

Évaluation statistique des séries temporelles de la géodésie

Karine Le Bail

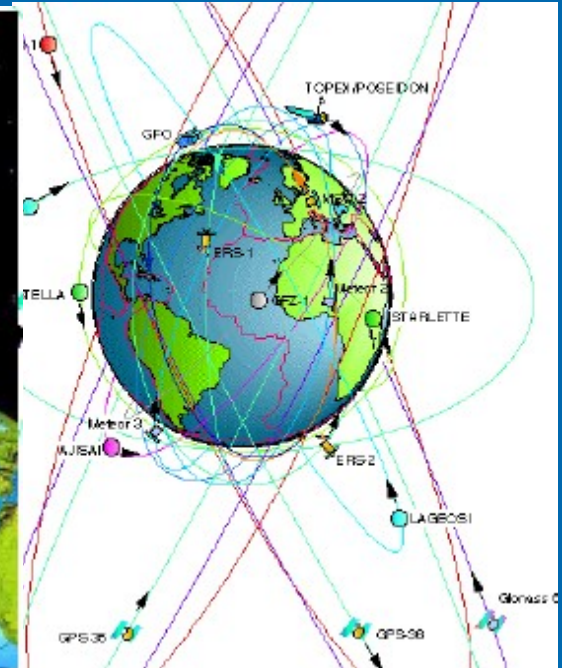
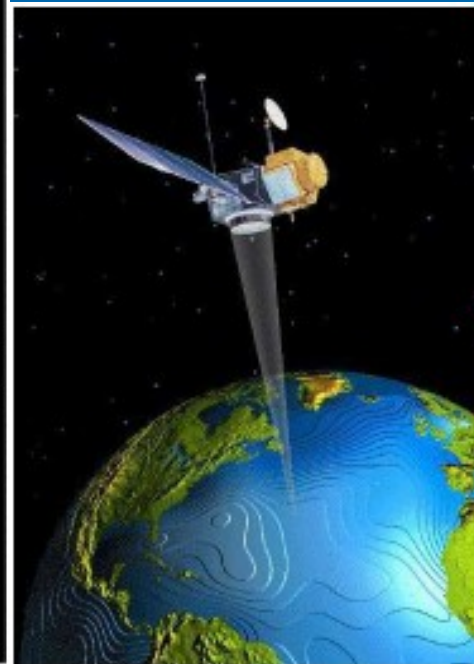
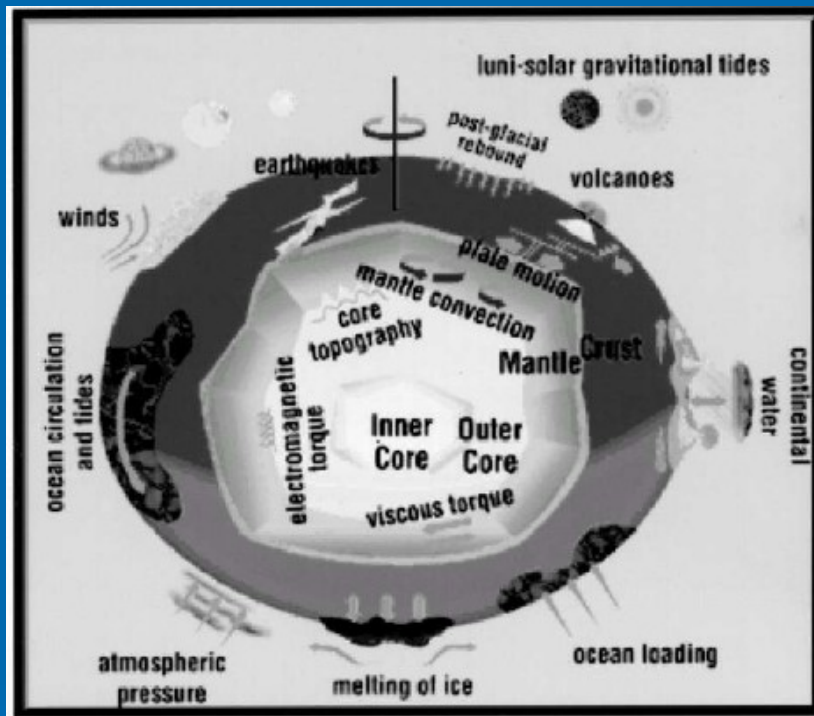
Institut Géographique National IGN – LAREG

Observatoire de la Côte d'Azur – GEMINI

Contenu

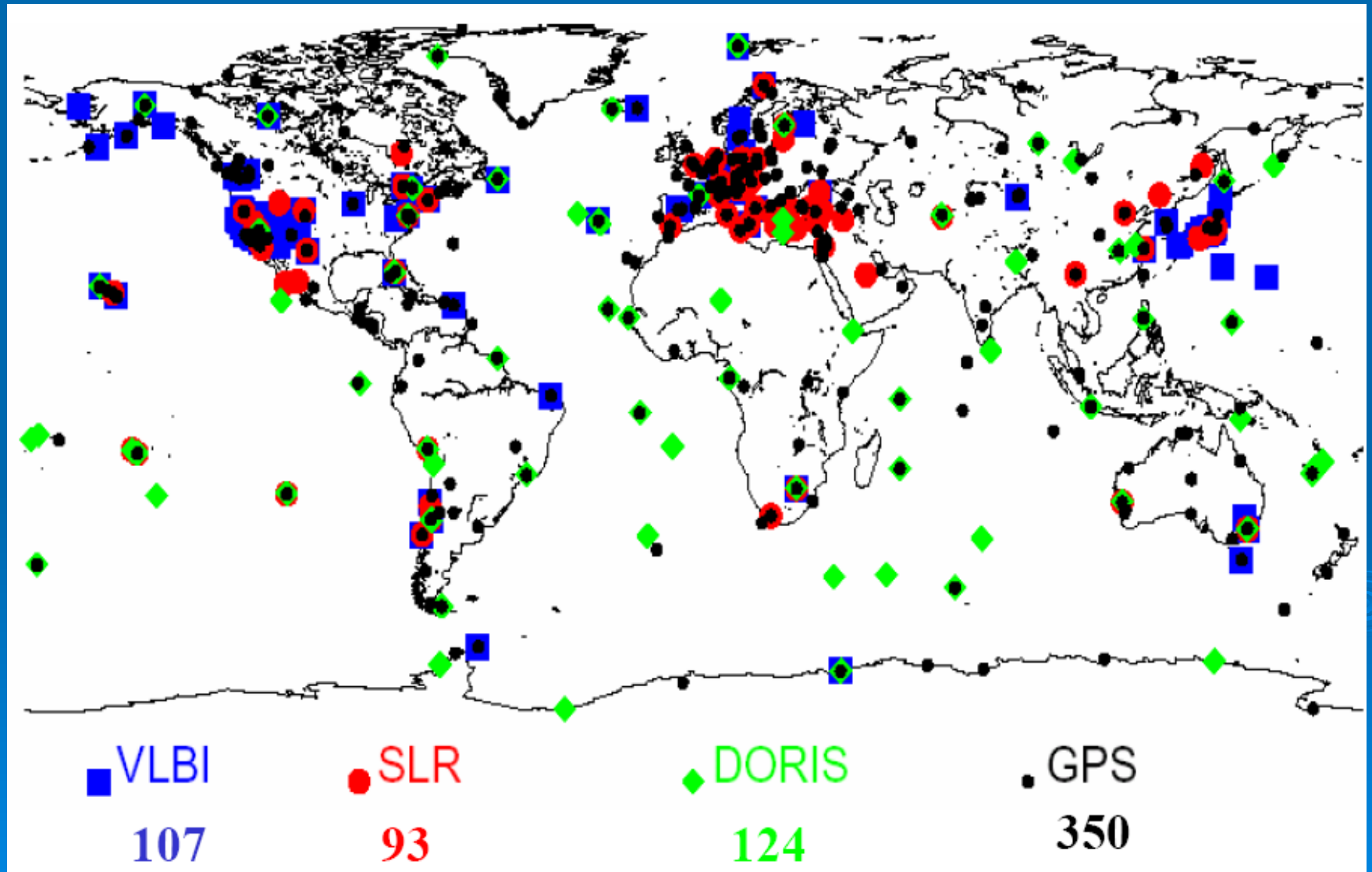
- Problématique
- Outils statistiques utilisés en géodésie :
 - Signal/filtrage
 - Bruit
- Méthode d'analyse de séries temporelles :
stabilité des stations
 - Couplage de l'Analyse en Composantes Principales appliquée dans le domaine temporel avec la variance d'Allan
- Analyse globale des différents réseaux de stations, toutes techniques confondues :
stabilité des techniques
 - Variance d'Allan, moindres carrés et méthode du tricorne
- Conclusions

