ECOLE D'ETE GRGS 2004

Centre de formation, IGN, Forcalquier

GRAVITATION RELATIVISTE

Bertrand CHAUVINEAU

Observatoire de la Côte d'Azur
UMR 6162 - ARTEMIS

06 130 Grasse

Calcul tensoriel

- Variété = ens. d'elts, appelés points

$$P \longleftrightarrow \underbrace{(x^1, \ldots, x^N)}_{\text{Coordonnées}} \qquad N = \dim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variété}}}{V}$$

- Notion de "voisinage"

$$\left.\begin{array}{l} P(x^k) \\ Q(x^k + dx^k) \end{array}\right\} \text{ points voisins si } dx^k \text{ "petit"}$$

- ⚠ Aucune notion géométrique a priori

~~Distance~~

~~parallélisme~~

~~angle~~ ...

- Connu : notions d'analyse.

Chgts de coordonnées

$$\text{Coord}\,(x) \longrightarrow \text{Coord}\,(x')$$

$x'^k(x^i)$: suffisamment regulieres (derivables...)

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\right) \neq 0 \qquad \text{(inversibilité locale)}$$

$$\text{un point} \longrightarrow \begin{cases} x^k & \text{dans Coord}\,(x) \\ x'^k & \text{dans Coord}\,(x') \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$

Syst Coord $\longleftrightarrow$ referentiel, jauge, ...

Tenseurs (et autres objets) definis par :

- leurs composantes
- la façon dont celles-ci se transforment ds un chgt quelconque de coord.

2 points voisins P et Q :

Dans
- Coord (x) : $P(x^k)$, $Q(x^k + \delta x^k)$
- Coord (x') : $P(x'^k)$, $Q(x'^k + \delta x'^k)$

avec δx^k et $\delta x'^k$ petits.

Chgt coord. donne la relation entre les δx^k et $\delta x'^k$:

$$\delta x'^k = \left(\sum_i\right) \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \delta x^i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \delta x^i$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta x^i = \left(\sum_k\right) \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \delta x'^k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \delta x'^k$$

$$\left(\sum_j\right) \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

A - Champs de tenseurs

Scalaires, tenseurs (contravariants, covariants, mixtes).

1 - Champ scalaire.

fonction qui, à tt point, associe un nombre indépendant de Coord (x).

$$\phi : \quad P \longmapsto \phi(P)$$

avec :
$$\phi(\underbrace{x^1, x^2, \dots}_{\substack{\text{Coord. de } P \\ \text{ds Coord}(x)}}) = \phi'(\underbrace{x'^1, x'^2, \dots}_{\substack{\text{Coord. de } P \\ \text{ds Coord}(x')}})$$

⚠ $\phi' \neq \phi$

scalaire ≡ tenseur d'ordre zero ≡ tenseur $\binom{0}{0}$.

2 - Vecteur contravariant (tenseur contr. d'ordre 1)

Soit un objet A à N composantes, notées :

$$A(1),\ A(2),\ \ldots,\ A(N). \quad \text{ds Coord}(x)$$

Chgt coord $\longrightarrow$ $A'(1), A'(2), \ldots, A'(N)$ ds Coord(x')

Si : $$A'(k) = \sum_i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A(i)$$

càd. si les $A(k)$ se transforment comme dx^k lors d'un chgt de Coord, on dit que A est un vecteur contravariant, ou tenseur contravariant du 1er ordre.

$$A(k) \equiv \text{tenseur} \binom{1}{0}$$

Notation : $A(k) \longrightarrow A^k$

$$A'^k = \underbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}}_{\text{matrice jacobienne } (x \to x')} A^i$$

3 – Vecteur covariant (tenseur cov. d'ordre 1)

Soit un objet B à N composantes, notées :

$$B(1),\ B(2),\ \ldots,\ B(N) \qquad \text{ds Coord } (x)$$

Chgt Coord $\longrightarrow$ $B'(1),\ B'(2),\ \ldots,\ B'(N)$ ds Coord(x').

Si

$$B'(k) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, B(i)$$

càd si les $B(k)$ se transforment de façon inverse des dx^k lors d'un chgt de coord., on dit que B est un vecteur covariant, ou tenseur covariant du 1er ordre.

$$B(k) \equiv \text{tenseur } \binom{0}{1}$$

Notation : $B(k) \longrightarrow B_k$

$$B'_k = \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}}_{\text{matr. jacob. inverse } (x \to x')^{-1} = (x' \to x)} B_i$$

⚠ position indices.

4 - Tenseurs d'ordre supérieur

- Tenseur contrav de $2^{\text{ème}}$ ordre : N^2 comp. $T^{\alpha\beta}$

$$T'^{\alpha\beta} = \left(\sum_i \sum_j\right) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} T^{ij} \qquad \text{Tenseur } \binom{2}{0}$$

- Tenseur cov. de $2^{\text{ème}}$ ordre : N^2 comp. $T_{\alpha\beta}$

$$T'_{\alpha\beta} = \left(\sum_i \sum_j\right) \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta} T_{ij} \qquad \text{Tenseur } \binom{0}{2}$$

- Tenseur mixte de $2^{\text{ème}}$ ordre : N^2 comp. $T^\alpha{}_\beta$

$$T'^\alpha{}_\beta = \left(\sum_i \sum_j\right) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta} T^i{}_j \qquad \text{Tenseur } \binom{1}{1}$$

- Tenseur $\binom{p}{q}$: N^{p+q} comp.

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x'^{\beta_q}} \cdot T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} .$$

5- Remarques

- Ts ces objets sont des champs

$$A'^{\cdots}_{\cdots}(\underset{x \text{ ou } x'}{\uparrow}{P}) = \frac{\partial x'^{\cdot}}{\partial x^{\cdot}}(P) \cdots\cdots \frac{\partial x^{\cdot}}{\partial x'^{\cdot}}(P) \cdots\cdots A^{\cdots}_{\cdots}(P)$$

- Comment "reconnaitre" un tenseur ?

Soit A un objet à N^r composantes.

– on decide que A est un tenseur $\binom{p}{q}$, $p+q=r$.

$\hookrightarrow$ la donnée des comp. de A ds un syst de coord donne les comp. ds $\forall$ syst de coord.

– on connait les comp. de A ds ts les syst de coord.

$\hookrightarrow$ on regarde si $A'^{\cdots}_{\cdots} = \frac{\partial x'^{\cdot}}{\partial x^{\cdot}} \cdots \frac{\partial x^{\cdot}}{\partial x'^{\cdot}} \cdots A^{\cdots}_{\cdots}$

et on conclu.

– A est construit à partir d'objets dont on connait le statut.

$\hookrightarrow$ on en deduit la relation entre $A^{\cdots}_{\cdots}$ et $A'^{\cdots}_{\cdots}$

et on conclu.

6 - Exemples

a - Gradient d'un chp scalaire.

Φ = chp. sc. $\Longrightarrow$ $A(i) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ statut ?

$$\phi'(x'^k) = \phi(x^k) \qquad \text{(scalaire).}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\partial \phi'}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

Or : $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x^{j \neq i}} = \left(\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^{j \neq i}} \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x'^\alpha}\right)_{x'^{\beta \neq \alpha}}$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

ou : $\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} A'(\alpha) = A(i)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \text{tenseur } \binom{0}{1}$$

notation : $\partial_i \phi$.

b- Symbole de Kroenecker

Soit l'objet à N^2 comp. $K(i,j)$ defini par :

$$\forall \text{ Coord}(x) : \quad K(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

statut ?

Autre façon de poser le Pb.

Soient u^{ij}, $V^i{}_j$, W_{ij} des tenseurs d'ordre 2, ayant pour comp. $K(i,j)$ ds Coord(x).

$\rightsquigarrow$ Comp. ds Coord(x') ?

* $u^{ij} = K(i,j) \implies u'^{ij} = ?$

$$u'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta} u^{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta} K(\alpha,\beta) = \sum_{\alpha} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\alpha}$$

$\Rightarrow u'^{ij} \neq K(i,j)$ en general.

$\rightsquigarrow K(i,j) \neq$ tenseur $\binom{2}{0}$

* $V^i_{\ j} = K(i,j) \Longrightarrow V'^i_{\ j} = ?$

$$V'^i_{\ j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} V^\alpha_{\ \beta}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} K(\alpha,\beta)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \longrightarrow = K(i,j)$$

$$K(i,j) = \text{tenseur} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leadsto \delta^i_j$$

* $W_{ij} = K(i,j) \Longrightarrow W'_{ij} = ?$

$$W'_{ij} = \ldots\ldots \neq K(i,j)$$

B – Opérations sur les tenseurs.

- Somme

La somme (comp. à comp.) de 2 chps de tenseurs de $\hat{m}$ natures est un chp de tenseurs de $\hat{m}$ nature.

$$\underbrace{a_k^{ij}}_{\text{tens}\binom{2}{1}} + \underbrace{b_k^{ij}}_{\text{tens}\binom{2}{1}} = \underbrace{c_k^{ij}}_{\text{tens}\binom{2}{1}}$$

- Produit

Le pdt de 2 chps de tenseurs quelconque donne un nouveau chp de tenseurs.

$$\underbrace{a^i_{jk}}_{\binom{1}{2}} \cdot \underbrace{b^l_m}_{\binom{1}{1}} = \underbrace{c^{il}_{jkm}}_{\binom{2}{3}}$$

en général : $\text{tsr}\binom{p}{q} \cdot \text{tsr}\binom{r}{s} = \text{tsr}\binom{p+r}{q+s}$.

en particulier : $\text{scal} \cdot \text{tsr}\binom{p}{q} = \text{tsr}\binom{p}{q}$.

- Contraction

à partir d'1 tsr mixte $\binom{p}{q}$, permet de construire un nouveau tsr $\binom{p-1}{q-1}$.

$$A^{ijk\ell}_{mnp} \xrightarrow[\text{puis } \sum_\ell]{n=\ell} B^{ijk}_{mp} = A^{ijk\sigma}_{m\sigma p}$$

On prend la "trace" sur les 2 indices (1 cov, 1 ctrv) considérés.

Exemples

- tsr mixte $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ctrct.}}$ scalaire.

$$m^i_j \longrightarrow m^\sigma_\sigma \qquad (\text{trace d'une matrice}).$$

Si $m^i_j = \delta^i_j$, $\qquad m^\sigma_\sigma = N \qquad (\dim V)$.

- Produit contracté de 2 tsrs.

$$A_{ij}\,,\; B^\ell_k \longrightarrow A_{ij} B^\ell_k \xrightarrow{\text{ctrct.}} \begin{cases} A_{ij} B^\sigma_\sigma \\ A_{i\sigma} B^\sigma_k \\ A_{\sigma j} B^\sigma_k \end{cases}$$

en particulier :

$$U_i\,,\; V^j \xrightarrow{\text{Pdt}} U_i V^j \xrightarrow{\text{ctrct}^\circ} U_i V^i \quad (\text{pdt scalaire}).$$

- $\underset{\overrightarrow{PQ}}{\underset{\uparrow}{dx^i}}\,,\; \partial_j \phi \xrightarrow[\text{ctrct.}]{\text{Pdt}} dx^i \partial_i \phi = d\phi = \phi(Q) - \phi(P)$

- ⚠ $\quad A^i_j = \text{tsr} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

  On montre que $\det(A^i_j) = \text{scalaire}$.

  ⚠ 2 $\qquad \neq A^i_i$!!!

C - Densités tensorielles

Tenseur $\binom{p}{q}$:

$$T'^{\cdots}_{\cdots} = \frac{\partial x'^{\cdot}}{\partial x^{\cdot}} \cdots \frac{\partial x^{\cdot}}{\partial x'^{\cdot}} \cdots T^{\cdots}_{\cdots}$$

Densité tensorielle $\left[\binom{p}{q}, \omega\right]$:

$$\mathcal{T}'^{\cdots}_{\cdots} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\omega} \cdot \frac{\partial x'^{\cdot}}{\partial x^{\cdot}} \cdots \frac{\partial x^{\cdot}}{\partial x'^{\cdot}} \cdots \mathcal{T}^{\cdots}_{\cdots}$$

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \det\left|\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\right| = \text{Jacobien de la transformation.}$$

ω = poids de la densité ⚠ Distinguer "poids" & "ordre".

Mêmes opérations :

$$\left[\binom{p}{q}, \omega\right] + \left[\binom{p}{q}, \omega\right] = \left[\binom{p}{q}, \omega\right]$$

$$\left[\binom{p}{q}, \omega\right] \cdot \left[\binom{p'}{q'}, \omega'\right] = \left[\binom{p+p'}{q+q'}, \omega+\omega'\right]$$

$$\left[\binom{p}{q}, \omega\right] \xrightarrow{\text{ctrct.}} \left[\binom{p-1}{q-1}, \omega\right].$$

Exemples:

- A_{ij} = tenseur $\binom{0}{2}$ $\Rightarrow$ $\det(A_{ij})$ = dens. scal. $\quad \omega = -2$.

  A^{ij} = " $\binom{2}{0}$ $\Rightarrow$ $\det(A^{ij})$: " " $\quad \omega = +2$

  coroll. : $\sqrt{|\det(A_{ij})|}$ = dens. scal. $\omega = -1$

*** role important des dens. scal. $\omega = -1$ ds l'expression integrale des lois de la physique.

- Soit $A^{i_1 \dots i_N}$ un tenseur completement anti-sym.

  $N = \dim V$.

  $\rightsquigarrow$ 1 seule comp "libre" : $A^{1 \dots N}$.

