Ecole d'été du GRGS
Carcans, Septembre 2010

La gravitation, une propriété de l'espace ?

Jérôme Perez
Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA
Laboratoire Univers & Théories de l'observatoire de Meudon

Septembre 2010

Tout le monde a déjà entendu l'affirmation « la gravitation affecte l'espace, et le déforme... ». C'est en effet le message que tout un chacun retient de la « mystérieuse » théorie de la relativité générale, théorie de la gravitation d'Einstein.

L'objectif de ce texte, sans prétentention autre que pédagogique et récréative, est de « démontrer » que le lien entre la gravitation et l'espace existe déjà en physique classique, et peut même se concevoir assez simplement. Nous allons procéder en trois étapes successives et de niveaux progressifs. Dans un premier temps, nous allons déduire de l'expérience la forme de l'interaction gravitationnelle que nous écrirons via un potentiel. Nous présenterons alors le résultat central de la théorie de la réponse linéaire, puis dans un troisième temps, nous décrirons les propriétés de l'opérateur laplacien. La synthèse de ces trois parties nous permettra d'obtenir la conclusion cherchée...

1 Tout est dans la chute ...

1.1 Chute d'une pomme

L'expérience montre qu'une pomme normale, comme tout autre objet suffisamment profilé d'ailleurs, met environ une seconde pour chuter d'une hauteur de 5 mètres.

Tout un chacun peut réaliser cette expérience ...

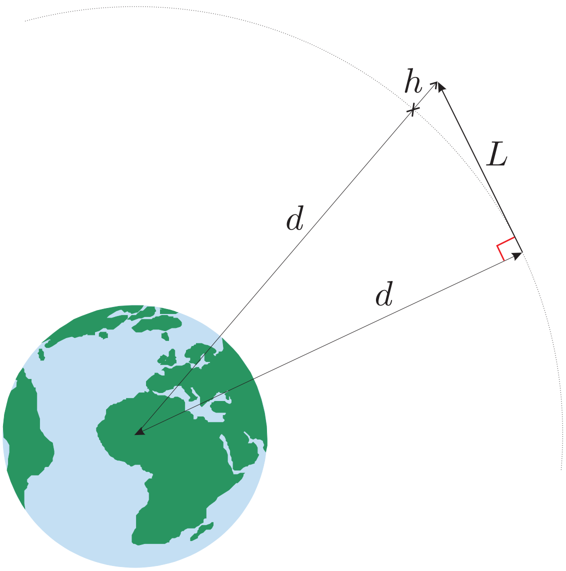
1.2 Chute de la Lune

La Lune comme la pomme est en chute libre ! Elle est soumise au même champ de gravitation celui de la Terre[1]

En effet, si elle ne tombait pas, et n'était donc soumise à aucune force, elle irait tout droit car la force est la quantité physique qui indique comment varie la vitesse d'un corps. Le module v_L de la vitesse de la Lune peut se déduire du rapport de la circonférence C du cercle de rayon $d \approx$384 000 km, qu'elle parcourt autour de la Terre $C \approx 2\pi d \approx$ 2 412 672 km, par sa période $T \approx$ 27,371 jours $\approx$ 2 364 854 s. Ainsi, $v_L \approx C/T \approx$ 1 km/s.

[1]On considère ici que l'action du Soleil est négligeable, ce qui n'est pas strictement vrai en réalité !

Sur le schéma ci-dessous on peut évaluer la hauteur h de chute de la Lune en une seconde, alors qu'elle parcourt approximativement une longueur $L \approx v_L \times 1\text{s} \approx 1$ km.



