

# 3ème Ecole d'Eté du GRGS

Centre de Formation de l'IGN, Forcalquier (04)  
du 4 au 8 septembre 2006



## Méthodes et logiciels pour la Géodésie Spatiale



Systèmes de Référence Temps-Espace



## PRESENTATION de la méthode des ONDELLETTES

Jean-Yves Richard, Observatoire de Paris, SYRTE  
Courriel: [jean-yves.richard@obspm.fr](mailto:jean-yves.richard@obspm.fr)

# Sommaire

- Analyse temps–fréquence & temps–échelle
- Analyse Multi Résolution
- Propriétés des Ondelettes
- Familles d'Ondelettes
- Paquets d'Ondelettes
- Analyse Multi Résolution 2 dimensions
- Applications

# Analyse de Fourier

Contenu fréquentiel d'un signal à temps continu et énergie finie  $s(t)$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \langle s, e^{i2\pi ft} \rangle$$

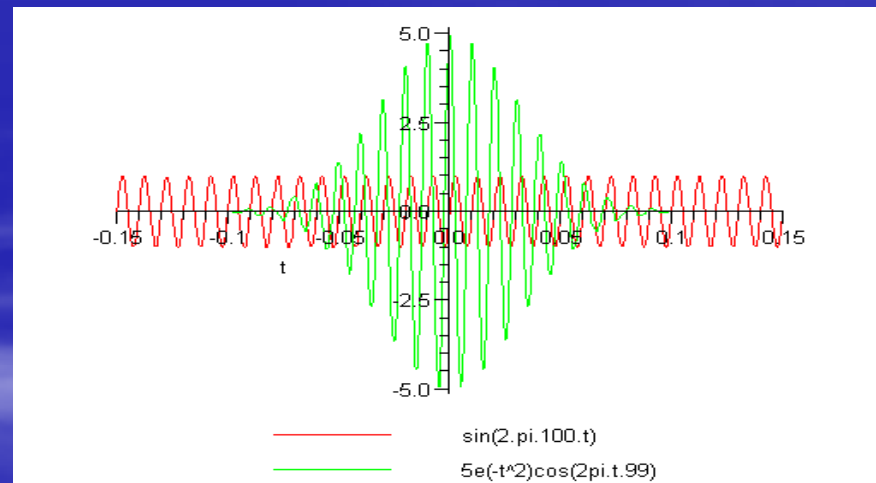
$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v^*(t) dt$$

Produit scalaire de 2 signaux  $u(t)$  et  $v(t)$

$$|S(f)|$$

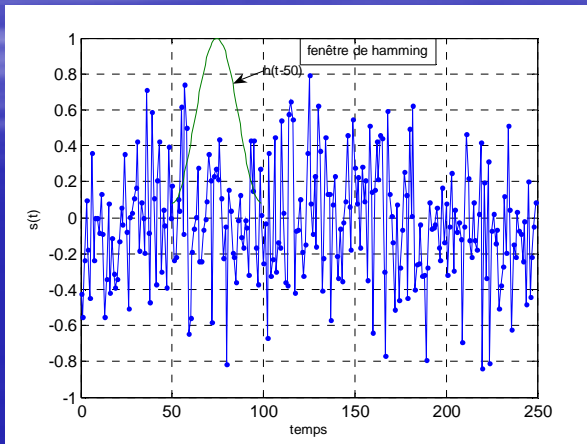
Mesure la vraisemblance à une cissoïde qui oscille sur tout l'axe temporelle

- Analyse spectrale fine
- Pas de localisation temporelle
- Trouver des outils qui permettent l'analyse conjointe temporelle et fréquentielle



# Spectrogramme : Transformation de Fourier à court terme

Analyse de Fourier sur une partie du signal délimitée par une fenêtre continue  $h(t)$  que l'on glisse sur l'axe temporel

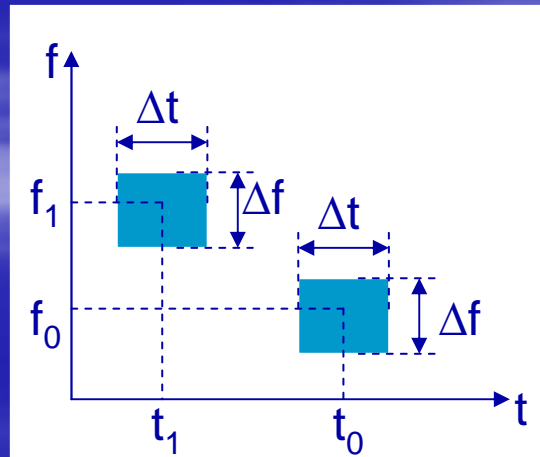
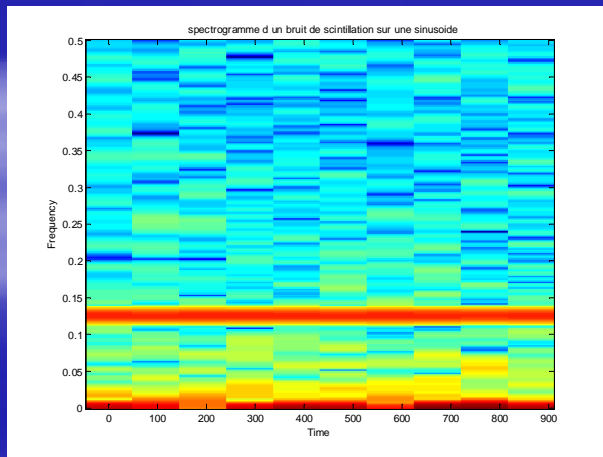


$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot h(t - \tau) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \langle s, h(t - \tau) \cdot e^{i2\pi ft} \rangle$$

$|S(f, \tau)|^2$  Spectrogramme de  $s(t)$  : calcule la quantité d'énergie présente autour de la fréquence  $f$  et de l'instant  $\tau$

La fonction  $h(t - \tau) \cdot e^{i2\pi ft}$  réalise un pavage du plan temps fréquence localisant temporellement un évènement fréquentiel

Principe d'indétermination de Heisenberg  $\Delta(E) \cdot \Delta(t) \geq \frac{\hbar}{2}$  → localisation parfaite impossible



(voir programme « spectrogramme.m »)

# Scalogramme : Transformation continue en Ondelettes

On définit une famille de fonctions  $\{ |\alpha|^{1/2} \Psi(\alpha(t-b)) \}$  appelée famille d'ondelettes

Normalisation pour avoir même énergie à chaque fonction  $\|\Psi\|^2$

**Paramètre de Position**  $\rightarrow$  translation de  $\Psi(t)$

$1/\alpha$  est appelé le **Facteur d'échelle**  
 $\rightarrow |\alpha| < 1$  dilatation de  $\Psi(t)$   
 $|\alpha| > 1$  contraction de  $\Psi(t)$

$\Psi(t)$  est appelée Ondelette mère

Transformée en Ondelette continue:

$\rightarrow$  on glisse une fenêtre à 2 paramètres  $(\alpha, b)$  sur  $s(t)$

Coefficient d'Ondelette à l'échelle  $\alpha$  et à la position  $b$

$$C(\alpha, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{\Psi^*(\alpha(t-b))}{\sqrt{\alpha}} dt = \left\langle s, \frac{\Psi(\alpha(t-b))}{\sqrt{\alpha}} \right\rangle$$

$$|C(\alpha, b)|^2$$

Scalogramme de  $s(t)$

# Localisation temps fréquence d'une Ondelette

$\Psi(\alpha t)$

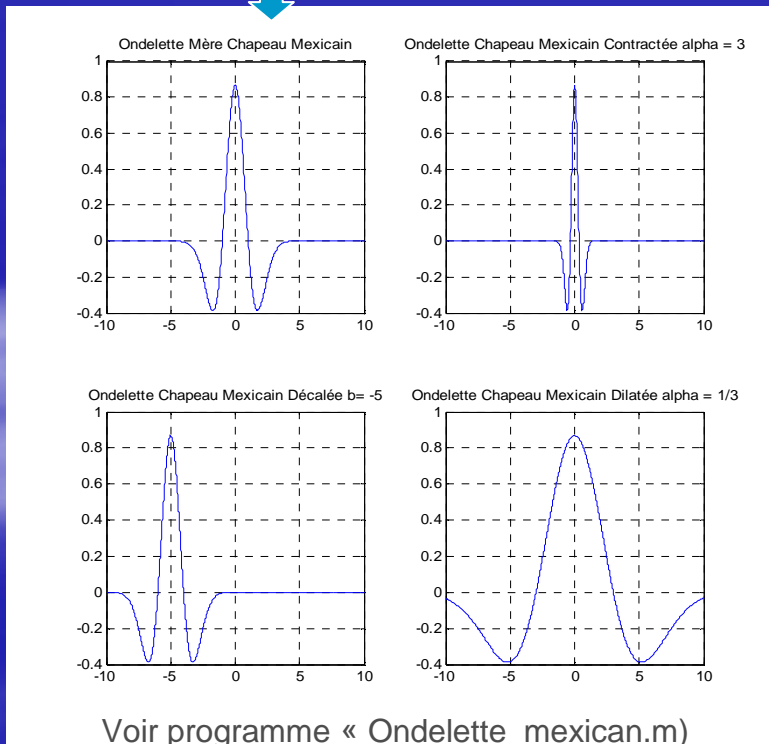
Associé à l'intervalle temps fréquence  $[-\alpha\Delta f/2 \ \alpha\Delta f/2] * [-\Delta t/(2\alpha) \ \Delta t/(2\alpha)]$

$|\alpha| > 1$  contraction en temps de  $\Psi(t)$  → support plus large en fréquence et plus étroit en temps pour de grande valeur de  $\alpha$  cela correspond à des analyses des hautes fréquences

$|\alpha| < 1$  dilatation en temps de  $\Psi(t)$  → support plus étroit en fréquence et plus large en temps pour de petite valeur de  $\alpha$  cela correspond à des analyses des basses fréquences

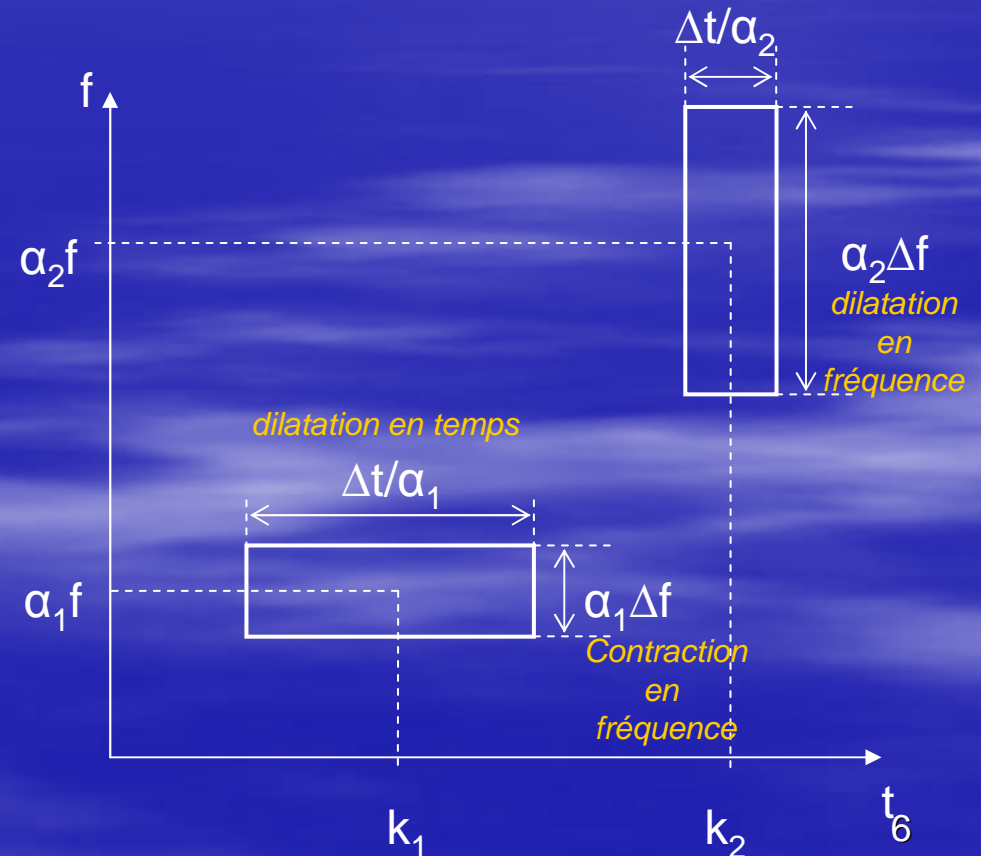
Ondelette « Chapeau mexicain »

$$\psi(\alpha(t-b)) := \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3} (1 - \alpha^2 (t-b)^2) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 (t-b)^2}}{\pi^{1/4}}$$



pour un facteur d'échelle  $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$

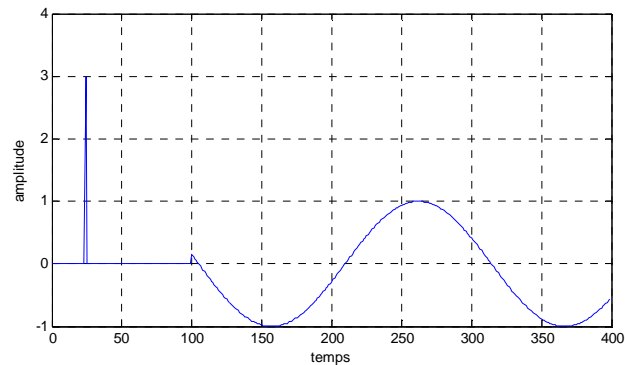
contraction en temps



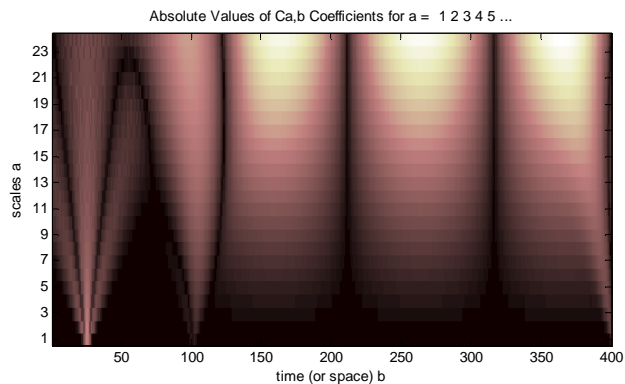
# Transformation continue en Ondelettes (exemple)

Pour chaque facteur d'échelle  $\alpha$  (ici variant de 1 à 24 par pas de 1)  
on calcule le coefficient d'Ondelette  $C(\alpha, b)$  pour les positions  $b$  variant de 1 à N (N étant la longueur du signal  $s(t)$ )  
par convolution de  $s(k)$  avec une forme intégrée de l'Ondelette dilatée de  $\alpha$  et translattée de  $b$

$s(t)$



$C(\alpha, b)$



Voir programme « transforme\_x\_cwt.m »

Numérisation de  $s(t)$

$$x(t) = x(k)$$

Pour  $t \in [k, k+1]$

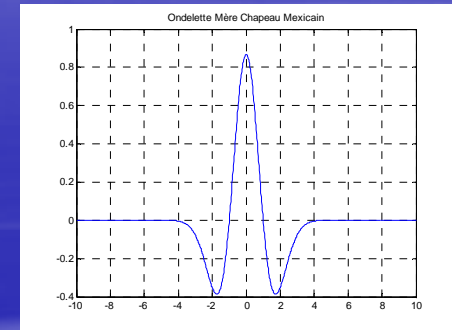
Convolution de  $s(k)$

$$\sqrt{\alpha} \int_k^{k+1} \psi(\alpha(t-b))^{conjugate} dt$$

$$C(\alpha, b) = \sqrt{\alpha} \left( \sum_k s(k) \int_k^{k+1} \psi(\alpha(t-b))^{conjugate} dt \right)$$

Coefficients d'Ondelette de  $s(t)$   
Matrice 24 lignes x 400 colonnes

Ondelette mère  $\Psi(t)$  « Chapeau mexicain »



# Reconstitution du Signal

- A partir de ses coefficients en Ondelettes  $C(\alpha, b)$

$$s(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha, b} \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(t-b)) d\alpha db}{K_{\psi}}$$

Formule d'inversion

$$K_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df$$

$\Psi(f)$  = transformée de Fourier de l'Ondelette mère

$K_{\psi}$  fini  $\rightarrow$  l'Ondelette mère est à moyenne nulle

$$\Psi(f=0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$$

Ondelette

Toutes les localisations temporelles  
Tous les facteurs d'échelle



Représenter le signal  
sur un nombre limité  
d'Ondelettes en faisant varier  
de manière « dyadique »