La Terre, siège de variations temporelles



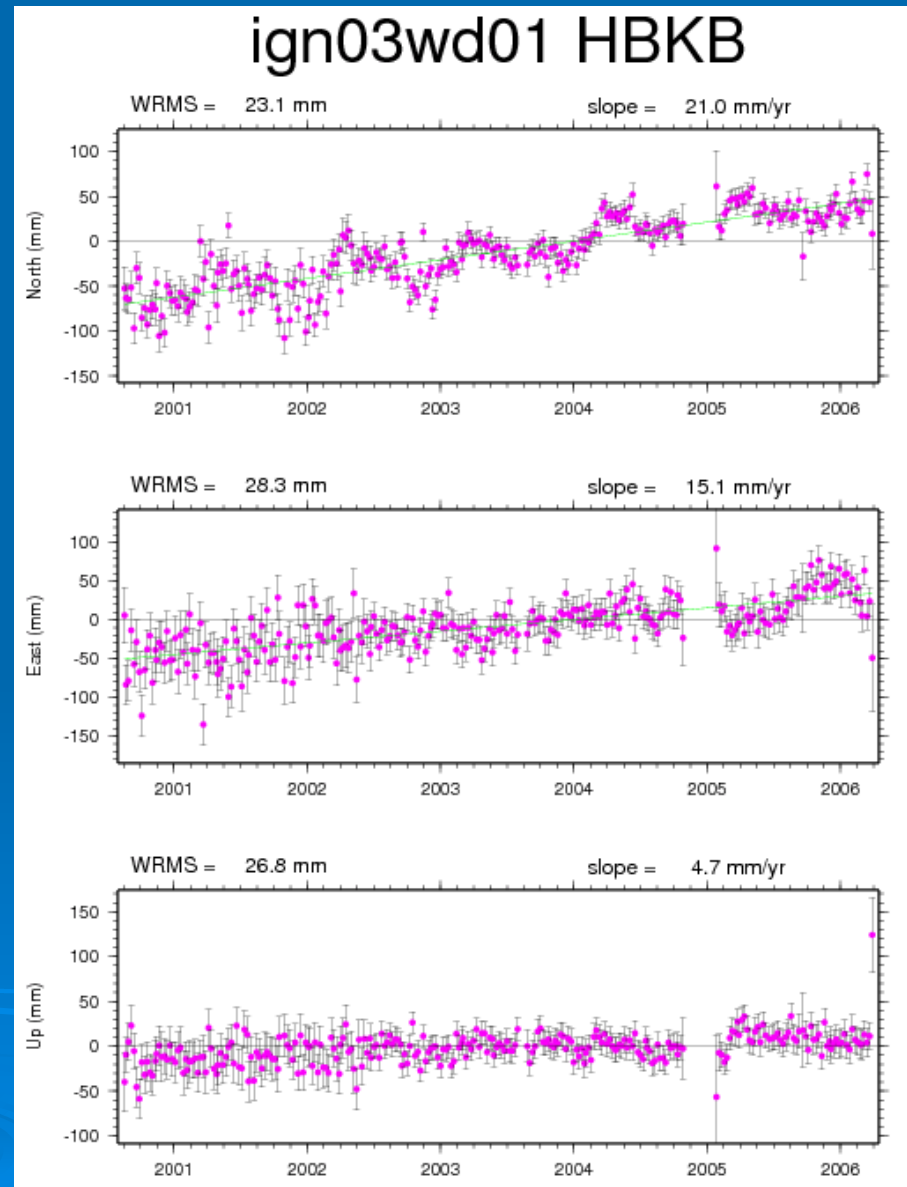
- Techniques de la géodésie : VLBI, SLR, GPS, DORIS;
- Modélisation de séries temporelles;
- Interprétation des données:
 - Par la grande quantité de données, il est nécessaire de développer des méthodes adéquates.

Sites de l'ITRF2005 – réalisation du repère international de référence terrestre



Séries temporelles en géodésie

- Reflet de :
 - la technique (mesure, instrumentation);
 - la stratégie d'analyse (modèles utilisés);
 - les phénomènes géophysiques locaux.
- Partie déterministe :
 - Signaux périodiques (saisonnier, 117.3 jours pour TOPEX/Poseidon, aliasing 13.6 jours pour GPS);
 - Pente (vitesse tectonique des plaques);
 - Biais.
- Bruit.



Méthodes statistiques pour l'étude des séries temporelles en géodésie

➤ Signal/filtrage :

- **Singular Spectral Analysis** (climatologie *Ghil et al. 2001*);
- **Ondelettes, spectre de Fourier.**

➤ Bruit :

- **Variance d'Allan** (temps et fréquence *Allan 1966*);
- Domaine de recherche récent en géodésie spatiale : **Puissance de Densité Spectrale** et **Estimation du Maximum de Vraisemblance** (*GPS Langbein et Johnson 1997, Zhang et al. 1997, Mao et al. 1999, Blewitt et Lavallée 2002, Williams 2004*).

