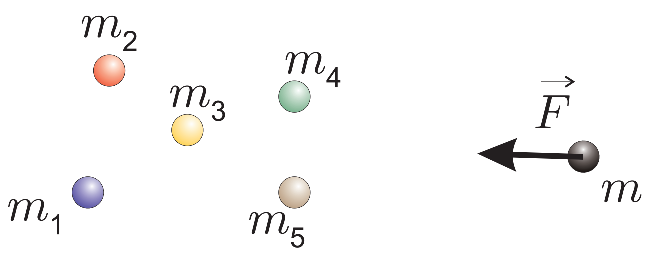
Potentiel de gravitation



$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

Potentiel de gravitation



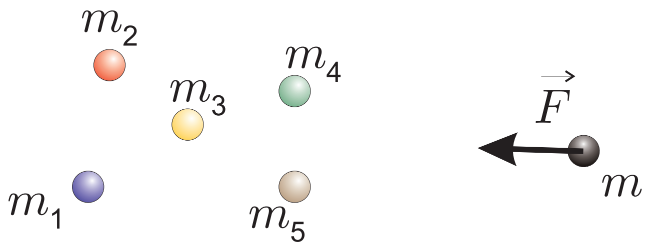
$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_iM}}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|^3}$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

$$\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

...

Potentiel de gravitation



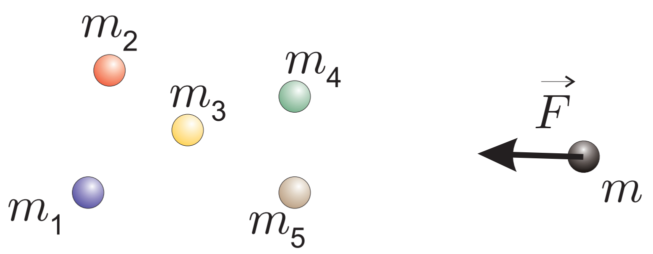
$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

$$\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-1/2}$$

...

Potentiel de gravitation



$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

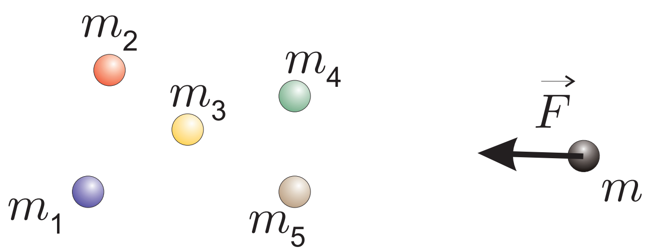
Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

$$\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-1/2}$$

...

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} \right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right) 2 (x - x_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-3/2}$$

Potentiel de gravitation



$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

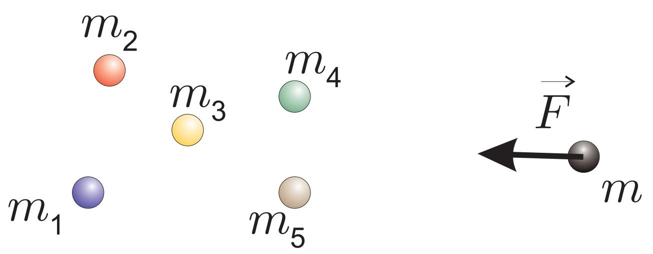
Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

$$\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-1/2}$$

...

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} \right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right) 2 (x - x_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-3/2} \\ &= -(x - x_i) / \left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3 \end{aligned}$$

Potentiel de gravitation



$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

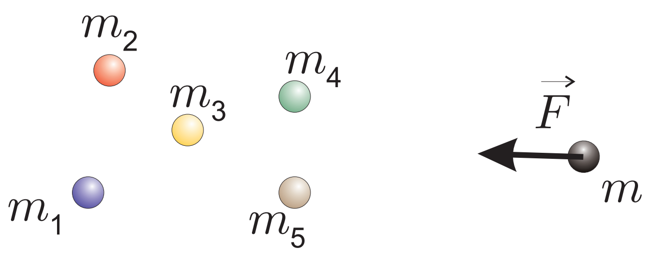
Dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i

$$\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-1/2}$$

...