  On montre que : $A'^{1 \dots N} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| A^{1 \dots N}$

  $\rightsquigarrow$ $A^{1 \dots N}$ considéré comme un nombre unique est une densité scalaire de poids $\omega = +1$.

  rque : si $A^{1 \dots N} = +1$, on note souvent

  $$A^{i_1 \dots i_N} = \varepsilon^{i_1 \dots i_N}$$

D. Critères de tensorialité

Pour montrer que $T^{\cdots}_{\cdots} = \left[\binom{p}{q}, \omega \right]$, on peut :

1 - methode directe (voir + haut)

2 - * Si $\forall$ vect contrav U^i, la quantité

$U^i V_i$ est un scalaire, alors V_i = tenseur $\binom{0}{1}$

* Si $\forall$ vect cov A_i, la quantité

$A_i B^{ij}$ = densité $\left[\binom{1}{0}, \omega \right]$

alors : B^{ij} = densité $\left[\binom{2}{0}, \omega \right]$.

E - Tensorialité & principe de relativité

Description des systemes physiques par des grandeurs physiques dont les val. num. dependent du syst. de coord. en général :

$$\vec{v}\,,\ m\,,\ \vec{E}\,,\ \vec{B}\,,\ \dots$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coord}(x) : & \overset{(1)}{G}\,,\ \overset{(2)}{G}\,,\ \dots \\ \text{Coord}(x') : & \overset{(1)}{G}{}'\,,\ \overset{(2)}{G}{}'\,,\ \dots \end{array}\right\}\ \text{pour décrire le même système.}$$

- Loi physique : relation $\mathcal{R}$ entre grandeurs physiques.

$$\mathcal{R}\left(\overset{(1)}{G}, \overset{(2)}{G}, \dots\right) = 0$$

- Ppe de relativité : les lois de la physique sont invariantes par chgt de ref (indepdtes syst. coord.).

$$\underbrace{\mathcal{R}\left(\overset{(1)}{G}, \overset{(2)}{G}, \dots\right) = 0 \xrightarrow{\text{Coord}(x) \to \text{Coord}(x')} \mathcal{R}\left(\overset{(1)}{G}{}', \overset{(2)}{G}{}', \dots\right) = 0}_{\text{la même relation}}$$

⚠ Ce que NE DIT PAS le ppe de relat :

- une exp. phys. s'interprète de la même façon ds ts les referentiels

- Il n'y a pas de ref. privilégié ds un sens général.

- Chps tensoriels / densitaires

$$E'^{\cdots}_{\cdots}(P) = (\mathcal{L}in)_{(P)} \, E^{\cdots}_{\cdots}(P)$$

Linéarité transfo. $\Rightarrow \left(E^{\cdots}_{\cdots} = 0 \Rightarrow E'^{\cdots}_{\cdots} = 0 \right)$

↳ Si une rel. entre gdeurs phys. s'écrit

$E^{\cdots}_{\cdots} = 0$ ou $E^{\cdots}_{\cdots} = F^{\cdots}_{\cdots}$ (E, F : ts/d. ts de m̂ nat.)

elle est invariante par chgt de ref, et obeit donc manifestement au ppe de relat. (manifestement covariante).

↳ 1. langage tensoriel = langage naturel de la physique relativiste

2. les lois de la phys. ont un caractère essentiellement local.

F - Variétés métriques

1 - Définitions

- Une variété métrique est la donnée :
  - d'une variété V
  - d'un chp de tenseur $\binom{0}{2}$ symétrique, appelé tenseur métrique, qu'on notera $g_{ij}(x)$.

- Soient 2 pts voisins $P(x^k)$, $Q(x^k + dx^k)$.

le scalaire

$$g_{ij}(x) . dx^i dx^j$$

sera appelé distance métrique entre P et Q. On note

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

⚠ peut être >0, <0 ou $=0$.

- Un vecteur isotrope $u^i \neq 0$ est tel que, par déf :

$$g_{ij} u^i u^j = 0 .$$

- Si
  - g_{ij} ~ 2x ∂able
  - $\det(g_{ij}) \neq 0$

  ↪ variété riemannienne.

2 - Exemples $\quad \dim V = 2$.

- $\exists$ Coord : $\quad g_{11} = g_{22} = 1 \,,\ g_{12} = 0 \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$

  "plan euclidien", en coord. cartésiennes

- $\exists$ Coord : $\quad g_{11} = 1 \,,\ g_{22} = x^2 ,\ g_{12} = 0 \qquad ds^2 = dx^2 + x^2 dy^2$

$$\left.\begin{array}{l} X = x \cos y \\ Y = x \sin y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ds^2 = dX^2 + dY^2$$

  $\hookrightarrow$ "plan euclidien", en coordonnées polaires.

- $\exists$ Coord : $\quad g_{11} = -1 \,,\ g_{22} = +1 ,\ g_{12} = 0 \qquad ds^2 = -dx^2 + dy^2$

  $\nexists\ X(x,y),\ Y(x,y)$ t.q. $\ ds^2 = dX^2 + dY^2$

  "plan pseudo-euclidien" de la relat. restreinte.

- $\exists$ Coord : $\quad g_{11} = 1 \,,\ g_{22} = \sin^2 x \,,\ g_{12} = 0 \qquad ds^2 = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2$

  $\nexists$ . . . .

  sphère.

3 - Composantes contrav. / mixtes du tenseur métrique

$\det(g_{ij}) \neq 0 \Rightarrow \exists$ tenseur $(\overset{2}{0})$, G^{ij}, t.q. :

$\forall x^k, \quad g_{ij}(x) . G^{jk}(x) = \delta_i^{\ k}$

Notation : $G^{ij} \to g^{ij}$: Comp. contrav. du tenseur métrique.

Par déf : $\delta_i^{\ j}$ est appelé aussi composantes mixtes du tenseur métrique. càd :

$$g_i^{\ j}(x) = \delta_i^{\ j} \quad \text{(indep. du point et de } g_{ij})$$

⚠ $\quad g^{ij} \neq g_{ij} \quad (\neq g_i^{\ j})$

Ce sont des objets de natures différentes, mais associés de façon unique

- $$g^{ij} \partial_k g_{ij} = \frac{1}{g} \partial_k g \qquad \text{où } g = \det(g_{ij})$$

$$(= - g_{ij} \partial_k g^{ij})$$

4 - Abaissement / Elevation des indices.

$$A^i \xrightarrow{g_{ij}} B_i \quad : \quad B_i = g_{ij} A^j$$

tenseur

Notation : $B_i = A_i$: $A_i = g_{ij} A^j$

inversion : $A^i = g^{ij} A_j$

Terminologie :

A^i = composantes contravariantes } de A

A_i = " covariantes } de A

• Tenseurs d'ordre qque :

$$B_{kl} \to B^k{}_l = g^{\sigma k} B_{\sigma l}$$

$$B_{kl} \to B_k{}^l = g^{\sigma l} B_{k\sigma}$$

⚠ $B^k{}_l \neq B_k{}^l$ (sauf si B_{kl} sym).

$$C^{ij}{}_k = g^{j\sigma} C^i{}_{\sigma k} = g^{i\alpha} g^{j\sigma} C_{\alpha\sigma k} \dots$$

Rque : $g_i{}^j = g_{i\lambda} g^{\lambda j} = \delta_i^j$ ok

Le tenseur métrique permet d'associer entre eux des tenseurs de natures différentes.

- Contraction / indices de m̂ variance :

$$B_{i j k} \longrightarrow B^{i}{}_{jk} = g^{\alpha i} B_{\alpha jk}$$

Puis on contracte sur i et k.

$$\hookrightarrow \quad g^{\alpha\beta} B_{\alpha j \beta} = B^{\alpha}{}_{j\alpha}$$

Pdt sc. de 2 vecteurs de m̂ natures :

$$u^i, v^i \longrightarrow u^i v_i = g_{ij} u^i v^j .$$

G - Derivation covariante. Connexion de Christoffel.

1- Le problème

$$\phi \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \text{tenseur} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

$$\text{tenseur ordre} \geq 1 \xrightarrow{\partial/\partial x^i} ??$$

Par ex : statut de $\dfrac{\partial A^k}{\partial x^i}$?

$$A^k = \text{tenseur} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \hookrightarrow \quad \frac{\partial A'^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \cdot A^j$$

$$\frac{\partial A'^i}{\partial x^k} \longrightarrow \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial A'^i}{\partial x'^\alpha}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\partial A'^i}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \cdot A^j}_{\text{terme "supplementaire"}}$$

$= 0$ si $x' = \text{lin}(x)$.

2 → la dérivée d'un chp de tenseurs n'est pas un chp de tenseurs.

Pb : comment generaliser la notion de derivation, pour induire un chp de tenseurs par derivation d'un chp de tenseurs ?

2 - Derivation covariante

Connexion de Christoffel :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k\sigma} \left(\partial_i g_{j\sigma} + \partial_j g_{i\sigma} - \partial_\sigma g_{ij} \right) .$$

On montre que :

$$\nabla_i A^k \underset{(def)}{=} \partial_i A^k + \Gamma_{i\sigma}^{k} A^\sigma$$

est un tenseur $\binom{1}{1}$.

C'est la dérivée covariante de A^k, relative à la métrique g_{ij}.

⚠ Γ_{ij}^{k} N'EST PAS un tenseur.

Sur un chp de tenseurs quelconque ?

On demande :

* $\nabla\phi = \partial\phi$ (car $\partial\phi$ est deja un tenseur).

* $\nabla(AB) = A\nabla B + B\nabla A$ (Leibnitz)

Alors :

$$\nabla_i B_j = \partial_i B_j - \Gamma_{ij}^{k} B_k \quad \left(\leftarrow \underbrace{\nabla_i (A^\sigma B_\sigma)}_{ok} = A^\sigma \underbrace{\nabla_i B_\sigma}_{?} + B_\sigma \underbrace{\nabla_i A^\sigma}_{ok}\right)$$

$$\nabla_i T^{k_1 \dots}_{j_1 \dots} = \partial_i T^{k_1 k_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots}$$
$$+ \Gamma_{i\sigma}^{k_1} T^{\sigma k_2 \dots}_{j_1 j_2 \dots} + \Gamma_{i\sigma}^{k_2} T^{k_1 \sigma \dots}_{j_1 j_2 \dots} + \dots$$
$$- \Gamma_{i j_1}^{\sigma} T^{k_1 k_2 \dots}_{\sigma j_2 \dots} - \Gamma_{i j_2}^{\sigma} T^{k_1 k_2 \dots}_{j_1 \sigma \dots} - \dots$$

• Si $\mathcal{T}^{k_1 \dots}_{j_1 \dots}$ est une densité tensorielle de poids ω ?

On demande en plus :

$$\nabla_i \varepsilon^{12 \dots N} = 0 .$$

On montre alors que :

$$\nabla_k \mathcal{T}^{\dots}_{\dots} = (\text{termes comme si tenseur}) + \omega \Gamma_{k\sigma}^{\sigma} \mathcal{T}^{\dots}_{\dots}$$

3- Remarques

a- $\Gamma_{ij}^{\ k} = \Gamma_{ji}^{\ k}$ (sym)

b- $\partial_i B_j \neq$ tenseur, mais $\partial_i B_j - \partial_j B_i =$ tenseur (?).

On a, de plus :

$$\forall g_{ij}, \qquad \nabla_i B_j - \nabla_j B_i = \partial_i B_j - \partial_j B_i$$

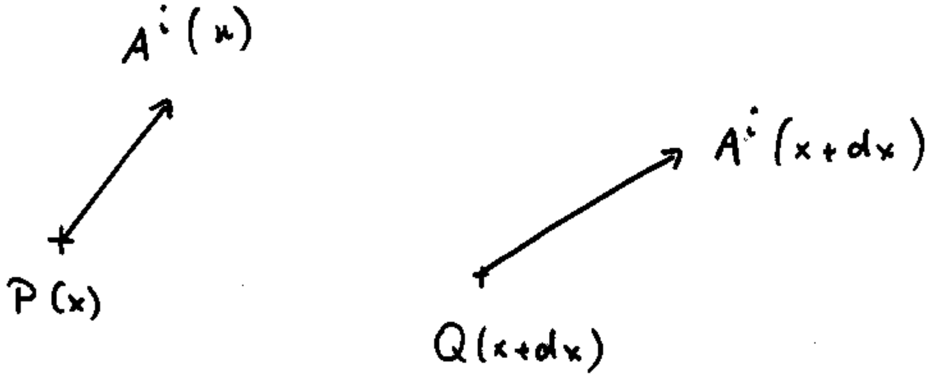
c- Identité de Ricci.

$$\nabla_i g_{jk} = 0 \qquad , \qquad \nabla_i g^{jk} = 0 .$$

(car Γ = connexion de Christoffel).

Corollaire : $\nabla_k g = 0$, $\nabla_k (\sqrt{|g|}) = 0$ (① $\partial_k g \neq 0$!!)

d- $\Gamma_{ij}^{\ k}$ induit une notion de parallelisme.



$$dx^k \partial_k A^i = dA^i = A^i(Q) - A^i(P).$$

$$dx^k \nabla_k A^i = dx^k \partial_k A^i + dx^k \Gamma_{k\sigma}^{\ i} A^\sigma$$

$$= A^i(Q) - [\underbrace{A^i(P) - \Gamma_{k\sigma}^{\ i} A^\sigma dx^k}_{\tilde{A}^i(Q)}] \qquad \tilde{A}^i(Q) \neq A^i(Q).$$

$\tilde{A}^i(Q)$ est le transporté parallèle de $A^i(P)$ en Q, relativement à la connexion Γ.

e- Ainsi, l'équation $dx^k \nabla_k U^l = 0$ exprime que U^l est transporté // à lui-même, dans le déplacement dx, relativement à la connexion Γ.