➤ Méthode proposée :

- **Analyse en Composantes Principales** (statistiques, analyse de données *Saporta 1978, Baccini et Besse 1999*) appliquée au domaine temporel (ACPt);
- Couplage de l'ACPt à la variance d'Allan;
- Originalité : considération de l'évolution de la position dans un espace tridimensionnel.

Outil statistique utilisé :

Analyse en composantes
principales appliquée au
domaine temporel



Théorie (1)

- Soit $A(i, j)$ telle que :
 - $A(i,1)$ est la coordonnée Nord du point considéré à la date t_i ;
 - $A(i,2) = Est(t_i)$;
 - $A(i,3) = Hauteur(t_i)$.
- On calcule la matrice de variance-covariance empirique :

$$COV_A(k, l) = \sum_i \frac{(A(i, k) - \bar{A}_k)(A(i, l) - \bar{A}_l)}{n}$$

Théorie (2)

➤ Recherche des valeurs et vecteurs propres de la matrice COV_A ;

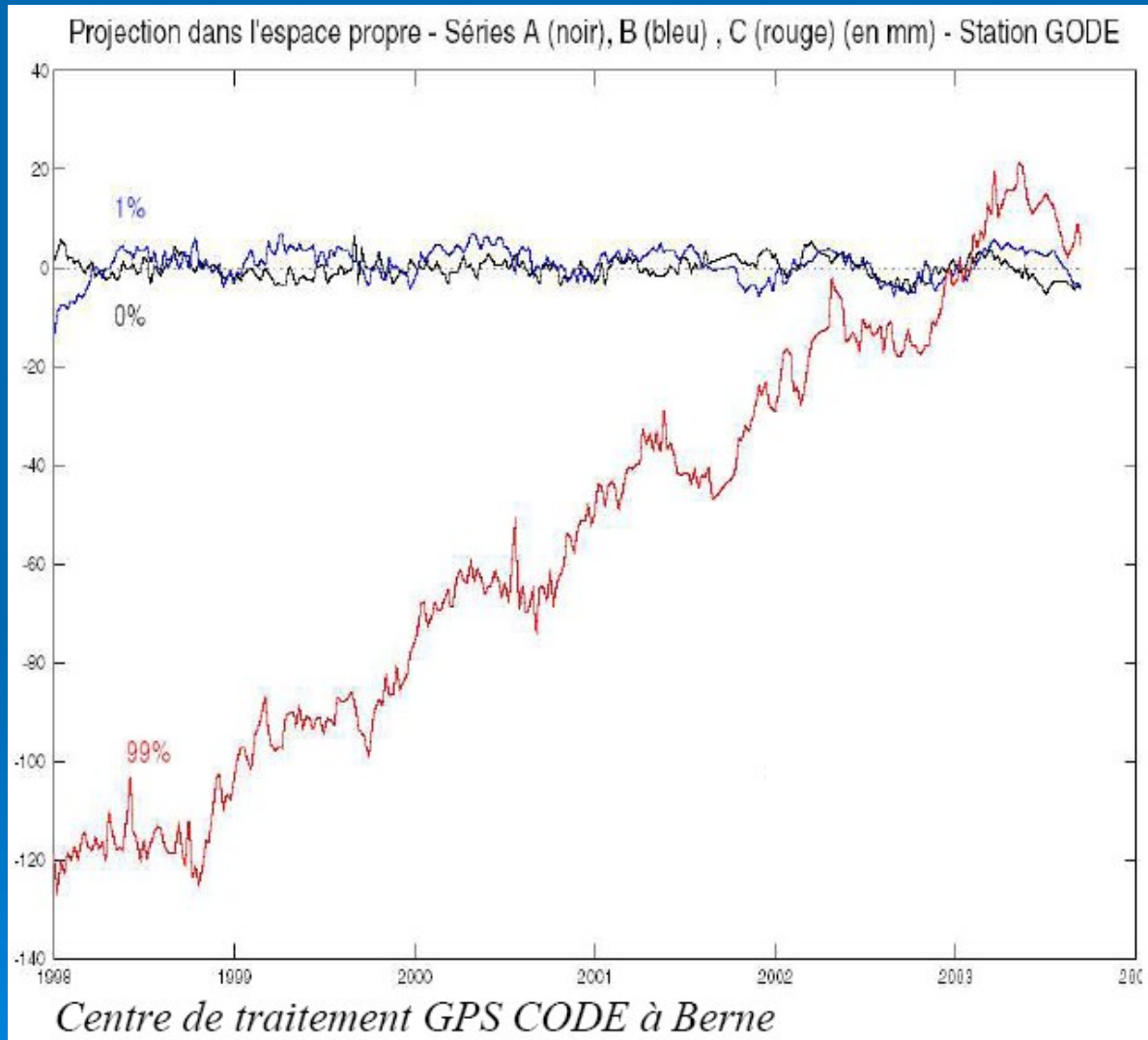
➤ Projection de chaque triplet $(dN(t_i), dE(t_i), dH(t_i))$ sur l'espace propre généré par les vecteurs propres précédents :

$$\begin{pmatrix} A(t_i) \\ B(t_i) \\ C(t_i) \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} dN(t_i) \\ dE(t_i) \\ dH(t_i) \end{pmatrix}$$

➤ On obtient trois composantes dont le pourcentage de variance explicative est :

$$P_l = \frac{\lambda_l}{\sum_{m=1}^3 \lambda_m}$$

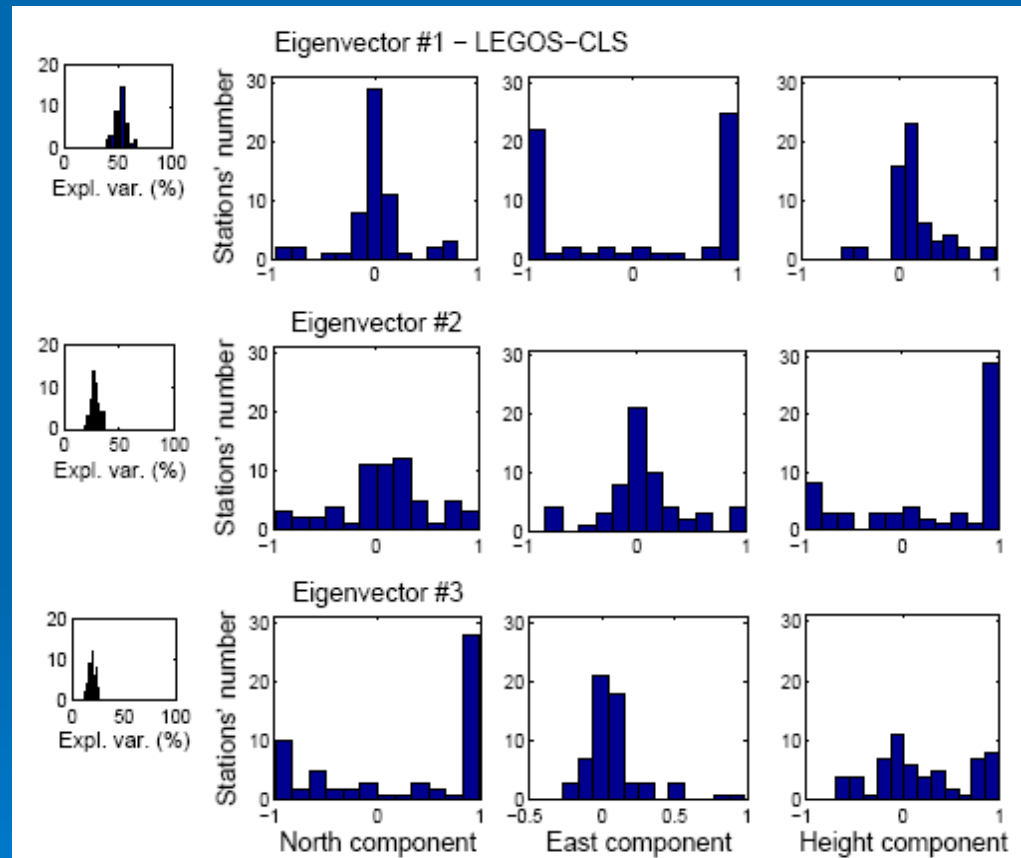
Intérêts de la méthode (1)