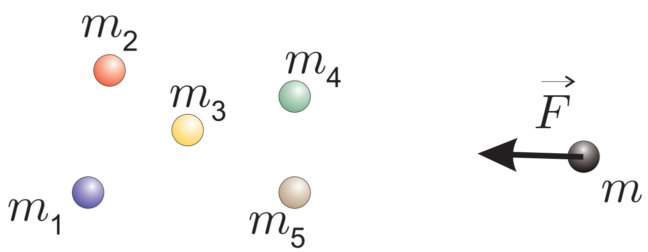
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1} \right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right) 2 (x - x_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{-3/2} \\
&= -(x - x_i) / \left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3 \\
&= -\frac{\overrightarrow{M_i M} . \vec{e_x}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}
\end{aligned}$$

Potentiel de gravitation



$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

Potentiel de gravitation

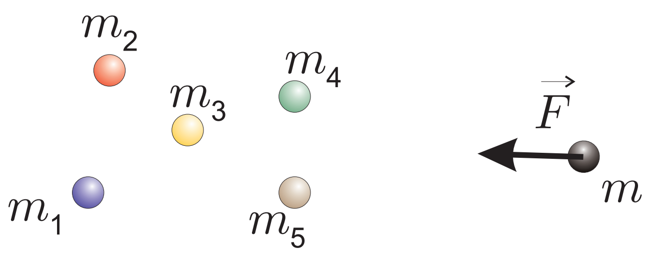


$$\overrightarrow{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[f\left(x, y, z\right)\right]} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T$$

Potentiel de gravitation



$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

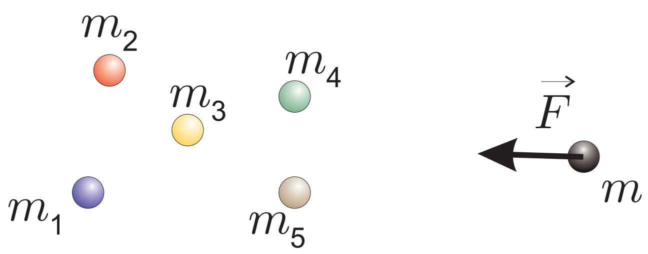
Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[f\left(x,y,z\right)\right]} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T$$

et donc

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^{-1}\right]} = -\frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\| \overrightarrow{M_i M} \right\|^3}$$

Potentiel de gravitation



$$\vec{F} = -Gm\sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_iM}}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|^3}$$

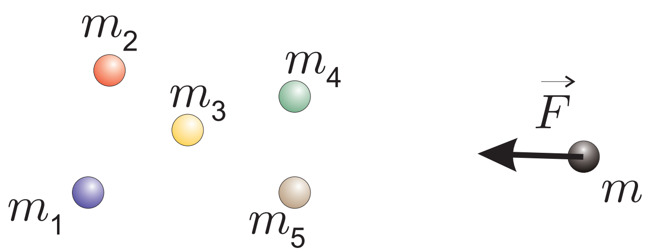
Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[f\left(x,y,z\right)\right]} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T$$ et donc $$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|^{-1}\right]} = -\frac{\overrightarrow{M_iM}}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|^3}$$

on remarque donc que

$$\vec{F} = -m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\psi}$$ avec $$\psi\left(M\right) = \sum_{i=1}^{5} -\frac{Gm_i}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|}$$

Potentiel de gravitation



$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^3}$$

Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\left[f\left(x,y,z\right)\right]} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}\left[\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^{-1}\right]} = -\frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^3}$$

on remarque donc que

$$\vec{F} = -m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\psi} \quad \text{avec } \psi\left(M\right) = \sum_{i=1}^{5} -\frac{Gm_i}{\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|}$$

à la limite continue

$$\psi\left(\vec{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|} d^3\vec{r}$$

$\rho\left(\vec{r}\right)$ est la densité volumique de masse au point $\vec{r}$, elle est la source du potentiel gravitationnel $\psi\left(\vec{r}\right)$.

Bilan 2

La force de gravitation $\overrightarrow{F}$ ressentie par une masse m située en un point de l'espace repéré par $\overrightarrow{r}$ dérive du potentiel de gravitation $\psi(\overrightarrow{r})$.

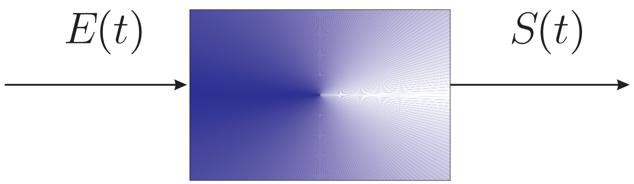
$$\overrightarrow{F} = -m \, \overrightarrow{\mathrm{grad}\, \psi(\overrightarrow{r})}$$

Le potentiel de gravitation est crée par une densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} d^3\overrightarrow{r}$$

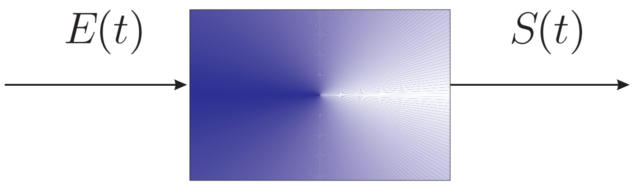
La réponse linéaire

Théorie de la réponse linéaire



Considérons un système avec une entrée $E\left(t\right)$ et une sortie $S\left(t\right)$