⚠ Ceci ne signifie pas que les composantes de U^l sont conservées au cours de ce déplacement.
(cette idée serait exprimée par $dx^k \partial_k U^l = 0$).

$$dx^k \nabla_k U^l = 0 \quad \Longrightarrow \quad dx'^k \nabla'_k U'^l = 0.$$

Ceci est lié à la loi de transformation des $\Gamma_{ij}^{\ k}$.

f- Nous avons defini Γ_{ij}^{k} à partir de g_{ij} .

Nous aurions pu definir Γ_{ij}^{k} avant g_{ij} (théorie des variétés à connexion affine).

① → loi de transfo de Γ_{ij}^{k} pour que

$$A^i(x) - \Gamma^i_{\alpha\beta}(x) A^\alpha(x)\, dx^\beta$$

soit un tenseur en $x + dx$.

② → notion de dériv. covariante.

Γ_{ij}^{k} : N^3 composantes.

Si $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ (sans torsion) : $\frac{1}{2} N^2 (N+1)$ comp. ind

g_{ij} : $\frac{1}{2} N(N+1)$ comp. ind.

↳ Γ_{ij}^{k} de Christoffel : $\frac{1}{2} N(N+1)$ comp. ind.

les connexions de Christoffel sont un ss-ensemble très reduit des connexions en general.

g- Soit un point $P \in U$.

$$\Gamma_{ij}^{k}(P) \neq 0 \quad \text{en general.}$$

On montre que :

$\exists$ Coord$(x) \to$ Coord(x') tel que :

$$\Gamma'^{k}_{ij}(P) = 0 \quad (\text{et } g'_{ij}(P) = g_{ij}(P) \text{ si on le veut}).$$

(Possible car $\Gamma_{ij}^{k} \neq$ tenseur).

Coord(x') : appelé referentiel geodesique en P.

$$\Gamma'^{k}_{ij}(P) = 0 \iff \partial_k g'_{ij}(P) = 0$$

⚠ Par contre, on ne peut pas assurer $\Gamma'^{k}_{ij} = 0$ simultanément dans tte une region de U (sauf cas très particulier).

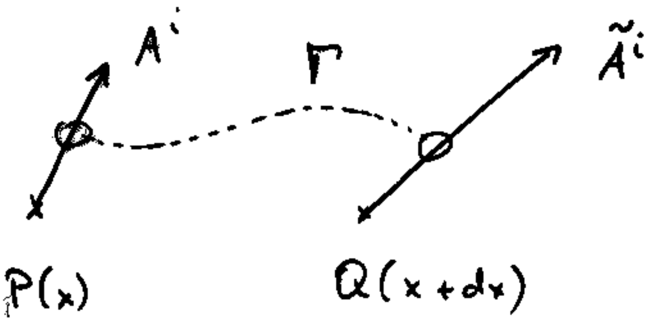
Cad : ds ref geod en P, $\partial_k \partial_\ell g_{ij}(P) \neq 0$ en general.

h- Si $\mathcal{A}^i$ = densité tens. $\left[\binom{1}{0}, \omega = -1 \right]$

$$\nabla_i \mathcal{A}^i = \partial_i \mathcal{A}^i$$

$\Rightarrow$ Si U^i vecteur : $\nabla_i (\sqrt{-g}\, U^i) = \partial_i (\sqrt{-g}\, U^i)$.

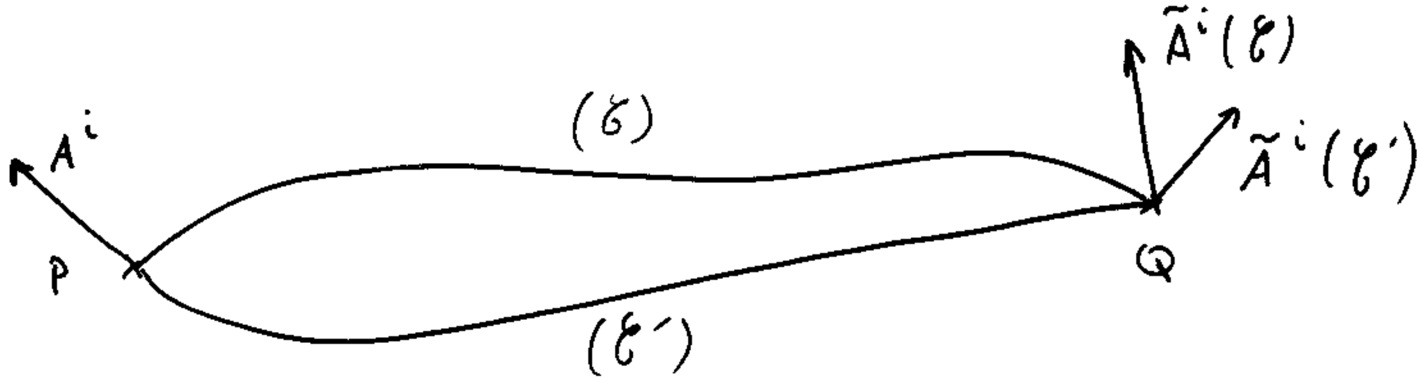
H – Tenseurs de courbure.



A^i : vecteur en P.

Transport = concept local.

$\rightsquigarrow$ de P en Q eloigné ? $\neq$ chemins possibles.



A priori: $\tilde{A}(\mathcal{C}') \neq \tilde{A}(\mathcal{C})$

Si $\tilde{A}(\mathcal{C}') = \tilde{A}(\mathcal{C}) \quad \forall A^i, P, Q, \mathcal{C}, \mathcal{C}', \ldots$

on dit que la connexion est integrable, ou encore, que la variété, munie de cette connexion, est PLANE.

1 - Tenseur de Riemann-Christoffel

Soit : $R^i_{\ jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{\sigma k} \Gamma^\sigma_{jl} - \Gamma^i_{\sigma l} \Gamma^\sigma_{jk}$

on montre que c'est un tenseur $\binom{1}{3}$.

C'est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

On montre que :

$$(V, g_{ij}) \text{ plane} \iff R^i_{\ jkl} = 0 .$$

On montre aussi que :

$$R^i_{\ jkl} = 0 \iff \exists \text{ Coord : } \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ partout}$$

(lié à $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$).

et donc : $\iff \exists$ Coord : $\partial_k g_{ij} = 0$

(comp. g_{ij} = ctes).

"Plan euclidien" ... est plan

Sphère .... est non plane.

2. Propriétés tenseur R-C.

- $R^i{}_{jkl} = - R^i{}_{jlk}$

- $R_{ijkl} = R_{klij}$

- $\Rightarrow \quad R_{ijkl} = - R_{jikl}$

- $R^i{}_{jkl} + R^i{}_{ljk} + R^i{}_{klj} = 0$

- Identité de Bianchi

$$R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jmk;l} + R^i{}_{jlm;k} = 0 \qquad \left(A^{::}{}_{;l} \equiv \nabla_l A^{::} \right)$$

* Dem : Soit un point P. On se place ds ref geod en P.

$\longrightarrow$ en P : $\Gamma = 0$

$$\nabla_m R^i{}_{jkl} = \partial_m R^i{}_{jkl} + \underbrace{0 - 0 - 0 - 0}_{\text{car } \Gamma = 0}$$

$$= \partial_m \left(\partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} \right) + \underbrace{0 + 0}_{\text{car } \Gamma \partial \Gamma = 0}.$$

$\hookrightarrow$ Bianchi ds ref geod en P. | $\to$ OK $\forall$ Coord.
égalité tensorielle

Puis, P quelconque $\longrightarrow$ OK en $\forall$ point.

3 – Courbure de Ricci.

Par contraction du tenseur de R. C (3 possibilités → 1).

$$R_{ij} = R^{\alpha}{}_{i\alpha j} \quad \text{(tenseur de Ricci).}$$

$$R_{ij} = \underbrace{\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{ij}}_{\substack{\text{sym}/i,j \\ \text{(evident)}}} - \partial_j \Gamma^\sigma_{i\sigma} + \underbrace{\Gamma^\sigma_{ij}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}}_{\substack{\text{sym}/i,j \\ \text{(evident)}}} - \underbrace{\Gamma^\sigma_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{j\sigma}}_{\substack{\text{sym}/i,j \\ \text{(evident).}}}$$

sym, lié à Γ = connexion de Christoffel

$\Downarrow$

$$\Gamma^\sigma_{i\sigma} = \partial_i \ln\sqrt{|g|}$$

$\hookrightarrow \quad R_{ij} = R_{ji}.$

Variété plane $\iff R^i{}_{jkl} = 0 \implies R_{ij} = 0$

Mais $\not\Longleftarrow$

4 - Courbure scalaire

$$R_{ij} \longrightarrow R = g^{ij} R_{ij}. \quad \text{(courbure scalaire).}$$

5 - Double dérivation covariante.

On a : $\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i = 0.$

$\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i$?

- $(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, \phi = 0$

- $(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, A^k = + R^k{}_{\sigma ij} A^\sigma$

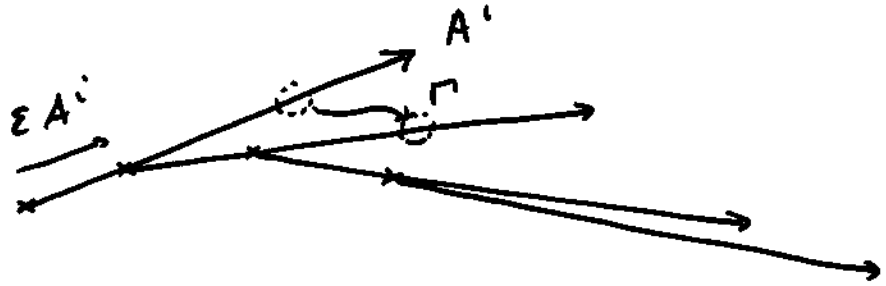
- $(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, B_k = - R^\sigma{}_{kij} B_\sigma$

- $$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\, T_k^\ell = + R^\ell{}_{\sigma ij} T^\sigma_k - R^\sigma{}_{kij} T^\ell_\sigma$$

⋮

I - Geodesiques.

Trspt // d'un vecteur le long de lui-même.



Qd $\varepsilon \to 0$: $\{$pts successifs$\} \to$ cbe geodesique.

Equation des geodesiques : $x^k(\lambda)$

Si λ est un paramètre affine : $\dfrac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\dfrac{dx^i}{d\lambda}\dfrac{dx^j}{d\lambda} = 0$

Sinon : $\dfrac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\dfrac{dx^i}{d\lambda}\dfrac{dx^j}{d\lambda} \propto dx^k$.

- Si $ds^2 = dx_k dx^k \neq 0$, alors :

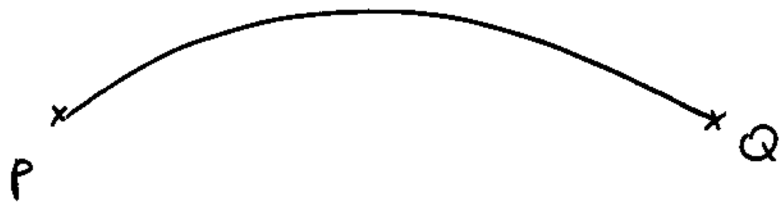
  $s(P) = s(P_0) + \int_{\widehat{P_0P}} ds$ est un param. affine.

- Si $ds^2 = 0$, geodesique isotrope.

- Ds un trspt // d'un vect dx le long de lui-même,

  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ est conservé.

- On montre que :



la (les) geodesique(s) reliant P et Q extremise(nt) la longueur de la courbe $\widehat{PQ}$.
(lié à Γ^k_{ij} = Christoffel(g_{ij})).

$$\text{geodesique} \iff \delta \int ds = 0$$

- Ecriture :

On pose souvent $u^i = \dfrac{dx^i}{d\lambda}$

$$\underbrace{\frac{du^k}{d\lambda}} + \Gamma^k_{ij}\, u^i u^j = 0$$

$$\hookrightarrow \; = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} = u^i \partial_i u^k .$$

$$\hookrightarrow \quad u^i \nabla_i u^k = 0 .$$

J - Tenseur d'Einstein.

• C'est le tenseur :

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R\, g_{ij}$$

• Version avec cste cosmologique :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R\, g_{ij} - \Lambda\, g_{ij} \qquad (\Lambda = \text{cste}).$$

• vérifie identiquement :

$$\nabla_i\, E^i{}_j = 0 \qquad (\text{divergence nulle})$$

($\leftarrow$ double contraction sur l'identité de Bianchi).

K - Coordonnées particulières

Calculs : choix ref (Coord.) ds lesquels les calculs sont les "plus simples" ou le plus facilement interprétable en termes physiques (à choisir/définir).

1. Choix de jauge

Chgt coord : $x^i \longrightarrow x'^i$

$\hookrightarrow$ N fonctions $x'^i(x^k)$ arbitraires.

$\leadsto$ permet de choisir a priori certaines composantes de g_{ij}, ou certaines relations entre elles, sans perdre de généralité.

Par exemple : $\sim$ imposer les valeurs de $g_{11}, \dots, g_{1k}, \dots g_{1N}$.

2. Coordonnées harmoniques.

Coordonnées telles que $\quad g^{ij}\Gamma_{ij}^{\ k} = 0 \quad$ (N conditions).

Etant donné que : $\quad g^{ij}\Gamma^k_{ij} = -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_r\left(\sqrt{|g|}\,g^{kr}\right)$, les coord. harm. vérifient :

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta} \right) = 0$$

Ces coord. sont particulièrement utiles dans l'étude de pbs de propagation (ondes gravitationnelles, ...).