- La considération des séries 3D de coordonnées dans l'espace propre permet de séparer les composantes de bruit indépendantes :
 - Décomposition du signal saisonnier et du signal annuel dû à une erreur de modélisation.

Intérêts de la méthode (2)

- L'étude de chacune des composantes principales peut suggérer des origines différentes pour le bruit détecté;
- Information sur la géométrie de la technique (réseau, passage des satellites au dessus des stations,...) par l'étude de la matrice de variance-covariance;
- Indication d'une direction privilégiée (vecteurs propres et pourcentage de variance explicative).



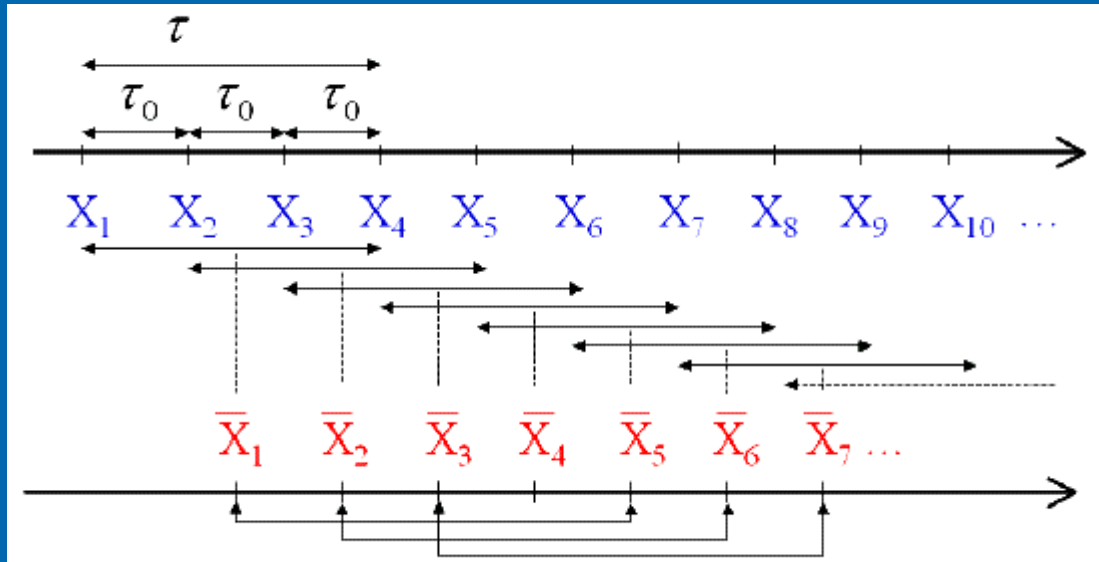
*Outil statistique utilisé pour
l'interprétation :*

Variance d'Allan

Bruit des séries temporelles

- Deux classes de types de bruit :
 - Données non corrélées avec le temps = bruit blanc;
 - Données corrélées avec le temps = bruit coloré :
 - Marche aléatoire (bruit Brownien, rouge);
 - Bruit de scintillation (bruit rose).
- Longues séries temporelles – long historique (plus de 4 ans pour une série hebdomadaire);
- Méthodes de détermination de bruit :
 - Densité spectrale : séries à données régulièrement réparties – Indice spectral;
 - Variance d'Allan : séries à données régulièrement réparties – Dépliement de la variance à différents espaces de temps, superposition de bruits;
 - Estimation du Maximum de Vraisemblance : toutes séries – Hypothèse de type de bruit à faire a priori.

Variance d'Allan



$(X_j)_{j \in I}$ sont les
mesures étudiées
 τ est le temps
d'échantillonnage

➤ Variance d'Allan : $\sigma_X^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k)^2 \rangle$

➤ Sa représentation :

$$\log(\sigma^2(\tau)) = \mu \log(\tau), \text{ pour } \tau = \tau_0, 2\tau_0, 4\tau_0, \dots$$

Variance d'Allan et loi de densité spectrale

- Soit $S_x(f) = h_\alpha f^\alpha$ la densité spectrale du processus :