- le **facteur d'échelle**  $\alpha = 2^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$
- la **position**  $b = k \cdot 2^j$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

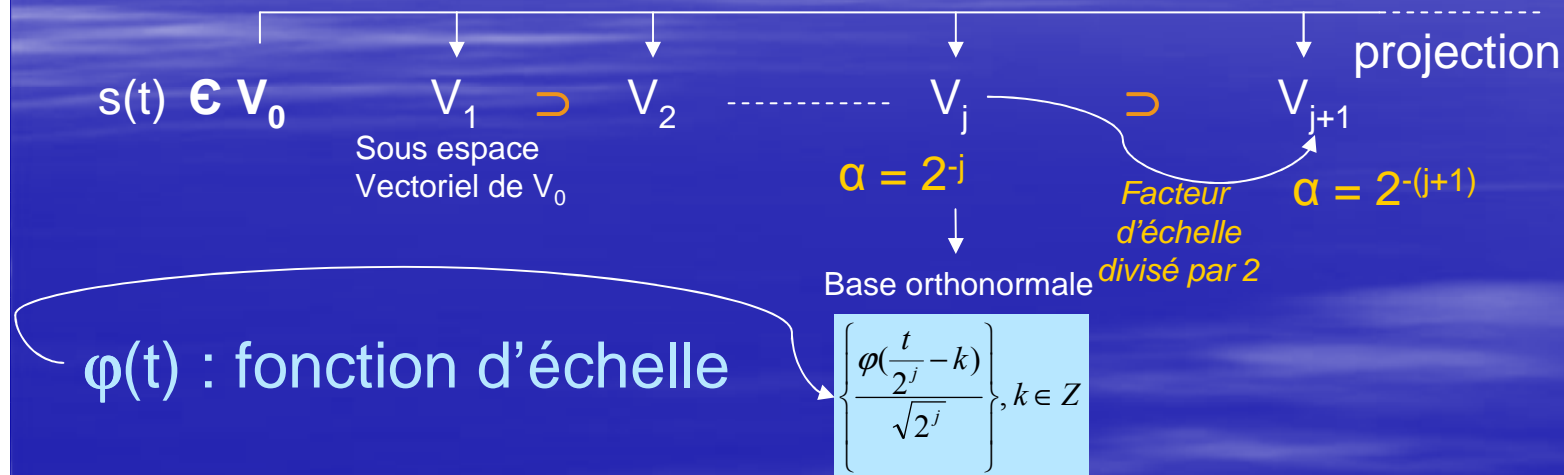


Analyse multirésolution: **AMR**



# Analyse Multi Résolution (1)

L'AMR du signal  $s(t)$  consiste à calculer successivement les projections orthogonales de  $s(t)$  sur une suite d'espaces vectoriels  $V_j$  emboîtés:



La projection de  $s(t)$  sur  $V_j$  contient l'information d'approximation de  $s(t)$  au niveau de résolution  $j$

$$proj_{V_j} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j(k) \cdot \frac{\varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}}$$

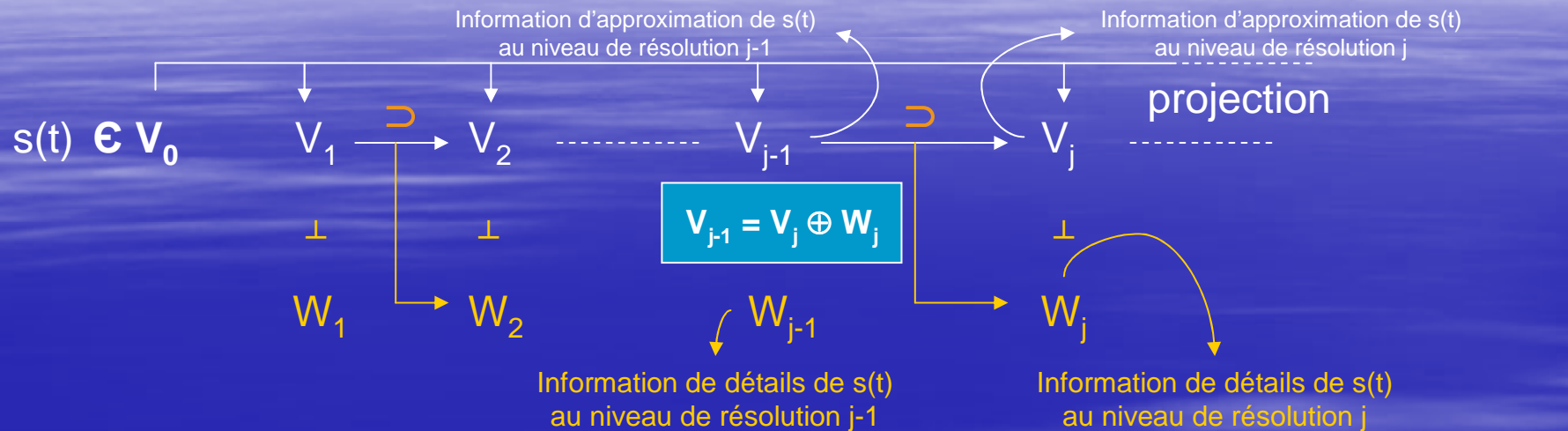


$$a_j(k) = \left\langle s(t), \frac{\varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\rangle$$

Les coefficients  $a_j(k)$  sont appelés Coefficients d'approximation au niveau de résolution  $j$

# Analyse Multi Résolution (2)

L'Écart des projections sur  $V_{j-1}$  et  $V_j$  correspond à l'information de détails de  $s(t)$  qui existait au niveau  $j-1$  et qui est perdue au niveau  $j$ . Cette information est contenue dans un espace vectoriel  $W_j$  orthogonal à  $V_j$



$$\text{proj}_{V_{j-1}}(s(t)) - \text{proj}_{V_j}(s(t)) = \text{proj}_{W_j}(s(t)) \leftarrow \text{Information perdue entre 2 approximations successives}$$

$\psi(t)$  : ONDELETTE MERE

Base orthonormale de  $W_j$

$$\left\{ \frac{\psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

La projection de  $s(t)$  sur  $W_j$  contient l'information de détails de  $s(t)$  au niveau de résolution  $j$

$$\text{proj}_{W_j} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j(k) \cdot \frac{\psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}}$$



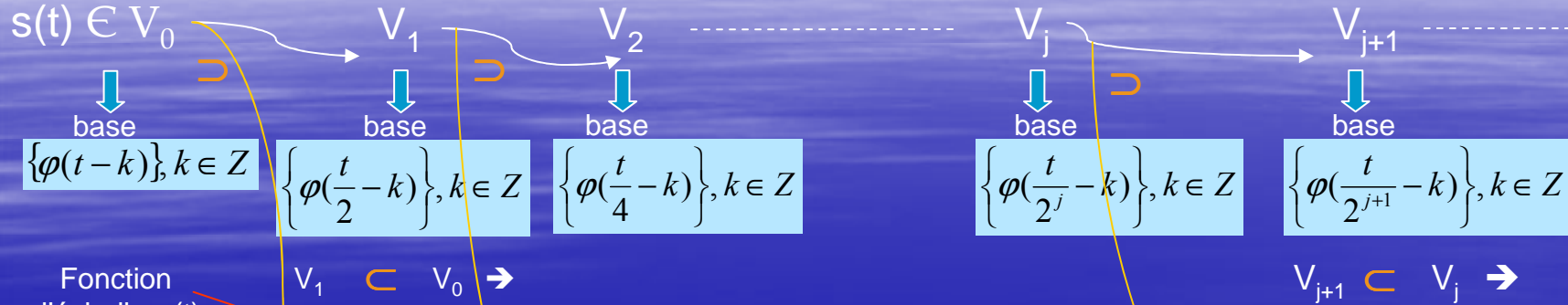
$$d_j(k) = \left\langle s(t), \frac{\psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\rangle$$

Les coefficients  $d_j(k)$  sont appelés Coefficients de détails ou d'ondelette au niveau de résolution  $j$

# Analyse Multi Résolution (3)

## Équation à 2 échelles

Projection de  $s(t)$  sur des sous espaces vectoriels  $V_j$



Fonction d'échelle  $\varphi(t)$  dilatée d'un facteur 2

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k) \cdot \varphi(t-k)$$

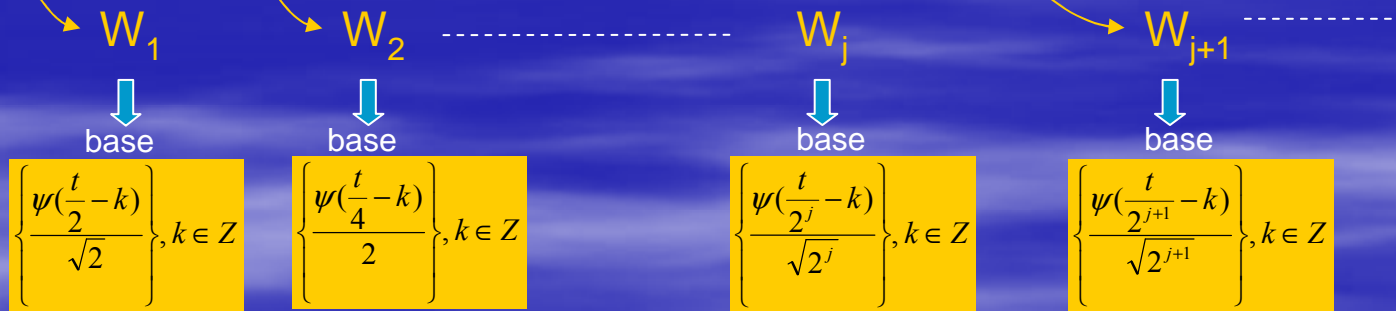
Translatées de  $\varphi(t)$

$h_0(k)$  réponse impulsionnelle d'un Filtre

$$\frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \varphi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - m\right) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_0(k-2m) \cdot \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$$

Équation à 2 échelles reliant  $\varphi(t/2^{j+1})$  à  $\varphi(t/2^j)$

Projection de  $s(t)$  sur des sous espaces vectoriels  $W_j$



Fonction d'Ondelette  $\psi(t)$  dilatée d'un facteur 2

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) \cdot \varphi(t-k)$$

Translatées de  $\varphi(t)$

$h_1(k)$  réponse impulsionnelle d'un Filtre

$$\frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \psi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - m\right) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k-2m) \cdot \varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$$

Équation à 2 échelles reliant  $\psi(t/2^{j+1})$  à  $\varphi(t/2^j)$

# Analyse Multi Résolution (3)

## algorithme de Mallat

Coefficients d'approximation

$$a_j(k) = \left\langle s(t), \frac{\varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\rangle$$

À chaque niveau de résolution j  
filtre à réponse impulsionnelle

$$\tilde{h}_0(l)$$

Liée à la fonction d'échelle  $\varphi(t)$



$$\tilde{a}_j(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-1}(l) \cdot h_0^*(l-k)$$

$$\tilde{h}_0(l) = h_0^*(-l)$$

Décimation ordre 2

$$a_j(k) = \tilde{a}_j(2k)$$

Garde les éléments pairs

Coefficients d'approximation au niveau j

Coefficients de détails

$$d_j(k) = \left\langle s(t), \frac{\psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\rangle$$

filtre à réponse impulsionnelle

$$\tilde{h}_1(l)$$

Liée à la fonction d'Ondelette  $\psi(t)$



$$\tilde{d}_j(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-1}(l) \cdot h_1^*(l-2k)$$

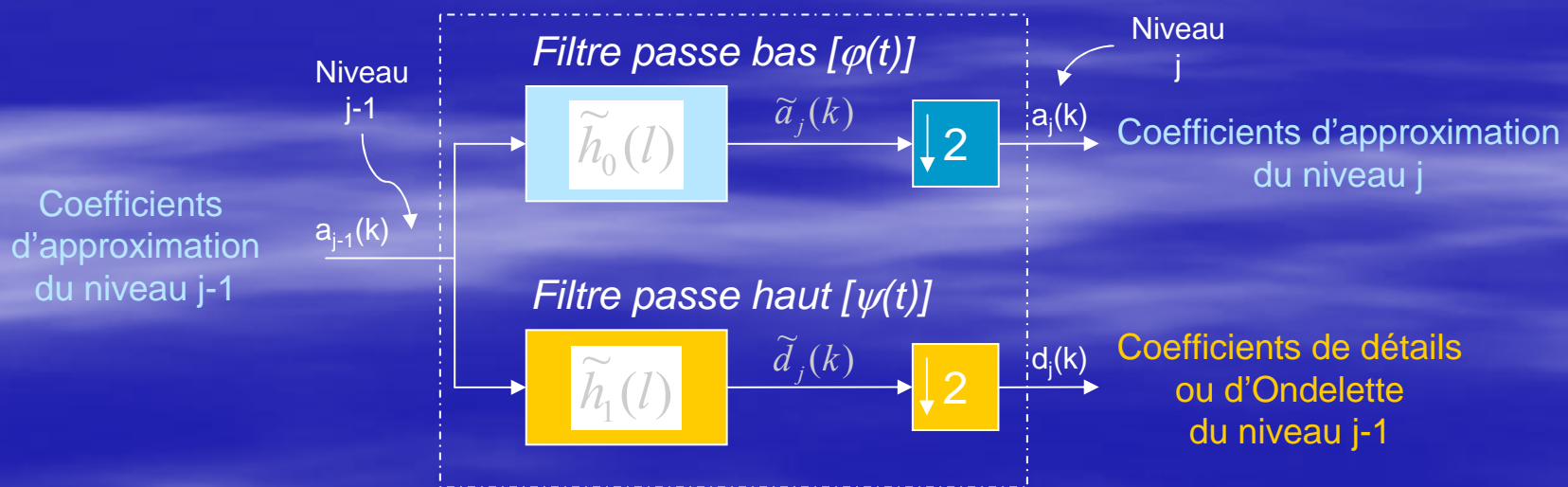
$$\tilde{h}_1(l) = h_1^*(-l)$$

Décimation ordre 2

$$d_j(k) = \tilde{d}_j(2k)$$

Garde les éléments pairs

Coefficients de détails au niveau j



Banc de filtres d'analyse en quadrature miroir (QMF)

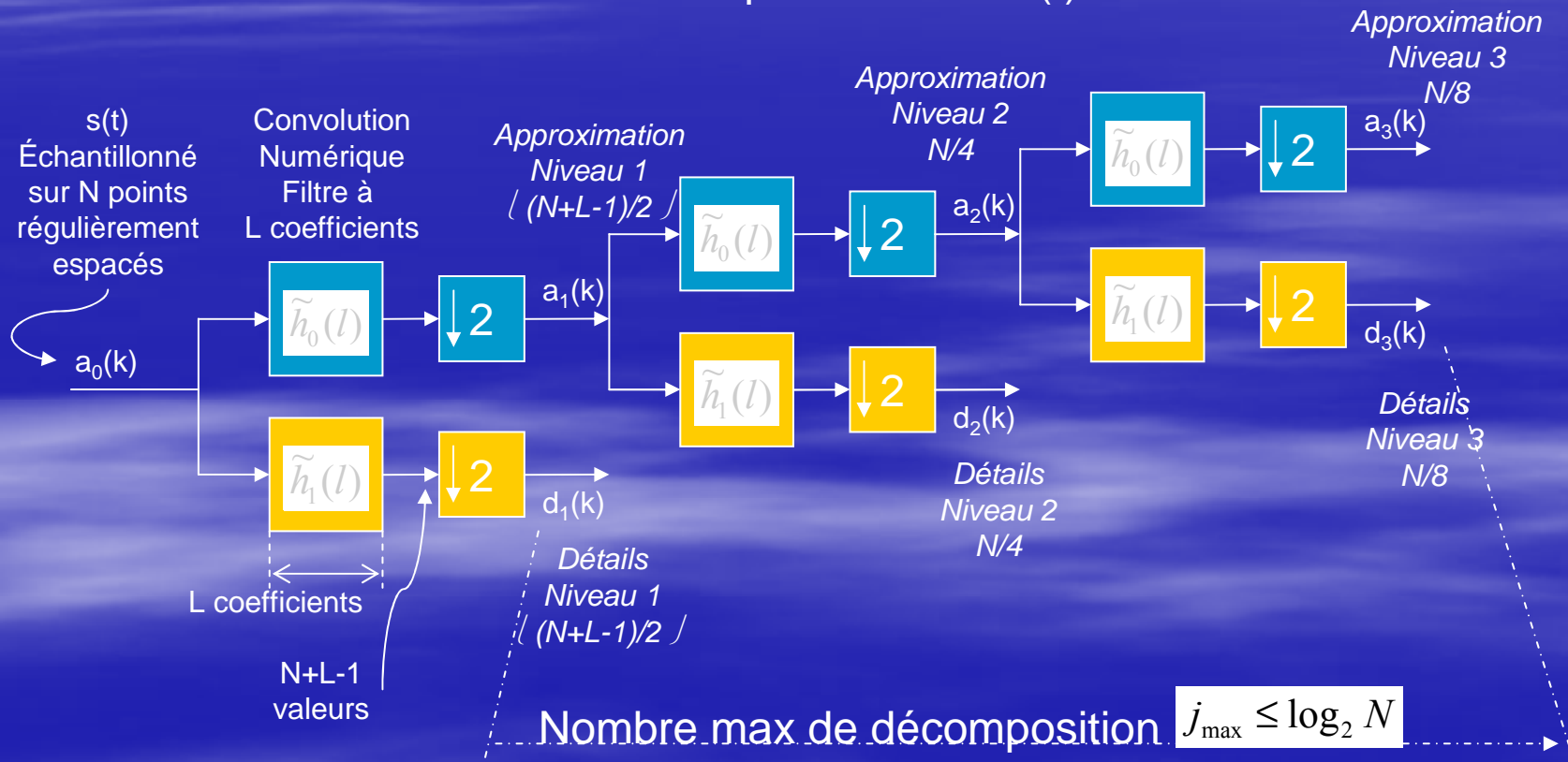
# Analyse Multi Résolution (4)