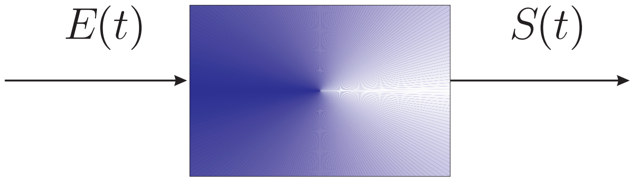
Théorie de la réponse linéaire



Considérons un système avec une entrée $E\left(t\right)$ et une sortie $S\left(t\right)$

Réponse à un créneau

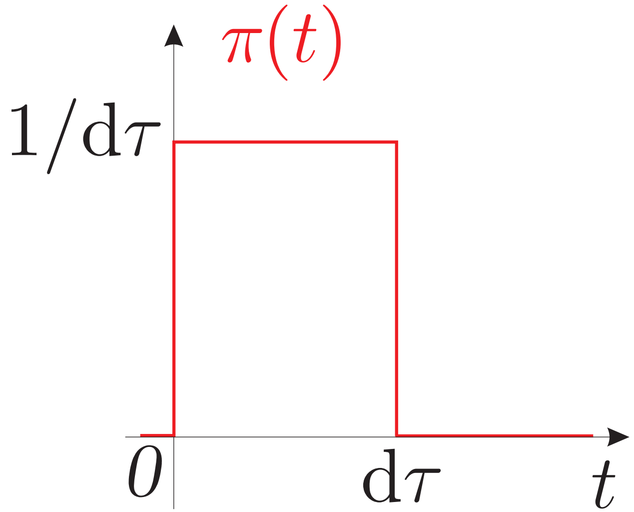
Théorie de la réponse linéaire



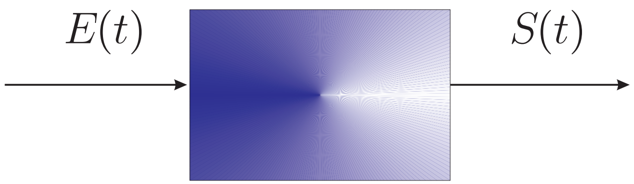
Considérons un système avec
une entrée $E(t)$ et une sortie $S(t)$

Réponse à un créneau

Entrée : créneau unité



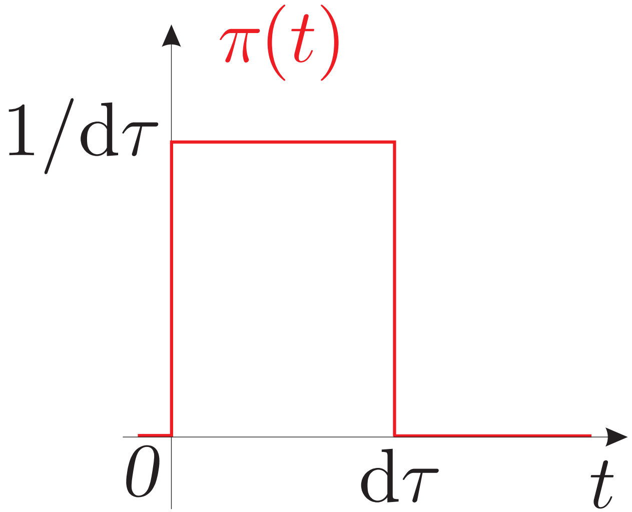
Théorie de la réponse linéaire



Considérons un système avec une entrée $E(t)$ et une sortie $S(t)$

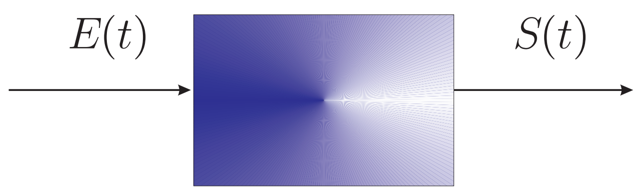
Réponse à un créneau

Entrée : créneau unité



Aire sous le créneau : $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\ \mathrm{d}t = 1$