3 - Coord. géod. en un point.

Déjà vu.

Ici, la condition porte sur un point, mais pas sur le syst de coord. ds son ensemble.

en P : $\quad \Gamma = 0 \quad$, càd $\quad \partial g_{ij} = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \nabla T^{:}_{:} = \partial T^{:}_{:} \qquad \text{en } P$$

$$\nabla \nabla T^{:}_{:} = \partial (\nabla T^{:}_{:}) \qquad \text{en } P$$

$$⚠ \quad \neq \partial (\partial T^{:}_{:}).$$

L'espace-temps

- Newton: espace + temps

$\searrow \quad \swarrow$

Caractères immuables

Invariant: dt

- Relat. restreinte: espace-temps

- $\exists$ Coord: $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (metrique $\eta_{\mu\nu}$)

$\hookrightarrow \quad R^i{}_{jkl} = 0 \quad$ plat.

ds^2: invariant ss transfo de Lorentz.

$\neq$ esp. tps de Newton, mais globalement immuable.

Plat $\Rightarrow$ mvt naturel (inertiel) = rect. uniforme.

Ⓐ Esp + tps / Esp. tps } plat + Ⓑ mvt libre ⟹ mvt. rect. unif.

Or : mvt planètes ≠ mvt. rect. unif.

⟹ rejeter Ⓐ ou Ⓑ.

* On garde Ⓐ, on rejete Ⓑ

↳ ∃ $\vec{f}$ (gravit.) ⇝ Newton

* On garde Ⓑ, on rejete Ⓐ

mvt inertiel ⟺ mvt geodesique

↳ mvt planètes = pb geometrique

↳ Theories geometriques de la gravit.

Espace-tps riemannien : $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta$

Espace-temps : 4 dim $\qquad N = \dim V = 4$

1 point $\Leftrightarrow$ 1 evenement $\longleftrightarrow$ 4 coordonnées.

x^0 $\qquad\qquad\qquad x^{1,2,3}$

$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$

coord. "temporelle" $\qquad$ coord. "spatiales"

arbitraire ! Ce ne sera pas tjs le cas.

⚠ $x^0 \neq$ tps mesuré par un obs au repos ($x^{1,2,3}$ cts).

Notation : $x^{\mu} = x^{0,1,2,3}$ $\qquad A_\mu A^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu A^\mu$

$\downarrow$

grec

$x^{k} = x^{1,2,3}$ $\qquad A_k A^k = \sum_{k=1}^{3} A_k A^k$

$\downarrow$

latin

$$A_\mu A^\mu = A_0 A^0 + A_k A^k .$$

Hypothèses :

- En tout point P, on admet que, localement

$$\exists \, (x^\mu) \longrightarrow (T, X, Y, Z) \; : \quad g_{\mu\nu} \longrightarrow m_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad \text{en } P.$$

càd : $\qquad m_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$

Conséquence : $\quad g = \det(g_{\mu\nu}) < 0$

$$\left(\text{car } g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} g \quad \text{et} \quad \det(\eta_{\mu\nu}) = -1 \right)$$

CN pour que $g_{\alpha\beta}$ soit une metrique admissible pour decrire un chp. grav.

Rque : on peut même faire plus :

$$\exists \ (x^\mu) \longrightarrow (T, x, y, z) \quad \text{tel que :}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow m_{\mu\nu}(T, x, y, z)$$

avec : $\begin{cases} m_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \\ \partial m_{\mu\nu}\big|_{(P)} = 0 \end{cases}$

(reunion pté précédente + th. sur l'existence des ref. geodesiques).

L'esp-tps est donc minkowskien en P, et ds son voisinage.

Un tel syst de coord est dit : ref en chute libre.

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\text{geod} \Leftrightarrow \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = 0 \right).$$

$$\nabla = \partial \quad \text{en } P,$$

mais ⚠ $\quad \nabla\nabla \neq \partial\partial, \quad$ car $\quad \partial\partial m_{\mu\nu} \neq 0$

Temps propre.

Soit un obs : depl infinitesimal de $A(x^\mu)$ en $B(x^\mu + dx^\mu)$

Intervalle entre les evts "depart" et "arrivée"

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(A)\, dx^\mu dx^\nu$$

Def de l'intervalle de tps propre $d\tau$: $d\tau^2 = -ds^2$

$d\tau$ réel $\iff$ $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

signe lié à la convention :

$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$

Conséquence :

Ds Coord(x) : repos correspond à $x^{i} = \text{Cte}$ ($i \to 1, 2, 3$)

$$\rightsquigarrow \qquad ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2$$

le repos correspond donc à un mvt physiquement réalisable ssi :

$$g_{00} < 0$$

⚠ : ce n'est pas une CN pour que $g_{\alpha\beta}$ corresponde à une metrique admissible.

Si $g_{00} > 0$, x^0 n'est "pas vraiment" une coord. temporelle.

Quadrivitesse d'une particule :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{\sqrt{-ds^2}} \qquad \left(\text{parfois noté } \frac{dx^\mu}{ds}\right)$$

normalisée : $\quad u_\mu u^\mu = -1$

Distance

Il ne suffit pas de poser $dx^0 = 0$ dans ds^2 pour obtenir l'élt de "distance spatiale".

Il faut projeter $\perp$ à l'"axe" x^0 (si $g_{00} < 0$)

$$\rightsquigarrow \qquad d\ell^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

avec : $$\gamma_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}$$

Si $g_{0i} = 0$, alors $\gamma_{ij} = g_{ij}$

Concept de distance : rarement utile.

Mvt geodesique

- $s = s_0 + \int \sqrt{-ds^2}$: param. affine.

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad , \text{ ou } \quad \frac{du^\sigma}{ds} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$$

(si $ds^2 \neq 0$)

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$$

Si ref geod au point P: $\Gamma(P) = 0$

$\longrightarrow \frac{du^\sigma}{ds} = 0$ mvt "localement rect. unif".

Part. d'epreuve : n'agit pas sur la geom de l'esp.tps

$\leadsto$ Ds tte th. geom. de la grav., dans laquelle le mvt libre d'une part. d'epreuve est un mvt. geodesique, le mvt. de celle-ci est determiné par les seules ptés geom. de l'esp.tps, et est independant de la nature de cette particule.

C'est le ppe d'universalité de la chute libre

(ou ppe d'equivalence faible).

Referentiels synchrones

par def, tels que : $\begin{cases} g_{00} = -1 \\ g_{0i} = 0 \end{cases}$

tjs possible de choisir un tel ref, car $g_{0\alpha} = \delta_{0\alpha}$ correspond au choix de 4 contraintes, et il y a 4 fonction arbitraires ds un chgt de coord qque.

$g_{00} = -1$: x^0 est une variable temporelle partout, et $d\tau = dx^0$ (x^0 = tps propre) pour tt obs au repos.

$g_{0i} = 0$: $\gamma_{ij} = g_{ij}$

geom spatiale $\leftarrow$ x^0 = cste.

On montre que :

ref synchrone $\Rightarrow$ les trajectoires x^i = cstes sont des géodésiques (donc mvt libre pour des part. d'epreuve).

Tenseur impulsion - energie.

A - Relativité restreinte.

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$
$$= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

matière $\to$ lois de conservation $\left\langle \begin{array}{l} \text{impulsion (mvt)} \\ \text{energie} \end{array} \right.$

tenseur impulsion - energie $T_{\alpha\beta}$ de la matière defini tel que:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \iff \text{lois de conservation}$$

et symmetrique.

I - Interprétation des composantes de $T^{\alpha\beta}$:

$$\left.\begin{array}{l} T^{00} = \text{densité d'energie} \\ T^{0k} \to \text{densité d'impulsion} \end{array}\right\} T^{0\alpha} = \text{densité d'IE}$$

$$\left.\begin{array}{l} T^{0k} \to \text{flux d'energie} \\ T^{ik} = \text{flux d'impulsion} \end{array}\right\} T^{i\alpha} = \text{flux d'IE}$$

Ceci car: $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \iff \partial_0 T^{0\beta} + \partial_i T^{i\beta} = 0$

Si V = 3-volume spatial fixe (tranche d'esp tps à t cst)

$$\int_{(V)} \partial_0 T^{0\beta} d^3x + \int_{(V)} \partial_i T^{i\beta} d^3x = 0$$

ou:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{(V)} T^{0\beta} d^3x}_{\text{I.E. dans } (V)} + \int_{(\partial V)} \underbrace{T^{i\beta}}_{\text{densité de flux d'IE. (de } T^{0\beta})} d^2\sigma_i = 0 \quad \text{(conservation)}$$

$\Downarrow$

$T^{0\beta}$ = densité d'IE.

Autre aspect:

Soit un obs $\mathcal{O}$ de Q.vit v^α.

Ds le ref propre de $\mathcal{O}$: $v^\alpha = (1,0,0,0)$

• Densité d'energie ds ref ppe de $\mathcal{O}$: T^{00}

Or : $T^{00} = \eta^{0\alpha}\eta^{0\beta}T_{\alpha\beta} = T_{00}$

et : $T_{00}\big)_{\text{ref ppe } \mathcal{O}} = \left(T_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta\right)_{\text{ref ppe } \mathcal{O}}$

$= T_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$ $\forall$ Coord, car c'est un scalaire

⇝ Densité d'energie mesurée par un obs de Qvit v^α ds son ref ppe est donnée par: $T_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$.

* Ex: si fluide parfait: $T_{\alpha\beta} = (\underbrace{\varepsilon}_{\text{energie}} + \underbrace{p}_{\text{pression}})\, u_\alpha u_\beta + p\,\eta_{\alpha\beta}$

$T_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta = (\varepsilon + p)\left(u_\alpha v^\alpha\right)^2 - p$

Si l'obs suit le fl. ds son mvt: $v^\alpha = u^\alpha$ et $T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = \varepsilon$.

II - Eq. conserv. fl. parfait.

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + p) u_\alpha u_\beta + p \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{eq. d'état : } p = p(\varepsilon)$$

(par ex : fl. barotropic : $p = \lambda \varepsilon$, $\lambda = \text{cste}$)

$$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0 \qquad 4 \text{ eqs.}$$

se sépare en :

- $$\partial_\alpha (\rho u^\alpha) = 0 \qquad 1 \text{ eq.}$$

  avec $\rho = e^{\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)}}$ si $p \ll \varepsilon$, $\rho \simeq \varepsilon$.

C'est la conservation de l'energie ρu^0 ⚠ $\rho \neq \varepsilon$.

- $$(\varepsilon + p) \underbrace{u^\alpha \partial_\alpha u^\beta} = -(\eta^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha p \qquad 4 \text{ eqs liées par } u^\alpha u_\alpha = -$$

  $u^\alpha \partial_\alpha$ = derivée "en suivant le mvt" (lagrangienne).

C'est l'equation d'Euler.

Si $p = 0$, $\quad u^\alpha \partial_\alpha u^\beta = 0 \quad$ (mvt rect. unif).

B - Esp. tps non plat

Hypothèse : ds ref geod en P, on a, en P :

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Conséquence : ds ce ref : $\partial = \nabla$, donc $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$.

Egalité tensorielle $\Rightarrow$ $\forall$ Coord : $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$.

- Rque : on pourrait envisager d'autres possibilités redonnant $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ si $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ partout.

Par ex : $\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta + \partial_\beta R = 0$

Si esp.-tps = Minkowsky : $\left\{\begin{array}{l} \nabla = \partial \text{ car } \Gamma = 0 \\ R = 0 \text{ car } \partial\Gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$

Si esp. tps $\neq$ Minkowsky et ref geod en P : $\left\{\begin{array}{l} \nabla = \partial \text{ car ref. geod} \\ R \neq 0 \ (\leftarrow \partial\Gamma \neq 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \partial_\alpha T^\alpha{}_\beta + \partial_\beta R = 0$

Ce choix n'est donc pas equivalent au choix $\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$, bien qu'il se confonde à $\nabla_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0$ en relat. restreinte.

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} T^{\alpha\sigma} = 0$$

$$\partial_0 T^{0\beta} + \partial_i T^{i\beta} + \ldots\ldots = 0$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} T^{0\beta} d^3x + \int_{(\partial V)} T^{i\beta} d^2\sigma_i = - \int_{(V)} \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} T^{\alpha\sigma} \right) d^3x$$

Ce n'est pas une eq. de conservation macroscopique (perte $\leftrightarrow$ flux).

Il y a "quelque chose qui passe ds la géométrie" !!!

$\rightsquigarrow$ Difficulté concepts impulsion, energie, masse, ...

en R.G. (en tte generalité).

* fluide parfait

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p) u^\alpha u^\beta + p\, g^{\alpha\beta}$$

$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ 4 eqs

- Euler

$$(\varepsilon + p)\, u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = -(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta)\, \partial_\beta p$$

mvt ← $\vec{f}$ pression + chp grav ($g_{\alpha\beta}$)

Si $p = 0$, $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$ (mvt geod.).

- Energie

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0 \qquad \rho = e^{\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p}}$$

⚠ Ce n'est pas la conservation de ρu^0 (à cause de ∇_α)

Mais : $\sqrt{-g}\, \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0 \Rightarrow \nabla_\alpha (\sqrt{-g}\, \rho u^\alpha) = 0$

$\Rightarrow \partial_\alpha (\sqrt{-g}\, \rho u^\alpha) = 0$ (dvgce dens. vect $w = -1$)

⇝ on conserve $\sqrt{-g} \cdot \rho u^0 = \sqrt{-g}\, \rho \frac{dx^0}{d\tau}$

↑ matière

↑ geom (gravitation).