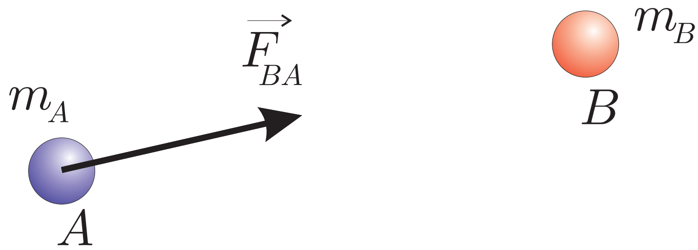
Le théorème de Pythagore donne immédiatement $d^2 + L^2 = (d+h)^2$ soit au premier ordre $h \approx L^2/2d$, soit pour une seconde h =1,35 mm.

Il est déjà temps de faire un premier bilan : sous l'action de la même force de gravitation terrestre en une seconde la pomme tombe de $h_P = 5$ m, elle est située à $R_T = 6380$ km du centre de la Terre. De son coté, alors qu'elle se situe à d =380 000 km de ce dernier, la Lune tombe de h_L =1,35 mm. Une comparaison des rapports donne

$$\frac{d}{R_T} = \frac{380\ 000}{6\ 380} \approx 60 \quad \text{et} \quad \frac{h_p}{h_L} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée ! Si tout ceci est universel, la gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance. C'est la conclusion que fit le jeune Newton à 22 ans !

On peut même être plus précis : la force de gravitation $\overrightarrow{F_{BA}}$ de B sur A s'exerce entre les centres de masse des corps A et B.



Elle est attractive, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3},$$

la force de gravitation dépend « directement »de m_A et m_B, le plus simple est d'envisager une relation de la forme

$$\overrightarrow{F_{BA}} \propto -m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3} .$$

La force de gravitation est avant tout une force ! L'analyse dimensionnelle montre que

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{BA}} \\ [\mathtt{M}] \,.\, [\mathtt{L}] \,.\, [\mathtt{T}]^{-2}\end{array}\right\} \propto \left\{\begin{array}{c} -m_A m_B \, \overrightarrow{BA} / \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3 \\ [\mathtt{M}]^2 \,.\, [\mathtt{L}]^{-2}\end{array}\right.$$

Il est donc nécessaire d'introduire une constante, dite de Newton ou de Cavendish,

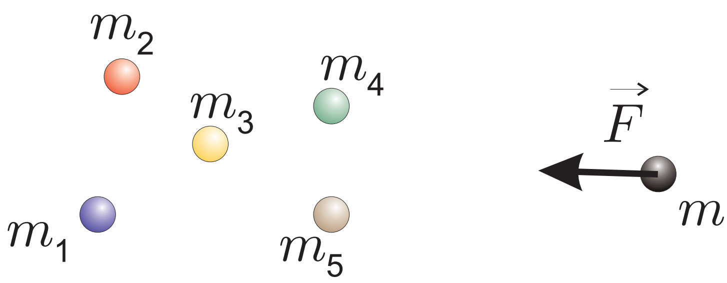
$$G \ = \ 6.64 \times 10^{-11} \ \mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$$

pour rétablir la dimension et l'intensité issue de l'expérience. Finalement, la force de gravitation s'écrit donc

$$\overrightarrow{F_{BA}} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3}$$

2 Potentiel de gravitation

Si plusieurs masses sont en présence, le principe dit de superposition permet de sommer les contributions de chaque masse



$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^{5} m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^3}$$

Dans la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i, on a donc

$$\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^{-1} = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{-1/2} .$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^{-1}\right) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right) 2\,(x - x_i) \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{-3/2} \\ &= -\,(x - x_i) \,/\, \left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^3 \\ &= -\left(\overrightarrow{M_i M}.\vec{e_x}\right) / \left\|\overrightarrow{M_i M}\right\|^3 \end{aligned}$$

Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on définit, en coordonnées cartésiennes, le gradient de f par

$$\overrightarrow{\text{grad}\left[f\left(x,y,z\right)\right]} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)^T,$$

ainsi

$$\overrightarrow{\text{grad}\left[\frac{1}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|}\right]} = -\frac{\overrightarrow{M_iM}}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|^3}$$

on remarque donc que

$$\overrightarrow{F} = -m\ \overrightarrow{\text{grad}\psi} \quad \text{avec } \psi\left(M\right) = \sum_{i=1}^{5} -\frac{Gm_i}{\left\|\overrightarrow{M_iM}\right\|}$$