## décomposition en ondelettes

A chaque niveau de résolution  $j$  on décompose le signal en

- information d'approximation  $A_j$  (coefficient d'approximation  $cA_j$ )
- information de détails  $D_j$  (coefficient de détails  $cD_j$ )

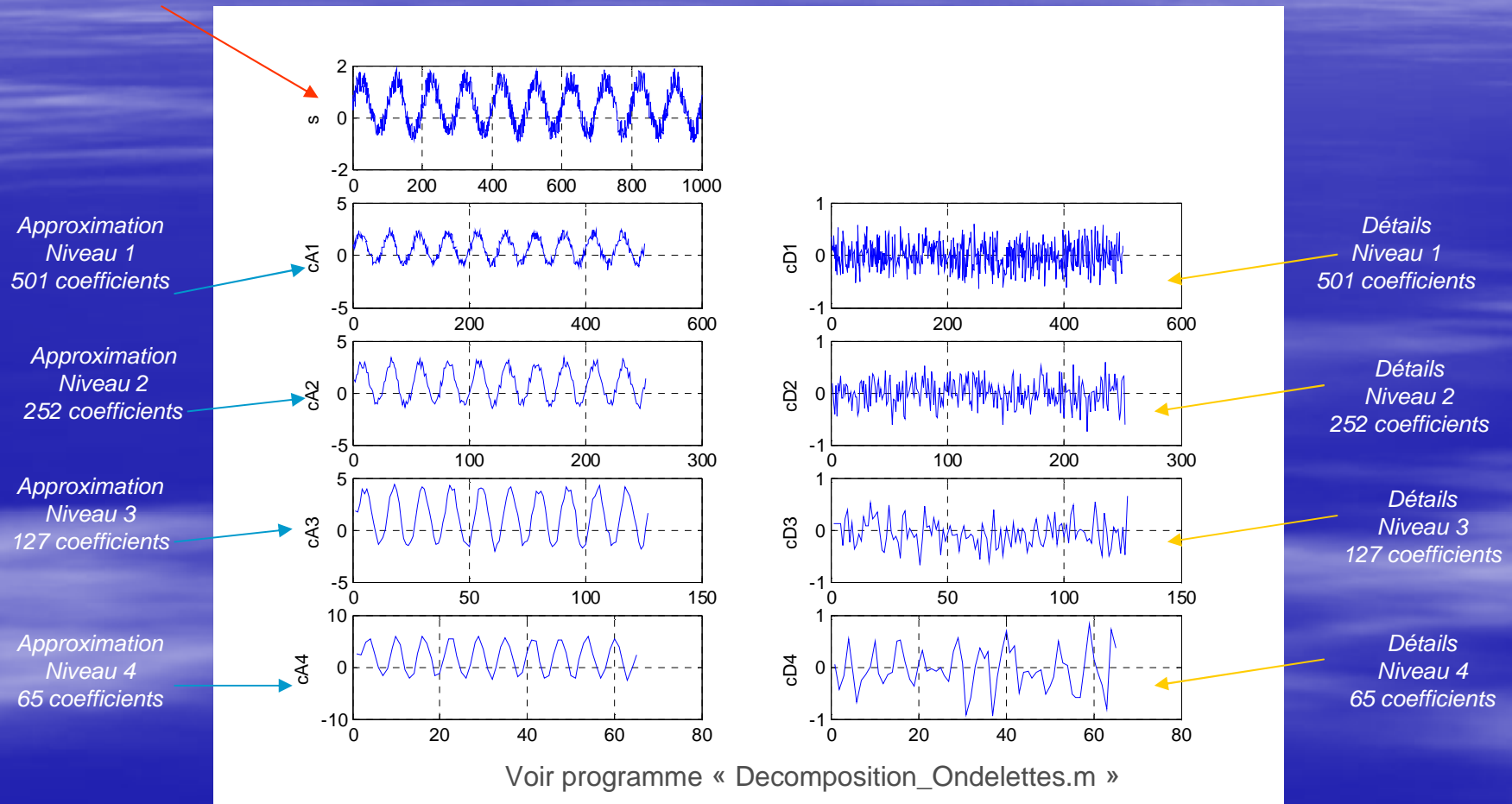
on obtient un « arbre de décomposition » de  $s(t)$



# Analyse Multi Résolution (5)

exemple de décomposition en Ondelettes de [Daubechies 2](#)

Sinusoïde bruitée, 10 périodes échantillonnées sur N=1000 points



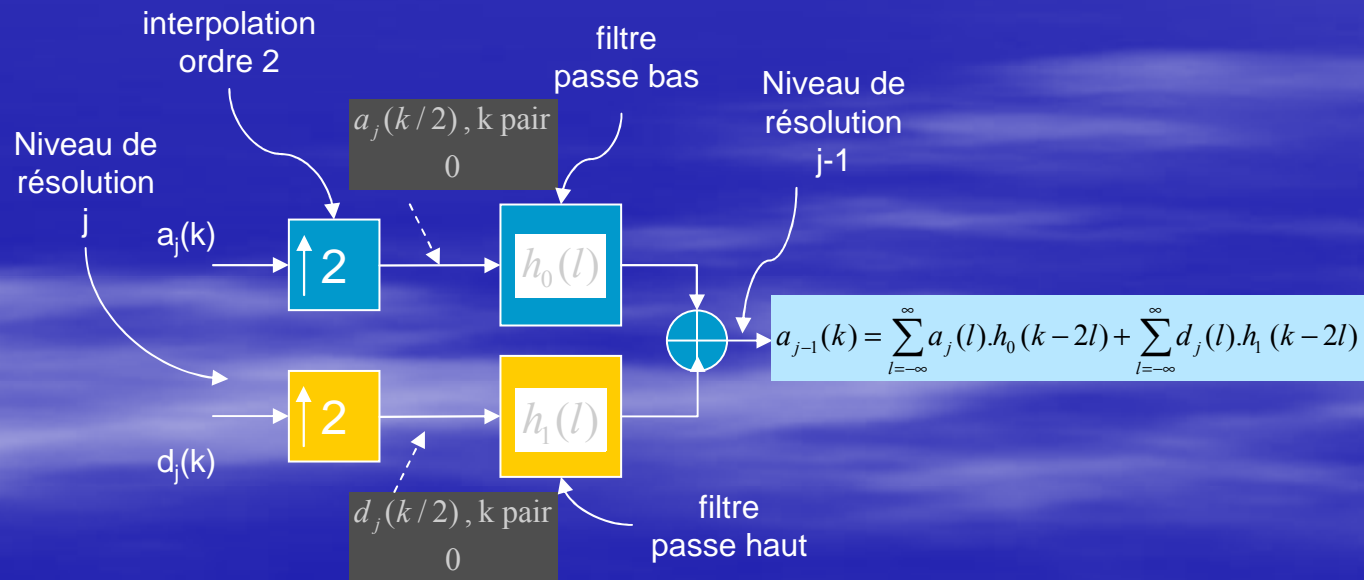
# Analyse Multi Résolution (6)

## reconstruction

La reconstruction d'un signal décomposé en banc de filtre d'analyse peut être réalisé par banc de filtre de synthèse:

par opérations duales du filtre d'analyse

- Interpolation d'ordre 2 par insertion de zéro
- Filtre à réponse impulsionnelle  $h_0(l)$  pour les coefficients d'approximation et  $h_1(l)$  pour les coefficients de détails



*Banc de filtre de synthèse*

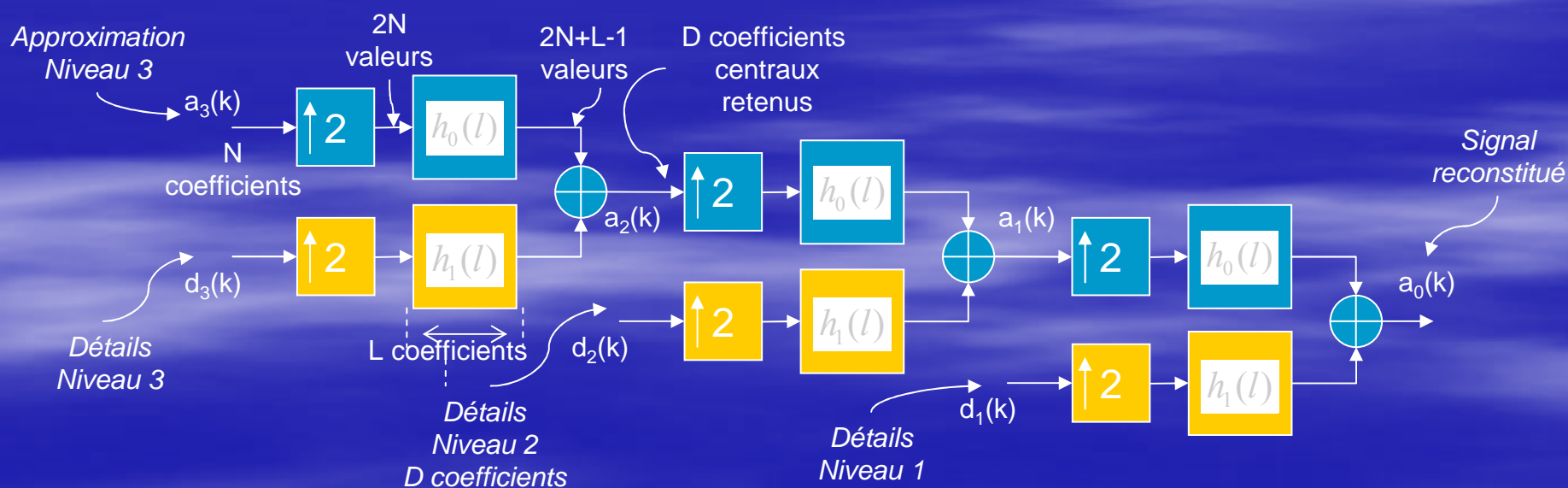
# Analyse Multi Résolution (7)

## reconstruction

Du niveau de résolution  $j$  au niveau  $j-1$  on reconstitue le signal en information d'approximation de niveau  $j-1$   $a_{j-1}(k)$  par addition de:

- Interpolation des informations d'approximation suivi d'un filtre de réponse impulsionnelle  $h_0(k)$
- Interpolation des informations de détails suivi d'un filtre de réponse impulsionnelle  $h_1(l)$

on obtient un « arbre de reconstruction » de  $s(t)$



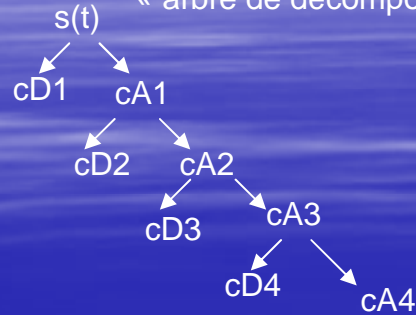


# Analyse Multi Résolution (8)

exemple de reconstitution en Ondelettes de **Daubechies 2**

analyse

« arbre de décomposition » de  $s(t)$



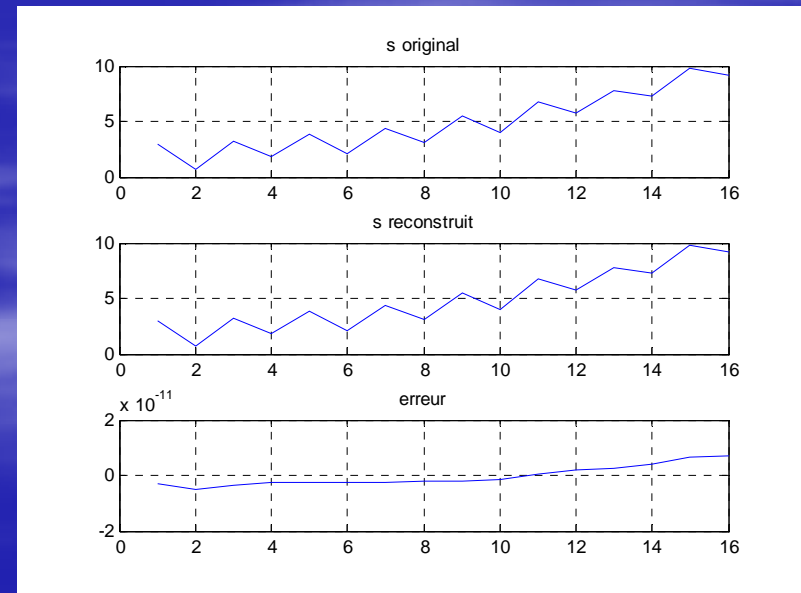
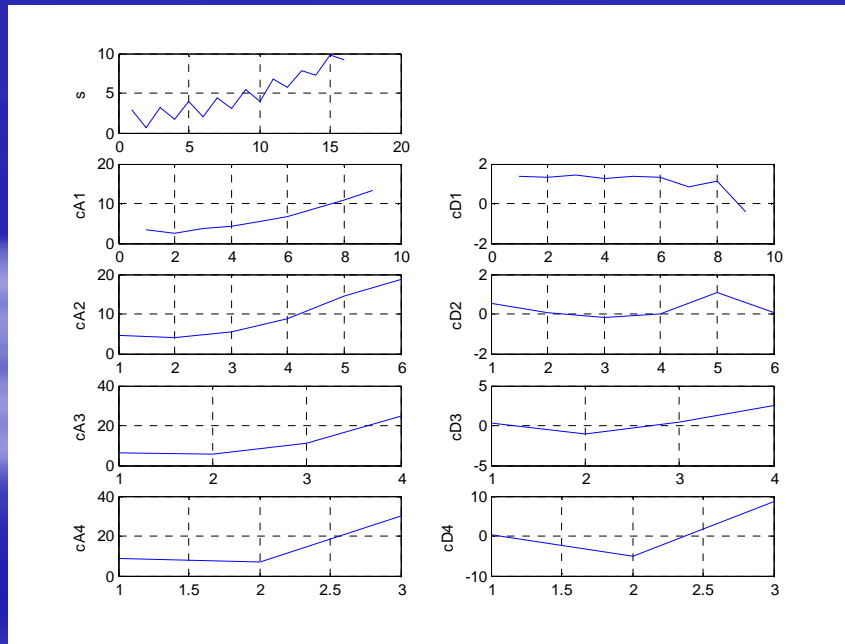
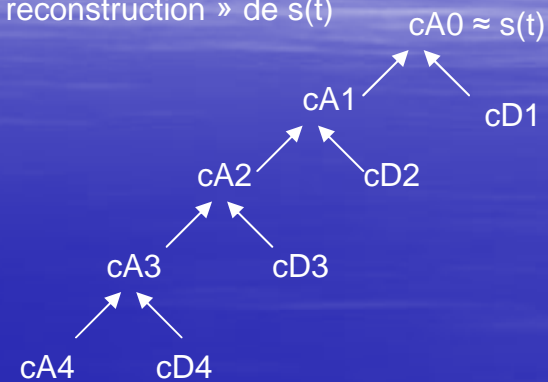
Coefficients retenus:

- cA4
- cD4
- cD3
- cD2
- cD1



synthèse

« arbre de reconstruction » de  $s(t)$



(Voir programme « Decomposition\_Ondelettes\_numeriques.m »)

# Propriétés des Ondelettes <sup>(1)</sup>

- Les coefficients du filtre à réponse impulsionnelle  $h_0(l)$  pour les coefficients d'approximation et  $h_1(l)$  et pour les coefficients de détails sont liées par la relation

$$h_1(l) = (-1)^l h_0^*(2p+1-l)$$

- L'ortho normalité de la famille de fonction d'échelle

$$\left\{ \frac{\varphi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\}, k \in \mathbb{Z} \text{ implique}$$

$$\left| H_0(f) \right|^2 + \left| H_0\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 2$$

avec  $|H_0(0)| = \sqrt{2}$

- L'ortho normalité de la famille d'Ondelette

$$\left\{ \frac{\psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\}, k \in \mathbb{Z} \text{ implique}$$

$$\left| H_1(f) \right|^2 + \left| H_1\left(f + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 2$$