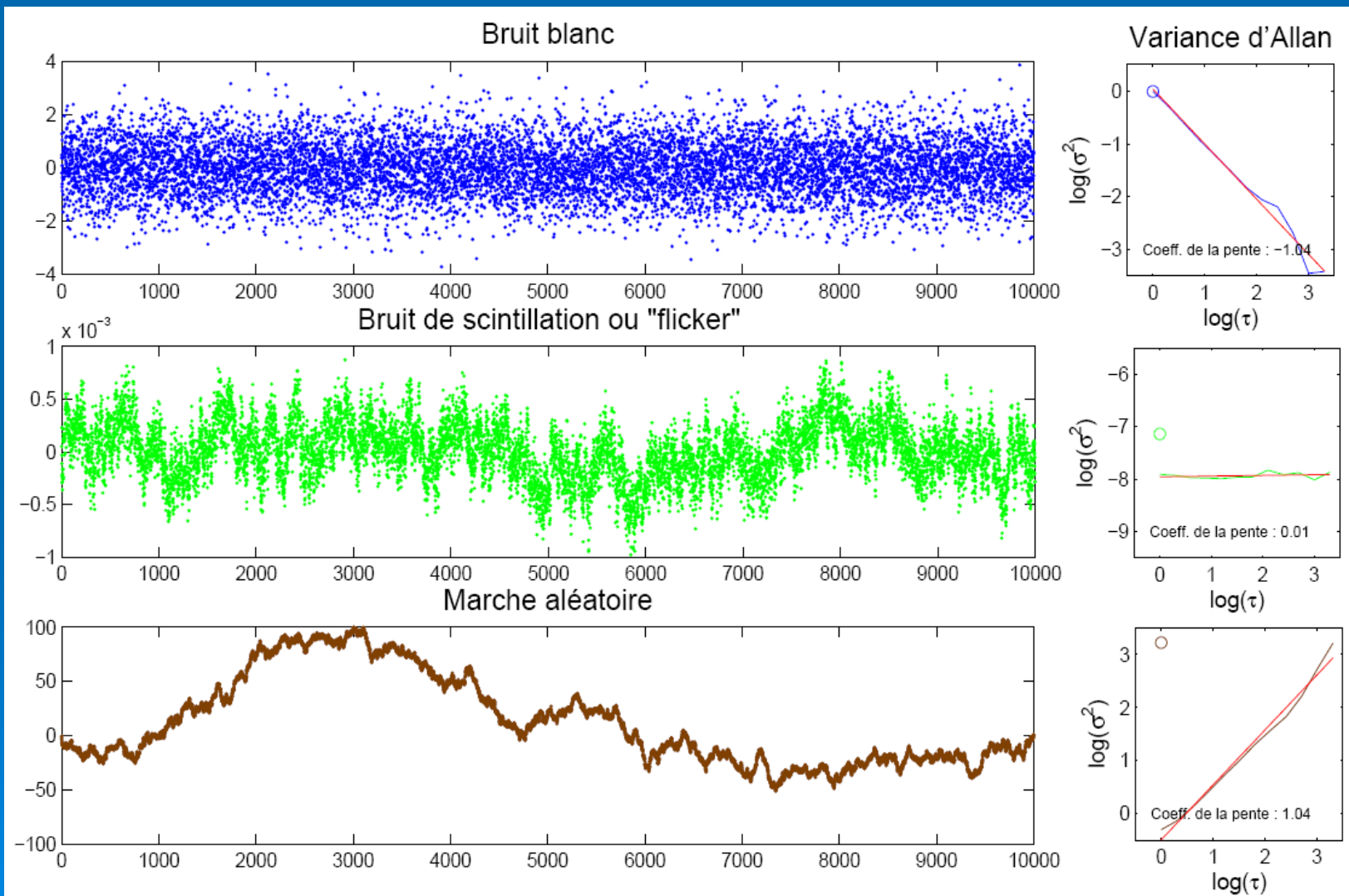
$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{1}{\text{card}(I)\tau_0} \sum_{i \in I} S_x(f_i) \frac{2 \sin^4(\pi \tau f_i)}{(\pi \tau f_i)^2}$$



- Détermination du bruit :

- $\alpha = 0 \Leftrightarrow$ **bruit blanc** $\Leftrightarrow \mu = -1$
- $\alpha = -1 \Leftrightarrow$ **bruit de scintillation** $\Leftrightarrow \mu = 0$
- $\alpha = -2 \Leftrightarrow$ **marche aléatoire** $\Leftrightarrow \mu = 1$

Spectres d'Allan de bruits caractéristiques



Application aux quatre techniques : DORIS, GPS, SLR, VLBI

- Solutions individuelles;
- Séries temporelles de position de stations bien observées (154 stations dans 57 sites);
- Prétraitements : pente, signaux périodiques.

	Software	Solution by	Referencing in a TRF	#stat
DORIS	GINIS-DYNAMO	L. Soudarin	J.-J. Valette (CATREF)	46
GPS	BERNESE Soft.	U. Hugentobler et al.	R. Ferland (IGS)	58
SLR	GINIS-DYNAMO	D. Coulot et al.	D. Coulot (CATREF)	20
VLBI	CALC-SOLVE	C. Ma	C. Ma	40

Stabilité des stations :
*Couplage de l'Analyse en
Composantes Principales appliquée
au domaine temporel
à la variance d'Allan*