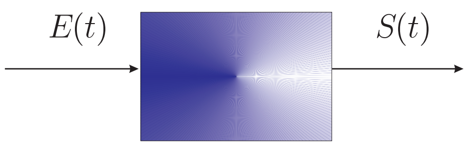
à la limite continue, la répartition discrète des masses $m_1, ..., m_5$ devient une densité volumique de masse $\rho\left(\overrightarrow{r}\right)$ définie en chaque point $\overrightarrow{r}$, et on trouve directement

$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G\int \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}'\right)}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} d^3\overrightarrow{r}$$

Cette densité est la source du potentiel gravitationnel $\psi\left(\overrightarrow{r}\right)$. Bien que pouvant paraître plus abstrait que la force, le potentiel de gravitation est une notion qui se prête bien plus facilement à l'interprétation qui nous intéresse.

3 Théorie de la réponse linéaire

Considérons un système (Σ) auquel il est possible de transmettre une entrée, que nous représenterons par une fonction E d'une variable t, qui pourrait par exemple être le temps, et duquel on peut extraire une sortie ou réponse $S\left(t\right)$. Le système (Σ) constitue une « boîte noire ».

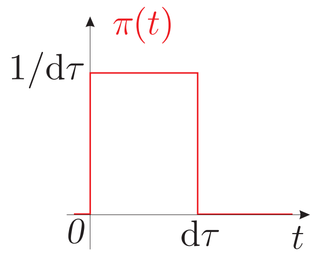


L'objectif de la théorie de la réponse linéaire est d'obtenir l'expression de $S\left(t\right)$ en fonction de $E\left(t\right)$, dans un cadre adapté.

3.1 Réponse à un créneau

Considérons la fonction créneau $\pi\left(t\right)$ telle que pour une valeur du paramètre $\mathrm{d}\tau \neq 0$,

$$\pi\left(t\right) = \begin{cases} 1/\mathrm{d}\tau & \text{si } t \in \left]0, \mathrm{d}\tau\right[\\ 0 & \text{si } t \notin \left]0, \mathrm{d}\tau\right[\end{cases}$$



Notons d'emblée la propriété fondamentale de cette fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) \ \mathrm{d}t = 1.$$

On enregistre la « réponse »$S_\pi(t) := H_{\mathrm{d}\tau}(t)$ du système lorsque $E(t) = \pi(t)$.

3.2 Réponse à une entrée quelconque $E(t)$

Pour que tout se passe bien, la fonction $E(t)$ doit être suffisamment régulière, en fait on requiert

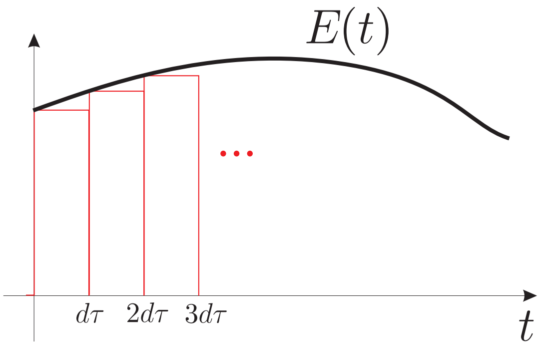
$$E \in \mathbb{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ / \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \ \lim_{x \to \pm\infty} x^\alpha \frac{d^\beta f}{dx^\beta} = 0 \right\}.$$

Physiquement cette hypothèse est toujours vérifiée car, au moins pour des raisons énergétiques, l'injection de l'entrée se fait pendant un intervalle de temps compact.

Compte-tenu du fait que pour tout entier k, on a $1 = \pi(t - k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$, on écrit l'approximation suivante

$$E(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t - k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Cela revient à approcher $E(t)$ par une fonction constante par morceaux.