Relativité générale

Newton : mvt planetes $\leftarrow \vec{f}$

$$\underbrace{\vec{f}}_{\text{Chp (force)}} = - \underbrace{G}_{\substack{\text{Cste} \\ \text{couplage}}} \underbrace{\frac{Mm}{r^2}}_{\text{Contenu matériel.}} \vec{u}$$

RG : mvt planètes $\longleftarrow$ geom. esp-tps.

$$\underbrace{G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta})}_{\text{Chp (geom.)}} = \underbrace{\kappa}_{\substack{\text{Cste} \\ \text{couplage}}} \cdot \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\substack{\text{Contenu materiel} \\ \text{(choix : tenseur IE)}}}$$

- Vide : $T_{\mu\nu} = 0$.

A - Equation d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = \text{tenseur d'Einstein} = E_{\mu\nu} \quad (= R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu})$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \\ \nabla_\mu E^{\mu\nu} = 0 \quad \text{(id. Ricci)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

* Newton : eq. du chp : $\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$

eq. du mvt $\vec{f} = m\vec{\gamma}$

pas de lien logique

* RG : $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ $\supset$ $E_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

(lois conserv. eq. mvt) (eq. du chp).

Le pb du mvt apparait au même niveau que le pb du "chp de force".

B - Principes d'équivalence.

1 - Ppe d'équiv. faible (WEP).

le mvt d'une particule d'épreuve, ds un chp grav, est indépendant de la nature de celle-ci. (masse, constitution...)

Vérifié pour RG:

Part. libre = part. fluide parfait sans pression.

$$\text{Eq RG} \Rightarrow \text{Euler} \xrightarrow{P=0} u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0$$

càd géod, ne dépendant que des propriétés géom. de l'espace-tps.

2 - Ppe d'équiv. d'Einstein (EEP).

Historiquement important ds l'élaboration de la théorie

WEP ⇒ pour un observateur en chute libre (ref propre = ref. géod.), une part. libre est en mvt localement rect. unif $\left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \xrightarrow[\text{géod}]{\text{ref}} \frac{du^\alpha}{d\tau} = 0 \right)$.

⇝ les corps en chute libre se comportent, ds un ref en chute libre, de la même façon qu'en l'absence de gravitation.

Einstein : etend cette propriété à ttes les lois de la physique

les lois de la physique sont les mêmes ds un ref. en chute libre qu'en l'absence de gravit.

⇝ Ce sont donc les lois de la relativité restreinte (Einstein). ⚠ qqun chose d'ambigu !!

3 - Ppe d'equiv. fort (SEP).

But : generaliser WEP aux systèmes massifs.

le mvt d'un systeme massif est independant de sa nature.

Sens ? Pas du tout trivial !!!

car un syst. massif agit sur la geom. de l'esp.tps.

⇝ Comparer trajectoires dans des variétés ayant des geometries differentes.

On peut parfois donner un sens à cela, mais ce n'est pas tjs possible.

C - Eq. d'Einstein (bis)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

1 - ds le vide :

$$T_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R = 0$$

$$\Rightarrow R_{\alpha\beta} = 0$$

2 - autre ecriture :

contraction $\Rightarrow \quad -R = \kappa T \quad$ (car $N=4$)

$$\hookrightarrow \quad R_{\alpha\beta} = \kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right)$$

3 - Dim esp-tps

a - $N = 1$: trivial

$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \Rightarrow$ pas de theorie.

b - $N = 2$: ds ce cas $\quad E_{\alpha\beta} \equiv 0$
identité

$\hookrightarrow T_{\alpha\beta} = 0$

Un esp-tps à 2 dim. obeissant aux eq. d'Einstein est forcement vide.

c - $N = 3$:

$R_{\alpha\beta} = 0$ ds le vide, $\neq 0$ en general.

Mais : $R_{\alpha\beta}$: 6 composantes indépdtes

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$: 6 " "

$$\begin{pmatrix} R_{12} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \det \neq 0.}}{\left(\text{Gp. lin.}\right)} \begin{pmatrix} R_{1212} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Donc, ds le vide : $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ $(\Leftarrow R_{\alpha\beta} = 0)$.

$\rightsquigarrow$ En dim 3, la "gravit." est confinée ds la matière.

d - $N = 4$:

$R_{\alpha\beta}$: 10 comp. indépdtes

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$: 20 " "

$$R_{\alpha\beta} = 0 \;\not\Rightarrow\; R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

$\rightsquigarrow$ la gravit. existe aussi ds le vide ....

4 - éq. d'Einstein avec cste cosmologique

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$$

↳ Cste cosmo.

Pour la suite : $\Lambda = 0$.

5 - Théorie à l'ordre newtonien.

En $\underbrace{\text{chp faible}}$, il faut que RG ~ Newton.

↳ $\exists$ Coord (x) : $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(x)$

$\eta_{\alpha\beta}$: $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$

$|h_{\alpha\beta}| \ll 1$

$h_{\alpha\beta}$: $\supset$ gravitation.

Mvts non relativistes : $\left| \frac{dx^{1,2,3}}{dt} \right| \ll 1$.

Métrique : $ds^2 = (-1 + h_{00})\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

h_{00} : Terme correctif dominant (par rapport à relat. restr.).

Mvt : $$\frac{du^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma$$

Composantes spatiales : $$\frac{du^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

(qu'on veut comparer à la th. newtonienne : $\frac{dv^k}{dt} = -\partial_k \varphi$.).

$d\tau \sim dt$ $$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \sim \frac{dt}{dt} = 1$$

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau} \sim \frac{dx^k}{dt} \sim v^k \ll 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{dv^k}{dt} \sim -\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{2} g^{k\sigma} \left(2\partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00} \right)$$

$$\simeq +\frac{1}{2} \partial_k h_{00}$$

Donc : $$\frac{dv^k}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{2} \partial_k h_{00} & \text{(relat.)} \\ -\partial_k \varphi & \text{(Newton)} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad h_{00} = -2\varphi \quad \left(\frac{2\varphi}{c^2} \right)$$

D'où l'approx newtonienne :

$$ds^2 = -(1+2\varphi)\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Rque : energie d'une particule :

$$\underbrace{\sqrt{-g}\,\varepsilon u^0}_{\substack{\sim \rho \\ \text{car } P \ll \rho}} \simeq (1+\varphi)\rho\frac{dt}{d\tau} \simeq \underbrace{\rho}_{\substack{\text{energie} \\ \text{masse}}} + \underbrace{\varphi\rho}_{\substack{\text{energie} \\ \text{pot. grav.}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho v^2}_{\substack{\text{energie} \\ \text{cinetique}}}$$

- Geometrie du syst. solaire à l'approx Newt. :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM_\odot}{rc^2}\right)c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\left(\delta\int ds = 0 \iff \delta\int \mathcal{L}\,dt = 0 \text{ , ppe moindre action}\right)$$

6 - Eq. de Poisson.

Eq. d'E. : geom en fct. contenu mat. (cste couplage κ)

Approx N. : $g_{00} = -1 - 2\varphi$

$\rightsquigarrow$ φ en fct. cont. mat (κ)

$\Longleftrightarrow$ Eq. Poisson : $\Delta\varphi = 4\pi G \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cont. mat.}}}{\rho}$

rapprochement $\longrightarrow$ relation entre κ et G.

• Matière ordinaire ~ fluide sans pression $P \ll \rho$

$$\longrightarrow \quad T_{\alpha\beta} = \rho\, u_\alpha u_\beta \quad \Longrightarrow \quad T = -\rho$$

Eq (0,0) $\longrightarrow$ $R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$

$$u_0 = g_{0\alpha} u^\alpha \simeq g_{00} u^0 \simeq -1$$

$$T_{00} \simeq \rho$$

$$R_{00} \simeq \kappa \frac{\rho}{2}$$

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{00}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{0\beta}}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

$$\sim \partial_k \Gamma^k_{00} \qquad\qquad h\,\mathcal{O}(\partial_0)$$

$$R_{00} \simeq \partial_k \Gamma^k_{00} = \partial_k\left(-\frac{1}{2}\partial_k g_{00}\right) = -\frac{1}{2}\Delta h_{00} \simeq \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\rho & (RG) \\ 4\pi G\rho & (N.) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \kappa = 8\pi G \qquad \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right).$$

$$\boxed{\begin{gathered} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \\ \text{ou} \\ R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) \end{gathered}}$$

D - Chp grav. faible : th. linéarisée (notions).

$\exists$ Coord : $\quad |g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| \ll 1$

Post-Minkowskian Approx (PMA).

⚠ à distinguer de Post-Newtonian Approx (PNA), qui suppose en plus que, ds ce ref $|v| \ll 1$ (c).

$\longrightarrow dt \gg dx, dy, dz$

$\longrightarrow \partial_0 \ll \partial_{1,2,3}$ $\quad (1,2,3 \leftrightarrow x, y, z)$

Ici: $dt \sim dx, dy, dz$ et $\partial_0 \sim \partial_{1,2,3}$ a priori.

1- Eq linéarisées :

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi G\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}\right) \simeq 8\pi G\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T \eta_{\alpha\beta}\right)$$

et

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} + \underbrace{\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\sigma}}_{\mathcal{O}(2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\Box_m h_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}\right] + \mathcal{O}(2)$$

où :

$$\square_m = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\sigma h^\sigma_\beta + \partial_\beta \partial_\sigma h^\sigma_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta \left(\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\right)$$

- Jauge harmonique : $g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = 0$

$\rightsquigarrow$ en chp faible : $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{h}_{\nu\beta} = 0$

avec : $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \cdot \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$

$\hookrightarrow$ ds cette jauge : $H_{\alpha\beta} = 0$

$$2 R_{\alpha\beta} = - \square_m h_{\alpha\beta}$$

$$\square_m h_{\alpha\beta} = -16 \pi G \bar{\bar{T}}_{\alpha\beta}$$

$$\left(\bar{\bar{T}}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \cdot \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right)$$

2 - Solutions.

* Ds le vide : $\Box_{(m)} h_{\alpha\beta} = 0$ ⇝ Ondes gravitationnelles.

* Sol. statiques :

$$\Delta h_{\alpha\beta} = -16\pi G \, \bar{T}_{\alpha\beta} \longrightarrow h_{\alpha\beta} \sim \frac{1}{r}.$$

$$\Delta \downarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

↓ Interpr. phys. jauge harm.

* Sol. non statiques :

vide : ondes grav. (propag vitesse $c = 1$)

avec sources :

$$h_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = +4G \int_{(\text{sces})} \frac{\bar{T}_{\alpha\beta}\left(t - |\vec{x} - \vec{X}| ; \vec{X}\right)}{\| \vec{x} - \vec{X} \|} \, d^3X$$

Si sces = chp faible ($\neq$ Trous noirs, * à neutrons...

3 _ Reecriture des eq. lin.

$$- \Box_m h_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} = 16\pi G \bar{T}_{\alpha\beta} \quad \text{(pas de chx de jge).}$$

peut aussi s'écrire :

$$\partial_\sigma \partial_\lambda H^{\alpha\sigma\beta\lambda} = 16\pi G T^{\alpha\beta} \quad (\neq \bar{T}^{\alpha\beta})$$

avec : $$H^{\alpha\mu\beta\nu} = -\eta^{\alpha\beta}\bar{h}^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\nu}\bar{h}^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}\bar{h}^{\alpha\nu}$$

mêmes ptés que $R^{\alpha\mu\beta\nu}$, en particulier $H^{\alpha\mu\beta\nu} = -H^{\mu\alpha\beta\nu}$

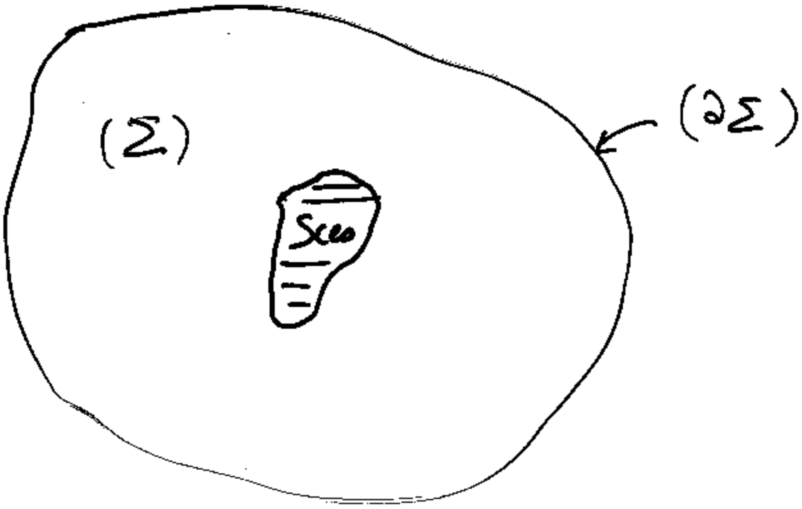
Interet ? T^{0k} = densité d'I.E.

$\hookrightarrow$ I.E d'un syst : $P^\mu = \int_{(Sces)} T^{0\mu} \, d^3x$ (chp faible)

[on remplace $T^{0\mu}$ (matière) par geom dans (Sces) $\rightarrow$] $= \dfrac{1}{16\pi G} \displaystyle\int_{(Sces)} \partial_\sigma \partial_\lambda H^{0\sigma\mu\lambda} \, d^3x$

[1ère deriv : que des termes spatiaux $\rightarrow$] $= \dfrac{1}{16\pi G} \displaystyle\int_{(Sces)} \partial_k \partial_\lambda H^{0k\mu\lambda} \, d^3x$

(car $H^{00\mu\lambda} = 0$).