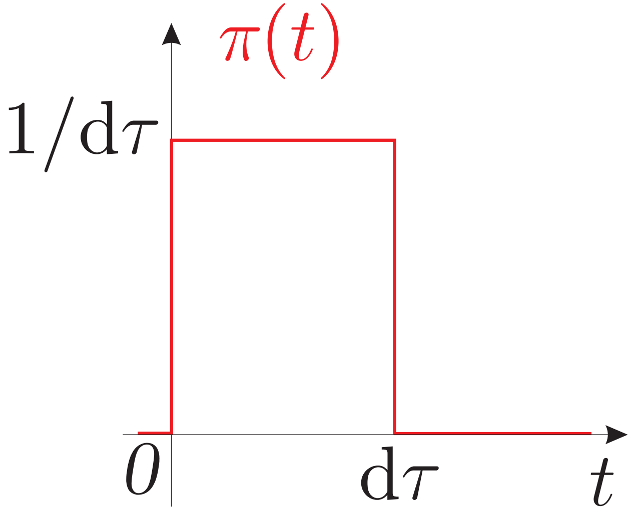
Théorie de la réponse linéaire



Considérons un système avec
une entrée $E\left(t\right)$ et une sortie $S\left(t\right)$

Réponse à un créneau

Entrée : créneau unité



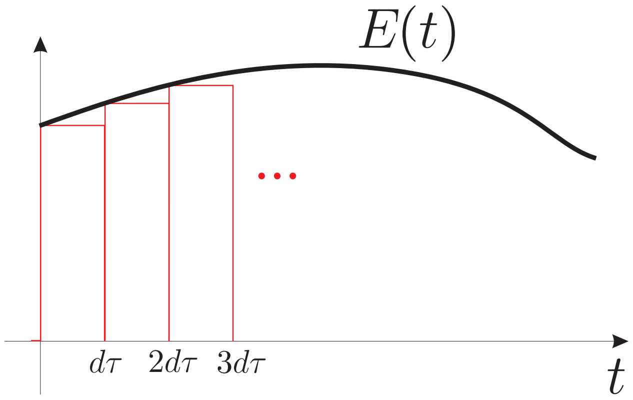
Aire sous le créneau : $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi\left(t\right)\ \mathrm{d}t = 1$

On enregistre la réponse $S_\pi\left(t\right) := H_{\mathrm{d}\tau}\left(t\right)$ du système lorsque $E\left(t\right) = \pi\left(t\right)$.

Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

On écrit

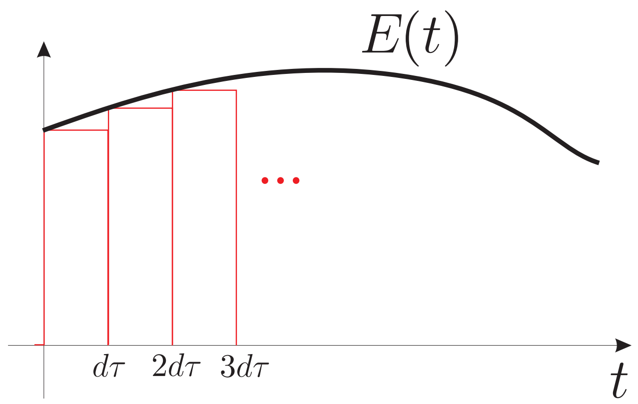


$$E(t) = \cdots + E(0)\underbrace{\pi(t)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + E(\tau)\underbrace{\pi(t-\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + \cdots$$

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t-k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

On écrit



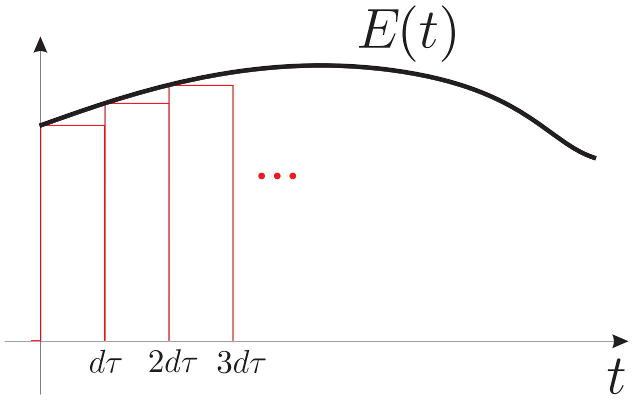
$$E(t) = \cdots + E(0)\,\underbrace{\pi(t)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + E(\tau)\,\underbrace{\pi(t-\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + \cdots$$

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t-k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Hypothèses sur le système

Réponse à une entrée quelconque $E\left(t\right)$

On écrit



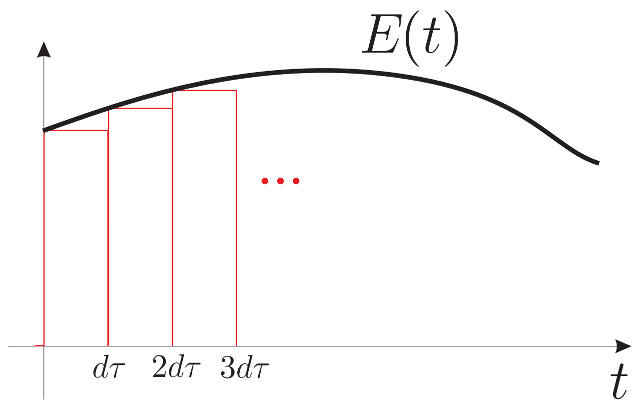
$$E\left(t\right) = \cdots + E\left(0\right)\underbrace{\pi\left(t\right)\mathrm{d}\tau}_{=1} + E\left(\tau\right)\underbrace{\pi\left(t-\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau}_{=1} + \cdots$$

$$E\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left(k\mathrm{d}\tau\right)\pi\left(t-k\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

