LA RELATIVITE EN GEODESIE SPATIALE

Sylvain LOYER

Ecole d'été du GRGS – 2-6 Septembre 2002

Formalisme utilisé en géodésie spatiale

(mécanique classique + corrections relativistes)

Métrique(s)

Equations du mouvement géodésique

Aperçu des corrections relativistes

- Corrections sur les forces
- Corrections sur le calcul des quantités mesurées
- Petit bestiaire des corrections…

Conclusions…

Petits rappels sur le formalisme relativiste actuellement utilisé

Mécanique classique :

$$\mathbf{A} = d^2\mathbf{x}/dt^2 = \mathbf{grad}U$$

En relativité générale : l'effet de la gravitation est complètement décrit par un couplage entre les coordonnées d'espace et de temps.

Les coordonnées d'espace et de temps sont reliées par une métrique de forme générale :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

dans un système de coordonnées d'espace–temps :

$$x^\nu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$$

Relativité générale

Conséquences

Orbitographie : Précession des périhélies et des noeuds, ...

Horloges, étalon de fréquences : redshift gravitationnel, contraction des durées et des distances

Courbure : déviation des ondes électromagnétiques, lentille gravitationnelle

Changement de système de référence : Précession géodésique, liens entre échelles de temps, valeurs des constantes

Développement Post Newtonien

Dans le cadre de l'approximation champs faibles et vitesses faibles, on développe la métrique $g_{\mu\nu}$ au voisinnage de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (approximation PPN) :

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}}$$

avec

$$\boxed{\eta_{00} = 1 \quad , \; \eta_{0i} = 0 \quad , \; \eta_{ij} = -\delta_{ij}}$$

On développe les coefficients $h_{\mu\nu}$ selon les puissances de $1/c$ dans un système de coordonnées $(x^0 = ct, \mathbf{r}) = (ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} h_{00}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-2}h_{00}^{(2)}(t,\mathbf{r}) + c^{-4}h_{00}^{(4)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{00}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \\ h_{0k}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-3}h_{0k}^{(3)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{0k}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + c^{-6}h_{0k}^{(6)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \\ h_{jk}(t,\mathbf{r}) & = & c^{-2}h_{jk}^{(2)}(t,\mathbf{r}) + c^{-4}h_{jk}^{(4)}(t,\mathbf{r}) + c^{-5}h_{00}^{(5)}(t,\mathbf{r}) + \ldots \end{array}\right.}$$

où les $h_{\mu\nu}^{(k)}$ dépendent des potentiels et potentiels vecteurs au point $(t, \mathbf{r})$.

On aura par exemple dans le cas de la métrique barycentrique en coordonnées rectangulaires associée à un système de masses ponctuelles M_i $(t = TCB)$:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} h_{00}^{(2)} & = & -2\sum_i \frac{GM_i}{r_i} \\ h_{00}^{(4)} & = & -3\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\dot{\mathbf{x}}_i^2 + 2\left(\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\right)^2 \\ & & +2\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ij}} \\ & & -\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\left(\dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathbf{r}_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_i^2}\left(\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{x}}_i\right)^2\right) \\ h_{0k}^{(3)} & = & 4\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\left(\dot{x}_i^k\right) \\ h_{jk}^{(2)} & = & 2\sum_i \frac{GM_i}{r_i}\eta_{jk} \end{array}\right.}$$

où $\dot{f} = \frac{df}{dt}$, x_i représentent les coordonnées cartésiennes de la planète i à l'instant t, $\mathbf{x}_i = (x_i^1,\ x_i^2,\ x_i^3)$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $r_i = |\mathbf{r}_i|$ et $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$.

Exemple de tenseur habituellement utilisé (conventions IAU 2000) :

$$g_{00} = -1 + \frac{2W}{c^2} - \frac{2W^2}{c^4}$$

$$g_{0i} = -\frac{4W^i}{c^3}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2W}{c^2}\right)$$

avec,

$W(\vec{X},T) =$ potentiel terrestre ← complet incluant les marées

$W^i(\vec{X},T) = -\dfrac{G(\vec{X}\times\vec{J})^i}{R^3}$ ← J moment angulaire total de la Terre

W=GM/r , W^i = 0 et uniquement termes en 1/c2 → donne la métrique de Schwarzschild.

Quelques métriques

Métrique	Coordonnées
Barycentrique (N corps)	Cartésienne (BRS)
Géocentrique	Cartésienne (GRS ou GRS$^+$)
Schwarschild	Harmoniques
Kerr	Harmoniques
Planétocentrique	Cartésienne (PRS ou PRS$^+$)
IAU 2002	(BRS), (GRS) ou (GRS$^+$), (PRS) ou (PRS$^+$)

Le mouvement géodésique

$$\boxed{\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0}$$

où λ représente le paramètre affine du problème.