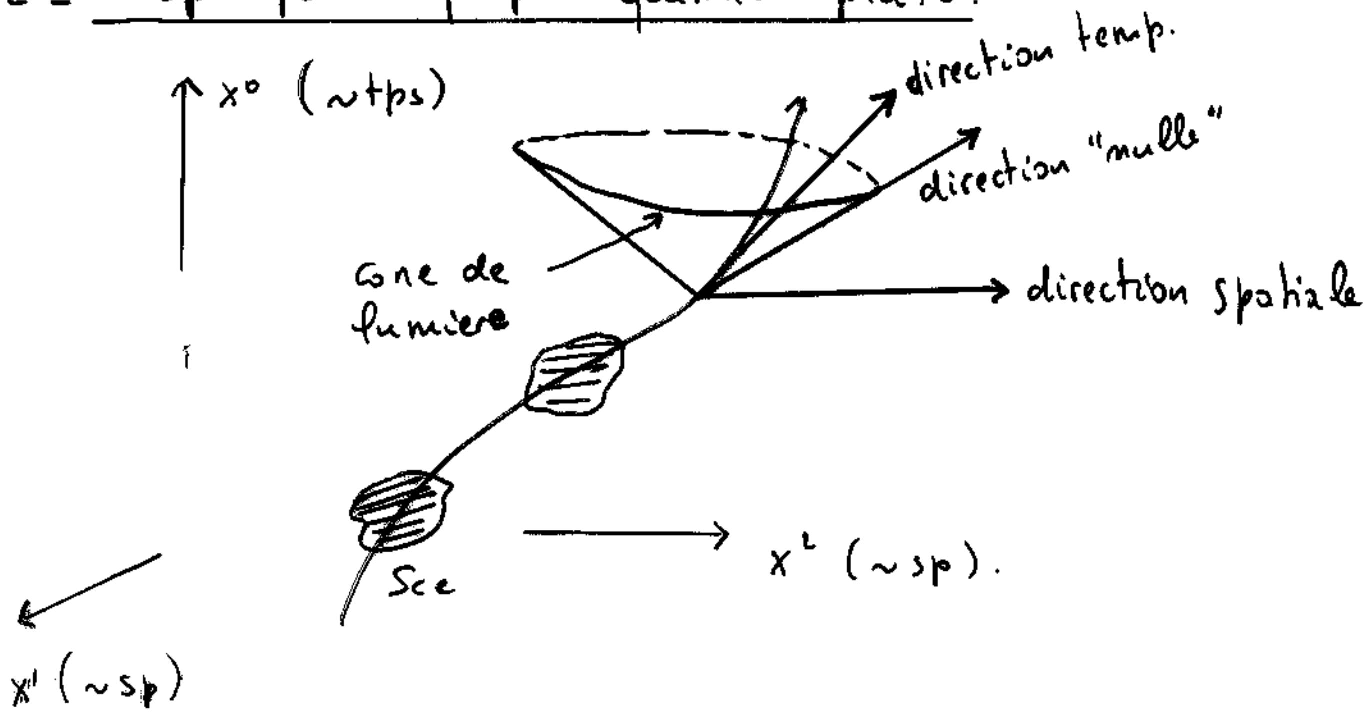
$$P^{\mu}(S_{ceo}) = \frac{1}{16\pi G}\int_{(\Sigma)} \partial_k\left[\partial_\lambda H^{0k\mu\lambda}\right] d^3x$$

en fct de geom ds Σ
→ en fct de geom → à la frontière

$$= \frac{1}{16\pi G}\int_{(\partial\Sigma)} \partial_\lambda H^{0k\mu\lambda}\, d^2S_k$$

→ l'energie-impulsion (P^μ) du système se calcule en fonction des seules propriétés du chp gravitationnel aux frontières d'un volume englobant celui-ci.

E – Esp-tps asymptotiquement plats.



esp. tps asymptotiquement plat si

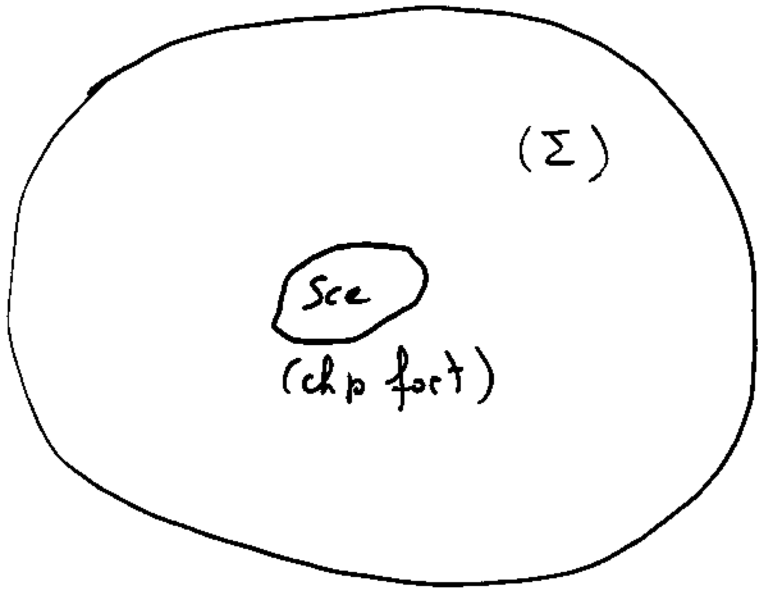
– $g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$ "assez vite" ds ttes les dir : spatiales / (nulles).

($\exists$ Coord (x))

$\rightsquigarrow$ loin des sces, à tout instant, le chp grav. est faible : $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ $\quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1)$

... et tt ce qu'on a écrit précedemment.

Soit un syst. grav. qque (chp fort) ds un esp.-tps asympt. plat :



(Σ) choisie telle que : en tt pt de $(\partial\Sigma)$, le chp grav. est faible.

Par definition : l'IE du système est definie comme etant :

$$P^\mu(\mathrm{Syst}) = \frac{1}{16\pi G}\int_{(\partial\Sigma)} \partial_\lambda H^{0k\mu\lambda}\, d^2S_k$$

Verifie, par construction : $\partial_\mu P^\mu = 0$ (car $H^{0k\mu\lambda} = -H^{0k\lambda\mu}$ $\Rightarrow \partial_\mu\partial_\lambda H^{0k\mu\lambda} = 0$)

Masse : $M^2 = -P_\mu P^\mu$

⚠ : Ttes ces grandeurs (masse, energie, impulsion, mt ang, ...) ne sont definies que pour le syst. pris globalement.

Ce ne sont pas des notions locales.

Quelques solutions exactes

Si $g_{\alpha\beta} = \underline{\text{Cstes}}$, $R_{\alpha\beta} = 0$

↪ les variétés planes sont toutes solutions des Eq. d'E. ds le vide.

Sol. admissibles ? → signature.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Solution non-planes ?

- Schwarzschild
- Kerr
- Robertson-Walker

⋮

QS 2

A. Métrique de Schwarzschild.

Solutions à sym. sphérique.

1 - Sol. ds le vide.

Th de Birkhoff : en RG, les sol. à sym. sph. ds le vide sont statiques.

càd : $\exists$ Coord (x) $\quad \partial_0 g_{\alpha\beta} = 0$.

Forme générale de la solution (coord de Schwarzschild) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

variable radiale : $r \neq$ dist. au centre.

$2\pi r =$ circonf. cercle rayon coord. r

$r_g = 2GM \quad \left(\frac{2GM}{c^2}\right)$: Cste d'intégration.

$r \to \infty$: $\quad ds^2 \sim \underbrace{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}_{\text{Minkowsky}} + \underbrace{\frac{r_g}{r}\left(dt^2 + dr^2\right)}_{\text{Correction } (\to 0)}$

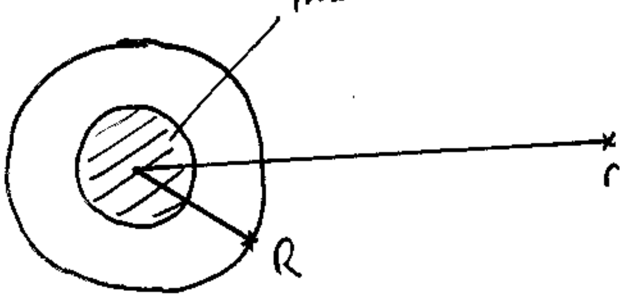
$\leadsto$ Esp tps asympt. plat.

2 - Calcul de M (Pb interne)

On ne fait plus l'hypothèse qu'on est ds le vide.

Si géom. partout regulière (en part. en $r = 0$):

$$M = \int_0^R - T_0^0 \, 4\pi r^2 dr$$ (par integration eq. du champ).



(Ttte la matière à l'interieur de la sphère de rayon R)

Si matière au repos: $T_0^0 = (\varepsilon + P) u_0 u^0 + P = -\varepsilon$

$$M = \int_0^R \varepsilon . \, 4\pi r^2 dr$$

⚠ : $4\pi r^2 dr \neq$ elt de vol geometrique !!!

Cette expression reste valable si matière non relativiste partout ($P \ll \varepsilon$, cas de la plupart des étoiles).

3. Autres coordonnées

$r = 0$: singularité

$r = r_g$: (fausse) singularité sphère de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

$r > r_g \Rightarrow g_{00} < 0, \; g_{11} > 0$ $\begin{cases} t = \text{coord temp} \\ r = \text{coord sp} \end{cases}$

$r < r_g \Rightarrow g_{00} > 0, \; g_{11} < 0$ $\begin{cases} t = \text{coord. sp.} \\ r = \text{coord temp.} \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ Impossibilité de realiser $r = C^{ste}$ qd $r < r_g$,

sinon : $ds^2 = \left(\frac{r_g}{r} - 1\right) dt^2 + r^2 d\Omega^2_{sph} > 0$

$\rightsquigarrow$ Metrique non-statique qd $r < r_g$.

$\hookrightarrow$ Trou noir.

a- Coord. de Kruskal QS 5

$$\begin{cases} 2u = \left|\frac{r}{r_g} - 1\right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_g}} \cdot \left(e^{\frac{t}{2r_g}} + s . e^{-\frac{t}{2r_g}} \right) \\ 2v = \left| \dots \right|^{\frac{1}{2}} e^{\dots} \cdot \left(e^{\dots} - s . e^{\dots} \right) \end{cases}$$

$$s = \text{sgn}(r - r_g)$$

$$\hookrightarrow \quad ds^2 = \frac{4 r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} \left(-dv^2 + du^2 \right) + r^2 d\Omega_{sph}^2$$

$$\left(r = r(u,v) \right).$$

Singu $r = r_g$ a disparu

$r = 0$ existe tjs.

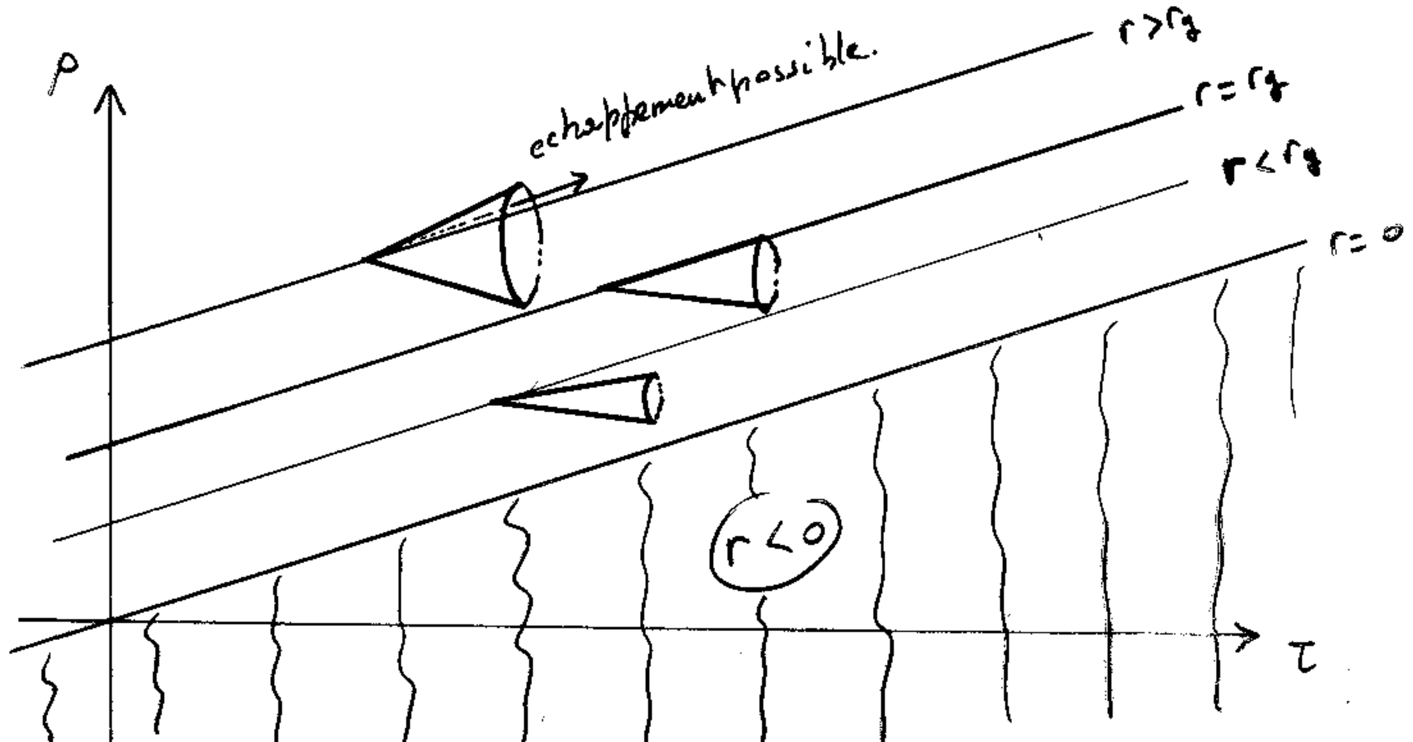
b _ Coord de Lemaitre - Rylov

$$\begin{cases} \rho = t + \varepsilon \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r}}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)} \\ \tau = t + \varepsilon \displaystyle\int \frac{\sqrt{\frac{r_g}{r}}\, dr}{1-\frac{r_g}{r}} \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

$$\xrightarrow{\varepsilon = +1} \quad r = r_g^{1/3} \left[\frac{3}{2} (\rho - \tau) \right]^{\frac{2}{3}}$$

et : $ds^2 = -d\tau^2 + \frac{r_g}{r} d\rho^2 + r^2 d\Omega_{sph}^2$

Coord. synchrones $\rightsquigarrow$ $\rho = C^{ste}$ (et θ, φ C^{ts})
est un mvt libre (geod.).