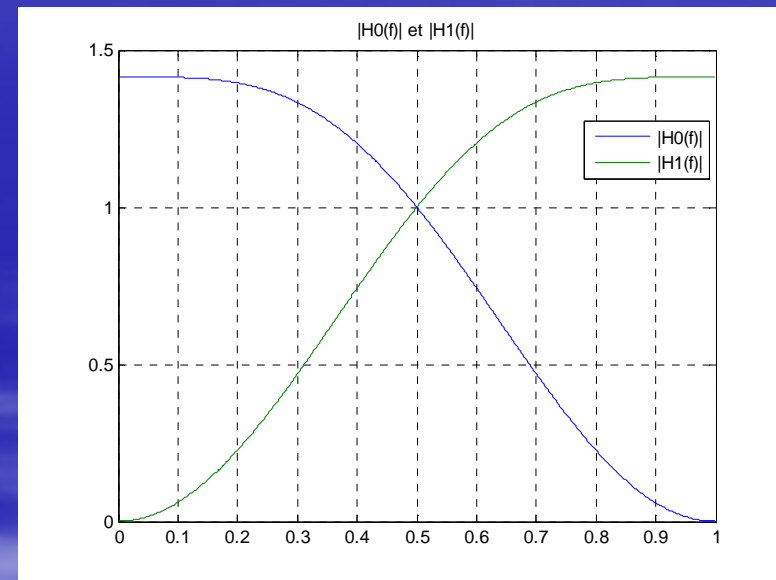
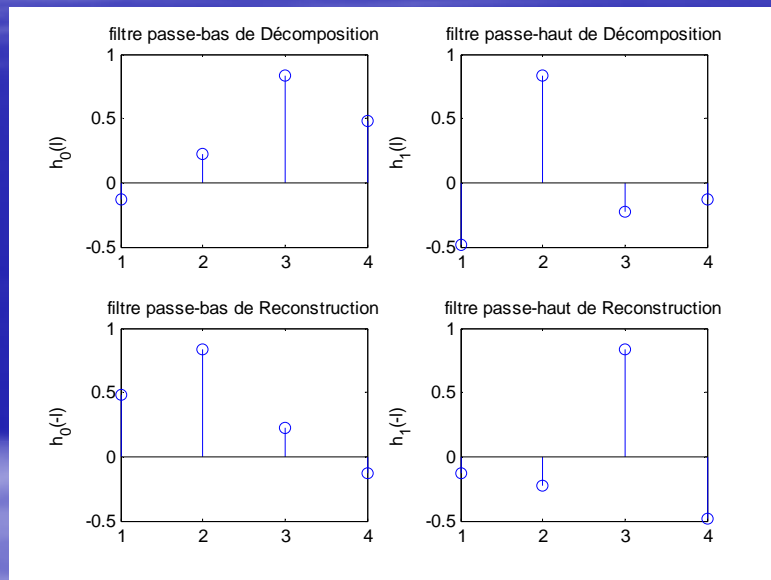
avec  $|H_1(0)| = 0$

- L'orthogonalité des sous espaces vectoriels  $V_{i+1}$  et  $W_{j+1}$  de  $V_j$  entraine

$$\left| H_0(f) \right| \left| H_1^*(f) \right| + \left| H_0\left(f + \frac{1}{2}\right) \right| \left| H_1^*\left(f + \frac{1}{2}\right) \right| = 0$$

# Propriétés des Ondelettes (2)

- Réponses impulsionnelles et fréquentielles des filtres d'Ondelette de Daubechies 2



(Voir programme « daubechies.m »)

# Propriétés des Ondelettes <sup>(3)</sup>

- Propriété des moments nuls: une Ondelette mère possède N moments nuls si elle est orthogonale à tout polynôme de degré < N

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \frac{\psi(\frac{t}{2^j} - k)}{\sqrt{2^j}} dt = 0 \quad \text{Avec } m = 1, 2, \dots, N-1$$

Pour un signal s'identifiant à un polynôme de degré  $m < N-1$ , sa décomposition en Ondelette donne des coefficients d'Ondelette nulles et des coefficients d'approximation contenant toute l'énergie du signal

Dans le domaine spectrale  $\Psi(f)$  étant la TF de  $\psi(t)$  cela se traduit par

$$\frac{d^m \Psi(0)}{df^m} = 0 \quad \text{Avec } m = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\frac{d^m H_1(0)}{df^m} = 0 \quad \text{Le filtre passe-haut possède un zéro d'ordre } N \text{ en } f=0$$

$$\frac{d^m H_0(1/2)}{df^m} = 0 \quad \text{Le filtre passe-bas possède un zéro d'ordre } N \text{ en } f=1/2$$

# Propriétés des Ondelettes <sup>(4)</sup>

- Linéarité de l'analyse en Ondelettes

Coefficients d'Ondelette niveau j (facteur d'échelle) et de rang k (décalage de l'Ondelette)

Décomposition en Ondelettes continues

$$\alpha.s(t)^{(1)} + \beta.s(t)^{(2)} \\ \Rightarrow \alpha.C_{j,k}^{(1)} + \beta.C_{j,k}^{(2)}$$

Coefficients d'Approximation de niveau j

Décomposition en Ondelettes discrètes

$$\alpha.s_k^{(1)} + \beta.s_k^{(2)} \\ \Rightarrow \alpha.A_j^{(1)} + \beta.A_j^{(2)}$$

Coefficients de Détails de niveau j

$$\alpha.s_k^{(1)} + \beta.s_k^{(2)} \\ \Rightarrow \alpha.D_j^{(1)} + \beta.D_j^{(2)}$$

# Propriétés des Ondelettes <sup>(5)</sup>

- $\psi(t)$  localisation temps,  $\Psi(f)$  localisation fréquence
- Symétrie de  $\psi(t)$  utile pour éviter les déphasages dans le traitement d'image
- Le nombre de moments nuls de  $\psi(t)$  est utilisé pour la compression
- La régularité (ordre de dérivabilité de l'Ondelette) est utile dans la reconstruction du signal ou d'image et pour l'estimation de fonction de régression non linéaire
- L'existence de fonction d'échelle  $\varphi(t)$
- L'orthogonalité ou la bi-orthogonalité (Ondelette de synthèse différente de l'Ondelette d'analyse)
- Expression analytique existante ou non
- Tabulation
- Sa fréquence d'utilisation

# Familles d'Ondelettes <sup>(1)</sup>

## définie sans fonction d'échelle $\varphi(t)$

### Ondelettes Gaussienne, Chapeau Mexicain, Morlet

Fonction d'ondelette  $\Psi(t)$  explicite  
Symétrie de  $\psi(t)$   
Pas de fonction d'échelle  $\varphi(t)$

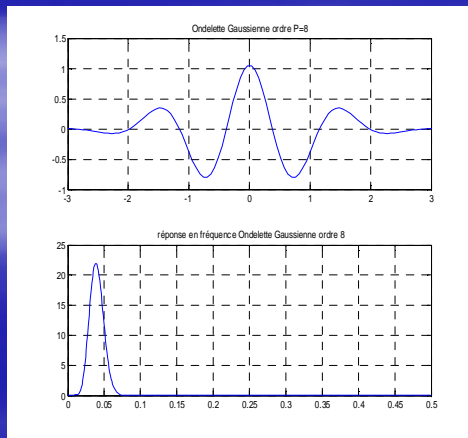
Analyse non orthogonale  
Synthèse non assurée  
Utilisée en décomposition continue

#### Ondelette Gaussienne

Fonction d'Ondelette  $\Psi(t)$   
explicite: Dérivée  $p^{i\text{eme}}$  de la  
fonction de Gauss

$$F(t) = C_p e^{-t^2}$$

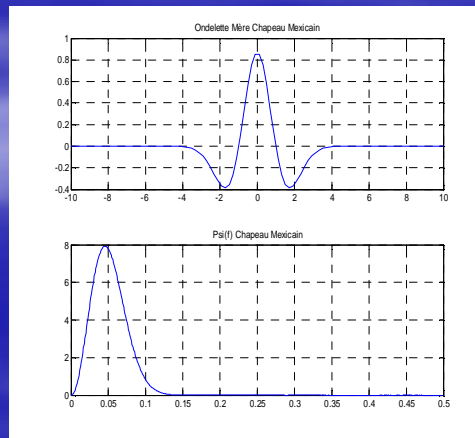
Symétrie de  $\psi(t)$  pour N pair  
Antisymétrique pour N impair



Voir « gauss\_ondelette.m »

#### Ondelette Chapeau Mexicain

Fonction d'Ondelette  $\Psi(t)$   
explicite: proportionnelle à la  
dérivée seconde de la  
densité de probabilité  
Gaussienne

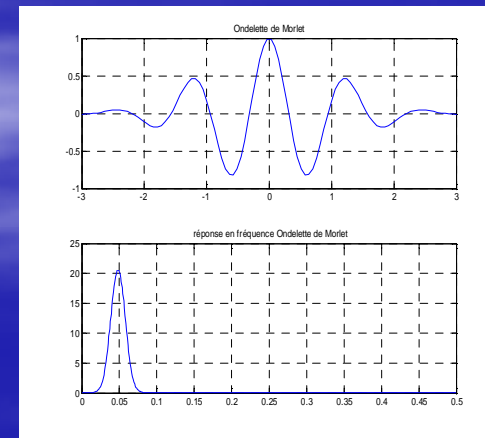


Voir « Ondelette\_mexican.m »

#### Ondelette de Morlet

Fonction d'Ondelette  $\Psi(t)$   
explicite: Dérivée  $p^{i\text{eme}}$  de la  
fonction de Gauss

$$\psi(t) = \cos(5t)e^{-t^2/2}$$



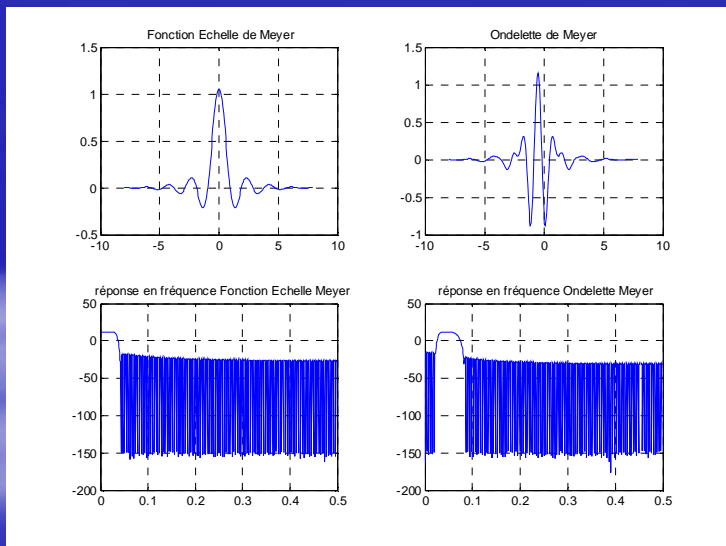
Voir « morlet\_ondelette.m »

# Familles d'Ondelettes <sup>(2)</sup>

## à régularité infinie & orthogonale

### Ondelette de Meyer

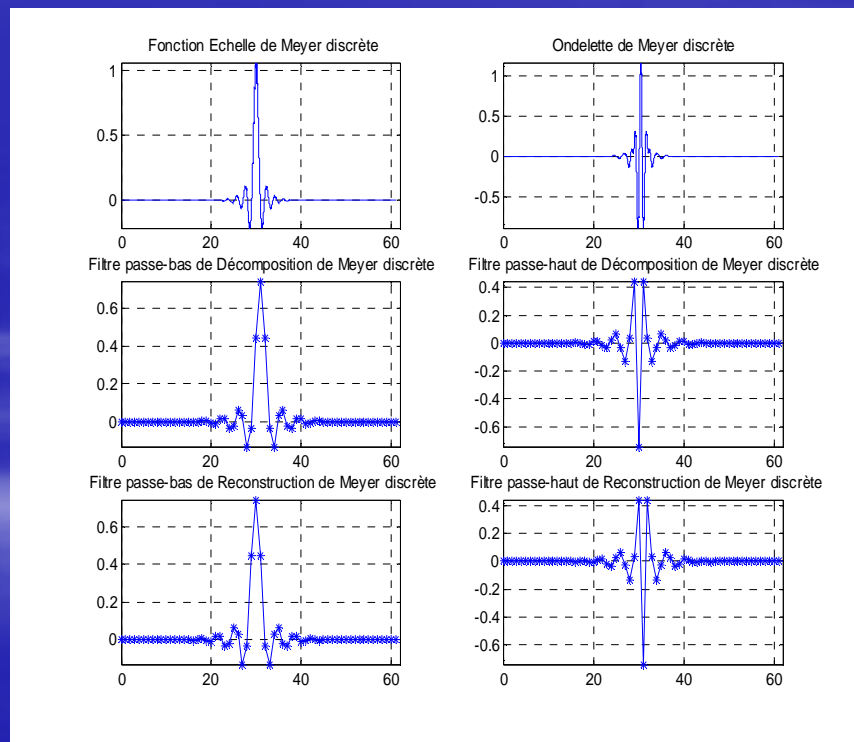
Fonction d'ondelette  $\Psi(t)$  définie à partir de  $\Psi(f)$   
 Fonction d'échelle  $\varphi(t)$  définie à partir de  $\Phi(f)$   
 $\Psi(t)$  et  $\varphi(t)$  indéfiniment dérivables  $\rightarrow$  régularité infinie  
 Symétrie de  $\psi(t)$  et de  $\varphi(t)$   
 Analyse possible par la transformée continue  
 Analyse possible par la transformée discrète filtre non RIF  
 Pas d'algorithme rapide



Voir « meyer\_ondelette.m »

### Ondelette discrète de Meyer

Approximation de l'Ondelette de Meyer par filtres RIF  
 Orthogonalité & bi orthogonalité  
 Analyse & synthèse par transformées discrète et continue



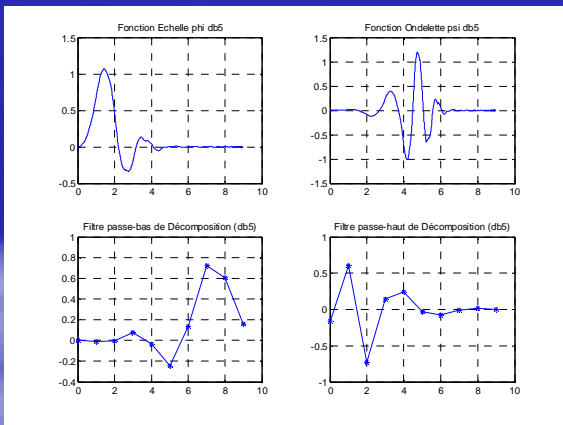


# Familles d'Ondelettes <sup>(3)</sup>

## *orthogonale & support compact*

### Ondelettes de Daubechies

Daubechies d'ordre N:  
Pas d'expression explicite sauf db1 (= harr)  
Orthogonalité et bi-orthogonalité  
Utilisée en continue & en discret  
Filtres RIF de longueur 2N à phase minimale  
Asymétrie  
N moments nuls  
Régularité croissante avec N mais faible

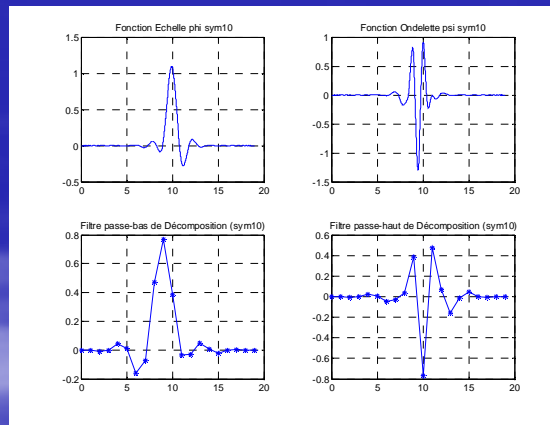


Voir « daubechies.m)

### Ondelettes Symlets

(Daubechies modifiées)

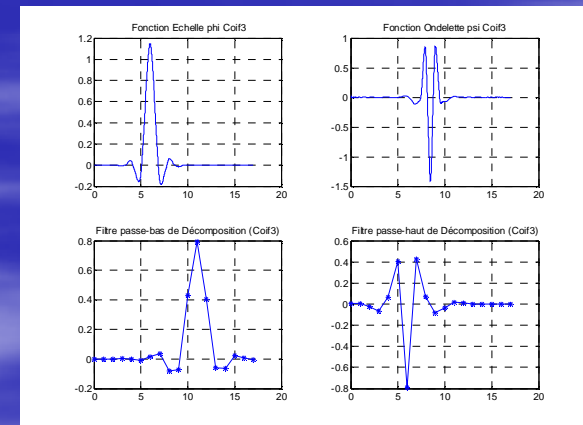
Symlet d'ordre N:  
Pour N pair ondelette presque symétrique  
Filtres RIF de longueur 2N



