

Introduction au filtrage de Kalman

Théorie du filtre de Kalman discret & applications

Jérôme Verdun

Ecole Nationale des Sciences Géographiques
Département "Positionnement Terrestre & Spatial"

Laboratoire de Recherches en Géodésie

Courriel : verdun@ensg.ign.fr

Ecole d'été du GRGS
Forcalquier 4 - 8 septembre 2006

Plan

- 1** Filtrage optimal : position du problème
 - Définition générale
 - Définition mathématique
 - Exemples
- 2** Filtre de Kalman discret
 - Formulation du filtre de Kalman discret
 - Théorème de Kalman-Bucy
- 3** Extensions du filtre de Kalman
 - Filtre de Kalman linéarisé
 - Filtre de Kalman étendu

Plan

- 1** Filtrage optimal : position du problème
 - Définition générale
 - Définition mathématique
 - Exemples
- 2** Filtre de Kalman discret
 - Formulation du filtre de Kalman discret
 - Théorème de Kalman-Bucy
- 3** Extensions du filtre de Kalman
 - Filtre de Kalman linéarisé
 - Filtre de Kalman étendu

Plan

- 1** Filtrage optimal : position du problème
 - Définition générale
 - Définition mathématique
 - Exemples
- 2** Filtre de Kalman discret
 - Formulation du filtre de Kalman discret
 - Théorème de Kalman-Bucy
- 3** Extensions du filtre de Kalman
 - Filtre de Kalman linéarisé
 - Filtre de Kalman étendu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Définition générale du filtrage

Filtrage

Opération qui consiste à estimer **l'état** d'un système dynamique à partir d'observations partielles et bruitées.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systemes qui évoluent dans le temps de façon à la fois :

→ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

→ **causalité**

leurs conditions initiales énoncées à l'instant présent déterminent

l'évolution ultérieure du système

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systemes qui évoluent dans le temps de façon à la fois :

→ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

→ **déterministe**

à une condition initiale donnée à l'instant présent correspond, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systemes qui évoluent dans le temps de façon à la fois :

→ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

→ **déterministe**

à une condition initiale donnée à l'instant présent correspond, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systemes qui évoluent dans le temps de façon à la fois :

→ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

→ **déterministe**

à une condition initiale donnée à l'instant présent correspond, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systemes qui évoluent dans le temps de façon à la fois :

→ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

→ **déterministe**

à une condition initiale donnée à l'instant présent correspond, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Systemes dynamiques : évolution dans le temps

- Evolution continue dans le temps → équations différentielles ordinaires
- Evolution discontinue dans le temps → équations récurrentes

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques : évolution dans le temps

- Evolution continue dans le temps → équations différentielles ordinaires
- Evolution discontinue dans le temps → équations récurrentes

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques : évolution dans le temps

- Evolution continue dans le temps → équations différentielles ordinaires
- Evolution discontinue dans le temps → équations récurrentes

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques stochastiques

- Prise en compte de perturbations aléatoires dans les équations du système
- Evolution de phénomènes aléatoires décrits par des processus aléatoires continus et/ou discrets

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques stochastiques

- Prise en compte de perturbations aléatoires dans les équations du système
- Evolution de phénomènes aléatoires décrits par des processus aléatoires continus et/ou discrets

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Systemes dynamiques stochastiques

- Prise en compte de perturbations aléatoires dans les équations du système
- Evolution de phénomènes aléatoires décrits par des processus aléatoires continus et/ou discrets

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps : $t \in \mathbb{R}$

Vecteur d'état : $X(t) \in \mathbb{R}^p$

Vecteur des mesures : $Z(t) \in \mathbb{R}^m$

où $\{X(t)\}, \{Z(t)\} \equiv$ processus aléatoires continus.

Remarque

L'état « $X(t)$ » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps : $t \in \mathbb{R}$

Vecteur d'état : $X(t) \in \mathbb{R}^p$

Vecteur des mesures : $Z(t) \in \mathbb{R}^m$

où $\{X(t)\}, \{Z(t)\} \equiv$ processus aléatoires continus.

Remarque

L'état « $X(t)$ » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps : $t \in \mathbb{R}$

Vecteur d'état : $X(t) \in \mathbb{R}^p$

Vecteur des mesures : $Z(t) \in \mathbb{R}^m$

où $\{X(t)\}, \{Z(t)\} \equiv$ processus aléatoires continus.