Les symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel apparaissant dans l'équation fondamentale des géodésiques s'expriment en fonction des dérivées partielles de la métrique[a] :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(g_{\mu\kappa\ ,\nu} + g_{\kappa\nu\ ,\mu} - g_{\mu\nu\ ,\kappa} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} \left(h_{\mu\kappa\ ,\nu} + h_{\kappa\nu\ ,\mu} - h_{\mu\nu\ ,\kappa} \right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

oú $g^{\mu\nu}$ désigne la métrique inverse relié à $g_{\mu\nu}$ par :

$$\boxed{g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}}$$

---

[a] avec la notation usuelle $(\,)_{,\kappa} = \frac{\partial (\,)}{\partial x^{\kappa}}$

Pour le calcul de $g^{\mu\nu}$, on utilise un développement analogue à celui de $g_{\mu\nu}$:

$$\boxed{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}}$$

avec :

$$\boxed{\eta^{00} = 1 \quad , \ \eta^{0i} = 0 \quad , \ \eta^{ij} = -\delta^{ij}}$$

Les coefficients $h^{\mu\nu}$ s'écrivent alors au moyen des coefficients $h_{\mu\nu}$ selon :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} h^{00} & = & -h_{00} + (h_{00})^2 + O(c^{-5}) \\ h^{0i} & = & h_{0i} - h_{00}h_{0i} + h_{0s}h_{is} + O(c^{-5}) \\ h^{ij} & = & -h_{ij} - h_{is}h_{js} + O(c^{-5}) \end{array} \right.}$$

Corrections sur les forces

Métrique $\rightarrow$ Equation du mouvement relativiste

$\rightarrow$ Comparaison avec mécanique classique + approximations

$\rightarrow$ Corrections sur les forces

Schwarzschild effect :

$$\mathbf{A} = \frac{GM}{c^2 r^3}\left[\left(4\frac{GM}{r} - v^2\right)\mathbf{r} + 4(\mathbf{v}.\mathbf{r})\mathbf{v}\right]$$

avec (r ,v) = (position ,vitesse) du satellite

Lense-Thirring :

$$\mathbf{A} = 2\dot{\mathbf{\Omega}}_{LT} \wedge v$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{LT} = \frac{GM}{c^2 r^3}\left[-\mathbf{J} + \frac{3(\mathbf{J}.\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2}\right]$$

$\leftarrow$ Effet de la rotation du corps

Précession Géodésique (liée au choix du système de coordonnées) :

$$\mathbf{A} = 2\dot{\mathbf{\Omega}}_{PG} \wedge v$$

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{PG} = \frac{3}{2c^2}\mathbf{V_T} \wedge \mathbf{grad}U_{sun}$$

$\leftarrow$ Effet de la révolution du corps dans le système solaire

Corrections sur les mesures

3 types de corrections :

- **Datation (transformation de coordonnées) :**

Données datées en TUC $\rightarrow$ TAI (TGPS) ou en TDB

- **Corrections d'horloges ou de fréquence :**

Métrique + approximation $\rightarrow$ lien entre temps propre et temps coordonné

$$ds^2(\mathbf{r},t) = \left(1 - \frac{2U(\mathbf{r},t)}{c^2} - \frac{V(\mathbf{r},t)}{c^2}\right)dt^2$$

Conduit par exemple à une correction en doppler :

$$\Delta N_{doppler} = f_0\tau\left(\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_{emetteur}} - \frac{1}{r_{récepteur}}\right) - \frac{v_e^{\,2} - v_r^{\,2}}{2c^2}\right)$$

- **Correction de courbure du trajet (correction en log) :**

$$\Delta t = \frac{2GM}{c^3} Log \frac{\mathrm{Re} + Rr + \rho}{\mathrm{Re} + Rr - \rho}$$

« Cas » des effets relativistes affectant les horloges des satellites GPS

$$\Delta f = f_0 \left(\frac{GM}{c^2} (\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