Voir « symlet.m)

### Ondelettes Coiflet

Coiflet d'ordre N:  
Symétrie de  $\psi$  et de  $\phi$   
 $\Psi$  possède 2N moments nuls  
 $\Phi$  possède 2N-1 moments nuls  
Filtres RIF de longueur 6N-1



Voir « coiflet.m)

# Familles d'Ondelettes <sup>(4)</sup>

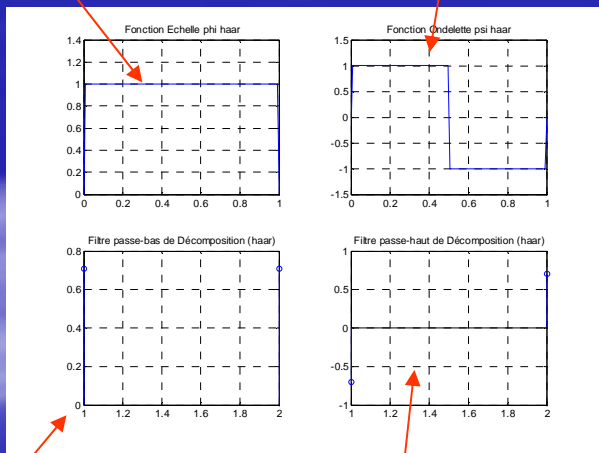
## *orthogonale & support compact*

### Ondelettes de Haar

- expression explicite
- Orthogonalité & bi orthogonalité
- Utilisée en continue & en discret
- Filtres RIF de longueur 2
- symétrie
- $\Psi(t)$  possède 1 moment nul
- Régularité : fonction de Haar non continue

$$\varphi(t) = \text{rect}_{(0,1)}(t)$$

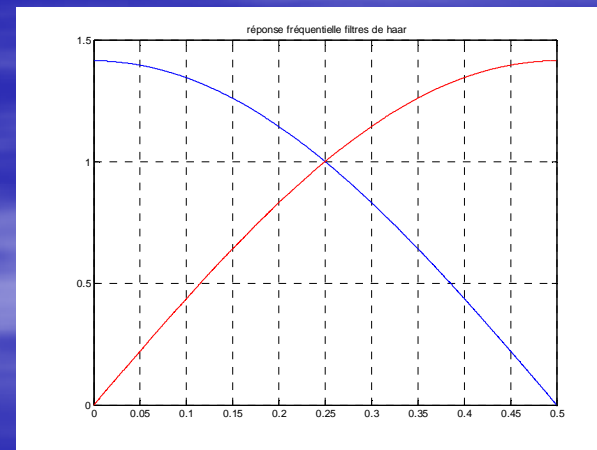
$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$$



$$h_0(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{pour } k \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_1(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{si } k = 0 \\ -1/\sqrt{2} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ondelettes de Harr :  
faible localisation fréquentielle  
bonne localisation temporelle



(Voir « daubechies.m) avec N=1 et ondelette haar ou db1)

# Familles d'Ondelettes <sup>(5)</sup>

## bi orthogonales & support compact

### Ondelettes B-Splines bi orthogonales

Les bases d'Ondelettes ne sont plus orthonormales de façon à avoir des Ondelettes symétriques → reconstruction parfaite

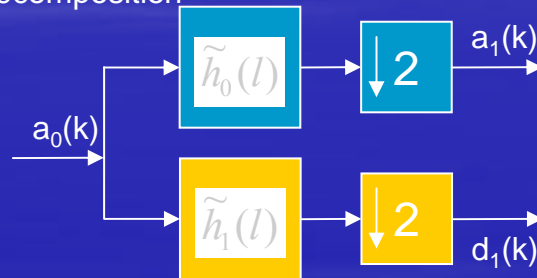
Les Ondelettes utilisées pour l'analyse sont légèrement différentes des Ondelettes utilisées pour la synthèse

La condition sur les filtres  $\tilde{h}_0(l) = h_0^*(-l)$  n'est plus imposée

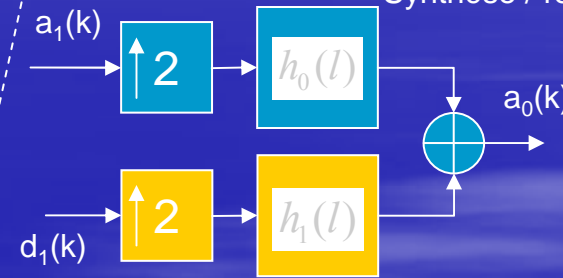
Condition de reconstruction parfaite →  $H_0(f)\tilde{H}_0(f) + H_1(f)\tilde{H}_1(f) = 2$

$$H_0(f + 1/2)\tilde{H}_0(f) + H_1(f + 1/2)\tilde{H}_1(f) = 0$$

Analyse / décomposition



Synthèse / reconstruction

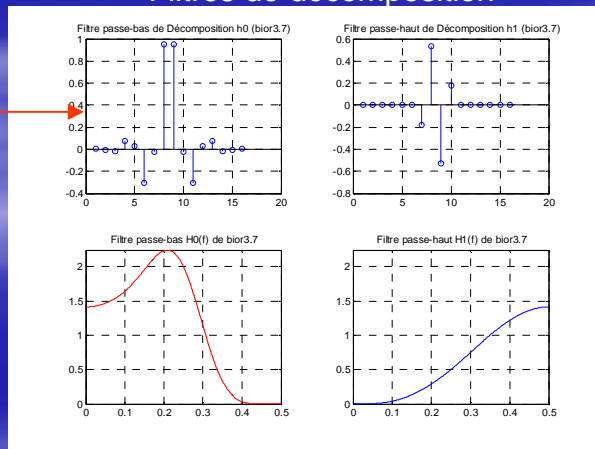


$\tilde{h}_0(l)$

Filtres de décomposition

```

0 0.0030211
1 -0.0090633
2 -0.016832
3 0.074664
4 0.031333
5 -0.30116
6 -0.026499
7 0.95164
8 0.95164
9 -0.026499
10 -0.30116
11 0.031333
12 0.074664
13 -0.016832
14 -0.0090633
15 0.0030211
    
```

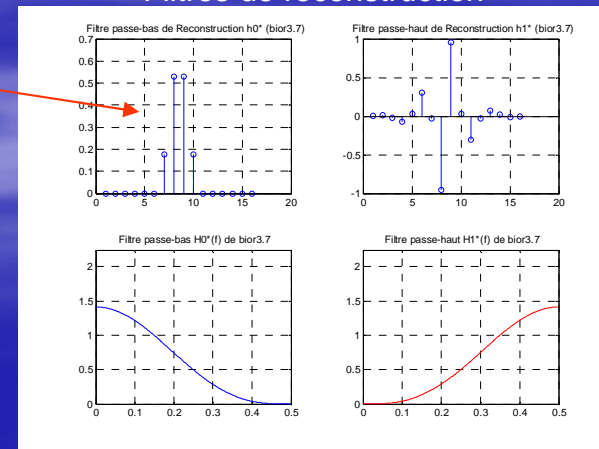


$h_0(l)$

Filtres de reconstruction

```

0 0
1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0.17678
7 0.53033
8 0.53033
9 0.17678
10 0
11 0
12 0
13 0
14 0
15 0
    
```



(voir programme « B\_Splines\_ondelette.m »)

# Familles d'Ondelettes (6)

## ondelettes complexes

Pas de Fonction d'échelle  $\varphi(t)$   
 Fonction d'ondelette  $\psi(t)$  explicite et symétrique  
 $\psi(t)$  n'est pas à support compact

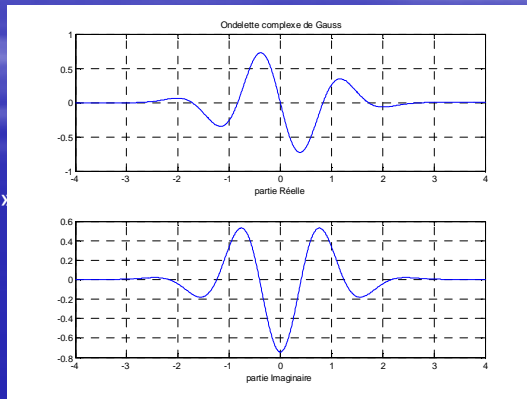
Analyse non orthogonale  
 Synthèse non assurée  
 Utilisée en décomposition continue complexe

### Ondelettes Gaussienne complexe

Dérivée  
 d'ordre p de

$$F(t) = C_p e^{-t^2} e^{-it}$$

(voir  
 « gauss\_complex.m »)



### Ondelette de Shannon complexe

$$\psi(t) = \sqrt{f_b} \sin c(f_b t) e^{i2\pi f_c t}$$

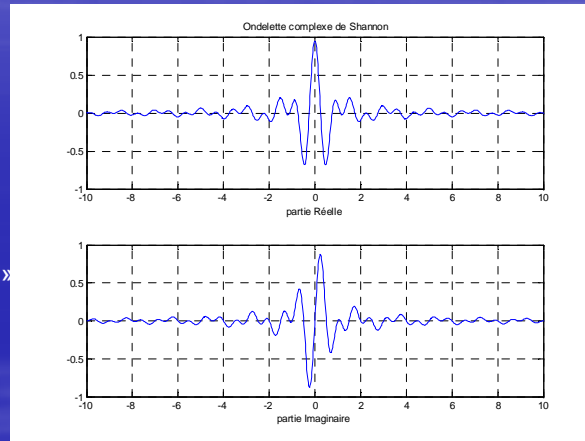
$f_b$  bande passante  
 $f_c$  fréquence centrale

$$f_b = 1$$

$$f_c = 0.9$$

(voir  
 « Shannon\_complex.m »)

Bonne résolution  
 fréquentielle



### Ondelette de Morlet complexe

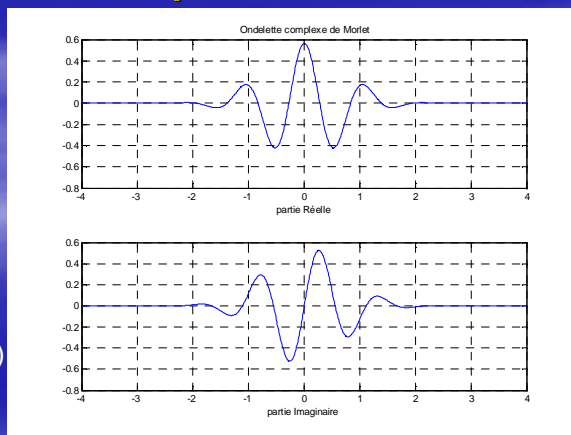
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{-\frac{t^2}{f_b}} e^{i2\pi f_c t}$$

$f_b$  bande passante  
 $f_c$  fréquence centrale

$$f_b = 1$$

$$f_c = 0.9$$

(voir  
 « morlet\_complex.m »)



### Ondelette B-Spline complexe

$$\psi(t) = \sqrt{f_b} \left( \sin c \left( \frac{f_b t}{m} \right) \right)^m e^{i2\pi f_c t}$$

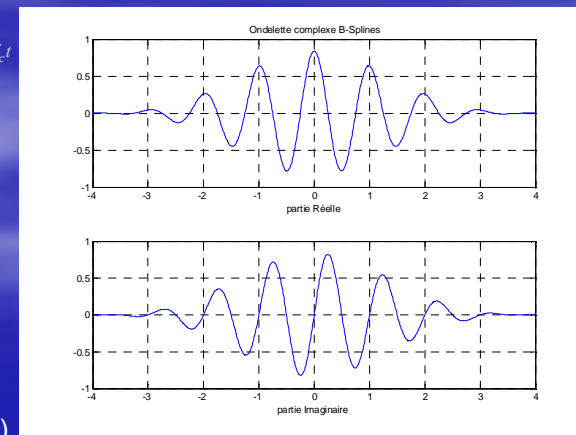
$f_b$  bande passante  
 $f_c$  fréquence centrale  
 $m$  paramètre entier  $\geq 1$

$$f_b = 1$$

$$f_c = 0.9$$

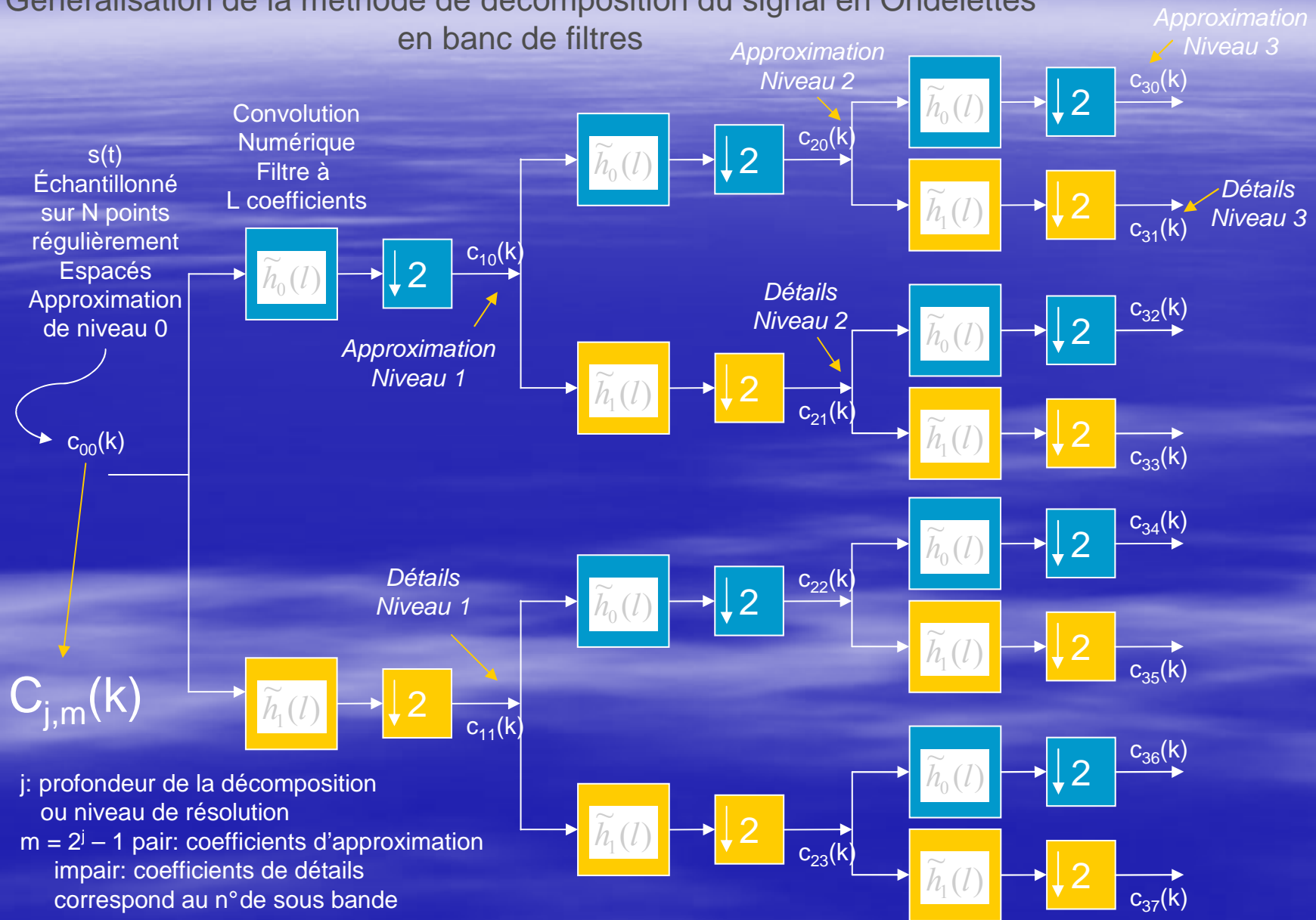
$$m = 3$$

(voir  
 « B\_Splines\_complex.m »)



# Paquets d'Ondelettes <sup>(1)</sup>

Généralisation de la méthode de décomposition du signal en Ondelettes en banc de filtres