Remarque

L'état « $X(t)$ » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

- $Z(t)$ → observations
- $h(X(t))$ → signal fonction de l'état

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

- $Z(t)$ → observations
- $h(X(t))$ → signal fonction de l'état
- $V(t)$ → bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

- $Z(t)$ → observations
- $h(X(t))$ → signal fonction de l'état
- $V(t)$ → bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

- $Z(t)$ → observations
- $h(X(t))$ → signal fonction de l'état
- $V(t)$ → bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant t :

$$Z(t) = h(X(t)) + V(t)$$

où

- $Z(t)$ → observations
- $h(X(t))$ → signal fonction de l'état
- $V(t)$ → bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas continu

Filtrage

Détermination d'un estimateur optimal $\hat{X}(t)$ du vecteur d'état $X(t)$ à partir de toutes les mesures disponibles

$$\{Z(\tau), \tau \in [0, t]\}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

$$\begin{aligned}\text{Temps :} & & k & \in & \mathbb{Z} \\ \text{Vecteur d'état :} & & X_k & \in & \mathbb{R}^p \\ \text{Vecteur des mesures :} & & Z_k & \in & \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

où $\{X_k\}, \{Z_k\} \equiv$ processus aléatoires discrets.

Remarque

L'état « X_k » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

$$\text{Temps :} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vecteur d'état :} \quad X_k \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{Vecteur des mesures :} \quad Z_k \in \mathbb{R}^m$$

où $\{X_k\}, \{Z_k\} \equiv$ processus aléatoires discrets.

Remarque

L'état « X_k » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

Temps : $k \in \mathbb{Z}$

Vecteur d'état : $X_k \in \mathbb{R}^p$

Vecteur des mesures : $Z_k \in \mathbb{R}^m$

où $\{X_k\}, \{Z_k\} \equiv$ processus aléatoires discrets.

Remarque

L'état « X_k » du système dynamique n'est pas observé.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

- $Z_k \rightarrow$ observations
- $h(X_k) \rightarrow$ signal fonction de l'état

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

- $Z_k \rightarrow$ observations
- $h(X_k) \rightarrow$ signal fonction de l'état
- $V_k \rightarrow$ bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

- $Z_k \rightarrow$ observations
- $h(X_k) \rightarrow$ signal fonction de l'état
- $V_k \rightarrow$ bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

- $Z_k \rightarrow$ observations
- $h(X_k) \rightarrow$ signal fonction de l'état
- $V_k \rightarrow$ bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Lien « signal/mesures » à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

où

- $Z_k \rightarrow$ observations
- $h(X_k) \rightarrow$ signal fonction de l'état
- $V_k \rightarrow$ bruit additif supposé connu

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Définition mathématique : cas discret

Filtrage

Détermination d'un estimateur optimal \hat{X}_k du vecteur d'état X_k à partir de toutes les mesures disponibles

$$Z_{0:k} = \{Z_l, l = 0, 1, 2, \dots, k\}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

- Mobile en mouvement le long d'un axe ($0x$) avec une accélération constante γ
- **Filtrage** : estimer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du mobile à l'instant t à partir de mesures de position

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

- Mobile en mouvement le long d'un axe ($0x$) avec une accélération constante γ
- **Filtrage** : estimer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du mobile à l'instant t à partir de mesures de position

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

- Mobile en mouvement le long d'un axe ($0x$) avec une accélération constante γ
- **Filtrage** : estimer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du mobile à l'instant t à partir de mesures de position

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Conditions initiales

$$\text{Vitesse : } v(t_0) = v_0$$

$$\text{Position : } x(t_0) = x_0$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Modélisation physique

$$\text{Vitesse : } v(t) = v_0 + \gamma(t - t_0)$$

$$\text{Position : } x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\gamma(t - t_0)^2$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Vecteur d'état

$$X(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ système d'équations différentielles.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
 Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
 discret

Formulation
 Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
 FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ système d'équations différentielles.

Plan

Filtrage optimal

- Définition générale
- Définition mathém.
- Exemples

Filtre de Kalman
discret

- Formulation
- Théorème de Kalman

Extensions du FDK

- FDK linéarisé
- FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Système dynamique continu

$$\frac{dX}{dt} = F(t) X(t) + f(t)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $F(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f(t) \in \mathbb{R}^2$.

→ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman

discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Système dynamique continu

$$\frac{dX}{dt} = F(t) X(t) + f(t)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $F(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f(t) \in \mathbb{R}^2$.

→ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Mesure

$$Z(t) = x(t) + V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + V(t)$$

où $V(t)$ représente le **bruit de mesure**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation d'observation

$$Z(t) = H(t) X(t) + V(t)$$

où $Z(t) \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $H(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ et $V(t) \in \mathbb{R}$.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Discrétisation

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}], \gamma(t) = \text{cste} = \gamma_k, k \in \mathbb{N}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Conditions initiales

$$\begin{aligned} \text{Vitesse : } v(t_k) &= v_k, k \in \mathbb{N} \\ \text{Position : } x(t_k) &= x_k \end{aligned}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Modélisation physique

$$\text{Vitesse : } v(t) = v_k + \gamma(t - t_k)$$

$$\text{Position : } x(t) = x_k + v_k(t - t_k) + \frac{1}{2}\gamma(t - t_k)^2 ,$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}] , k \in \mathbb{N}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Vecteur d'état

$$X_k = X(t_k) = \begin{bmatrix} v(t_k) \\ x(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix}$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} v(t_{k+1}) \\ x(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{bmatrix} \gamma_k$$

où

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

→ système d'équations récurrentes.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} v(t_{k+1}) \\ x(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{bmatrix} \gamma_k$$

où

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

→ système d'équations récurrentes.

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k X_k + f_k$$

où $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f_k \in \mathbb{R}^2$.

→ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k X_k + f_k$$

où $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f_k \in \mathbb{R}^2$.

→ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Supposons que l'accélération γ_k subisse des perturbations aléatoires ; alors l'équation d'évolution de l'état X_k peut être complétée par

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k X_k + f_k + W_k$$

où $W_k \in \mathbb{R}^2$ représente un bruit qui affecte le modèle
« accélération constante »

→ **bruit de modèle**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Supposons que l'accélération γ_k subisse des perturbations aléatoires ; alors l'équation d'évolution de l'état X_k peut être complétée par

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k X_k + f_k + W_k$$

où $W_k \in \mathbb{R}^2$ représente un bruit qui affecte le modèle
«accélération constante »

→ **bruit de modèle**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Mesure

$$Z_k = x_k + V_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + V_k$$

où V_k représente le **bruit de mesure**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation d'observation

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

où $Z_k \in \mathbb{R}$, $X_k \in \mathbb{R}^2$, $H_k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ et $V_k \in \mathbb{R}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Le problème du filtrage se ramène à la résolution d'un système linéaire stochastique récursif de la forme

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + V_k \end{cases}$$

où $Z_k \in \mathbb{R}$, $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $H_k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $W_k \in \mathbb{R}^2$ et $V_k \in \mathbb{R}$

Pour le résoudre, il faut préciser la nature des bruits de modèle $\{W_k\}$ et de mesure $\{V_k\}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= F_k X_k + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

A l'instant k , les observations suivantes sont disponibles

$$Z_{0:k} \triangleq (Z_0, Z_1, \dots, Z_k)$$

Filtrage

Estimation du vecteur aléatoire X_k à partir des observations $Z_{0:k}$ de façon **optimale, récursive**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

A l'instant k , les observations suivantes sont disponibles

$$Z_{0:k} \triangleq (Z_0, Z_1, \dots, Z_k)$$

Filtrage

Estimation du vecteur aléatoire X_k à partir des observations $Z_{0:k}$ de façon **optimale, récursive**

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance \Rightarrow loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien \Rightarrow Seules la moyenne \hat{X}_k et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'où

Espérance et matrice de covariance conditionnelles

$$\hat{X}_k \triangleq \mathbb{E}[X_k | Z_{0:k}]$$

$$P_k \triangleq \mathbb{E}\left[\left(X_k - \hat{X}_k\right)\left(X_k - \hat{X}_k\right)^T \mid Z_{0:k}\right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance \Rightarrow loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien \Rightarrow Seules la moyenne \hat{X}_k et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'où

Espérance et matrice de covariance conditionnelles

$$\hat{X}_k \triangleq \mathbb{E} [X_k | Z_{0:k}]$$

$$P_k \triangleq \mathbb{E} \left[\left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T \mid Z_{0:k} \right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance \Rightarrow loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien \Rightarrow Seules la moyenne \hat{X}_k et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'où