Schéma d'application de la méthode

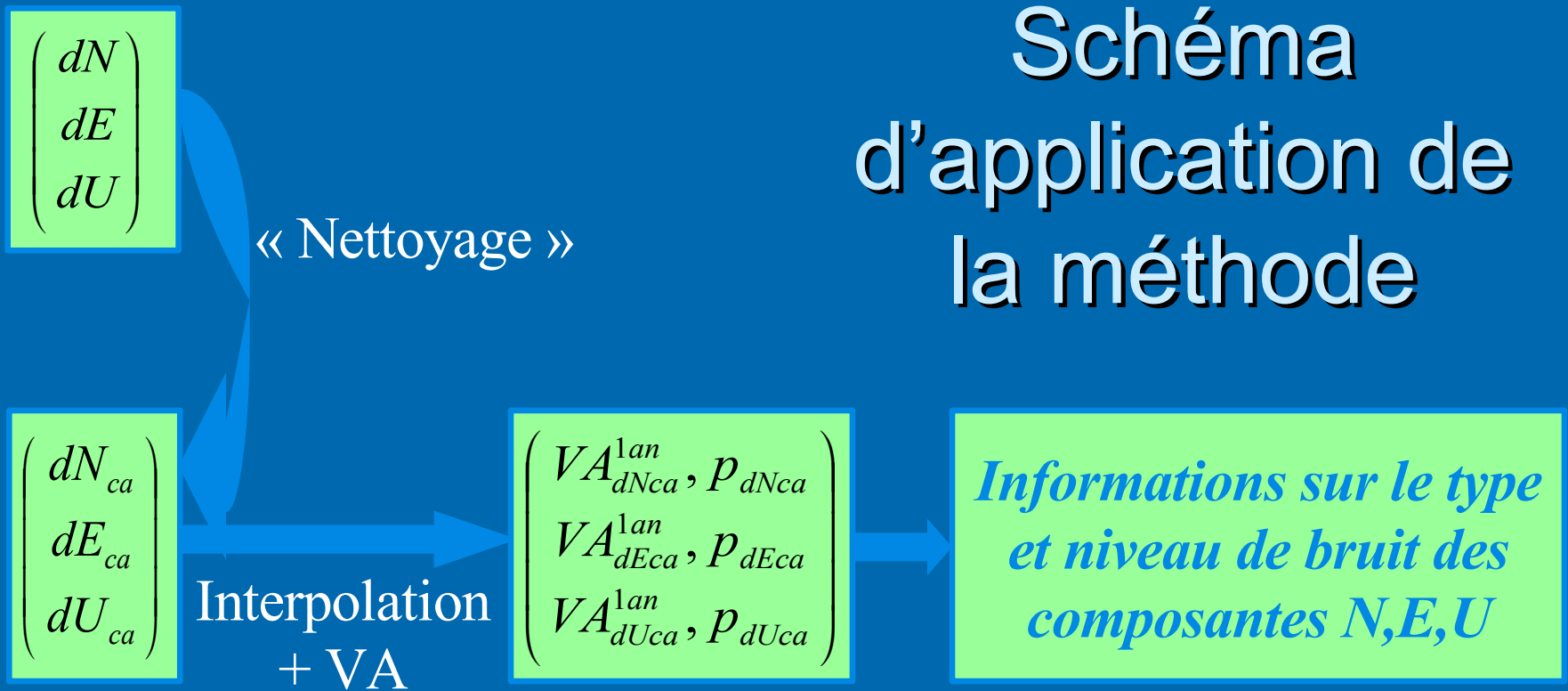
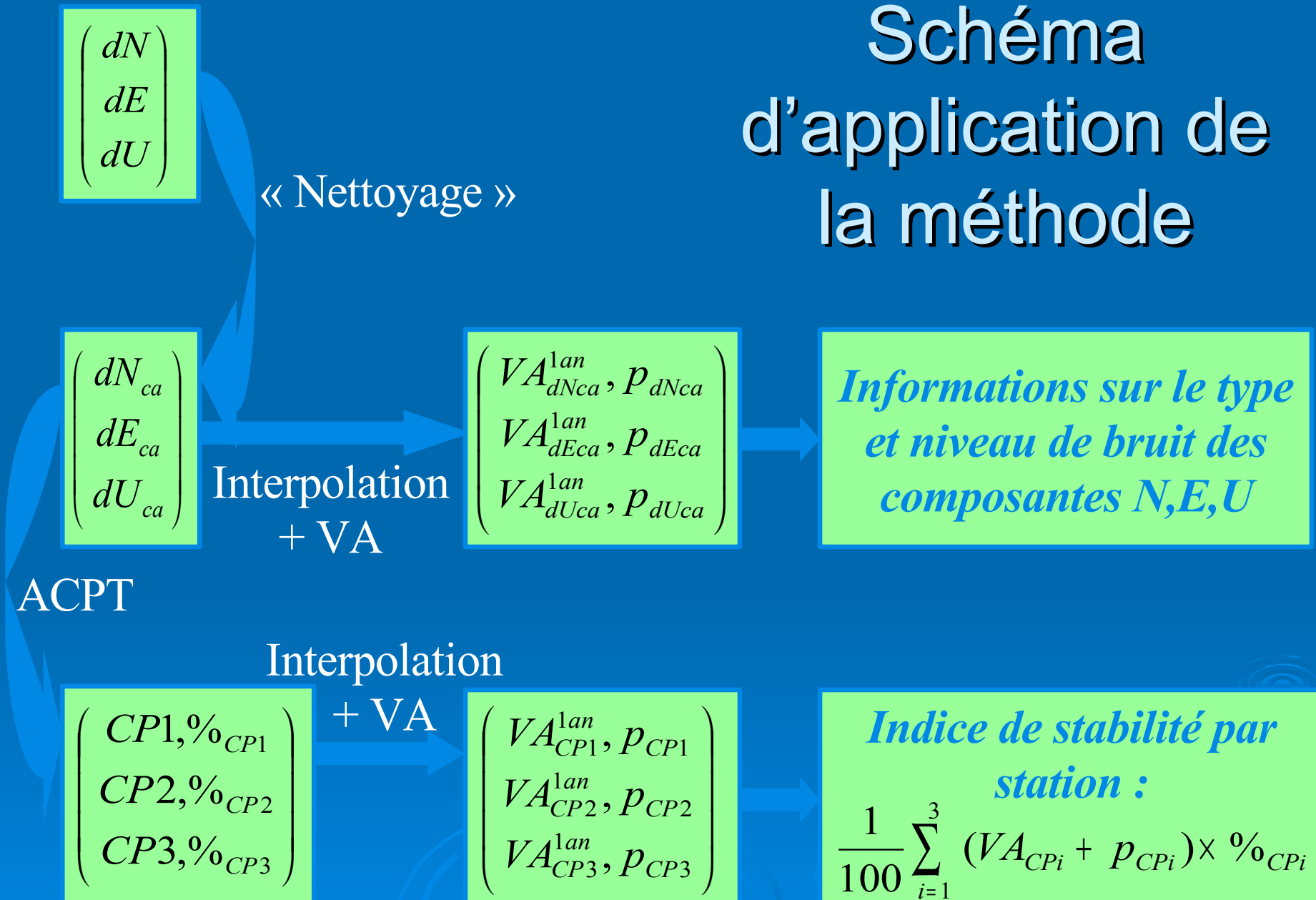
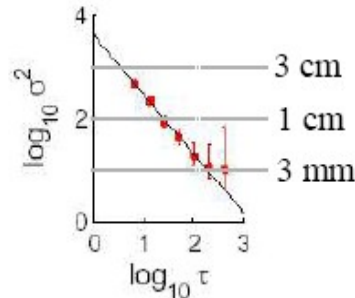
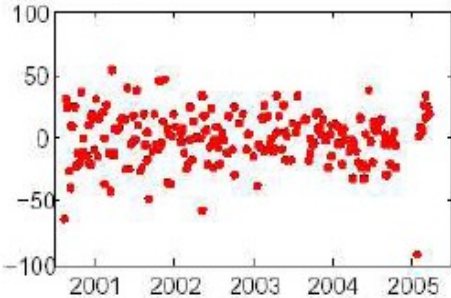


Schéma d'application de la méthode

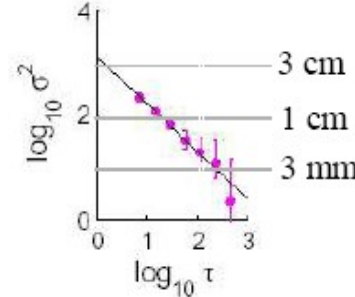
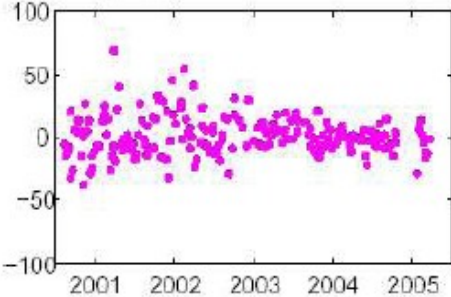


Indice de stabilité pour quantifier la stabilité d'une station

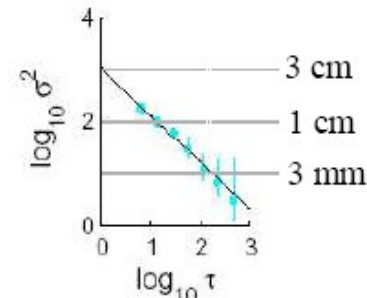
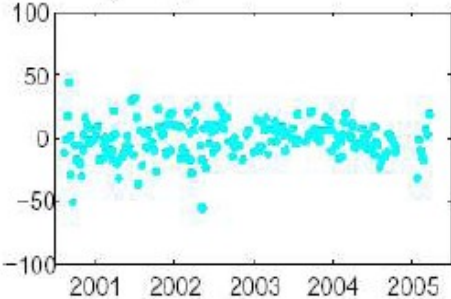
PC1 (49%) and its Allan variance - Slope = -1.1376 +/- 0.050841