# Paquets d'Ondelettes (2)

- Coefficients issus de chaque branche de décomposition : par projection orthogonales de  $s(t)$  sur des sous espaces vectoriels  $\Omega_{j,m}$  dont la base orthonormale est la famille de fonctions

$$\left\{ \frac{\omega_m\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

projection orthogonales de  $s(t)$

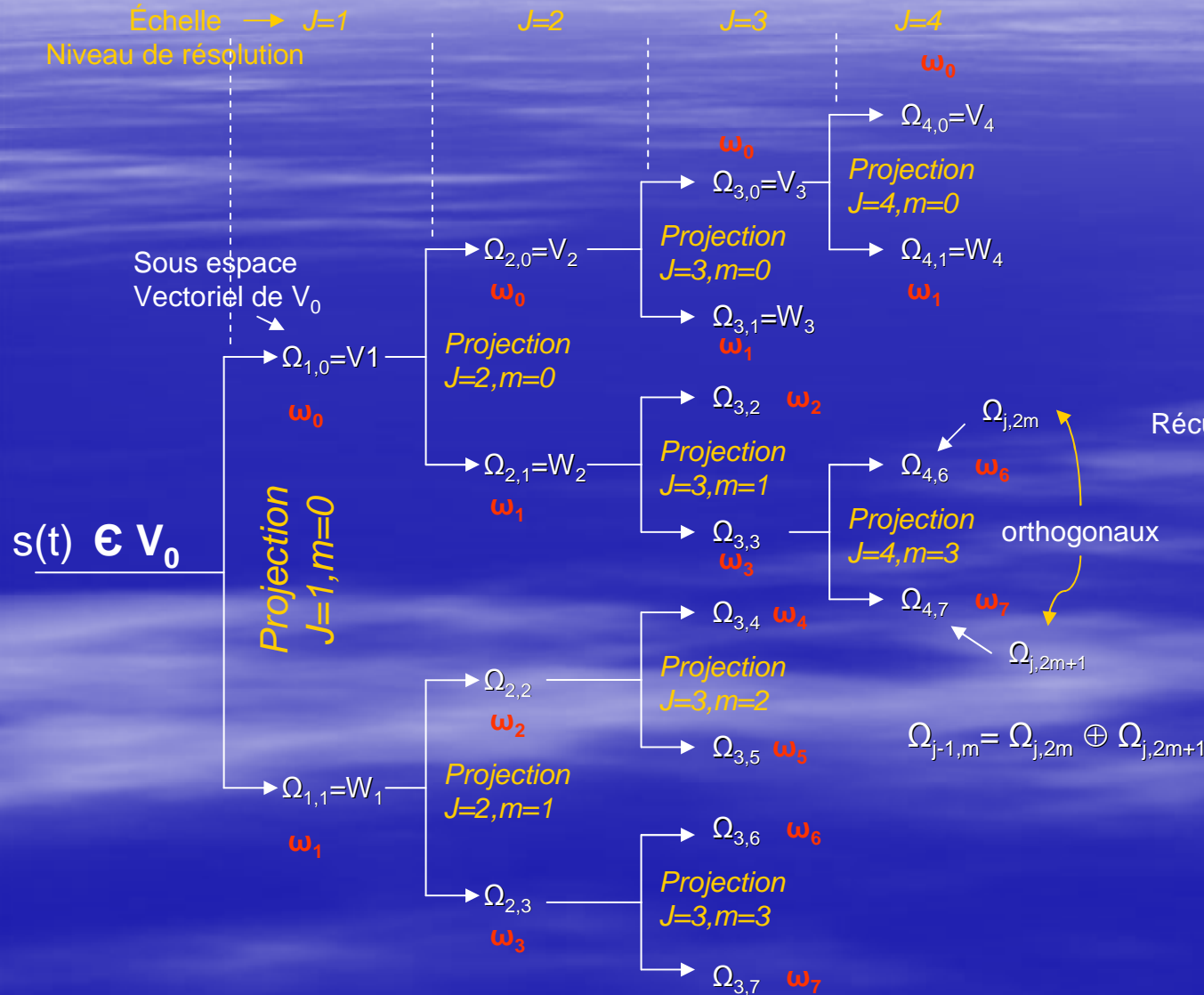
$$c_{j,m}(k) = \left\langle s(t), \frac{\omega_m\left(\frac{t}{2^j} - k\right)}{\sqrt{2^j}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

$\omega_0(t) = \varphi(t)$  ← Fonction d'échelle  
 $\omega_1(t) = \psi(t)$  ← Ondelette mère

Récursivité pour obtenir les fonctions  $\omega_m(t)$

$$\omega_{2m}(t) = \sqrt{2} \sum_l h_0(l) \omega_m(2t-l)$$

$$\omega_{2m+1}(t) = \sqrt{2} \sum_l h_1(l) \omega_m(2t-l)$$



# Paquets d'Ondelettes <sup>(3)</sup>

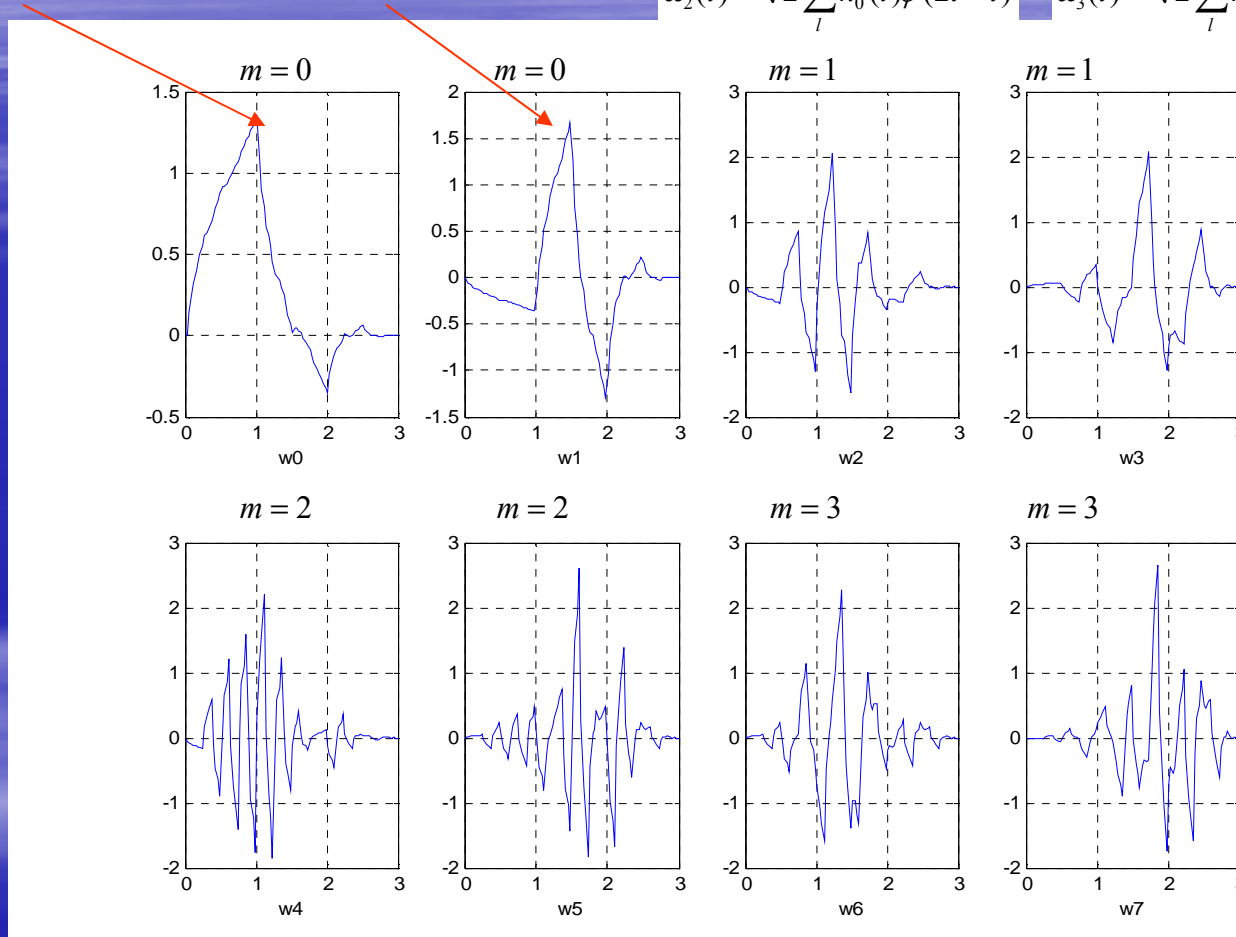
## de Daubechies 2

$\omega_0 = \varphi(t)$  Fonction d'échelle

$\omega_1 = \Psi(t)$  Ondelette Mère

$$\omega_2(t) = \sqrt{2} \sum_l h_0(l) \psi(2t-l)$$

$$\omega_3(t) = \sqrt{2} \sum_l h_1(l) \psi(2t-l)$$



$$\omega_4(t) = \sqrt{2} \sum_l h_0(l) \omega_2(2t-l)$$

$$\omega_5(t) = \sqrt{2} \sum_l h_1(l) \omega_2(2t-l)$$

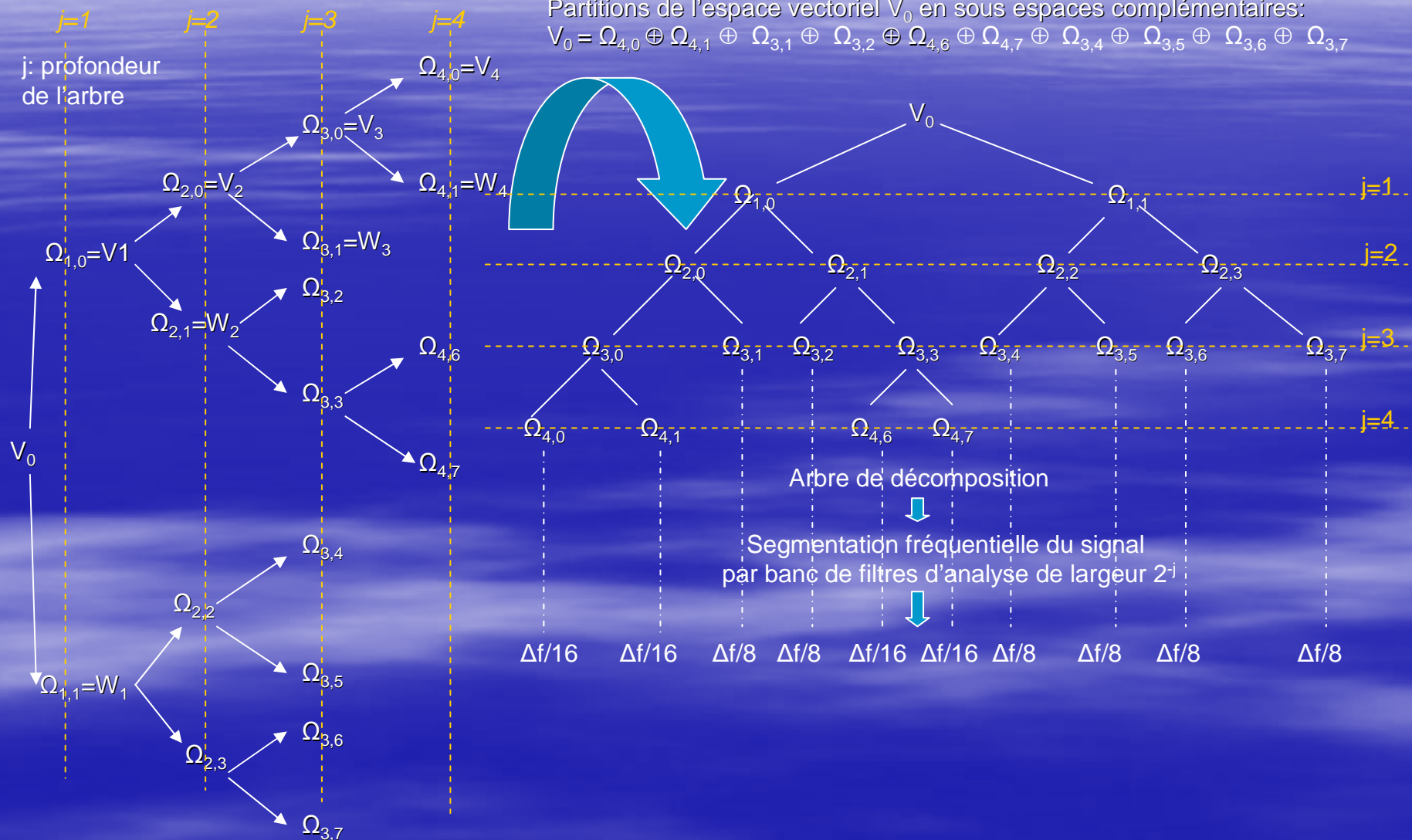
$$\omega_6(t) = \sqrt{2} \sum_l h_0(l) \omega_3(2t-l)$$

$$\omega_7(t) = \sqrt{2} \sum_l h_1(l) \omega_3(2t-l)$$

(voir programme « paquet\_ondelettes.m »)

# Paquets d'Ondelettes <sup>(4)</sup>

## arbre de décomposition en sous bandes



Décomposition en paquets d'Ondelettes



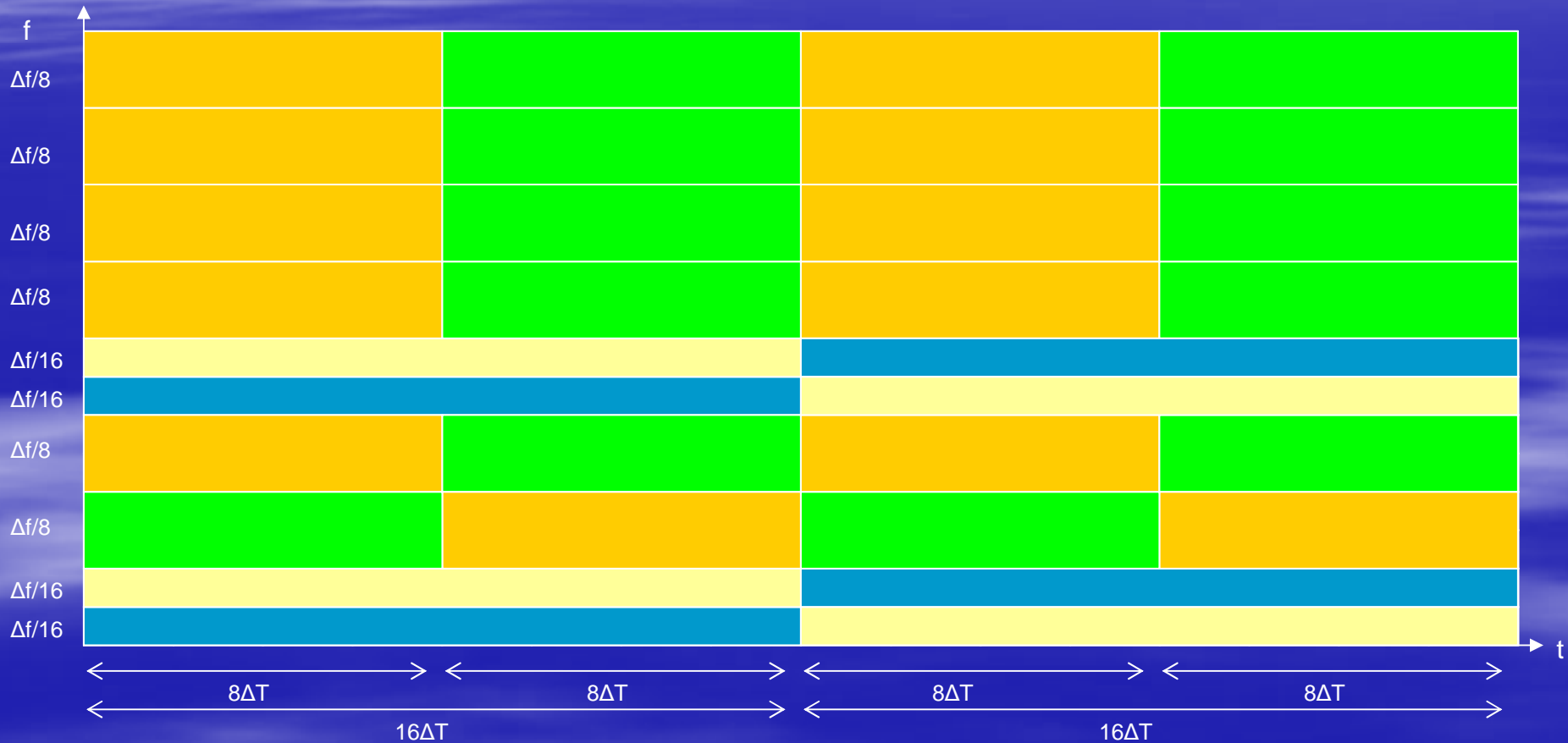
# Paquets d'Ondelettes <sup>(5)</sup>

## segmentation temps fréquence

Partitions de l'espace vectoriel  $V_0$  en sous espaces complémentaires:

$$V_0 = \Omega_{4,0} \oplus \Omega_{4,1} \oplus \Omega_{3,1} \oplus \Omega_{3,2} \oplus \Omega_{4,6} \oplus \Omega_{4,7} \oplus \Omega_{3,4} \oplus \Omega_{3,5} \oplus \Omega_{3,6} \oplus \Omega_{3,7}$$