Espérance et matrice de covariance conditionnelles

$$\hat{X}_k \triangleq \mathbb{E} [X_k | Z_{0:k}]$$

$$P_k \triangleq \mathbb{E} \left[\left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T \mid Z_{0:k} \right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance \Rightarrow loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien \Rightarrow Seules la moyenne \hat{X}_k et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'où

Espérance et matrice de covariance conditionnelles

$$\hat{X}_k \triangleq \mathbb{E} [X_k | Z_{0:k}]$$

$$P_k \triangleq \mathbb{E} \left[\left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T \mid Z_{0:k} \right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Espérance et matrice de covariance conditionnelles antérieures

$$\hat{X}_k^- \triangleq \mathbb{E}[X_k | Z_{0:k-1}]$$

$$P_k^- \triangleq \mathbb{E}\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T \mid Z_{0:k-1}\right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Formulation du filtre de Kalman discret

Les matrices de covariances conditionnelles P_k et P_k^- ne dépendent pas des observations (prop. P11)

Conséquence

$$P_k^- = \mathbb{E} \left[\left(X_k - \hat{X}_k^- \right) \left(X_k - \hat{X}_k^- \right)^T \right]$$

$$P_k = \mathbb{E} \left[\left(X_k - \hat{X}_k \right) \left(X_k - \hat{X}_k \right)^T \right]$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. La prédiction

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. La mise à jour

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. **La correction**

l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. La prédiction

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. La correction

l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. La prédiction

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. La correction

l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. La prédiction

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. La correction

l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. **La correction**

l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}[Z_k | Z_{0:k-1}] = Z_k - \left(H_k \hat{X}_k^- + h_k \right)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^m ; en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

- de moyenne nulle
- de matrice de covariance $Q_k^I = H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V$

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale

Définition mathém.

Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation

Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé

FDK étendu

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}[Z_k | Z_{0:k-1}] = Z_k - \left(H_k \hat{X}_k^- + h_k \right)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^m ; en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

- de moyenne nulle

- de matrice de covariance $Q_k^I = H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V$

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}[Z_k | Z_{0:k-1}] = Z_k - \left(H_k \hat{X}_k^- + h_k \right)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^m ; en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

- de moyenne nulle
- de matrice de covariance $Q_k^I = H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V$

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\hat{X}_k\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= F_k \hat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k^W\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - (H_k \hat{X}_k^- + h_k)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations

$$\hat{X}_0^- = \bar{X}_0 = \mathbb{E}[X_0], \quad P_0^- = Q_0^X$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\hat{X}_k\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= F_k \hat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k^W\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - (H_k \hat{X}_k^- + h_k)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations

$$\hat{X}_0^- = \bar{X}_0 = \mathbb{E}[X_0], \quad P_0^- = Q_0^X$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\hat{X}_k\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= F_k \hat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k^W\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - (H_k \hat{X}_k^- + h_k)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**,
et avec les initialisations

$$\hat{X}_0^- = \bar{X}_0 = \mathbb{E}[X_0], \quad P_0^- = Q_0^X$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\hat{X}\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= F_k \hat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k^W\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - (H_k \hat{X}_k^- + h_k)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations

$$\hat{X}_0^- = \bar{X}_0 = \mathbb{E}[X_0], \quad P_0^- = Q_0^X$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

- La suite $\{P_k\}$ ne dépend pas ni des observations $\{Z_k\}$, ni des coefficients $\{f_k\}$ et $\{h_k\}$
- Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k = F$, $G_k = G$, $H_k = H$, $Q_k^W = Q^W$, et $Q_k^V = Q^V$ alors la suite $\{P_k\}$ peut être pré-calculée

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

- La suite $\{P_k\}$ ne dépend pas ni des observations $\{Z_k\}$, ni des coefficients $\{f_k\}$ et $\{h_k\}$
- Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k = F$, $G_k = G$, $H_k = H$, $Q_k^W = Q^W$, et $Q_k^V = Q^V$ alors la suite $\{P_k\}$ peut être pré-calculée

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

- La suite $\{P_k\}$ ne dépend pas ni des observations $\{Z_k\}$, ni des coefficients $\{f_k\}$ et $\{h_k\}$
- Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k = F$, $G_k = G$, $H_k = H$, $Q_k^W = Q^W$, et $Q_k^V = Q^V$ alors la suite $\{P_k\}$ peut être pré-calculée