PC2 (28%) and its Allan variance - Slope = -0.89869 +/- 0.040655



PC3 (23%) and its Allan variance - Slope = -0.90262 +/- 0.038303



$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^3 (Asd_i + Arate_i) \times Pc_i$$

Asd_i : écart-type d'Allan (1 an)

CPT_i

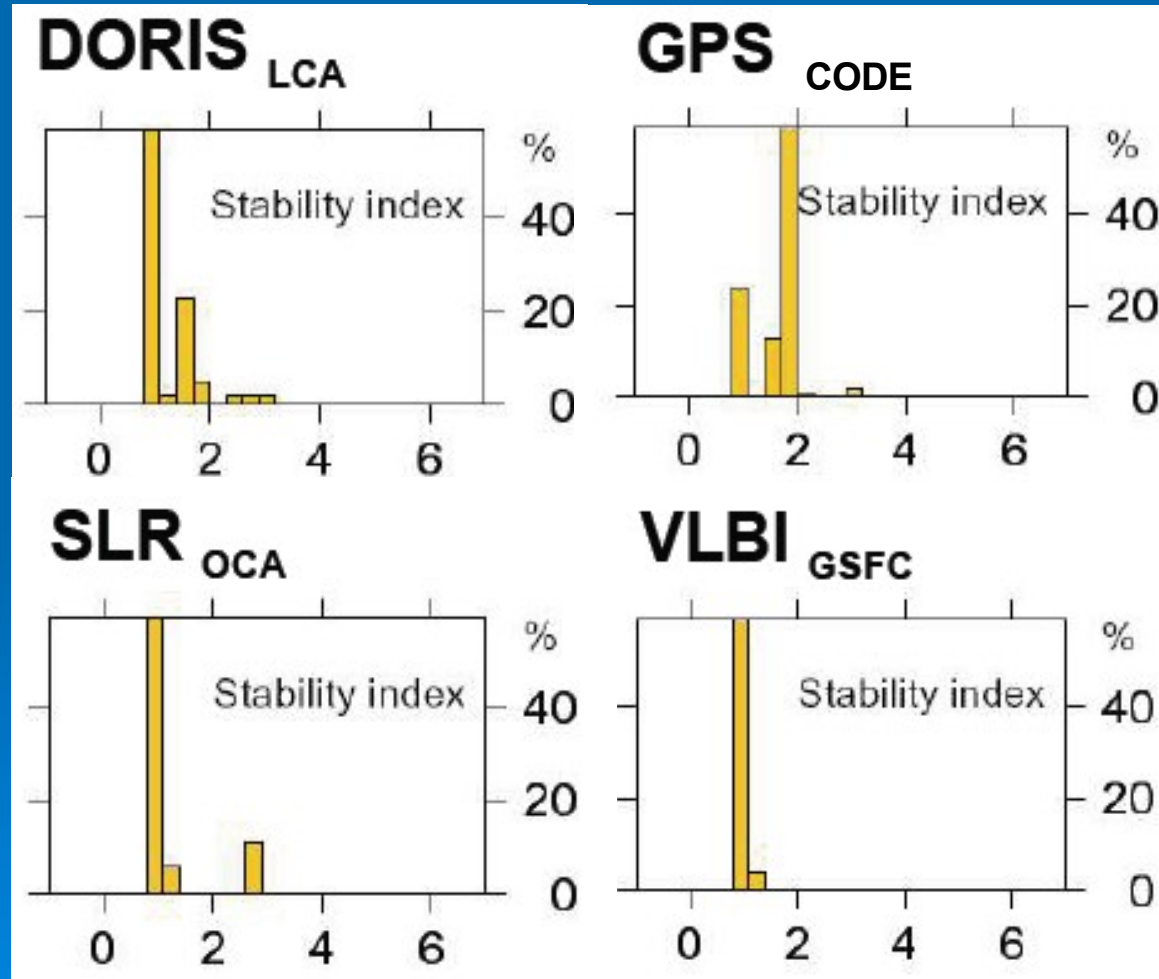
$Arate_i$: pente du graphe d'Allan

CPT_i

Pc_i : pourcentage de variance

CPT_i

Indices de stabilité des stations DORIS, GPS, SLR, VLBI



Stabilité des techniques :

*Prise en compte de l'ensemble des réseaux de stations –
Moindres carrés et méthode du tricorne*

Sites de co-localisations

➤ Hypothèse : $x_i = S_{site} + \varepsilon_{technique(x),site}$

➤ Méthode du tricorne (*Premoli and Tavella 1993, Galindo et al. 2001, Koot 2006*):

$$\begin{cases} \sigma^2(x - y) = \sigma^2(\varepsilon_{tech(x),site}) + \sigma^2(\varepsilon_{tech(y),site}) - 2 \text{cov}(\varepsilon_{tech(x),site}, \varepsilon_{tech(y),site}) \\ \sigma^2(x - z) = \sigma^2(\varepsilon_{tech(x),site}) + \sigma^2(\varepsilon_{tech(z),site}) - 2 \text{cov}(\varepsilon_{tech(x),site}, \varepsilon_{tech(z),site}) \\ \sigma^2(y - z) = \sigma^2(\varepsilon_{tech(y),site}) + \sigma^2(\varepsilon_{tech(z),site}) - 2 \text{cov}(\varepsilon_{tech(y),site}, \varepsilon_{tech(z),site}) \end{cases}$$

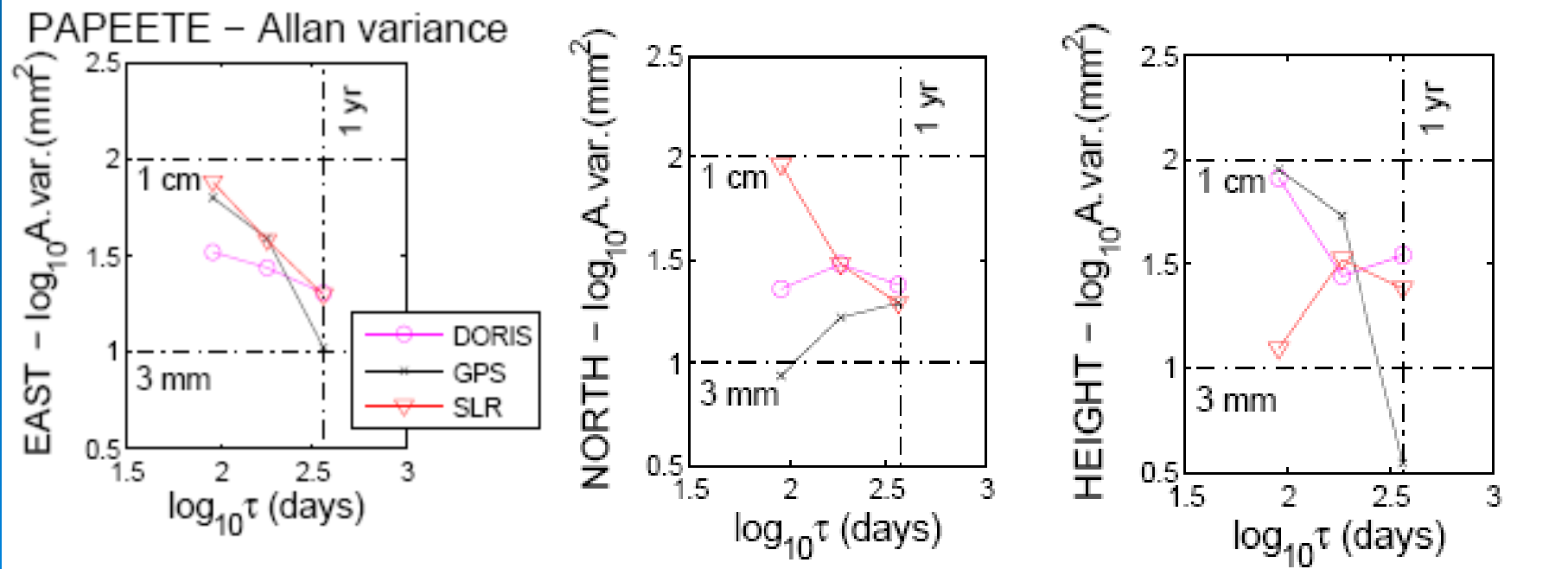
➤ Méthode standard : erreurs indépendantes