Mieux qu'un calcul, la figure ci-dessus montre que l'erreur commise est d'autant plus faible que $\mathrm{d}\tau$ est petit. À la limite continue, on peut même espérer avoir

$$E(t) = \lim_{\mathrm{d}\tau \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\,\pi(t - k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

que l'on écrira plutôt

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) \ \delta(t - x) \ \mathrm{d}x$$

avec toujours

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

δ n'est clairement pas une fonction car elle nulle partout sauf en 0 et son intégrale est non nulle ! Il s'agit de la distribution de Dirac. Bien connue de tous ?

Il est temps de faire deux hypothèses, qui fixent le cadre de la théorie de la réponse linéaire :

– Hypothèse 1 : linéarité
  Pour $i = 1$ ou 2, on note $S_{\lambda_i}(t)$ la sortie lorsque $E(t) = \lambda_i(t)$, le système est dit linéaire si

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ S_{a\lambda_1+b\lambda_2}(t) = aS_{\lambda_1}(t) + bS_{\lambda_2}(t)$$

– Hypothèse 2 : homogénéité
  La réponse du système ne dépend pas de l'instant où l'entrée a été envoyée, c'est-à-dire

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ \ S_{\lambda(t-\tau)}(t) = S_{\lambda(t)}(t-\tau)$$

Sous ces hypothèses générales, il vient immédiatement

$$S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

et à la limite continue

$$\begin{aligned} S_E(t) &= \lim_{\mathrm{d}\tau\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(k\mathrm{d}\tau)\, H_{\mathrm{d}\tau}(t - k\mathrm{d}\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)\, H(t-x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

où nous avons noté $H(t)$ la réponse du système lorsqu'à la limite $E(t) = \delta(t)$, on dit que H est la réponse impulsionnelle du système.

Cette relation permet de définir le produit de convolution $*$: on note en effet

$$S_E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)\, H(t-x)\,\mathrm{d}x := (E * H)(t)$$

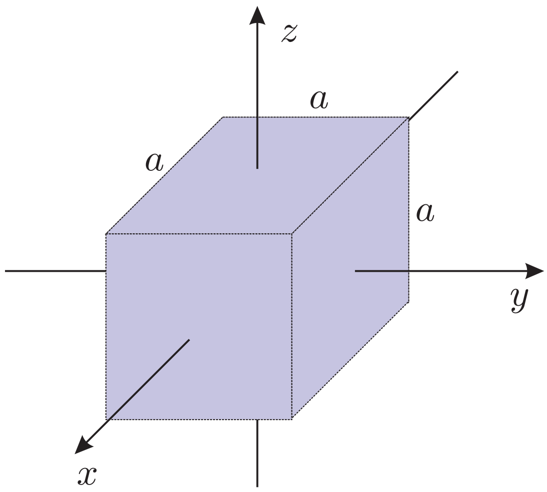
Cette définition peut être étendue tant que le terme du milieu a un sens... On note tout de suite que $E * H = H * E$, c'est un simple changement de variable. On vérifie aussi facilement que $H = H*\delta = \delta*H$ qui se généralise facilement pour toute « fonction » $\varphi \in \mathbb{S}$ en $\varphi = \varphi*\delta = \delta*\varphi$. On dit que δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution. Gardons bien en mémoire ces précieux résultats.

4 Le laplacien dans $\mathbb{R}^3$

Considérons une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, si cette fonction est deux fois dérivable par rapport à toutes ses variables, on peut définir son *laplacien*. Dans le référentiel cartésien (O, x, y, z), il s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notons $f(O) = f_o$ et considérons un cube élémentaire $\mathcal{C}$ de côté a, dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont le centre se confond avec l'origine O.