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et où les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur \mathbb{R}^p sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p \times d}, \mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}, \{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et où les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur \mathbb{R}^p sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p \times d}, \mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
 Définition mathém.
 Exemples

Filtre de Kalman discret

Formulation
 Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
 FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et où les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur \mathbb{R}^p sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p \times d}, \mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}, \{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et où les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur \mathbb{R}^p sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p \times d}, \mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}, \{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et où les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur \mathbb{R}^p sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p \times d}, \mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}, \{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Soit une suite déterministe $\{\bar{x}_k\}$ dans \mathbb{R}^p , solution approchée du système, appelée **trajectoire nominale**.

La linéarisation consiste à

- linéariser f_k et g_k autour de \bar{x}_{k-1} i.e

$$f_k(x) \simeq f_k(\bar{x}_{k-1}) + f'_k(\bar{x}_{k-1})(x - \bar{x}_{k-1}) \text{ et}$$
$$g_k(x) \simeq g_k(\bar{x}_{k-1})$$

- linéariser h_k autour de \bar{x}_k i.e

$$h_k(x) \simeq h_k(\bar{x}_{k-1}) + h'_k(\bar{x}_{k-1})(x - \bar{x}_{k-1})$$

Plan

Filtrage optimal

- Définition générale
- Définition mathém.
- Exemples

Filtre de Kalman
discret

- Formulation
- Théorème de Kalman

Extensions du FDK

- FDK linéarisé
- FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Le système linéarisé obtenu est de la forme

$$\begin{cases} X_k &= F_k(X_{k-1} - \bar{x}_{k-1}) + f_k + G_k W_k \\ Z_k &= H_k(X_k - \bar{x}_k) + h_k + V_k \end{cases}$$

où $F_k \triangleq f'_k(\bar{x}_{k-1})$, $f_k \triangleq f_k(\bar{x}_{k-1})$, $G_k \triangleq g_k(\bar{x}_{k-1})$, $H_k \triangleq h'_k(\bar{x}_k)$
et $h_k \triangleq h_k(\bar{x}_k)$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Théorème

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= f_k(\hat{X}_{k-1}) \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_k^W G_k^T\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - h_k(\hat{X}_k^-)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**,
et avec les initialisations telle que la loi gaussienne de moyenne \hat{X}_0^- et de
matrice de covariance P_0^- soit une bonne approximation de celle de X_0

Plan

Filtrage optimal

- Définition générale
- Définition mathém.
- Exemples

Filtre de Kalman discret

- Formulation
- Théorème de Kalman

Extensions du FDK

- FDK linéarisé
- FDK étendu

Filtre de Kalman linéarisé

Théorème

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= f_k(\hat{X}_{k-1}) \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_k^W G_k^T\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - h_k(\hat{X}_k^-)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations telle que la loi gaussienne de moyenne \hat{X}_0^- et de matrice de covariance P_0^- soit une bonne approximation de celle de X_0

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman étendu ("Extended Kalman filter")

La trajectoire nominale est ici remplacée par l'estimateur courant de X_k compte-tenu des observations disponibles à l'instant $k - 1$.

La linéarisation consiste à

- linéariser f_k et g_k autour de \hat{X}_{k-1} i.e.
$$f_k(x) \simeq f_k(\hat{X}_{k-1}) + f'_k(\hat{X}_{k-1})(x - \hat{X}_{k-1})$$
 et
$$g_k(x) \simeq g_k(\hat{X}_{k-1})$$
- linéariser h_k autour de \hat{X}_k^- i.e.
$$h_k(x) \simeq h_k(\hat{X}_k^-) + h'_k(\hat{X}_k^-)(x - \hat{X}_k^-)$$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Filtre de Kalman étendu

Le système linéarisé obtenu est de la forme

$$\begin{cases} X_k &= F_k(X_{k-1} - \hat{X}_{k-1}) + f_k + G_k W_k \\ Z_k &= H_k(X_k - \hat{X}_{k-1}) + h_k + V_k \end{cases}$$

où $F_k \triangleq f'_k(\hat{X}_{k-1})$, $f_k \triangleq f_k(\hat{X}_{k-1})$, $G_k \triangleq g_k(\hat{X}_{k-1})$,
 $H_k \triangleq h'_k(\hat{X}_k^-)$ et $h_k \triangleq h_k(\hat{X}_k^-)$