Largeur sous-bandes :  $\Delta f/16$   $\Delta f/16$   $\Delta f/8$   $\Delta f/8$   $\Delta f/16$   $\Delta f/16$   $\Delta f/8$   $\Delta f/8$   $\Delta f/8$   $\Delta f/8$   
 Dilatation du temps :  $16\Delta T$   $16\Delta T$   $8\Delta T$   $8\Delta T$   $16\Delta T$   $16\Delta T$   $8\Delta T$   $8\Delta T$   $8\Delta T$   $8\Delta T$



Segmentation temps fréquence par paquet d'Ondelettes

# Sélection de la meilleure base d'Ondelettes

Décomposition optimale en Ondelette orthogonale déterminée par un critère :  
l' Entropie du signal

$$proj_E(s(t)) = \sum_{i=1}^K s_i e_i(t)$$

Entropie de Shannon

$$E1(s_i) = -s_i^2 \log(s_i^2) \Rightarrow E1(s) = -\sum_{i=1}^K s_i^2 \log(s_i^2)$$

Norme d'ordre p

$$E1(s) = \sum_{i=1}^K |s_i|^p$$

Logarithme de l'énergie

$$E3(s) = \sum_{i=1}^K \log(s_i^2)$$

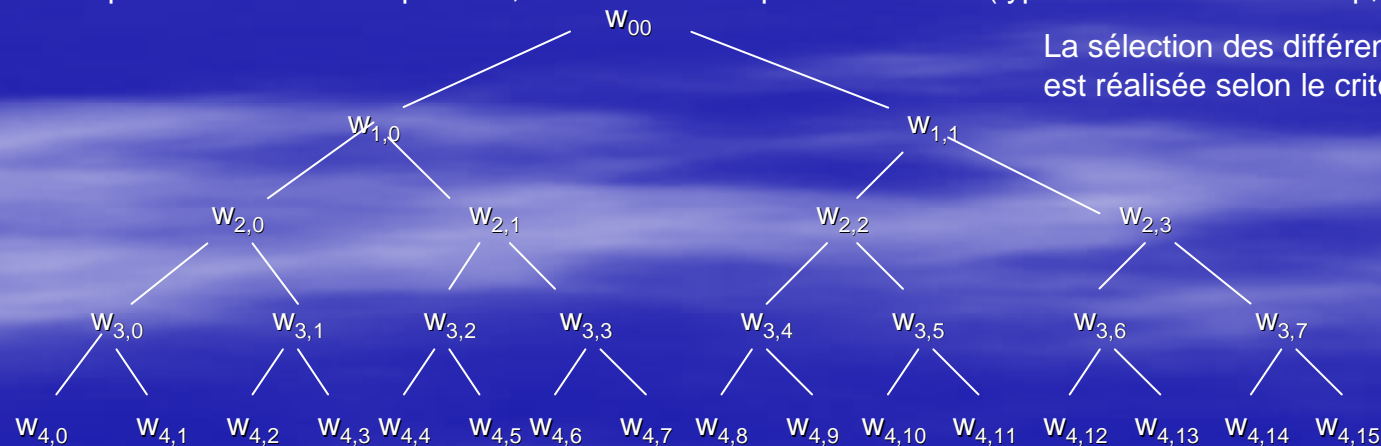
Entropie à seuil

$$E4(s_i) = 1 \text{ si } |s_i| > 1$$

$$E4(s_i) = 0 \text{ si } |s_i| \leq 1$$

E4 indique le nombre d'élément > seuil

A chaque niveau de décomposition, un calcul d'entropie est effectué (type Shannon ou Norme p, ou log(Énergie) ou à Seuil)



Exemple d'un arbre de décomposition en paquet d'Ondelettes du niveau 1 au niveau 4

# Sélection de la meilleure base d'Ondelettes (2)

```
s = ones(1,16)*0.25;
w00 = s;
% calcul de l'entropie au niveau j=0
e00 = wentropy(w00,'shannon')
```

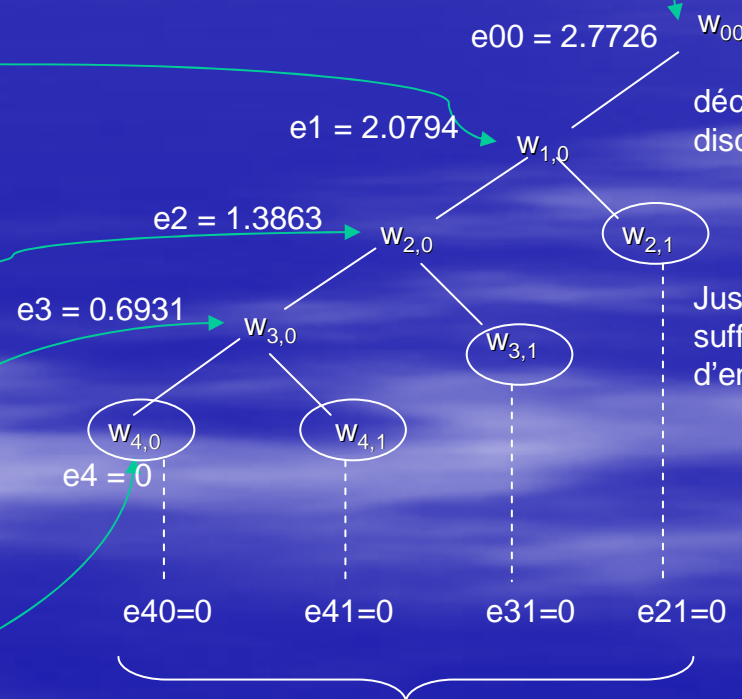
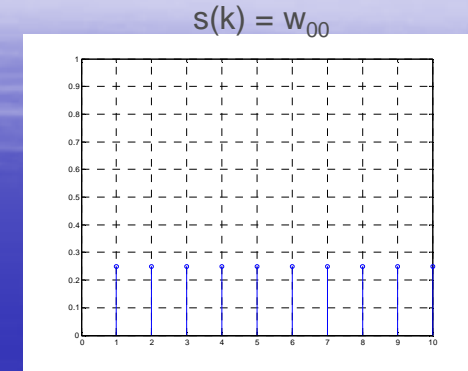
```
% décomposition de niveau j=1 ondelette de Haar
[w10,w11] = dwt(w00,'haar');
% calcul de l'entropie au niveau j=1
e10 = wentropy(w10,'shannon');
e11 = wentropy(w11,'shannon');
e1 = e10 + e11
```

```
% décomposition de niveau j=2 ondelette de Haar
[w20,w21] = dwt(w10,'haar');
% calcul de l'entropie au niveau j=2
e20 = wentropy(w20,'shannon');
e21 = wentropy(w21,'shannon');
e2 = e20 + e21
```

```
% décomposition de niveau j=3 ondelette de Haar
[w30,w31] = dwt(w20,'haar');
% calcul de l'entropie au niveau j=3
e30 = wentropy(w30,'shannon');
e31 = wentropy(w31,'shannon');
e3 = e30 + e31
```

```
% décomposition de niveau j=4 ondelette de Haar
[w40,w41] = dwt(w30,'haar');
% calcul de l'entropie au niveau j=4
e40 = wentropy(w40,'shannon');
e41 = wentropy(w41,'shannon');
e4 = e40 + e41
```

(voir programme « arbre\_decomposition.m »)



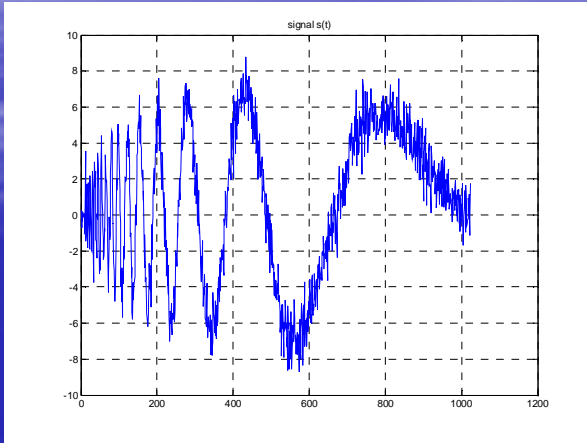
décomposition en Ondelette discrète 1D « dwt » de s

Jusqu'au niveau j=4 suffisant selon le critère d'entropie de Shannon

Entropie minimale avec un arbre de décomposition d'Ondelettes de Haar jusqu'au niveau j=4

# Sélection de la meilleure base d'Ondelettes (3)

Exemple de sélection du meilleur arbre de décomposition d'un signal bruité, critère de Shannon



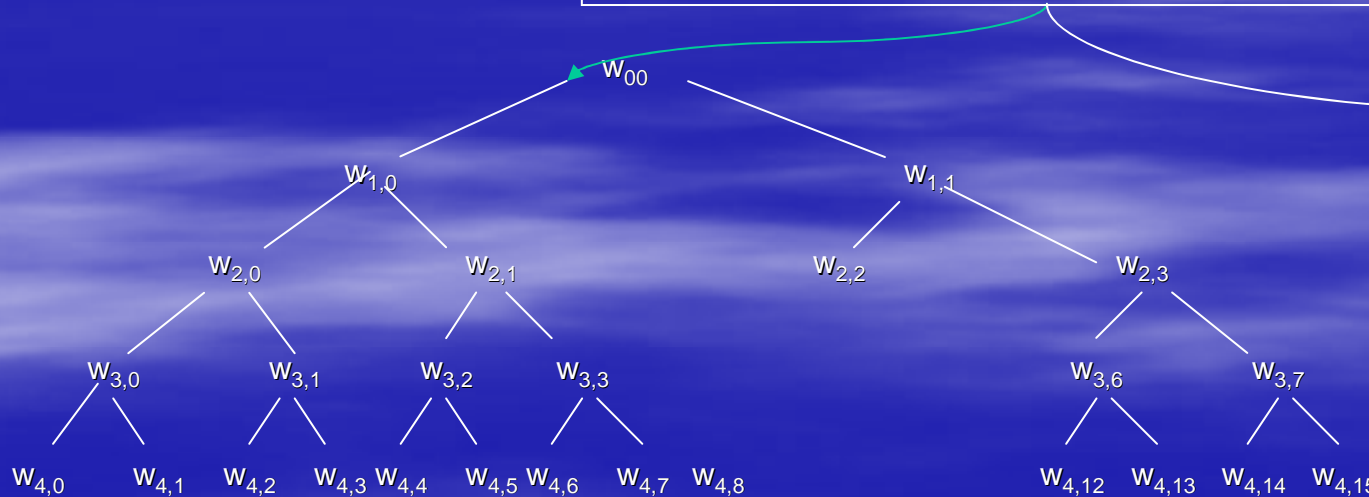
```
load noisdopp; s = noisdopp;
plot(s),grid,title('signal s(t)')
```

```
% Décomposition en paquet d'ondelette 1D de s(t) au niveau j=4
% en utilisant l'ondelette de Daubechies d'ordre 5 « db5 »
% en calculant l'entropie de Shannon à chaque niveau
paquet_ondelette = wpdec(s,4,'db4');
plot(paquet_ondelette),grid
```

```
% Choix du meilleur arbre du paquet d'ondelettes => paquet_ondelette_b
% selon le critère d'entropie de Shannon
% calcul de l'entropie à chaque noeud du meilleur arbre => E
[paquet_ondelette_b,E] = besttree(paquet_ondelette)
plot(paquet_ondelette_b),
```

Entropie de chaque nœud de l'arbre sélectionné

- 1.0e+005 \*
- e00 -1.0063
- e10 -1.0026
- e11 -0.0037
- e20 -0.9983
- e21 -0.0043
- e23 -0.0013
- e30 -0.0024
- e31 -0.9909
- e32 -0.0074
- e33 -0.0011
- e36 -0.0032
- e37 -0.0016
- e40 -0.0007
- e41 -0.9735
- e42 -0.0174
- e43 -0.0022
- e44 -0.0052
- e45 -0.0005
- e46 -0.0006
- e47 -0.0021
- e48 -0.0011
- e4,12 -0.0015
- e4,13 -0.0001
- e4,14 -0.0005
- e4,15 -0.0003



(voir programme « arbre\_decomposition\_1.m »)

# Analyse Multi Résolution 2 dimensions

Base orthonormée de l'espace vectoriel de dimension 2 au niveau de décomposition j:  $(V_j)^2$

$$\left\{ \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{x}{2^j} - n\right) \varphi\left(\frac{y}{2^j} - m\right) \right\}, (n, m) \in Z^2$$

Famille de fonction dilatée en temps du facteur  $2^{-j}$  translatée de n sur x et de m sur y

En 2D le complémentaire orthogonal de  $V_{j-1}^2$  dans  $V_j$  est formée de trois espaces vectoriels de détails:

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^H \oplus W_j^V \oplus W_j^D$$

$\psi(t)$  : Ondelette mère

$$\psi_H(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \rightarrow \text{base de } W_j^H : \left\{ \frac{1}{2^j} \psi_H\left(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m\right) \right\}, (n, m) \in Z^2$$

$$\psi_V(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \rightarrow \text{base de } W_j^V : \left\{ \frac{1}{2^j} \psi_V\left(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m\right) \right\}, (n, m) \in Z^2$$

$$\psi_D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \rightarrow \text{base de } W_j^D : \left\{ \frac{1}{2^j} \psi_D\left(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m\right) \right\}, (n, m) \in Z^2$$

$W_j^H$  Détails de l'image basses fréquences Horizontaux par  $\varphi(x)$  et hautes fréquences par  $\psi(y)$

$W_j^V$  Détails de l'image hautes fréquences Horizontaux par  $\psi(x)$  et basses fréquences par  $\varphi(y)$

$W_j^D$  Détails Diagonaux de l'image: hautes fréquences par  $\psi(x)$  et hautes fréquences par  $\psi(y)$

# Analyse Multi Résolution 2 dimensions (2)

L'image  $s(x,y)$  se projette sur l'espace vectoriel  $(V_j)^2$  au niveau de résolution  $2^j$  :

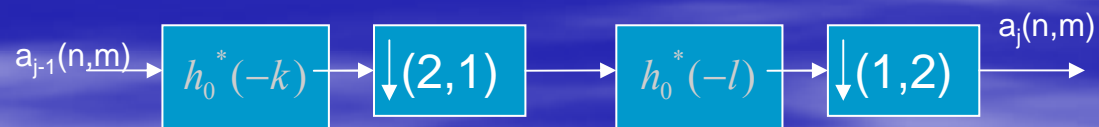
$$proj_{V_j^2} s(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_j(n,m) \cdot \frac{\varphi(\frac{x}{2^j} - n)\varphi(\frac{y}{2^j} - m)}{2^j}$$

$$a_j(n,m) = \left\langle \left\langle s(x,y), \frac{\varphi(\frac{x}{2^j} - n)\varphi(\frac{y}{2^j} - m)}{2^j} \right\rangle \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x,y) \frac{\varphi^*(\frac{x}{2^j} - n)\varphi^*(\frac{y}{2^j} - m)}{2^j} dx dy$$

Les coefficients d'approximation de résolution décroissante sont calculés par filtres numériques de réponse impulsionnelle

$h_0^*(-k)h_0^*(-l)$  avec  $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$  suivi d'une décimation d'ordre 2 sur les lignes et les colonnes

On décompose en un filtrage des lignes suivi d'une décimation d'ordre 2  
puis d'un filtrage des colonnes suivi d'une décimation d'ordre 2



# Analyse Multi Résolution 2 dimensions (3)

L'image  $s(x,y)$  se projette sur l'espace vectoriel  $(W_j)^H (W_j)^V (W_j)^D$  au niveau de résolution  $2^j$  :

$$proj_{W_j^H} s(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_j^H(n,m) \cdot \frac{\psi_H(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m)}{2^j}$$

$$proj_{W_j^V} s(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_j^V(n,m) \cdot \frac{\psi_V(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m)}{2^j}$$

$$proj_{W_j^D} s(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_j^D(n,m) \cdot \frac{\psi_D(\frac{x}{2^j} - n, \frac{y}{2^j} - m)}{2^j}$$

Les coefficients de détails de résolution décroissante sont calculés par filtres numériques de réponse impulsionnelle