La valeur moyenne de f dans ce cube élémentaire, autrement dit la valeur moyenne de f au voisinage du point O, est fournie par l'expression

$$\overline{f} = \frac{1}{a^3} \iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Le cube $\mathcal{C}$ est le produit cartésien de chacun des segments constituants ses arêtes

$$\mathcal{C} = \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

4.1 Laplacien, moyennes et fluctuations

Considérons le développement en série de Taylor de f au voisinage de O

$$f(x, y, z) = f_o + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o z$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o z^2\right]$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_o xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_o yz + o(2)$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur $\mathcal{C}$. On remarque immédiatement que

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \overline{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a^3} \int\limits_{\mathcal{C}} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x \mathrm{d}x \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0$$

des calculs équivalents montrent que tous les termes impairs sont nuls

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o y} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_o z} = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_o xy} = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_o xz} = \overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_o yz} = 0$$

Pour chaque terme pair on trouve par exemple

$$\overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \overline{x^2} = \frac{1}{a^3} \iiint\limits_{\mathcal{C}} x^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{a^2}{12}$$

Finalement, il ne reste plus que

$$\overline{f} = f_o + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o\right] \frac{a^2}{12} + o\left(2\right)$$

soit

$$\overline{f} = f_o + \frac{a^2}{24} \left(\Delta f\right)_o + o\left(2\right)$$

ce résultat est valable pour un choix quelconque de l'origine O, ainsi à l'ordre 2 et en tout point M on a

$$\left(\Delta f\right)_M = \frac{24}{a^2} \left(\overline{f} - f\left(M\right)\right) \propto \left(\overline{f} - f\left(M\right)\right)$$

En résumé, le laplacien de f quantifie dans un voisinage de chaque point l'écart entre sa valeur en ce point et sa valeur moyenne.

4.2 Réponse impulsionnelle du laplacien

Considérons à présent deux fonctions u et v de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\Delta u = v$, comment exprimer u en fonction de v ? Il s'agit en fait d'un problème semblable à celui évoqué dans la section 3 : on considère ici que l'entrée est la fonction v et il ne reste plus qu'à déterminer la réponse impulsionnelle du laplacien ... On parle plutôt dans ce contexte de fonction de Green.

En effet, supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \ \varphi = \varphi(0),$$

on a alors le théorème suivant

Théorème : *la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.*

Preuve : il suffit de remarquer que si l'on peut définir un laplacien pour les fonctions a, b et $a * b$ de $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\Delta(a * b) = \Delta a * b = a * \Delta b$$

Il suffit de faire deux intégrations par partie, pour vérifier cette affirmation. Ainsi lorsque $u = g * v$, on a immédiatement $\Delta u = \Delta g * v = \delta * v = v$ car δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution ... et donc $\Delta u = v$ ■

Il ne reste donc plus qu'à déterminer cette fonction de Green du laplacien, c'est l'objet de l'ultime théorème suivant

Théorème : *La fonction*

$$g_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^+ \\ \overrightarrow{r} = (x, y, z)^T & \mapsto & -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{4\pi\|\overrightarrow{r}\|} \end{array}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Preuve : il suffit de vérifier que $\Delta g_r = \delta$ c'est-à-dire que, pour toute fonction radiale φ de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \ \Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \ \varphi = \varphi(0)$$

ce que nous faisons en écrivant Δ en coordonnées sphériques (r, θ, ψ) : pour toute fonction radiale $\varphi = \varphi(\|\overrightarrow{r}\|) = \varphi(r)$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \ \Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}r \quad \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \ \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right)$$

$$= -\left[r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dr}}\mathrm{d}r$$

$$= \varphi(0) \qquad ■$$

Finalement, nous pouvons donc affirmer que si $\Delta u = v$ alors $u = g_r * v$.

Les plus perspicaces auront relié l'ensemble des résultats obtenus dans la conclusion qui suit ...