Hypothèses sur le système

Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

On écrit



$$E(t) = \cdots + E(0)\,\underbrace{\pi(t)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + E(\tau)\,\underbrace{\pi(t-\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + \cdots$$

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t-k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

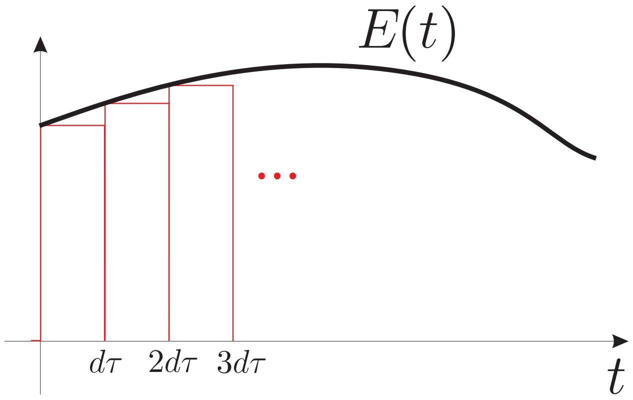
Hypothèses sur le système

- Le système est linéaire : Pour $i = 1, 2, ...$ on note $S_{\lambda_i}(t)$ la sortie lorsque $E(t) = \lambda_i(t)$, la linéarité signifie que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ S_{a\lambda_1 + b\lambda_2}(t) = aS_{\lambda_1}(t) + bS_{\lambda_2}(t)$$

Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

On écrit



$$E(t) = \cdots + E(0)\,\underbrace{\pi(t)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + E(\tau)\,\underbrace{\pi(t-\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=1} + \cdots$$

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t-k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Hypothèses sur le système

- Le système est linéaire : Pour $i = 1, 2, ...$ on note $S_{\lambda_i}(t)$ la sortie lorsque $E(t) = \lambda_i(t)$, la linéarité signifie que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ S_{a\lambda_1 + b\lambda_2}(t) = aS_{\lambda_1}(t) + bS_{\lambda_2}(t)$$

- La réponse du système ne dépend pas de l'instant où l'entrée a été envoyée, c'est-à-dire

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ S_{\lambda(t-\tau)}(t) = S_{\lambda(t)}(t-\tau)$$

Sous ces hypothèses générales $S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}\tau$

Sous ces hypothèses générales $S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}\tau$

Passage à la limite continue ...

Sous ces hypothèses générales $S_E\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left(kd\tau\right) H_{\mathrm{d}\tau}\left(t - k\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}\tau$

Passage à la limite continue ...

Si $\mathrm{d}\tau \rightarrow 0$, le créneau unité $\pi\left(t\right)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta\left(t\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t\right) \mathrm{d}t = 1 \qquad \forall \varphi\left(t\right) \in \mathbb{S}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(t\right) \delta\left(t\right) \mathrm{d}t = \varphi\left(0\right)$$

Sous ces hypothèses générales $S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}\tau$

Passage à la limite continue ...

Si $\mathrm{d}\tau \rightarrow 0$, le créneau unité $\pi(t)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1 \qquad \forall \varphi(t) \in \mathbb{S}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \delta(t)\, \mathrm{d}t = \varphi(0)$$

$\delta(t)$: impulsion fondamentale, on note $H(t) = H_\delta(t) = \lim_{\mathrm{d}\tau \rightarrow 0} H_{\mathrm{d}\tau}(t)$.

Sous ces hypothèses générales $S_E\left(t\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left(kd\tau\right) H_{\mathrm{d}\tau}\left(t - k\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau$

Passage à la limite continue ...

Si $\mathrm{d}\tau \rightarrow 0$, le créneau unité $\pi\left(t\right)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta\left(t\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t\right)\mathrm{d}t = 1 \qquad \forall\varphi\left(t\right) \in \mathbb{S},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(t\right)\delta\left(t\right)\mathrm{d}t = \varphi\left(0\right)$$

$\delta\left(t\right)$: impulsion fondamentale, on note $H\left(t\right) = H_\delta\left(t\right) = \lim_{\mathrm{d}\tau\rightarrow 0} H_{\mathrm{d}\tau}\left(t\right)$.