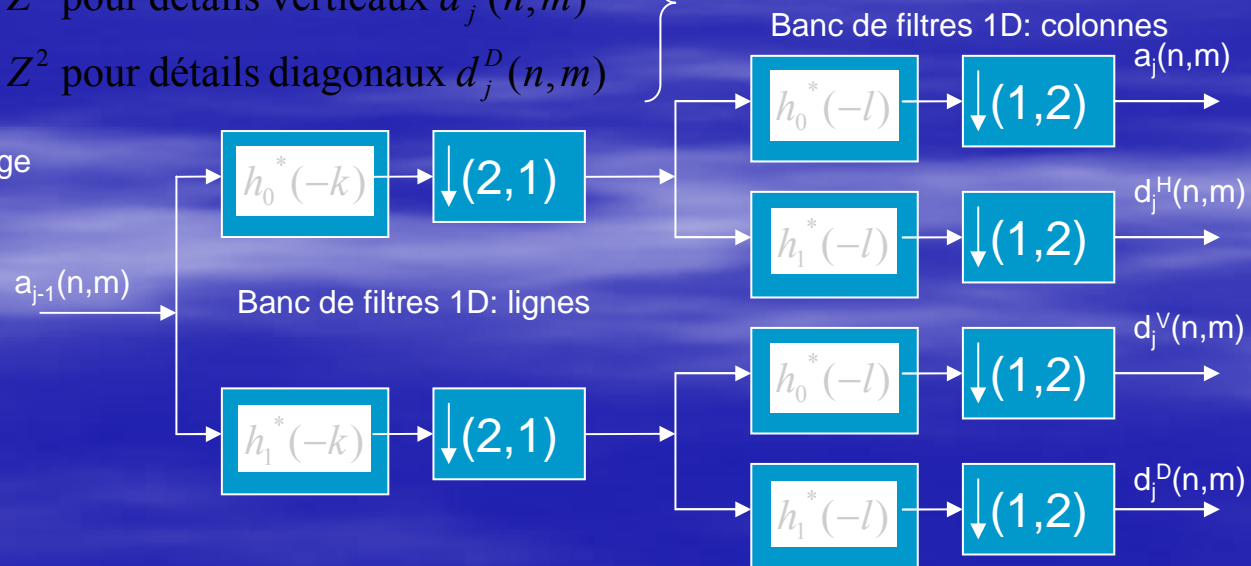
$h_0^*(-k)h_1^*(-l)$ ,  $(k,l) \in Z^2$  pour détails horizontaux  $d_j^H(n,m)$

$h_1^*(-k)h_0^*(-l)$ ,  $(k,l) \in Z^2$  pour détails verticaux  $d_j^V(n,m)$

$h_1^*(-k)h_1^*(-l)$ ,  $(k,l) \in Z^2$  pour détails diagonaux  $d_j^D(n,m)$

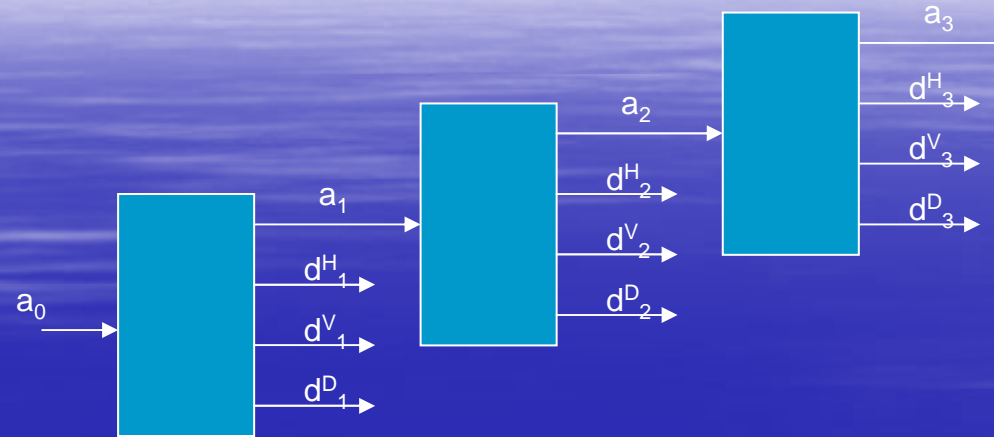
suivi d'une décimation d'ordre 2 sur les lignes et les colonnes

On décompose en un filtrage des lignes suivi d'une décimation d'ordre 2 puis d'un filtrage des colonnes suivi d'une décimation d'ordre 2

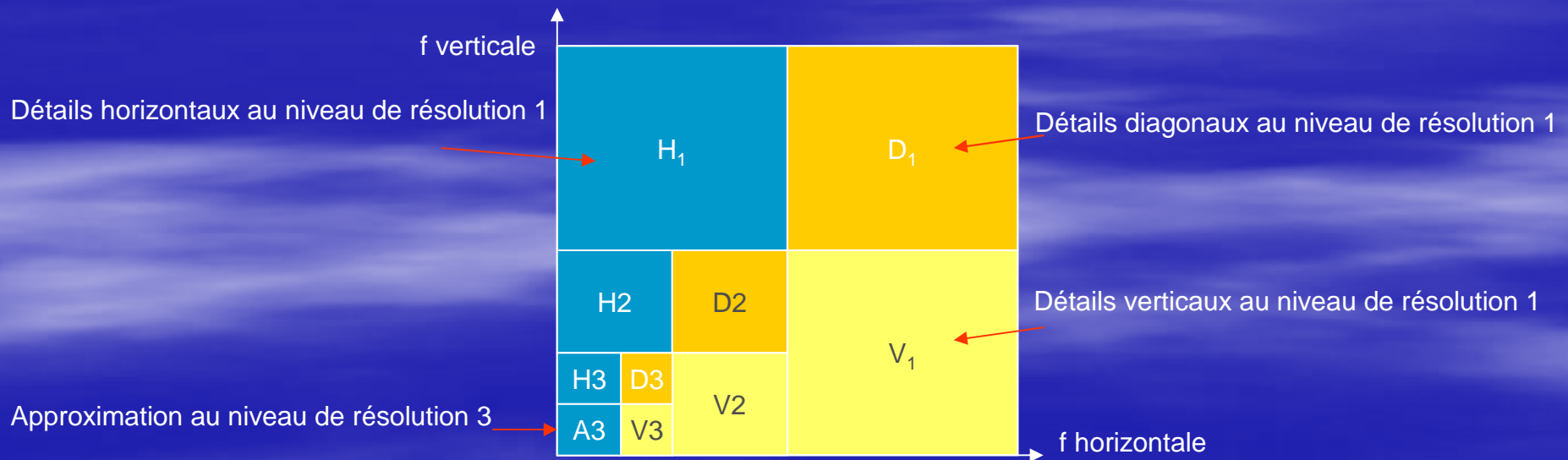


# Analyse Multi Résolution 2 dimensions (4)

Analyse d'une image: 4 composantes par niveau de résolution  $j$ :



AMR 2D à 3 niveaux de résolution



Découpage fréquentiel de  $a_0$  d'une AMR 2D à 3 niveaux de résolution



# APPLICATIONS

- Complément à l'analyse spectrale : le facteur d'échelle  $1/\alpha$  permet l'analyse d'irrégularité
  - Biologie: Reconnaissance de cellules pathologiques
  - Métallurgie: caractérisation de rugosité de surfaces
  - Financier: détection des valeurs à taux de variation rapide, prévisions
  - Internet: description du trafic, dimensionnement des services
- Complément à l'analyse temporelle
  - Détection de rupture temporelle
  - Étude des phénomènes à court terme (transitoires)
  - Industrie: vérification des irrégularités de roues dentées
  - Médecine: détection d'irrégularité dans les EEG
- Compression d'image
  - Empruntes digitales
  - Infographie
  - Géophysique, Représentation du relief
- Suppression de bruit
- Codage optimal
- Statistique: estimation de densité & régression

# Estimation de régression non linéaire par la méthode des Ondelettes

$$Y = f(X) + e$$

← modèle      ← résidus  
 ← X paramètre (unité : temps, longueur..., ou nombre)  
 f: Fonction identifiant les variations du processus à modéliser

$$Yb(i) = \frac{\sum_j Y(j)}{N_j} \text{ tel que } X(j) \in \text{interval } i$$

Transformation de (X,Y) en données régulièrement espacées (Xb,Yb)

N valeurs de Xb et N valeurs de Yb

$$\hat{a}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n Yb(l) \Phi_{j,k}(Xb(l))$$

$$\hat{d}_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n Yb(l) \Psi(Xb(l))$$

Estimation de la fonction  $f$  par la décomposition de la séquence Yb:

coefficients d'Approximation  $a_j$

coefficients d'Ondelette  $d_j$

# Extraction d'un signal perturbé par un bruit par la méthode des Ondelettes

$$y(n) = s(n) + \sigma e(n)$$

Signal bruité

Signal échantillonné à pas constant

Bruit blanc gaussien

Niveau de bruit

- Choisir une ondelette
- Décomposer le signal  $y(n)$  jusqu'à un niveau de résolution  $j=N$
- Appliquer un seuil aux coefficients de détails de chaque niveau
- Reconstruire le signal par ondelette à partir des coefficients d'approximation de niveau  $N$  et des coefficients de détails de niveau  $N$  à  $1$ .

- Comment choisir un seuil ?
- Comment appliquer le seuillage aux coefficients de détails ?

Seuillage dur:  $|x(n)| > \text{seuil} \rightarrow x(n)$  conservé  
 $|x(n)| \leq \text{seuil} \rightarrow x(n) = 0$

Seuillage doux:  $|x(n)| > \text{seuil} \rightarrow x(n) = \text{sign}(x) * (|x| - \text{seuil})$   
 $|x(n)| \leq \text{seuil} \rightarrow x(n) = 0$

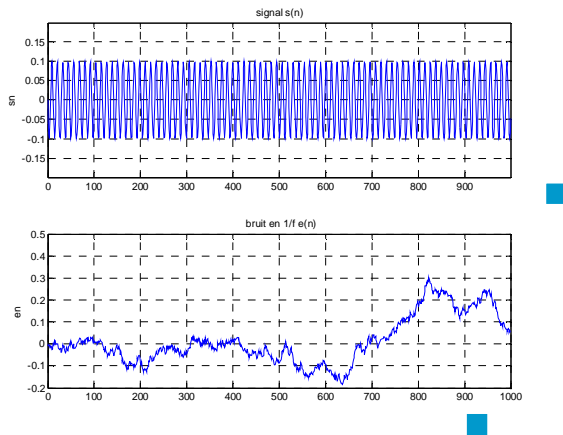
# Extraction d'un signal perturbé par un bruit par la méthode des Ondelettes (2)

## Méthodes de détermination du seuil

- en utilisant le principe d'Estimation du Risque Non Biaisé de Stein « SURE »  
Seuillage doux basé sur une fonction SURE de perte quadratique. On obtient une estimation du risque pour un seuil  $\beta$  particulier. La minimisation des risques en  $\beta$  donne une valeur de seuil à appliquer aux signaux de détails
- seuil fixé par la longueur L du signal, proportionnel à  $\sqrt{2 \log(L)}$   
méthode dite « Fixe »
- mélange du seuil « SURE » et « Fixe » appelé « heursure »  
pour un signal très bruité S/N faible la méthode SURE est très bruitée. On utilise alors la méthode « Fixe »
- en utilisant le principe du plus petit maximum.  
On utilise un seuil fixe choisit pour avoir une performance du plus petit maximum  
D'erreur quadratique moyenne par rapport à un cas idéal. Le principe du plus petit Maximum est utilisé en statistique afin de déterminer un estimateur. Le signal débruité est assimilé à un estimateur d'une fonction de régression inconnue, l'estimateur du plus petit maximum de l'erreur quadratique moyenne obtenue pour le pire cas.

# Extraction d'un signal perturbé par un bruit par la méthode des Ondelettes (exemple) (3)

Signal  $s(n)=0.1\sin(100t)$



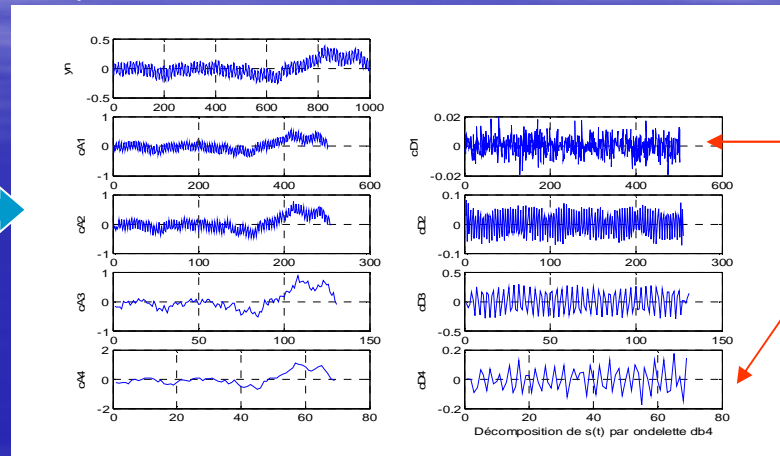
Bruit  $e(n)$  en  $1/f$  (scintillation)

Détermination des seuils des différentes méthodes:

méthode SURE	seuil = 0.38256
méthode Fixe	seuil = 3.7169
méthode HEURSURE	seuil = 3.7169
méthode Minimisation de l'Erreur Quadratique Moyenne	seuil = 2.2163

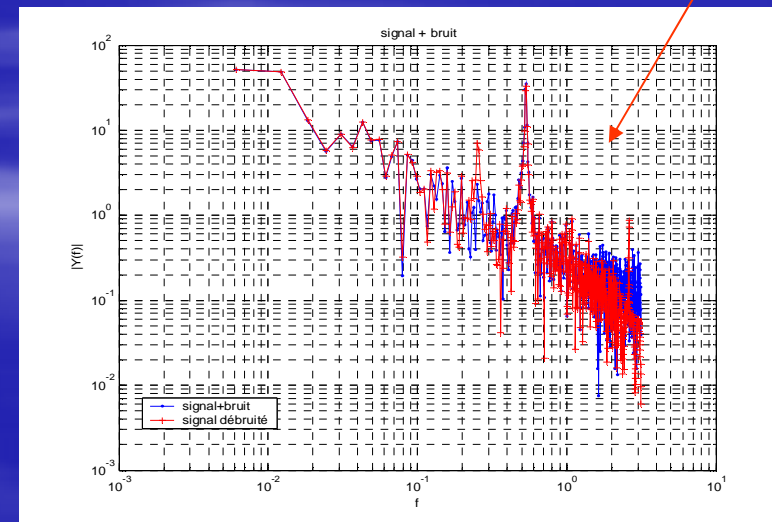
(voir programme « debruitage.m »)

Analyse par Ondelettes de Daubechies d'ordre 4  
Jusqu'au niveau de résolution 4



Application du  
Seuillage « heursure »  
Aux niveaux de détails  
cD4 & cD1

Comparaison  
du spectre du signal  
bruité et débruité



# bibliographie

- [1] Pesquet Popescu & Jean-Christophe, Ondelettes et applications Techniques de l'Ingénieur TE 5 215 : <http://www.techniques-ingenieur.fr/default.asp>
- [2] D. Percival & T. Walden, Wavelet Methods for Time Series Analysis, Cambridge Series in Statistical & Probabilistic Mathematics
- [3] G. Strang & T. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press
- [4] Wavelet Toolbox User Guide , The MathWorks
- **Logiciels:**
- De nombreux logiciels existent qui rendent maintenant aisée la mise en œuvre d'une transformation en ondelettes. La plupart de ces produits s'intègrent dans des progiciels plus importants (MATLAB, Mathematica...) destinés au calcul numérique ou symbolique. Par ailleurs, ces programmes sont généralement disponibles sur différents systèmes (Unix/Linux, Windows, Macintosh).
- Parmi les logiciels commerciaux, mentionnons la Wavelet Toolbox, une boîte à outils MATLAB (<http://www.mathworks.com/>) et Wavelet Explorer, un « package » de Mathematica (<http://store.wolfram.com/>). Ces ensembles de routines permettent l'analyse et la synthèse de signaux et images à l'aide d'ondelettes. Ils offrent également des fonctionnalités pour le débruitage et la compression de données.
- Des logiciels gratuits de bonne qualité sont aussi mis à la disposition du public. En particulier, WaveLab est une bibliothèque très complète de fonctions MATLAB écrites à l'université de Stanford (<http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>).
- XWPL est un utilitaire X-Windows conçu à l'université de Yale (<http://www.math.yale.edu/pub/wavelets>) pour illustrer l'intérêt des décompositions en paquets d'ondelettes.
- Des boîtes à outils MATLAB pour l'analyse temps-fréquence ou temps-échelle ont également été développées au sein des Groupements de Recherche du CNRS en traitement du signal et des images (<http://www.isis.enst.fr/Applications>).
- Enfin, l'INRIA propose FracLab, un ensemble de fonctions Scilab (ou MATLAB) qui met bien en relief les liens existant entre les ondelettes et les fractales (<http://www-syntim.inria.fr/fractales/fractales-eng.html>).