5 Conclusion finale

Nous avons vu que le potentiel gravitationnel $\psi(\overrightarrow{r})$ s'exprime en fonction de la densité volumique de masse $\rho(\overrightarrow{r})$ par la relation

$$\psi(\overrightarrow{r}) = -G \int \frac{\rho(\overrightarrow{r}')}{\|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\|} \mathrm{d}\overrightarrow{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi \; G \; g_r * \rho$$

Le terme 4π s'interprète simplement comme la surface de la boule unité de $\mathbb{R}^3$

$$4\pi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = S_3$$

qui vient compléter la fonction purement radiale g_r, ainsi en posant

$$g_3 = S_3 \times g_r$$

on obtient

$$\psi = \;\; G \;\; g_3 * \rho$$

La constante de Newton permet simplement, comme nous l'avons expliqué plus haut, d'obtenir la bonne intensité et les bonnes unités physiques pour le potentiel gravitationnel ψ.

Le reste de la formule est lumineux : nous avons vu que g_3 est la réponse impulsionnelle du laplacien de $\mathbb{R}^3$ donc le potentiel gravitationnel ψ est la sortie lorsque l'on introduit en entrée du laplacien une certaine densité volumique de masse ρ. Quel est la boîte noire que l'on peut associer au Laplacien ? Beaucoup de réponses sont possibles à cette question saugrenue, en remarquant que le laplacien est un opérateur spatial qui considère toutes les directions de l'espace sur un pied d'égalité (il est isotrope), il parait loisible de l'associer à l'espace isotrope de la mécanique classique... Sous ce point de vue, le potentiel gravitationnel se trouve donc être la réponse de l'espace lorsque celui-ci se voit introduire une densité volumique de masse. La gravitation est donc bel et bien une propriété de l'espace. C'est ce qu'il fallait démontrer !

Concluons par quelques ouvertures, issues de ces réflexions.

1. Les amateurs de physique reconnaîtront dans l'expression $\psi = \;\; G \;\; g_3 * \rho$, et par application du laplacien, l'équation de Poisson gravitationnelle

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho \; .$$

Ces mêmes amateurs de physique se souviendront alors qu'il existe la même équation dans le contexte de l'électrostatique : si U est le potentiel électrique, ρ_e la densité volumique de charge électrique et ε_o la permittivité électrique du vide alors

$$\Delta U = -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho$$

qui s'inverse donc en

$$U = -\frac{1}{\varepsilon_o}\ g_3 * \rho$$

Dont l'interprétation est maintenant claire : le potentiel électrique (et donc la force de Coulomb qui en dérive) est aussi une propriété de l'espace. Il s'agit de sa réponse à une sollicitation par une densité volumique de charges *électriques*. Le signe $-$ marque le caractère répulsif associé à cette réponse qui n'est pas présent lorsque les charges sont uniquement des masses.

2. La réponse de l'espace, qu'elle soit sous la forme d'un potentiel gravitationnel ou électrique est instantanée : $\psi(\ ,t) = \rho(\ ,t)$. L'espace est ici supposé isotrope. Ces deux limitations directement liées aux hypothèses de la mécanique classique volent en éclat dans les théories relativistes du champ, mais le lien entre l'espace et le potentiel de gravitation ou électrique est bel et bien là dès la mécanique classique !
3. Que serait la gravitation ou la force de Coulomb dans un espace de dimension quelconque ? Voici une question qui pourrait-en surprendre plus d'un, mais qui trouverait beaucoup d'intérêt si notre Univers possédait, à petite échelle, plus de dimensions spatiales que les 3 habituelles. Munis de nos outils la réponse est maintenant claire : dans un espace de dimension n le potentiel de gravitation doit s'écrire

$$\psi = \ G \ \ S_n\ g_{r,n} * \rho$$

où

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad \text{avec } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

est la surface de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et

$$g_{r,n} = \frac{1}{S_n\ \ (n-2)\ \ r^{n-2}} \quad \text{pour } n \geq 3$$

est la fonction de Green radiale du laplacien de $\mathbb{R}^n$, nous vous laissons le vérifier... et entreprendre les mesures de gravitation à l'échelle microscopique afin de sonder la dimensionalité de notre espace !