La réponse à une entrée quelconque s'écrira

$$S_E\left(t\right) = \lim_{\mathrm{d}\tau\rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left(k\mathrm{d}\tau\right) H_{\mathrm{d}\tau}\left(t - k\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(x\right) H\left(t-x\right)\mathrm{d}x$$

Sous ces hypothèses générales $S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}\tau$

Passage à la limite continue ...

Si $\mathrm{d}\tau \to 0$, le créneau unité $\pi(t)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1 \qquad \forall \varphi(t) \in \mathbb{S},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \delta(t)\, \mathrm{d}t = \varphi(0)$$

$\delta(t)$: impulsion fondamentale, on note $H(t) = H_\delta(t) = \lim_{\mathrm{d}\tau \to 0} H_{\mathrm{d}\tau}(t)$.

La réponse à une entrée quelconque s'écrira

$$S_E(t) = \lim_{\mathrm{d}\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)\, H(t-x)\, \mathrm{d}x$$

qui définit le produit de convolution

$$S_E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)\, H(t-x)\, \mathrm{d}x := (E * H)(t) = (H * E)(t)$$

par définition de la réponse impulsionelle on a donc

$$H(t) = (H * \delta)(t) = (\delta * H)(t)$$

par définition de la réponse impulsionelle on a donc

$$H(t) = (H * \delta)(t) = (\delta * H)(t)$$

qui se généralise facilement pour toute "'‘fonction"' $\varphi \in \mathbb{S}$

$$\varphi = \varphi * \delta = \delta * \varphi$$

par définition de la réponse impulsionelle on a donc

$$H(t) = (H * \delta)(t) = (\delta * H)(t)$$

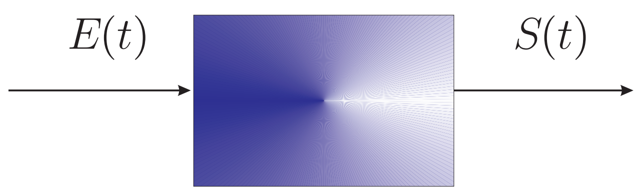
qui se généralise facilement pour toute "‘fonction"’ $\varphi \in \mathbb{S}$

$$\varphi = \varphi * \delta = \delta * \varphi$$

on dit que δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution.

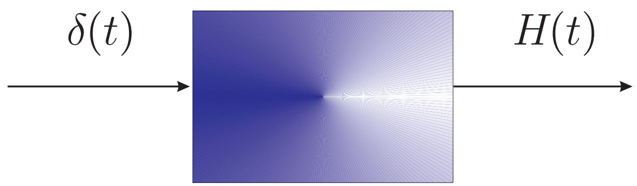
Bilan 3

Pour un système linéaire, avec
une entrée $E\left(t\right)$ et une sortie $S\left(t\right)$



$$S = H * E$$

avec



Le laplacien

Le laplacien dans $\mathbb{R}^3$

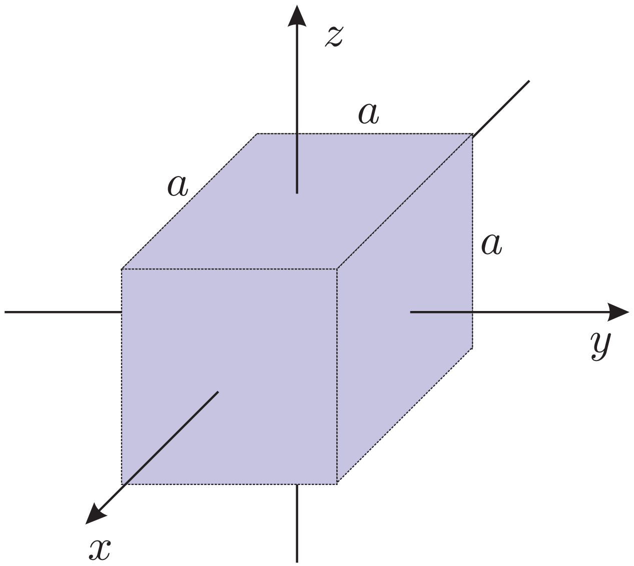
Considérons une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, si cette fonction est 2 fois dérivable par rapport à toutes ses variables, on peut définir son *laplacien*, en coordonnées cartésiennes (O, x, y, z), il s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien dans $\mathbb{R}^3$

Considérons une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, si cette fonction est 2 fois dérivable par rapport à toutes ses variables, on peut définir son *laplacien*, en coordonnées cartésiennes (O, x, y, z), il s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



On note $f\left(O\right) = f_o$

$$\overline{f} = \frac{1}{a^3} \iiint\limits_{\mathcal{C}} f\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Valeur moyenne de f au voisinage du point O

$$\mathcal{C} = \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

Moyennes et fluctuations

Développement en série de Taylor de f au voisinage de O

$$f(x,y,z) = f_o + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o z$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o z^2\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_o xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_o yz + o(2)$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur $\mathcal{C}$.