c - Coord. isotropes

Telles que : partie spatiale $\propto dx^2+dy^2+dz^2 = d\rho^2+\rho^2 d\Omega^2_{S^2}$

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\frac{r_g}{4\rho}}{1+\frac{r_g}{4\rho}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{r_g}{4\rho}\right)^4 \cdot \left(d\rho^2+\rho^2 d\Omega^2_{S^2}\right)$$

obtenu par le chgt de coord :

$$r = r_g \, \frac{\left(1+4\rho/r_g\right)^2}{16\,\rho/r_g} > r_g$$

$\rightsquigarrow$ Coord isotr. restent à l'extérieur de la sph. de Schw. (trou noir).

Ceci est une conséquence de la condition imposée à ces coord. (partie sp. $\propto ds^2_{eucl}$).

Très utile pour les formalismes PN, PM.

B - Métrique de Kerr.

En coord. de Boyer-Lindquist :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \end{cases}$$

• Métrique stationnaire, mais non-statique ($dt\, d\varphi$).

* Asympt. plat.

* $\begin{cases} m = \text{masse} \\ a = \text{m}^t \text{ ang par unité de masse.} \end{cases}$

• C'est une solution exacte ds le vide, mais rien ne garanti que c'est la sol. à l'ext. d'un corps tournant.

Utilité : Trous noir (~) le + general en RG (sans charge)

Chp etoiles : approx ok. General ??

* $a = 0 \Rightarrow$ Schwarzschild.

① $r = 0$ (à t cst) n'est pas un point !!

$$\left.\begin{array}{l} r = 0 \\ dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ds^2 = a^2 \left(\cos^2\theta \, d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

$$= d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\varphi^2 \qquad (\tilde{\rho} = a \sin\theta)$$

→ C'est le plan (coord. polaires) avec $|\tilde{\rho}| < a$ (disque).

Singularités :

$\ast$ $\rho^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ (vraie singu).

C'est la frontière du disque $r = 0$

$\ast$ $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad r^{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$ (si $a^2 < m^2$).

C'est une fausse singu. (generalise r_g)

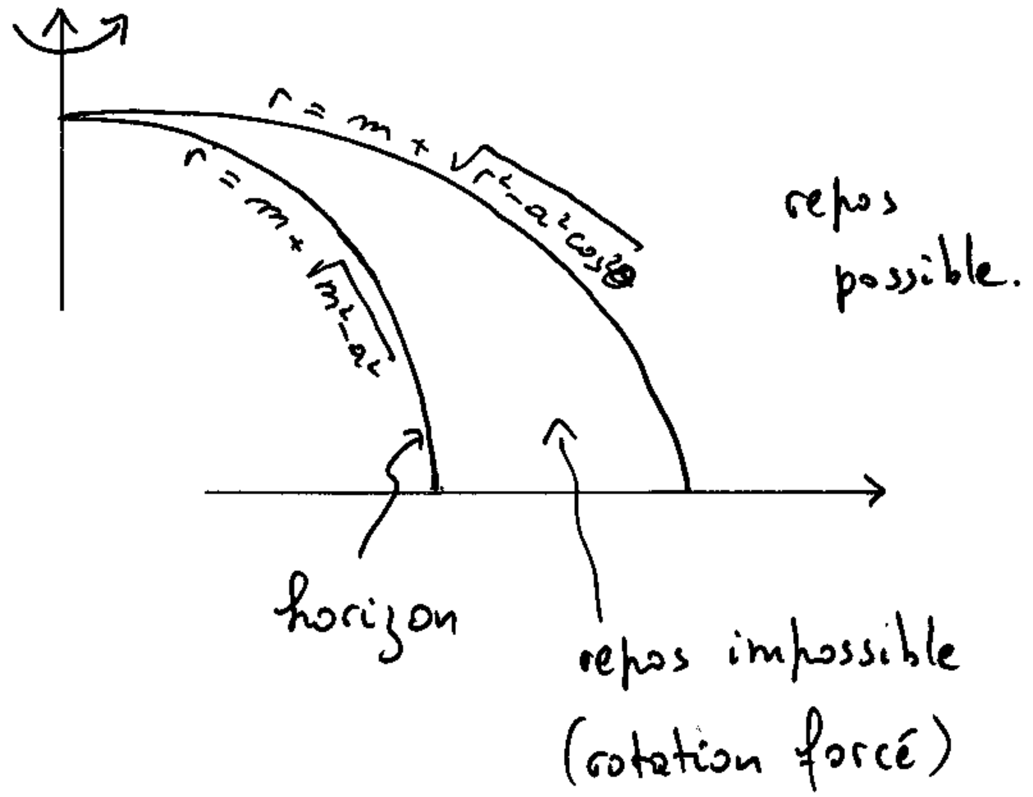
* Ergosphère :

entre $r (= r^+) = m + \sqrt{m^2 - a^2}$

et $r = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2\theta} \quad (\geq r^+)$

On a : $\begin{cases} r = \text{var. sp.} \ (\rightarrow r = \text{Cste possible}) \\ \varphi = \text{Cste impossible} \ (\varphi = \text{Cste} \Rightarrow ds^2 > 0) \end{cases}$

L'espace-tps est "entraîné" (rotation).



C - Metrique de Robertson - Walker

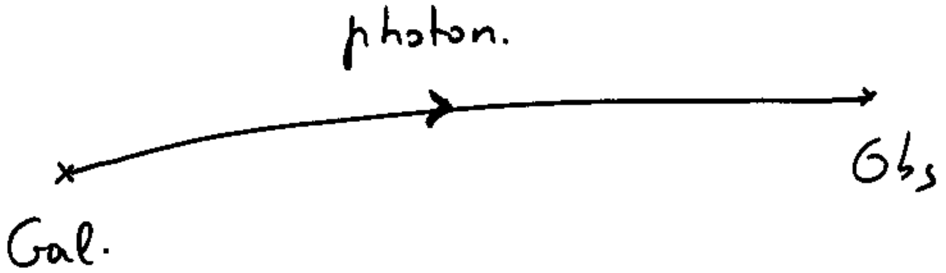
Decrit un esp-tps homogene et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{univers euclidien} \\ +1 & \text{" elliptique} \\ -1 & \text{" hyperbolique} \end{cases}$$

$a(t)$ = facteur d'échelle de l'univers.

ref synchrone $\longrightarrow$ r, θ, φ = Csts est un mvt libre.



photon: $ds^2 = 0$ $\rightarrow$ $\dfrac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = -\dfrac{dt}{a(t)}$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\nu_{rec}}{\nu_{em}} = \frac{\delta t_{em}}{\delta t_{rec}} = \frac{a(t_{em})}{a(t_{rec})} < 1 \text{ si expansion.}$$

decalage spectral cosmologique.

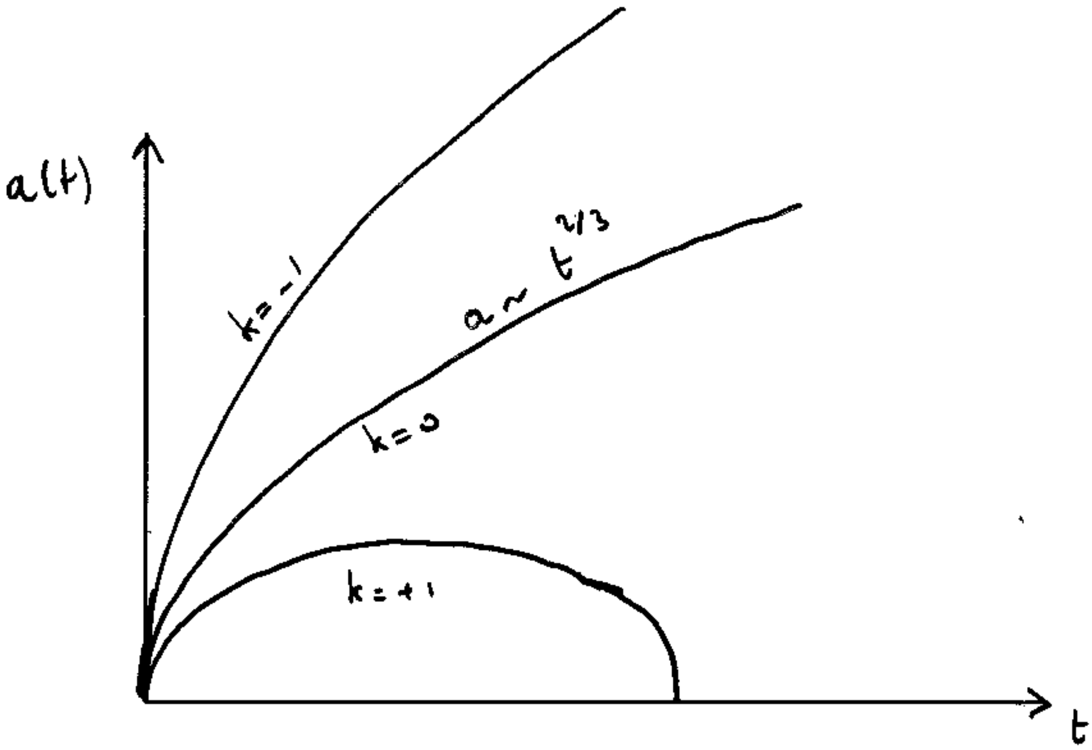
$a(t) \leftarrow$ eq du chp.

Si fluide parfait : équations de Friedmann

$$\begin{cases} 2\dfrac{\ddot{a}}{a} + \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} + \dfrac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p \\[2ex] \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} + \dfrac{k}{a^2} - \dfrac{\Lambda}{3} = \dfrac{8\pi}{3}\varepsilon \end{cases}$$

modèle avec
Cste cosmo.

Si $\Lambda = 0$ et $p = 0$ (poussière, univers actuel) :



Theories alternatives

A - Theories scalaire-tensorielles

Cste G : remplacée par un chp scalaire ϕ

$$\phi(x^\alpha) \rightsquigarrow G_{eff}(t, \vec{r})$$

tps — lieu

$$\frac{\dot G}{G}$$

echelles de tps cosmo : $\frac{\dot G}{G} \sim H$ (Hubble)

echelles evol stellaire (grav. collapse).

Motivation initiale :

Ppe de Mach $\longrightarrow$ Brans-Dicke.

(succès partiel).

Aujourd'hui : - th. unificatrices

- cosmologie

1- Théorie de Brans - Dicke

1961. (1955 : th. de Jordan).

Dépd d'1 param sans dimension ω :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\alpha\partial_\beta\phi - g_{\alpha\beta}\,\Box\phi\right) \\ \\ \Box\phi = \frac{8\pi T_\mu{}^\mu}{3+2\omega} \end{cases}$$

Eqs chp $\Rightarrow$ $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$

- Qd $\omega \ggg 1$, BD $\sim$ RG si $\phi \to$ Cste.

  mais pas nécessairement avec le même contenu matériel ($T_{\alpha\beta}$).

2 - Theories sc. tensorielles

Nordtvedt, Wagoner, Bekenstein, Bergmann, ...

$\omega(\phi)$ fction qque.

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left(\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\alpha \partial_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \Box \phi \right) \\ \Box \phi = \frac{8\pi T_\mu{}^\mu}{3 + 2\omega(\phi)} - \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{3 + 2\omega(\phi)} \omega'(\phi). \end{cases}$$

$\omega = \text{Cste} \implies$ BD.

Pour ces theories:

$$G_{eff}(t_0) = \frac{2\omega_0 + 4}{2\omega_0 + 3} \frac{1}{\phi(t_0)} \qquad [\ \omega_0 = \omega(\phi(t_0))\ ]$$

- Il y a aussi generalisation avec "fction cosmologique" $\Lambda(\phi)$, generalisant la cste cosmo Λ.

B - Idées sur le formalisme PN

1 - Theories "ordinaires"

càd, th. telles que
- pas de ref privilegié
- pas de position $(\vec{r}, t)$ privilegiee
- conservatives (moment total).

• Cas sym. spherique

Idée (Eddington) : $g_{\alpha\beta}$: devel. en $\frac{Gm}{r}$ $\left(\frac{Gm}{rc^2}\right)$

Metrique, ss forme isotrope :

$$ds^2 = -\Big[\underbrace{1}_{\text{vide}} \underbrace{- 2\frac{Gm}{r}}_{\text{Approx. Newt.}} \underbrace{+ 2\beta\left(\frac{Gm}{r}\right)^2 \cdots}_{\text{Termes post-Newt (PN)}}\Big] dt^2 + \Big[\underbrace{1}_{\text{vide}} \underbrace{+ 2\gamma \frac{Gm}{r} \cdots}_{\text{Termes post-Newt (PN)}}\Big] d\ell^2_{euc}$$

β, γ : dependent de la th. choisie.

Rque : metrique asympt plane $\Rightarrow$ masse OK

TA 5

- β, γ en RG ?

Schw ss forme isotrope :

$$ds^2 = -\left[\frac{1 - \frac{Gm}{2r}}{1 + \frac{Gm}{2r}}\right]^2 dt^2 + \left(1 + \frac{Gm}{4r}\right)^4 d\ell_{eucl}^2$$

$$g_{00} = 1 - 2\frac{Gm}{r} + 2 \cdot \left(\frac{Gm}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(3)$$

$$\longrightarrow \beta = 1$$

$$-g_{ii} = 1 + 2\frac{Gm}{r} + \mathcal{O}(2)$$

$$\longrightarrow \gamma = 1$$

- β, γ en TST :

$$\beta = 1 + \frac{\omega'}{(3+2\omega)^2(4+2\omega)} \qquad (= 1 \text{ en BD})$$

$$\gamma = \frac{1+\omega}{2+\omega} = 1 + \frac{1}{\omega} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right).$$

2 - Ds quels pbs interviennent β et/ou γ ?

$$ds^2 = -\left[1 - 2\frac{Gm}{r} + 2\beta\left(\frac{Gm}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(3)\right]dt^2 + \left[1 + 2\gamma\frac{Gm}{r} + \mathcal{O}(2)\right]dl_{eu}^2$$

avec : $\frac{Gm}{r} \sim$ vit. orbitale $<< 1$ (c^2)

$dl \sim$ (depl pdt un laps de tps $\sim dt$).

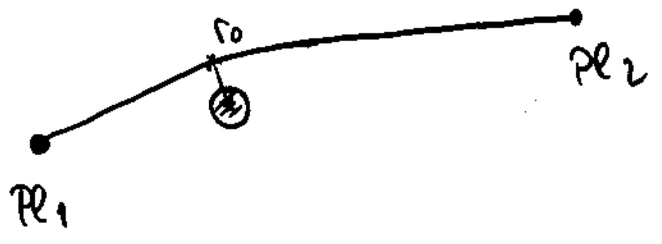
• Lumière : $dl \sim c\,dt = dt$

$$\hookrightarrow \frac{\text{terme}(\beta)}{\text{terme}(\gamma)} \sim \frac{\left(\frac{Gm}{r}\right)^2 dt^2}{\frac{Gm}{r}\,dl^2} \sim \frac{Gm}{r} << 1$$

$\hookrightarrow$ termes en β negligeables (devant termes en γ).

* deflexion lumiere : $\alpha = (1+\gamma)\,\frac{2Gm}{r_0 c^2}$

* effet Shapiro :



$$\Delta t = 2(1+\gamma)\frac{Gm}{c^3}\ln\left(4\,\frac{r_{Pl1}\cdot r_{Pl2}}{r_0^2}\right)$$

- Planetes, satellites ....

$$dl \sim v_{orb}\, dt \sim \sqrt{\frac{Gm}{r}}\, dt$$

$\hookrightarrow$ $\dfrac{\text{terme}(\beta)}{\text{terme}(\gamma)} \sim \dfrac{\left(\frac{Gm}{r}\right)^2 dt^2}{\frac{Gm}{r}\, dl^2} \sim 1$

$\hookrightarrow$ β et γ interviennent au même niveau

* Avance perihelie : $\delta\theta_{per} = \dfrac{2+2\gamma-\beta}{3} \cdot \dfrac{6\pi Gm}{c^2 a(1-e^2)}$ revol^{-1}.

* Effet Nordtvedt : Terre, Lune = systèmes auto-grav

$\hookrightarrow$ $\neq$ part d'epreuve.

Ne "tombent" donc pas de la m̂ façon vers le Soleil.

$\rightsquigarrow$ Mvt relatif inclu un terme $\propto 3+\gamma-4\beta$

$(= 0$ en RG$)$.

3 - Autres param PN (th. "non ordinaires").

∃ lieu $(\vec{r}, t)$ privilégié : ξ

∃ ref^t privilégié : α_1

α_2

α_3

Violation conservation m^t : ζ_1

ζ_2

ζ_3

ζ_4

RG et ST : $\xi = \alpha_1 = \ldots = \zeta_4 = 0$

C - Formulation variationnelle.

1 - Theories classiques

$$S = \int L(\underbrace{f, g, \ldots,}_{\substack{\text{variables} \\ \text{dynamique} \\ \text{de la theorie}}} \partial_k f, \partial_k g, \ldots ; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{var. indepdtes} \\ \text{(eventuellement)}}}{x^k}) \, dx^1 dx^2 \ldots$$

$$\frac{\delta S}{\delta f} = 0 , \quad \frac{\delta S}{\delta g} = 0 , \ldots \Rightarrow \text{equations de la theorie.}$$

2 - Relativité generale.

Même idée, mais $g_{\alpha\beta}$ (geometrie) est aussi une variable dynamique.

$$S = \underset{\substack{\uparrow \\ g_{\alpha\beta}}}{S_{geom}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{champs non-gravitationnels} \\ \text{(matière, electromagn, ...)}}}{S_{NG}}$$

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\, d^4x + \int \mathcal{L}_{NG}(\underbrace{\overset{(1)}{\psi}, \overset{(2)}{\psi}, \dots}_{\text{Chps Non Grav.}} ; g_{\alpha\beta})\sqrt{-g}\, d^4x$$

$\sqrt{-g}$: pour avoir une densité sc. sous le sgne $\int$.

$R\sqrt{-g}$: le + simple donnant des eq. du champ grav. non triviales. (lagrangien de Hilbert-Einstein).

$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}$: $\longrightarrow$ Eq. d'Einstein.

$\frac{\delta S}{\delta \overset{(k)}{\psi}} = 0 \longrightarrow$ Eq. conservation associées à chaque champ $\overset{(k)}{\psi}$: $\nabla_\alpha \overset{(k)}{T}{}^{\alpha\beta} = 0$.

Equations non-independantes :

$$\text{Eq. d'Einstein} \Longrightarrow \sum_k \nabla_\alpha \overset{(k)}{T}{}^{\alpha\beta} = 0$$

3. Theories S.T.

But : remplacer G par ϕ

$$\frac{1}{G} R \longrightarrow \phi R \quad \text{ds } S_{geom} \ ?$$

ds ce cas : $\dfrac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \implies R = 0$

le "+ simple" pour éviter une telle contrainte :

$$S_{geom} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left(\phi R - \underbrace{\omega(\phi)}_{\text{th. de BD si } \omega' = 0} \frac{\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi}{\phi} \right) d^4x$$

$\mathcal{L}_{NG}$?

Si $\mathcal{L}_{NG} \not\ni \phi$, alors WEP. ok.

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left(\phi R - \omega(\phi) \frac{\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi}{\phi} \right) d^4x + \int \sqrt{-g} \, \mathcal{L}_{NG}\left(\psi^{(k)} ; g_{\mu\nu}\right) d^4x$$

4 - Theories non linéaires de la gravit.

Theories purement tensorielles (pas de Φ).

$$S_{geom} = \int \sqrt{-g}\, f(R)\, d^4x.$$

Si f linéaire : Hilbert-Einstein.

Si f non linéaire : th non-lin de la grav.

⚠ non-linéaire dans ce sens !! (f).

RG : th linéaire (f linéaire), mais une combinaison linéaire de solutions n'est pas une solution.

⟶ Eq. du champ du 4ième ordre (termes en $\partial\partial\partial\partial g_{\alpha\beta}$).

→ ptés des sol. peuvent être très $\neq$ RG, même si la non linéarité de f est "petite".

- $\exists$ aussi theories avec termes tels que

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \ldots$$

dans le lagrangien (Weyl ....).

D - th ST : motivations actuelles.

viennent de :

- Théories unificatrices : * autres f
  * grav + Qtq.
- Cosmologie : * énergie noire
  * exp. accélérée.

1. Un exemple : th. avec extra-dim.

* Première théorie : Kaluza-Klein (1921-26)

$$N = 4 + 1$$

$\alpha = 0,1,2,3$ (V_4).

1 ↳ spatiale $\alpha = 4$

$$g_{44} = 1 \quad \text{et} \quad \partial_4 g_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

+ Eq. d'Einstein en $4+1 = 5$ dim.

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{\alpha 4}\, g_{\beta 4} \qquad (\alpha,\beta) \in (0,1,2,3) \text{ espt}^{\text{ps}}\ V_4$$

↳ $$R^{(5)} = R^{(4)}(\bar{g}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu$, $\phi_\mu \propto g_{\mu 4}$

→ théorie d'Einstein ~~Max~~ Maxwell (Eq d'E. + Eq Maxwell).

* retour moderne vers cette idée

$$N = 4 + n$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

Coord (x^α), $\alpha = 0,1,2,3$ $(\mathcal{V}_4)$ — Coord (y^μ), $\mu = 4, \dots, N-1$ $(= n+3)$

n : extra-dimensions compactifiées.

$$\underset{a,b \,\in\, [0,N-1]}{(g_{ab})} = \begin{array}{c c} \left(\begin{array}{cc} g_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & A^2(x)\,\tilde{g}_{\mu\nu}(y) \end{array}\right) & \begin{array}{l}]\,4 \\ ]\,n \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{4} & \underbrace{\qquad\qquad}_{n} \end{array} & \end{array}$$

- $g_{\alpha\mu} = 0$ $\left(\alpha \in [0,3],\ \mu \in [4,N-1]\right)$: pas essentiel pour nous (si $\neq 0$, autres interactions)

$A(x)$: "facteur d'echelle" des extradim compactifiées, depend du point de $\mathcal{V}_4$.

lagrangien : $\mathcal{L}^{(N)} \propto \sqrt{-g^{(N)}}\, R^{(N)}$

lagrangien "effectif" ds $\mathcal{V}_4$:

$$\mathcal{L}^{(4)} \sim \frac{\int \mathcal{L}^{(N)}\, d^n y}{\int \sqrt{\tilde{g}}\, d^n y}$$

On pose $\phi \propto A^{\frac{n}{2}}$

→ th de type BD, + termes supplementaires en ϕ (existence d'un potentiel).

(Si $n = 2$, exactement BD.)

avec : $\omega = -\frac{n-1}{n}$ Incompatible avec obs/exp.

2 - Egalement...

* String theory :

→ Conduit à une th. de la grav de type BD, avec

$\omega = -1$ → Incompatible exp/obs.

$\exists$ (?) des solutions pour arriver à des th. effectives de la gravitation, avec $\omega \gg 1$.

* Brane theory

* ....

* Cosmologie : modeles actuels utilise un (ou des) chp scalaire(s), avec termes potentiels ds le lagrangien, pour aborder les pbs actuels (exp. acc., energie noire, ...).

Ouvrages generaux sur la gravitation relativiste

• R. M. Wald : *General relativity*, The University of Chicago Press (1984).

• H. Stephani : *Relativity*, Cambridge University Press (2004).

• L. Landau et E. Lifchitz : *Theory des champs*, Ed. Mir (1970), en particulier pour les paragraphes 81, 82, 84, 87, 88, 96, 97, 99, 100.

• A. Papapetrou : Lectures on *General relativity*, D. Reidel Publishing Company (1974).

Beaucoup de choses dans un livre tres compact (moins de 200 pages).

• C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler : *Gravitation*, W. H. Freeman and Company (1973),

qui reste la reference des references, malgre son age. Enormement de choses, a des niveaux tres divers (+ de 1000 pages).

Sur le calcul tensoriel

J'ai beaucoup aime le livre suivant, bien qu'il soit tres ancien :

E. Schrodinger, *Spacetime Structure*, Cambridge University Press (1950).

Il s'agit bien du celebre Schrodinger, de la mecanique quantique. C'est un ouvrage d'une centaine de pages. Dans les 60 premieres pages, il n'explique pas le calcul tensoriel, mais plutot le redecouvre et le reconstruit avec nous, en suivant la demarche d'une personne ayant des preoccupations de physicien, mais desirant construire un outil mathematique propre et aussi general que possible en vue d'extensions eventuelles. Magnifique. A consommer sans moderation.

On pourra egalement se reporter aux ouvrages suivants

• S. Weinberg : *Gravitation and cosmology*, J. Wiley & Sons, New York (1972).

• T. Damour : *The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity*, dans "300 years of Gravitation", Cambridge University Press, S. Hawking & W. Israel, editors (1987).

Un excellent article sur le probleme du mouvement, et sur la definition des concepts, dans un contexte newtonien d'une part, dans un contexte relativiste d'autre part. L'ouvrage prend le temps d'insister sur des points trop souvent passes sous silence (consideres comme evidents par d'autres auteurs ?), bien qu'ils soient essentiels pour comprendre la terminologie qu'on utilise.

• P. Tourrenc : *Relativite et Gravitation*, Armand Colin (1992).

En francais. Une approche tres "physique" de la relativite generale et des theories metriques.

• C. M. Will : *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press (1993).

Une reference pour ce qui est des tests des theories de la gravitation (meme si la precision des experiences et observation a sensiblement evolue depuis), avec une liste tres complete des theories alternatives.