$$\Delta f = \Delta f_0 + \Delta f(t)$$

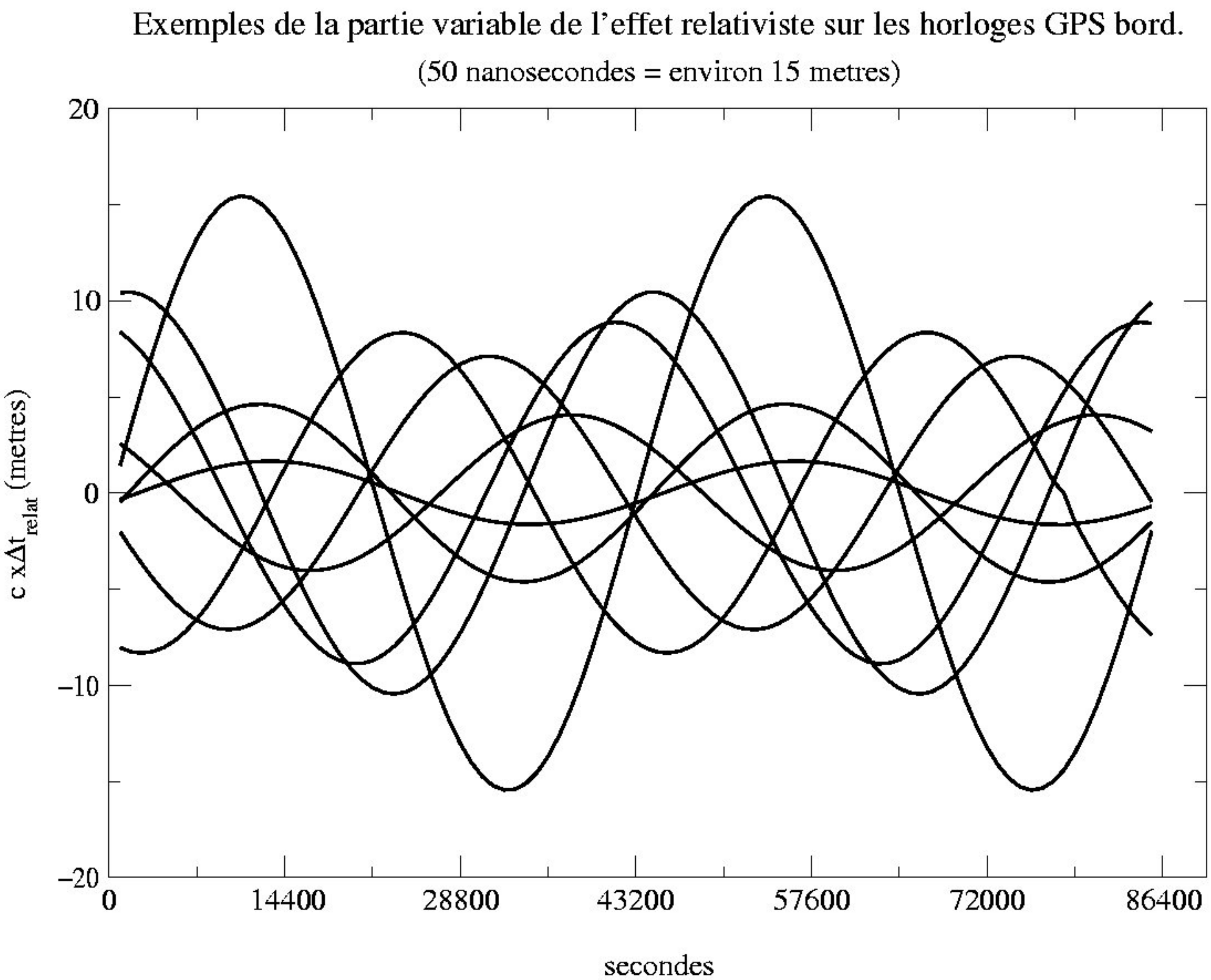
Partie constante Δf_0 corrigée en réglant les horloges au sol à la fréquence de :

$$f_0 = 10229999999545 Hz$$

afin d'avoir en orbite : $f_0 = 10.23 MHz$

Partie variable corrigée selon :

$$\Delta T(t) = -\frac{2\sqrt{aGM}}{c^2} e \sin E \approx -\frac{2}{c^2} \mathbf{v}.\mathbf{r}$$


Exemples de la partie variable de l'effet relativiste sur les horloges GPS bord.
(50 nanosecondes = environ 15 metres)
20
10
0
−10
−20
c xΔt_{relat} (metres)
0
14400
28800
43200
57600
72000
86400
secondes

Incohérence entre les différentes corrections :

- les différentes corrections relativistes ne réfèrent pas toujours à la même métrique et il est en général il est difficile de savoir à quelle métrique se rapporte une des corrections prise isolement.

exemple : Forces de Lense-Thirring dérivent du choix d'une métrique de Kerr permettant de prendre en compte les effets d'un corps sphérique en rotation, alors que les corrections au niveau des mesures (temps de propagation ou décalage des horloges situées en 2 points de l'espace) réfèrent souvent à la métrique plus simple de Schwarzschild.

Difficultés d'application :

Les formes différentes des corrections et les différentes conventions (par exemple la fréquence de référence des satellites GPS qui tient déjà compte de l'effet principal) rendent difficile l'application pratique des corrections relativistes.

Résumé :

- Les termes relativistes sont « discrets » mais non négligeables

- **La relativité fait partie des standards** et affecte les systèmes de référence utilisés
→ impact (plus ou moins important) à toutes les étapes des calculs de géodésie

- la relativité en géodésie est prise en compte à l'aide de termes relativistes (calculés avec la précision désirée) ajoutés aux forces classiques ou introduits sous forme de **corrections** sur les mesures.

Cette pratique pose trois problèmes :

- **Elle ignore les principes de base**
- **Elle introduit le risque d'oubli ou de duplication des corrections**
- **Elle nécessite de revoir toutes les corrections dans le détail en cas de gain en précision des mesures ou lors des changements de conventions.**

…mais y'a pas urgence…