Moyennes et fluctuations

Développement en série de Taylor de f au voisinage de O

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = f_o &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o z \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o z^2\right] \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_o xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_o yz + o(2)
\end{aligned}
$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur $\mathcal{C}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \overline{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a^3} \iiint_{\mathcal{C}} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x \mathrm{d}x \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}z = 0
\end{aligned}
$$

Moyennes et fluctuations

Développement en série de Taylor de f au voisinage de O

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = f_o &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o z \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o z^2\right] \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_o xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_o yz + o(2)
\end{aligned}
$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur $\mathcal{C}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \overline{x^2} = \frac{1}{a^3}\iiint_{\mathcal{C}} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{a^2}{12}
\end{aligned}
$$

Laplacien et fluctuations

Finalement,

$$\overline{f} = f_o + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o\right]\frac{a^2}{12} + o\left(2\right)$$

Laplacien et fluctuations

Finalement,

$$\overline{f} = f_o + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o\right]\frac{a^2}{12} + o\,(2)$$

soit

$$\overline{f} = f_o + \frac{a^2}{24}\,(\Delta f)_o + o\,(2)$$

résultat est valable pour un choix quelconque de l'origine O

Laplacien et fluctuations

Finalement,

$$\overline{f} = f_o + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o\right]\frac{a^2}{12} + o\left(2\right)$$

soit

$$\overline{f} = f_o + \frac{a^2}{24}\left(\Delta f\right)_o + o\left(2\right)$$

résultat est valable pour un choix quelconque de l'origine O

ainsi à l'ordre 2 et, en tout point $M \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\Delta f\right)_M = \frac{24}{a^2}\left(\overline{f} - f\left(M\right)\right) \propto \left(\overline{f} - f\left(M\right)\right)$$

Le laplacien de f quantifie dans un voisinage de chaque point l'écart entre sa valeur en ce point et sa valeur moyenne.

Réponse impulsionnelle du laplacien

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \;\leftarrow \text{entrée}$$

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \ \leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \, \varphi = \varphi\left(0\right)$$

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \;\leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \, \varphi = \varphi\,(0)$$

Théorème : la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \ \leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \, \varphi = \varphi\left(0\right)$$

Théorème : la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.

Preuve :

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \ \leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\, \varphi = \varphi\,(0)$$

Théorème : la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.

Preuve : il suffit de remarquer que si l'on peut définir un laplacien pour les fonctions a, b et $a * b$ de $\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ alors

$$\Delta\left(a * b\right) = \Delta a * b = a * \Delta b$$

Il suffit de faire deux intégrations par partie...

Réponse impulsionnelle du laplacien

Entrée : fluctuation locale $v \propto u - \overline{u}$, Réponse : spatiale globale u

$$\Delta u = v \ \leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \, \varphi = \varphi\left(0\right)$$

Théorème : la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.

Preuve : il suffit de remarquer que si l'on peut définir un laplacien pour les fonctions a, b et $a * b$ de $\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ alors

$$\Delta\left(a * b\right) = \Delta a * b = a * \Delta b$$

Il suffit de faire deux intégrations par partie...

Ainsi lorsque $u = g * v$ on a $\Delta u = \Delta g * v = \delta * v = v$ car δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution ... et donc $\Delta u = v$ $\blacksquare$

Le dernier théorème ...

Le dernier théorème ...

La fonction

$$g_r \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{r} = (x,y,z)^T & \mapsto & -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\dfrac{1}{4\pi \left\| \overrightarrow{r} \right\|} \end{array}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Le dernier théorème ...

La fonction

$$g_r \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{r} = (x,y,z)^T & \longmapsto & -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\dfrac{1}{4\pi \left\| \overrightarrow{r} \right\|} \end{array}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Preuve

Le dernier théorème ...

La fonction

$$g_r \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{r} = (x, y, z)^T & \longmapsto & -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\dfrac{1}{4\pi \, \| \overrightarrow{r} \|} \end{array}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Preuve

il suffit de vérifier que $\Delta g_r = \delta$ c'est-à-dire, pour toute fonction radiale φ de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \, \varphi = \varphi(0)$$

Le dernier théorème ...

La fonction

$$g_r \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{r} = (x, y, z)^T & \mapsto & -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\dfrac{1}{4\pi \,\|\overrightarrow{r}\,\|} \end{array}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Preuve

il suffit de vérifier que $\Delta g_r = \delta$ c'est-à-dire, pour toute fonction radiale φ de $\mathbb{S}\left(\mathbb{R}\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \,\Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\,\varphi = \varphi\left(0\right)$$

ce que nous faisons en écrivant Δ en coordonnées sphériques (r, θ, ψ) et pour une fonction radiale $\varphi = \varphi\left(\|\overrightarrow{r}\,\|\right) = \varphi\left(r\right)$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

...

...

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

...

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \quad \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

...

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \;\; \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\left[r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}} \mathrm{d}r$$

...

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \quad \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\left[r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}} \mathrm{d}r$$

$$= \varphi(0) \qquad \blacksquare$$

...

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \;\; \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\left[r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}} \mathrm{d}r$$

$$= \varphi\,(0) \qquad \blacksquare$$

Finalement, nous pouvons donc affirmer que la réponse globale u à une fluctuation spatiale v s'écrit

$$u = g_r * v$$

...

ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} g_r \, \Delta\varphi &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right) \\
&= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \;\; \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right) \\
&= -\left[r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}} \mathrm{d}r \\
&= \varphi(0) \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Finalement, nous pouvons donc affirmer que la réponse globale u à une fluctuation spatiale v s'écrit

$$
u = g_r * v
$$

Conclusion finale

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

La signification de cette relation devient lumineuse

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

La signification de cette relation devient lumineuse

La gravitation, issue du potentiel gravitationnel, est la réponse globale à une fluctuation locale de masse introduite via la densité

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G\int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|}\mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

La signification de cette relation devient lumineuse

La gravitation, issue du potentiel gravitationnel, est la réponse globale à une fluctuation locale de masse introduite via la densité

La gravitation est donc une propriété de l'espace qui se manifeste lors de fluctuations locales de la densité volumique de masse.

GRGS
GROUPE DE RECHERCHE DE GEODESIE SPATIALE

Conclusion finale

Le potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G \int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

La signification de cette relation devient lumineuse

La gravitation, issue du potentiel gravitationnel, est la réponse globale à une fluctuation locale de masse introduite via la densité

La gravitation est donc une propriété de l'espace qui se manifeste lors de fluctuations locales de la densité volumique de masse.

Ce qu'il fallait démontrer...

La gravitation en dimension n

La gravitation en dimension n

- Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2} \, d\overrightarrow{x}$$

La gravitation en dimension n

- Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2} \, d\overrightarrow{x}$$

- Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^2$:

La gravitation en dimension n

- Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\overrightarrow{x}\right|^2} \, d\overrightarrow{x}$$

- Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^2$:

- Montrer que $I_n = (I_1)^n$ et en déduire la valeur de I_n

La gravitation en dimension n

En passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$ ...
on montre facilement que

$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \qquad (1)$$

ou $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n.

La gravitation en dimension n

En passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$ ...
on montre facilement que

$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \tag{1}$$

ou $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n.

En utilisant le résultat de la question précédente calculer $|S_{n-1}|$.

On rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la fonction Γ d'Euler

$$\forall z \in \mathbb{R}_*^+ \quad \Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

La gravitation en dimension n

On considère à présent l'opérateur laplacien en dimension n : $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, pour toute fonction radiale f de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire telle que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(\left|\overrightarrow{x}\right|\right)$, on a

$$\Delta_n f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r} r^{n-1}\right) \tag{2}$$

Soit φ une fonction test de $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et f une fonction radiale de $\mathbb{R}^n$, les propriétés de symétrie du laplacien permettent de montrer que

$$\langle f, \Delta_n \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \; \Delta_n \varphi \; d\overrightarrow{x} = \left|S_{n-1}\right| \int_0^{+\infty} f \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) r^{n-1} dr \tag{3}$$

La gravitation en dimension n

On considère à présent l'opérateur laplacien en dimension n : $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, pour toute fonction radiale f de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire telle que $f\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(|\overrightarrow{x}|\right)$, on a

$$\Delta_n f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r} r^{n-1}\right) \tag{2}$$

Soit φ une fonction test de $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et f une fonction radiale de $\mathbb{R}^n$, les propriétés de symétrie du laplacien permettent de montrer que

$$\langle f, \Delta_n \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\ \Delta_n \varphi\ d\overrightarrow{x} = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} f\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) r^{n-1} dr \tag{3}$$

Montrer que, pour $n \geq 2$, la fonction $g_n = \dfrac{k_n}{r^{n-2}}$ est une fonction de Green radiale du laplacien dans $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$, les $k_{n_{[n=3,\ldots.]}}$ sont des constantes que l'on déterminera

La gravitation en dimension n

Écrire le potentiel gravitationnel dans un espace de dimension n