$$\text{cov}(\varepsilon_{technique(i),site}, \varepsilon_{technique(j),site}) = 0$$

➤ Généralisé

Bruit par technique et par station - Papeete

- Tricorne standard;
- Exemple de la station Papeete;
- DORIS, GPS, SLR.



Bruit par technique et par station - Hartebeesthoek

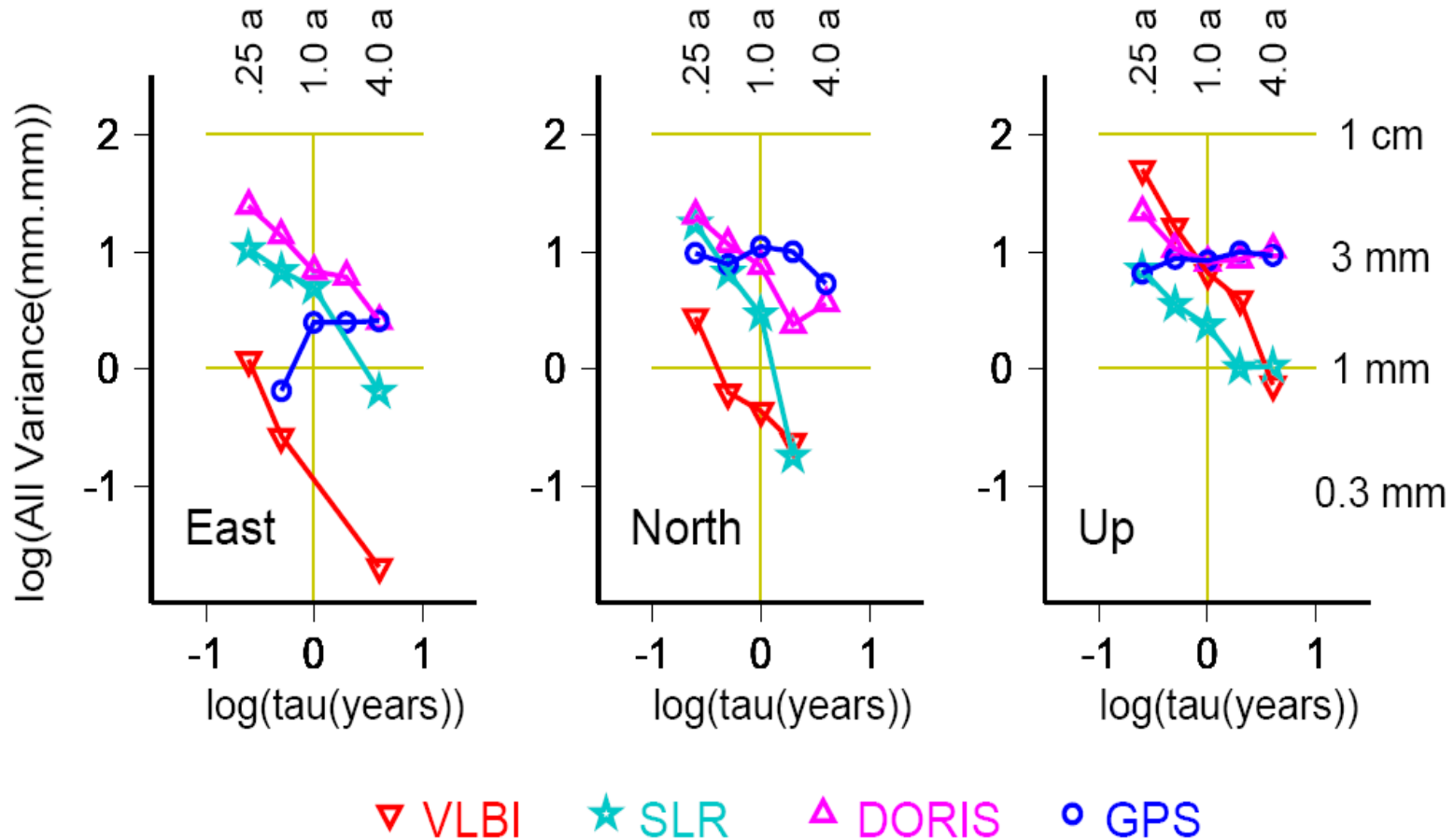
- Tricorne généralisé;
- Exemple de la station Hartebeesthoek;
- GPS, DORIS, LASER, VLBI.

	Est (mm)	Nord (mm)	Hauteur (mm)
GPS	2,18	6,72	7,80
DORIS	7,79	3,00	3,65
LASER	3,48	2,92	3,48
VLBI	1,87	3,60	6,08

Ensemble des réseaux

- Étude station par station, des séries totales;
- Étude du bruit par technique et par site :
 - Hypothèse : $\varepsilon_{station} = \varepsilon_{site} + \alpha \varepsilon_{technique}$
 α : indice dépendant de la qualité de la station;
 - Résolution par moindres carrés avec contrainte de positivité.

Bruit de technique



Conclusions et discussion

- DORIS, SLR, VLBI : bruit blanc pour les stations et la technique;
- GPS : $\frac{3}{4}$ des stations avec bruit de scintillation et $\frac{1}{4}$ avec bruit blanc; bruit de scintillation pour la technique GPS;
- Simplicité, facilité d'utilisation, rapidité des méthodes utilisées ici (analyse en composantes principales, variance d'Allan, méthode du tricorne);
- ACPT, outil original : informations supplémentaires des autres méthodes usuelles;
- Méthode applicable dans différents domaines et à toutes les séries temporelles multidimensionnelles : coordonnées de stations ou de radiosources, mouvement du géocentre, combinaison d'orbites

Merci de votre attention!