Plan

Filtrage optimal

- Définition générale
- Définition mathém.
- Exemples

Filtre de Kalman discret

- Formulation
- Théorème de Kalman

Extensions du FDK

- FDK linéarisé
- FDK étendu

Filtre de Kalman étendu

Théorème

Prédiction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k^- &= f_k(\hat{X}_{k-1}) \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_k^W G_k^T\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \hat{X}_k^- + K_k [Z_k - h_k(\hat{X}_k^-)] \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice $K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ et avec $F_k \triangleq f'_k(\hat{X}_{k-1})$, $G_k \triangleq g'_k(\hat{X}_{k-1})$, et $H_k \triangleq h'_k(\hat{X}_k^-)$

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Présentation

Cette présentation a été réalisée à l'aide de la classe « beamer » complétée par le laboratoire de mathématiques appliqués de l'université de technologie de Compiègne

<http://www.lmac.utc.fr/outils>

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie



J.-Y. Ouvrard

Probabilités.

(2 tomes) Cassini, 2004



G. Blanchet and M. Charbit

Signaux et images sous MatLab.

2nd édition, Hermès, 2001



M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet

Le filtrage et ses applications.

3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples



Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie

-  J.-Y. Ouvrard
Probabilités.
(2 tomes) Cassini, 2004
-  G. Blanchet and M. Charbit
Signaux et images sous MatLab.
2nd édition, Hermès, 2001
-  M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet
Le filtrage et ses applications.
3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie



J.-Y. Ouvrard

Probabilités.

(2 tomes) Cassini, 2004



G. Blanchet and M. Charbit

Signaux et images sous MatLab.

2nd édition, Hermès, 2001



M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet

Le filtrage et ses applications.

3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie



J.-Y. Ouvrard

Probabilités.

(2 tomes) Cassini, 2004



G. Blanchet and M. Charbit

Signaux et images sous MatLab.

2nd édition, Hermès, 2001



M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet

Le filtrage et ses applications.

3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie (suite)



A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai

Probability, Random Variables and Stochastic Processes.

4th edition, Mac Graw Hill, 2002



P. S. Maybeck

Stochastic Models, Estimation and Control.

Volume 141-1, Mathematics in Science and Engineering,
reprint

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples


Filtre de Kalman
discret


Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie (suite)

 A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai
Probability, Random Variables and Stochastic Processes.
4th edition, Mac Graw Hill, 2002

 P. S. Maybeck
Stochastic Models, Estimation and Control.
Volume 141-1, Mathematics in Science and Engineering,
reprint

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples


Filtre de Kalman
discret


Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Bibliographie (suite)

 A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai
Probability, Random Variables and Stochastic Processes.
4th edition, Mac Graw Hill, 2002

 P. S. Maybeck
Stochastic Models, Estimation and Control.
Volume 141-1, Mathematics in Science and Engineering,
reprint

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



F. LeGland

Introduction au Filtrage en Temps Discret.

Polycopié de cours ; Master recherche «Signal,
Télécommunication, Images »

Université de Rennes I ; 2005-06.

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/ens.html>

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



F. LeGland

Introduction au Filtrage en Temps Discret.

Polycopié de cours ; Master recherche «Signal,
Télécommunication, Images »

Université de Rennes I ; 2005-06.

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/ens.html>

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



D. Alazard

Introduction au Filtrage de Kalman.

Polycopié de cours ; Ecole Nationale Supérieure de
l'Aéronautique et de l'Espace ; 2005.

[http ://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/](http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/)

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



D. Alazard

Introduction au Filtrage de Kalman.

Polycopié de cours ; Ecole Nationale Supérieure de
l'Aéronautique et de l'Espace ; 2005.

[http ://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/](http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/)

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



G Welch and G. Bishop
The Kalman Filter.

<http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman>

Plan

Filtrage optimal

Définition générale
Définition mathém.
Exemples

Filtre de Kalman
discret

Formulation
Théorème de Kalman

Extensions du FDK

FDK linéarisé
FDK étendu

Articles et sites sur le filtre de Kalman



G Welch and G. Bishop
The Kalman Filter.

<http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman>