

Probabilités

Notions essentielles pour le traitement du signal

Jérôme Verdun

Ecole Nationale des Sciences Géographiques
Département "Positionnement Terrestre & Spatial"

Laboratoire de Recherches en Géodésie

Courriel : verdun@ensg.ign.fr

Ecole d'été du GRGS
Forcalquier 4 - 8 septembre 2006

Probabilités ?

Probabilités → étude des phénomènes aléatoires i.e. non prédictibles, liés au hasard

Expérience aléatoire → expérience renouvelable qui, réalisée dans des conditions identiques, ne donne pas le même résultat

Événement aléatoire → événement lié à une expérience aléatoire et dont la réalisation dépend exclusivement des résultats de cette dernière

Probabilités ?

Probabilités → étude des phénomènes aléatoires i.e. non prédictibles, liés au hasard

Expérience aléatoire → expérience renouvelable qui, réalisée dans des conditions identiques, ne donne pas le même résultat

Événement aléatoire → événement lié à une expérience aléatoire et dont la réalisation dépend exclusivement des résultats de cette dernière

Probabilités ?

Probabilités → étude des phénomènes aléatoires i.e. non prédictibles, liés au hasard

Expérience aléatoire → expérience renouvelable qui, réalisée dans des conditions identiques, ne donne pas le même résultat

Événement aléatoire → événement lié à une expérience aléatoire et dont la réalisation dépend exclusivement des résultats de cette dernière

Modélisation d'une expérience aléatoire (EA)

Univers Ω : ensemble de tous les résultats possibles
(réalisations) de l'EA

Tribu \mathcal{T} : collection d'événements possibles \equiv ensemble de
parties de Ω

Mesure de probabilité \mathbb{P} : application qui associe à chaque
événement possible sa probabilité

Remarque : événement \equiv sous-ensemble de Ω

Modélisation d'une expérience aléatoire (EA)

Univers Ω : ensemble de tous les résultats possibles (réalisations) de l'EA

Tribu \mathcal{T} : collection d'événements possibles \equiv ensemble de parties de Ω

Mesure de probabilité \mathbb{P} : application qui associe à chaque événement possible sa probabilité

Remarque : événement \equiv sous-ensemble de Ω

Modélisation d'une expérience aléatoire (EA)

Univers Ω : ensemble de tous les résultats possibles (réalisations) de l'EA

Tribu \mathcal{T} : collection d'événements possibles \equiv ensemble de parties de Ω

Mesure de probabilité \mathbb{P} : application qui associe à chaque événement possible sa probabilité

Remarque : événement \equiv sous-ensemble de Ω

Plan

- 1** Espace de probabilités
- 2 Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1** Espace de probabilités
- 2** Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1** Espace de probabilités
- 2** Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3** Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1 Espace de probabilités
- 2 Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1 Espace de probabilités
- 2 Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1 Espace de probabilités
- 2 Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

- 1 Espace de probabilités
- 2 Variables et vecteurs aléatoires réels
- 3 Probabilité conditionnelle
- 4 Fonction caractéristique
- 5 Vecteurs gaussiens
- 6 Processus aléatoires
- 7 Systèmes linéaires gaussiens

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Définition

Triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que :

1. $\Omega \equiv$ univers

2. $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\Omega) \equiv$ tribu, qui vérifie

(i) $\Omega \in \mathcal{T}$

(ii) si $A \in \mathcal{T}$ alors $C_A^c \in \mathcal{T}$

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Remarques

- $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ espace probabilisable
- Ω peut être fini, dénombrable ou non dénombrable

Plan

Espace de probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité conditionnelle

Fonction caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires gaussiens

Espace de probabilités

Définition

Triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que :

1. $\Omega \equiv$ univers
2. $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\Omega) \equiv$ tribu, qui vérifie
 - (i) $\Omega \in \mathcal{T}$
 - (ii) si $A \in \mathcal{T}$ alors $C_A^A \in \mathcal{T}$
 - (ii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Remarques

- $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ espace probabilisable
- Ω peut être fini, dénombrable ou non dénombrable

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Définition

Triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que :

1. $\Omega \equiv$ univers
2. $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\Omega) \equiv$ tribu, qui vérifie
 - (i) $\Omega \in \mathcal{T}$
 - (ii) si $A \in \mathcal{T}$ alors $C_A^A \in \mathcal{T}$
 - (ii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Remarques

- $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ espace probabilisable
- Ω peut être fini, dénombrable ou non dénombrable

Plan

Espace de probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité conditionnelle

Fonction caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires gaussiens

Espace de probabilités

Définition

Triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que :

1. $\Omega \equiv$ univers
2. $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\Omega) \equiv$ tribu, qui vérifie
 - (i) $\Omega \in \mathcal{T}$
 - (ii) si $A \in \mathcal{T}$ alors $C_A^A \in \mathcal{T}$
 - (ii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Remarques

- $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ espace probabilisable
- Ω peut être fini, dénombrable ou non dénombrable

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Exemples de tribu

- $\mathcal{P}(\Omega)$
- si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\{A, C_{\Omega}^A, \Omega, \emptyset\}$ est la tribu engendrée par A
- si $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, la **plus petite tribu** contenant tous les éléments de \mathcal{A} est appelée tribu engendrée par \mathcal{A}

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Exemples de tribu

- $\mathcal{P}(\Omega)$
- si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\{A, C_{\Omega}^A, \Omega, \emptyset\}$ est la tribu **engendrée** par A
- si $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, la **plus petite tribu** contenant tous les éléments de \mathcal{A} est appelée tribu engendrée par \mathcal{A}

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Exemples de tribu

- $\mathcal{P}(\Omega)$
- si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un événement, $\{A, C_{\Omega}^A, \Omega, \emptyset\}$ est la tribu **engendrée** par A
- si $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, la **plus petite tribu** contenant tous les éléments de \mathcal{A} est appelée tribu engendrée par \mathcal{A}

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Exemples de tribu

- si $\Omega = \mathbb{R}$ et si \mathcal{A} désigne l'ensemble des intervalles ouverts de \mathbb{R} , alors la tribu \mathcal{B} engendrée par \mathcal{A} est la tribu **borélienne** sur \mathbb{R}
- si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si \mathcal{A} désigne l'ensemble des parties ouvertes de \mathbb{R}^n , alors la tribu \mathcal{B}^n engendrée par \mathcal{A} est la tribu **borélienne** sur \mathbb{R}^n

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Exemples de tribu

- si $\Omega = \mathbb{R}$ et si \mathcal{A} désigne l'ensemble des intervalles ouverts de \mathbb{R} , alors la tribu \mathcal{B} engendrée par \mathcal{A} est la tribu **borélienne** sur \mathbb{R}
- si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si \mathcal{A} désigne l'ensemble des parties ouvertes de \mathbb{R}^n , alors la tribu \mathcal{B}^n engendrée par \mathcal{A} est la tribu **borélienne** sur \mathbb{R}^n

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Définition

3. $\mathbb{P} \equiv$ application de $\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée **mesure de probabilité**, qui vérifie :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geq 0$

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} disjoints deux à deux, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé « espace de probabilités » ou « espace probabilisé »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Définition

3. $\mathbb{P} \equiv$ application de $\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée **mesure de probabilité**, qui vérifie :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geq 0$

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} disjoints deux à deux, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé « espace de probabilités » ou « espace probabilisé »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Définition

3. $\mathbb{P} \equiv$ application de $\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée **mesure** de probabilité, qui vérifie :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geq 0$

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} disjoints deux à deux,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé « espace de probabilités » ou « espace probabilisé »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Propriétés fondamentales

1. $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(C^A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} ,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Propriétés fondamentales

1. $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(C^A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} ,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espace de probabilités

Propriétés fondamentales

1. $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
2. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(C^A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{T} ,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabiles aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabiles aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Définitions

- Variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{T}$$

i.e.

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabes aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Définitions

- Vecteur aléatoire réel, de dimension n sur $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}^n, \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{T}$$

X peut être considéré comme un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabiles aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabiles aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Définitions

- Vecteur aléatoire réel, de dimension n sur $(\Omega, \mathcal{T}) \equiv$ application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}^n, \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{T}$$

X peut être considéré comme un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabes aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Notations

$$\blacksquare \{X \in B\} \triangleq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$$\blacksquare \mathbb{P}(X \in B) \triangleq \mathbb{P}(\{X \in B\})$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabes aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Notations

- $\{X \in B\} \triangleq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$
- $\mathbb{P}(X \in B) \triangleq \mathbb{P}(\{X \in B\})$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabes aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Distribution de probabilité

L'application $\mu_X : \mathcal{B}$ (resp. \mathcal{B}^n) $\longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{R}^n) définie par

$$\mu_X(B) \triangleq \mathbb{P}(\{X \in B\}), \quad B \in \mathcal{B} \text{ (resp. } \mathcal{B}^n)$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (resp. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$)
appelée « loi de X » ou **distribution de probabilité** de X

Remarque : X désignera dorénavant un vecteur aléatoire réel de dimension $n \geq 1$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variabes aléatoires, vecteurs aléatoires réels

Distribution de probabilité

L'application $\mu_X : \mathcal{B}$ (resp. \mathcal{B}^n) $\longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{R}^n) définie par

$$\mu_X(B) \triangleq \mathbb{P}(\{X \in B\}), \quad B \in \mathcal{B} \text{ (resp. } \mathcal{B}^n)$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (resp. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$)
appelée « loi de X » ou **distribution de probabilité** de X

Remarque : X désignera dorénavant un vecteur aléatoire réel de dimension $n \geq 1$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variables aléatoires à densité

Définition

La loi de X est dite **absolument continue** s'il existe une fonction p_X définie sur \mathbb{R}^n , telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mu_X(B) = \int_B p_X(x) dx$$

p_X est la **densité de probabilité** de X

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Variables aléatoires à densité

Exemple

Densité d'une variable aléatoire **gaussienne, réelle**, de **moyenne** μ , de **variance** σ^2 :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conjointe

Définition

Soit X (resp. Y) un vecteur aléatoire de dimension n (resp. de dimension p). S'il existe une fonction $p_{X,Y}$ définie sur \mathbb{R}^{n+p} , telle que pour tout $B \in \mathbb{R}^{n+p}$,

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in B] = \int_B p_{X,Y}(x, y) dx dy,$$

$p_{X,Y}$ est appelée **densité conjointe** de X et Y

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densités marginales

Définitions

- Densité marginale de X : $p_X(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^p} p_{X,Y}(x, y) dy$
- Densité marginale de Y : $p_Y(y) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} p_{X,Y}(x, y) dx$

La densité $p_{X_i}(x_i)$ de la composante X_i est donnée par

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{p-1}} p_{X_1, \dots, X_p}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_p$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance mathématique (moyenne)

Espérance du vecteur aléatoire X de dimension n

$$\mathbb{E}[X] \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} x p_X(x) dx$$

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ alors $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_n])$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance mathématique (moyenne)

Espérance du vecteur aléatoire $Y = g(X)$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) p_X(x) dx$$

où g est une fonction réelle mesurable sur \mathbb{R}^n

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance mathématique (moyenne)

Linéarité de l'espérance

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Covariance

Matrice de covariance de X

$$\begin{aligned} Q_X &\triangleq \mathbb{E}[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x - \bar{X})(x - \bar{X})^T p_X(x) dx \end{aligned}$$

où $\bar{X} = \mathbb{E}[X]$

Matrice $n \times n$ symétrique, semi-définie, positive

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Covariance

Matrice de covariance de X

$$\begin{aligned} Q_X &\triangleq \mathbb{E}[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x - \bar{X})(x - \bar{X})^T p_X(x) dx \end{aligned}$$

où $\bar{X} = \mathbb{E}[X]$

Matrice $n \times n$ symétrique, semi-définie, positive

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Covariance

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ alors

$$Q_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

où

- $\sigma_i^2 = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)^2]$ est la variance de la variable aléatoire X_i
- $cov(X_i, X_j) = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ est la covariance des variables aléatoires X_i et X_j

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Covariance

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ alors

$$Q_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

où

- $\sigma_i^2 = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)^2]$ est la variance de la variable aléatoire X_i
- $cov(X_i, X_j) = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ est la covariance des variables aléatoires X_i et X_j

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Covariance

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ alors

$$Q_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

où

- $\sigma_i^2 = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)^2]$ est la variance de la variable aléatoire X_i
- $cov(X_i, X_j) = \mathbb{E} [(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ est la covariance des variables aléatoires X_i et X_j

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Exemple

Variable aléatoire réelle gaussienne

$$\blacksquare p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\blacksquare \bar{X} = \mathbb{E}[X] = \mu$$

$$\blacksquare Q_X = \mathbb{E}[(X - \bar{X})^2] = \text{var}(X) = \sigma^2$$

$$\text{Intégrale gaussienne : } \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Exemple

Variable aléatoire réelle gaussienne

- $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
- $\bar{X} = \mathbb{E}[X] = \mu$
- $Q_X = \mathbb{E}[(X - \bar{X})^2] = \text{var}(X) = \sigma^2$

Intégrale gaussienne : $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Exemple

Variable aléatoire réelle gaussienne

- $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
- $\bar{X} = \mathbb{E}[X] = \mu$
- $Q_X = \mathbb{E}[(X - \bar{X})^2] = \text{var}(X) = \sigma^2$

Intégrale gaussienne : $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Exemple

Variable aléatoire réelle gaussienne

- $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
- $\bar{X} = \mathbb{E}[X] = \mu$
- $Q_X = \mathbb{E}[(X - \bar{X})^2] = \text{var}(X) = \sigma^2$

Intégrale gaussienne : $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Probabilité conditionnelle

Définition

Soient $A, B \in \mathcal{T}$ deux événements. La **probabilité conditionnelle** de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est donnée par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

pourvu que $\mathbb{P}(B) > 0$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Probabilité conditionnelle

Première relation de Bayes

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

pourvu que $\mathbb{P}(B) > 0$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Probabilité conditionnelle

Relation des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, une famille d'événements incompatibles deux à deux telles que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = 1$, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(B|A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

Une telle famille est aussi appelée «système complet d'événements »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Probabilité conditionnelle

Relation des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, une famille d'événements incompatibles deux à deux telles que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = 1$, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(B|A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

Une telle famille est aussi appelée «système complet d'événements »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Probabilité conditionnelle

Deuxième relation de Bayes

$$\forall j \in I, \quad \mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(B|A_n) \mathbb{P}(A_n)}$$

où $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'événements

Plan

Espace de probabilités

Variables aléatoires

Probabilité conditionnelle

Fonction caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires gaussiens

Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements $A, B \in \mathcal{T}$ sont dits **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

Autrement dit, la réalisation de l'un de ces événements n'a aucune influence sur l'autre

Notation : $A \perp B$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Événements mutuellement indépendants

Définition

Les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont dits **mutuellement indépendants** si, pour tout choix $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Indépendance de deux vecteurs aléatoires

Définition

Les vecteurs aléatoires X (dim. n) et Y (dim. p) définis sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ sont indépendants ($X \perp Y$) si, pour tout $A \in \mathcal{B}^n$, $B \in \mathcal{B}^p$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, i.e.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Indépendance de deux vecteurs aléatoires

Propriétés caractéristiques

Soient X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants, alors

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$
- $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(Y)]$

pour toute paire de fonctions réelles, mesurables, définies respectivement sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Indépendance de deux vecteurs aléatoires

Propriétés caractéristiques

Soient X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants, alors

- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^p, \quad p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$
- $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(Y)]$

pour toute paire de fonctions réelles, mesurables, définies respectivement sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Conditionnement par ($Z = z$)

Soient deux vecteurs aléatoires X (dim. n), Z (dim. p) définis sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Qu'apporte l'**observation** de la réalisation $Z = z$ sur la connaissance de X ?

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Conditionnement par ($Z = z$)

Soient deux vecteurs aléatoires X (dim. n), Z (dim. p) définis sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Qu'apporte l'**observation** de la réalisation $Z = z$ sur la connaissance de X ?

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Retour sur la densité conjointe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Z \in B) &= \int_{A \times B} p_{X,Z}(x, z) dx dz \\ &= \int_B \left(\int_A p_{X,Z}(x, z) dx \right) dz \\ &= \int_B \left(\int_A \frac{p_{X,Z}(x, z)}{p_Z(z)} dx \right) p_Z(z) dz \\ &= \int_B \psi(z) p_Z(z) dz\end{aligned}$$

$\psi(z)$ joue le rôle ici d'une **loi conditionnelle** $\mathbb{P}(X \in A | Z = z)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Retour sur la densité conjointe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A, Z \in B) &= \int_{A \times B} p_{X,Z}(x, z) dx dz \\ &= \int_B \left(\int_A p_{X,Z}(x, z) dx \right) dz \\ &= \int_B \left(\int_A \frac{p_{X,Z}(x, z)}{p_Z(z)} dx \right) p_Z(z) dz \\ &= \int_B \psi(z) p_Z(z) dz\end{aligned}$$

$\psi(z)$ joue le rôle ici d'une **loi conditionnelle** $\mathbb{P}(X \in A | Z = z)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle de X sachant $Z = z$

Définition

La densité conditionnelle du vecteur aléatoire X sachant $Z = z$ est définie par

$$p_{X|Z=z}(x) = \frac{p_{X,Z}(x, z)}{p_Z(z)}$$

Loi conditionnelle de X sachant $Z = z$:

$$\mathbb{P}(X \in A | Z = z) = \int_A \frac{p_{X,Z}(x, z)}{p_Z(z)} dx$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance conditionnelle

Définition

Soit φ une fonction réelle mesurable définie sur \mathbb{R}^n .

L'espérance conditionnelle de la variable aléatoire réelle $\varphi(X)$ sachant $Z = z$ est définie par

$$\mathbb{E}[\varphi(X) \mid Z = z] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) p_{X|Z=z}(x) dx$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance conditionnelle

Proposition (P1)

Soit $\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}[\varphi(X)|Z = z]$. La variable aléatoire réelle $\hat{\varphi}(Z) = \mathbb{E}[\varphi(X)|Z]$ est caractérisée par

$$\mathbb{E}[[\varphi(X) - \hat{\varphi}(Z)] \psi(Z)] = 0$$

pour toute fonction réelle mesurable $\psi(\cdot)$ définie sur \mathbb{R}^p

Ecriture équivalente

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X)|Z] \psi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(X) \psi(Z)]$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance conditionnelle

Proposition (P1)

Soit $\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}[\varphi(X)|Z = z]$. La variable aléatoire réelle $\hat{\varphi}(Z) = \mathbb{E}[\varphi(X)|Z]$ est caractérisée par

$$\mathbb{E}[[\varphi(X) - \hat{\varphi}(Z)] \psi(Z)] = 0$$

pour toute fonction réelle mesurable $\psi(\cdot)$ définie sur \mathbb{R}^p

Ecriture équivalente

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X)|Z] \psi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(X) \psi(Z)]$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance conditionnelle

Corollaire (P2)

- (i) $\mathbb{E} [\mathbb{E} [\varphi(X)|Z]] = \mathbb{E} [\varphi(X)]$
- (ii) Si $X = f(Z)$ alors $\mathbb{E} [\varphi(X) |Z] = \varphi(X)$
- (iii) Si $Z \perp X$ alors $\mathbb{E} [\varphi(X) |Z] = \mathbb{E} [\varphi(X)]$

(ii) $\Rightarrow X$ dépend de $Z \Rightarrow$ l'observation de Z permet de connaître $\varphi(X)$ exactement

(iii) $\Rightarrow X$ et Z sont indépendants \Rightarrow l'observation de Z n'apprend rien sur $\varphi(X)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Espérance conditionnelle

Corollaire (P2)

$$(i) \mathbb{E} [\mathbb{E} [\varphi(X)|Z]] = \mathbb{E} [\varphi(X)]$$

$$(ii) \text{ Si } X = f(Z) \text{ alors } \mathbb{E} [\varphi(X) | Z] = \varphi(X)$$

$$(iii) \text{ Si } Z \perp X \text{ alors } \mathbb{E} [\varphi(X) | Z] = \mathbb{E} [\varphi(X)]$$

(ii) $\Rightarrow X$ dépend de $Z \Rightarrow$ l'observation de Z permet de connaître $\varphi(X)$ exactement

(iii) $\Rightarrow X$ et Z sont indépendants \Rightarrow l'observation de Z n'apprend rien sur $\varphi(X)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Soient deux vecteurs aléatoires X (dim. n) et Z (dim. p). Un **estimateur** de X à partir de l'observation de Z est une application mesurable

$$z \in \mathbb{R}^p \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{R}^n$$

$\psi(Z)$ constitue un vecteur aléatoire

Pour une réalisation particulière $Z = z$ de l'observation de Z , $\hat{x} = \psi(z)$ correspond à une **estimation** de X

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Soient deux vecteurs aléatoires X (dim. n) et Z (dim. p). Un **estimateur** de X à partir de l'observation de Z est une application mesurable

$$z \in \mathbb{R}^p \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{R}^n$$

$\psi(Z)$ constitue un vecteur aléatoire

Pour une réalisation particulière $Z = z$ de l'observation de Z , $\hat{x} = \psi(z)$ correspond à une **estimation** de X

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Soient deux vecteurs aléatoires X (dim. n) et Z (dim. p). Un **estimateur** de X à partir de l'observation de Z est une application mesurable

$$z \in \mathbb{R}^p \longmapsto \psi(z) \in \mathbb{R}^n$$

$\psi(Z)$ constitue un vecteur aléatoire

Pour une réalisation particulière $Z = z$ de l'observation de Z , $\hat{x} = \psi(z)$ correspond à une **estimation** de X

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Une mesure de l'écart entre l'estimateur de X et sa vraie valeur est fournie par la variance de l'erreur d'estimation i.e. **l'erreur quadratique moyenne**

$$\mathbb{E} [\|X - \psi(Z)\|^2]$$

L'estimateur du minimum de variance de X sachant Z est un estimateur $\hat{X}(\cdot)$ tel que

$$\mathbb{E} [\|X - \hat{X}(Z)\|^2] \leq \mathbb{E} [\|X - \psi(Z)\|^2]$$

pour tout autre estimateur $\psi(\cdot)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Une mesure de l'écart entre l'estimateur de X et sa vraie valeur est fournie par la variance de l'erreur d'estimation i.e. **l'erreur quadratique moyenne**

$$\mathbb{E} [\|X - \psi(Z)\|^2]$$

L'estimateur du minimum de variance de X sachant Z est un estimateur $\hat{X}(\cdot)$ tel que

$$\mathbb{E} [\|X - \hat{X}(Z)\|^2] \leq \mathbb{E} [\|X - \psi(Z)\|^2]$$

pour tout autre estimateur $\psi(\cdot)$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance

Proposition (P3)

Soient X et Z deux vecteurs aléatoires de dimensions n et p respectivement. L'estimateur du minimum de variance de X sachant Z est l'espérance conditionnelle, i.e.

$$\hat{X}(z) = \mathbb{E}[X|Z = z] = \int_{\mathbb{R}^n} x p_{X|Z=z}(x) dx$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Estimateur du minimum de variance : preuve

Soit $\psi(\cdot)$ un estimateur quelconque.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|X - \psi(Z)\|^2] &= \\ &= \mathbb{E} [\|X - \hat{X}(Z)\|^2] \\ &+ \mathbb{E} [\|\hat{X}(Z) - \psi(Z)\|^2] \\ &+ \underbrace{2 \mathbb{E} \left[\left(X - \hat{X}(Z) \right)^T \left(\hat{X}(Z) - \psi(Z) \right) \right]}_{0 \text{ d'après (P1)}} \end{aligned}$$

Expression minimum pour $\psi(z) = \hat{X}(z)$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Biais de l'estimateur du minimum de variance

Soit $\psi(\cdot)$ un estimateur de X sachant Z . Le **biais** de ψ est défini par

$$b(z) \triangleq \mathbb{E}[X - \psi(z) | Z = z]$$

Pour $\psi(z) = \hat{X}(z)$, $b(z) = 0$ quel que soit z d'où

Proposition (P4)

L'espérance conditionnelle \hat{X} de X sachant Z est un estimateur sans biais

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Biais de l'estimateur du minimum de variance

Soit $\psi(\cdot)$ un estimateur de X sachant Z . Le **biais** de ψ est défini par

$$b(z) \triangleq \mathbb{E}[X - \psi(z) | Z = z]$$

Pour $\psi(z) = \hat{X}(z)$, $b(z) = 0$ quel que soit z d'où

Proposition (P4)

L'espérance conditionnelle \hat{X} de X sachant Z est un estimateur sans biais

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de dimension n défini sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. La **fonction caractéristique** de X est la transformée de Fourier de la densité p_X

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E} \left[e^{i u^T X} \right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i u^T x} p_X(x) dx$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

La donnée de « Φ_X » équivaut à celle de « p_X »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de dimension n défini sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. La **fonction caractéristique** de X est la transformée de Fourier de la densité p_X

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E} \left[e^{i u^T X} \right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i u^T x} p_X(x) dx$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

La donnée de « Φ_X » équivaut à celle de « p_X »

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique

Exemple

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle
gaussienne X , de moyenne μ , de variance σ^2

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right)$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique

Indépendance mutuelle

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont mutuellement indépendantes alors

$$\Phi_X(u) = \Phi_{X_1}(u_1) \Phi_{X_2}(u_2) \dots \Phi_{X_n}(u_n)$$

pour tout $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique

Proposition (P5)

Le vecteur aléatoire $Z = AX + b$ où $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^p$, de dimension p a pour fonction caractéristique

$$\Phi_Z(u) = e^{i u^T b} \Phi_X(A^T u)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^p$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Vecteurs aléatoires gaussiens

Définition

Soit X un vecteur aléatoire de dimension n défini sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. X est un vecteur aléatoire **gaussien** (VAG) si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne réelle i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire réelle $u^T X$ est gaussienne

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique d'un VAG

Proposition (P6)

Soit X un vecteur aléatoire gaussien de dimension n , de moyenne μ , et de matrice de covariance Q_X (VAG(n, μ, Q_X)). Sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(u) = \exp\left(i u^T \mu - \frac{1}{2} u^T Q_X u\right)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

Remarque

Les composantes d'un VAG sont gaussiennes ; en revanche, un vecteur aléatoire dont toutes les composantes sont gaussiennes n'est pas nécessairement gaussien

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Fonction caractéristique d'un VAG

Proposition (P6)

Soit X un vecteur aléatoire gaussien de dimension n , de moyenne μ , et de matrice de covariance Q_X (VAG(n, μ, Q_X)). Sa fonction caractéristique est donnée par

$$\Phi_X(u) = \exp\left(i u^T \mu - \frac{1}{2} u^T Q_X u\right)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

Remarque

Les composantes d'un VAG sont gaussiennes; en revanche, un vecteur aléatoire dont toutes les composantes sont gaussiennes n'est pas nécessairement gaussien

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité de la loi d'un VAG

Proposition (P7)

Soit X un vecteur aléatoire VAG(n, μ, Q_X). Si Q_X est inversible (non-dégénérée), alors la loi de X possède une densité p_X

$$p_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det Q_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T Q_X^{-1}(x - \mu)\right)$$

Remarque

Un VAG est complètement défini en se donnant sa moyenne μ , et sa matrice de covariance Q_X

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Transformation affine d'un VAG

Proposition (P8)

Soit X un vecteur aléatoire VAG(n, μ, Q_X). Le vecteur aléatoire $Z = AX + b$ où $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^p$, de dimension p , est gaussien

- de moyenne : $\mu_Z = A\mu + b$
- de matrice de covariance : $Q_Z = AQ_XA^T$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Indépendance des composantes d'un VAG

Proposition (P9)

Soit (X, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension $(n + p)$.
Alors

$$X \perp Z \iff Q_{XZ} = \mathbb{E} \left[(X - \mu_X) (Z - \mu_Z)^T \right] = 0$$

où $\mu_X = \mathbb{E} [X]$ et $\mu_Z = \mathbb{E} [Z]$

i.e. deux composantes d'un VAG sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non-corrélées (orthogonales)

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Indépendance des composantes d'un VAG

Proposition (P9)

Soit (X, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension $(n + p)$.
Alors

$$X \perp Z \iff Q_{XZ} = \mathbb{E} \left[(X - \mu_X) (Z - \mu_Z)^T \right] = 0$$

où $\mu_X = \mathbb{E} [X]$ et $\mu_Z = \mathbb{E} [Z]$

i.e. deux composantes d'un VAG sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non-corrélées (orthogonales)

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Projection orthogonale des composantes d'un VAG

L'espace des variables aléatoires réelles de carré intégrable est muni du produit scalaire $\langle \xi, \nu \rangle = \mathbb{E}[\xi \nu]$

Proposition (P10)

Soit (X, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension $(n + p)$. Alors la projection orthogonale X^\perp du vecteur aléatoire X sur l'espace vectoriel \mathcal{H} engendré par les constantes et les composantes du vecteur aléatoire Z est égale à l'espérance conditionnelle de X sachant Z

$$X^\perp = \hat{X} = \mathbb{E}[X|Z] = \alpha + AZ$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Projection orthogonale des composantes d'un VAG

Dans le cas général (non gaussien),

$$\mathbb{E} \left[\|X - X^\perp\|^2 \right] \geq \mathbb{E} \left[\|X - \hat{X}\|^2 \right]$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG

Proposition (P11)

Soit (X, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension $(n + p)$, de moyenne et de matrice de covariance respectivement données par

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_X & Q_{XZ} \\ Q_{ZX} & Q_Z \end{pmatrix}$$

Si Q_Z est inversible alors la densité conditionnelle $p_{X|Z=z}(x)$ du vecteur aléatoire X sachant Z est une densité gaussienne

- de moyenne : $\hat{X}(z) = \bar{X} + Q_{XZ}Q_Z^{-1}(z - \bar{Z})$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG

Proposition (P11)

Soit (X, Z) un vecteur aléatoire gaussien de dimension $(n + p)$, de moyenne et de matrice de covariance respectivement données par

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_X & Q_{XZ} \\ Q_{ZX} & Q_Z \end{pmatrix}$$

Si Q_Z est inversible alors la densité conditionnelle $p_{X|Z=z}(x)$ du vecteur aléatoire X sachant Z est une densité gaussienne

- de moyenne : $\hat{X}(z) = \bar{X} + Q_{XZ}Q_Z^{-1}(z - \bar{Z})$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG

Proposition (P11)

■ de matrice de covariance : $R = Q_X - Q_{XZ}Q_Z^{-1}Q_{ZX}$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG : remarques

1. L'utilisation de l'information supplémentaire $Z = z$ réduit l'incertitude sur X (« $0 \leq R \leq Q_X$ »)
2. R ne dépend pas de z et peut donc être calculée avant même de disposer de l'observation Z
3. L'estimateur du minimum de variance $\hat{X}(\cdot)$ dépend de façon affine des observations Z

$$\hat{X}(Z) = \bar{X} + Q_{XZ}Q_Z^{-1}(Z - \bar{Z})$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG : remarques

1. L'utilisation de l'information supplémentaire $Z = z$ réduit l'incertitude sur X (« $0 \leq R \leq Q_X$ »)
2. R ne dépend pas de z et peut donc être calculée avant même de disposer de l'observation Z
3. L'estimateur du minimum de variance $\hat{X}(\cdot)$ dépend de façon affine des observations Z

$$\hat{X}(Z) = \bar{X} + Q_{XZ}Q_Z^{-1}(Z - \bar{Z})$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Densité conditionnelle des composantes d'un VAG : remarques

1. L'utilisation de l'information supplémentaire $Z = z$ réduit l'incertitude sur X (« $0 \leq R \leq Q_X$ »)
2. R ne dépend pas de z et peut donc être calculée avant même de disposer de l'observation Z
3. L'estimateur du minimum de variance $\hat{X}(\cdot)$ dépend de façon affine des observations Z

$$\hat{X}(Z) = \bar{X} + Q_{XZ}Q_Z^{-1}(Z - \bar{Z})$$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Processus aléatoires

Définition en temps continu

Un processus aléatoire en temps continu est une famille $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ de vecteurs aléatoires, notée $\{X(t)\}$, définis sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^n

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Processus aléatoires

Définition en temps discret

Un processus aléatoire en temps discret est une famille $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs aléatoires, notée $\{X_k\}$, définis sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^n

Il se prête bien à la modélisation de données de mesure telles que nous les rencontrons en pratique

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Processus aléatoires

Définition en temps discret

Un processus aléatoire en temps discret est une famille $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs aléatoires, notée $\{X_k\}$, définis sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^n

Il se prête bien à la modélisation de données de mesure telles que nous les rencontrons en pratique

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Processus aléatoires gaussien

Définition

Un processus aléatoire $\{X_k\}$ est dit gaussien si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le vecteur (X_0, X_1, \dots, X_p) est gaussien de dimension $(p + 1) \times n$

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Processus aléatoires indépendants

Définition

Deux processus aléatoires $\{X_k\}$ et $\{X'_k\}$ sont dits indépendants si, pour tout $p, p' \in \mathbb{N}$, les vecteurs aléatoires (X_0, X_1, \dots, X_p) et $(X'_0, X'_1, \dots, X'_{p'})$ sont indépendants

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Bruit blanc

Définition

Un **bruit blanc** est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que

- $\mathbb{E}[X_k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X_k X_l^T] = 0$ si $k \neq l$

Si, de plus, le bruit blanc est gaussien, alors les composantes des vecteurs aléatoires du processus sont non corrélées deux à deux

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Bruit blanc

Définition

Un **bruit blanc** est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que

- $\mathbb{E}[X_k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X_k X_l^T] = 0$ si $k \neq l$

Si, de plus, le bruit blanc est gaussien, alors les composantes des vecteurs aléatoires du processus sont non corrélées deux à deux

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Bruit blanc

Définition

Un **bruit blanc** est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que

- $\mathbb{E}[X_k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X_k X_l^T] = 0$ si $k \neq l$

Si, de plus, le bruit blanc est gaussien, alors les composantes des vecteurs aléatoires du processus sont non corrélées deux à deux

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Bruit blanc

Définition

Un **bruit blanc** est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que

- $\mathbb{E}[X_k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}[X_k X_l^T] = 0$ si $k \neq l$

Si, de plus, le bruit blanc est gaussien, alors les composantes des vecteurs aléatoires du processus sont non corrélées deux à deux

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire gaussien est de la forme

$$X_k = F_k X_{k-1} + f_k + W_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_k \in \mathbb{R}^n$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{W_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Le vecteur aléatoire X_k caractérise l'état du système à l'instant k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire gaussien est de la forme

$$X_k = F_k X_{k-1} + f_k + W_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_k \in \mathbb{R}^n$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{W_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Le vecteur aléatoire X_k caractérise l'état du système à l'instant k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire gaussien est de la forme

$$X_k = F_k X_{k-1} + f_k + W_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_k \in \mathbb{R}^n$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{W_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Le vecteur aléatoire X_k caractérise l'état du système à l'instant k

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire gaussien est de la forme

$$X_k = F_k X_{k-1} + f_k + W_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_k \in \mathbb{R}^n$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{W_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Le vecteur aléatoire X_k caractérise l'état du système à l'instant k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état

L'équation d'état d'un système linéaire gaussien est de la forme

$$X_k = F_k X_{k-1} + f_k + W_k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_k \in \mathbb{R}^n$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{W_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Le vecteur aléatoire X_k caractérise **l'état** du système à l'instant k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG)

Proposition (P12)

La sortie $\{X_k\}$ de l'équation d'état d'un SLG est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n . En particulier, chaque X_k est gaussien

- de moyenne : $\bar{X}_k = F_k \bar{X}_{k-1} + f_k$
- de matrice de covariance : $Q_k^X = F_k Q_{k-1}^X F_k^T + Q_k^W$

Le bruit W_k représente une perturbation aléatoire de l'évolution dynamique de l'état X_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG)

Proposition (P12)

La sortie $\{X_k\}$ de l'équation d'état d'un SLG est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n . En particulier, chaque X_k est gaussien

- de moyenne : $\bar{X}_k = F_k \bar{X}_{k-1} + f_k$
- de matrice de covariance : $Q_k^X = F_k Q_{k-1}^X F_k^T + Q_k^W$

Le bruit W_k représente une **perturbation** aléatoire de l'évolution dynamique de l'état X_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG)

Proposition (P12)

La sortie $\{X_k\}$ de l'équation d'état d'un SLG est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n . En particulier, chaque X_k est gaussien

- de moyenne : $\bar{X}_k = F_k \bar{X}_{k-1} + f_k$
- de matrice de covariance : $Q_k^X = F_k Q_{k-1}^X F_k^T + Q_k^W$

Le bruit W_k représente une **perturbation** aléatoire de l'évolution dynamique de l'état X_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG)

Proposition (P12)

La sortie $\{X_k\}$ de l'équation d'état d'un SLG est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n . En particulier, chaque X_k est gaussien

- de moyenne : $\bar{X}_k = F_k \bar{X}_{k-1} + f_k$
- de matrice de covariance : $Q_k^X = F_k Q_{k-1}^X F_k^T + Q_k^W$

Le bruit W_k représente une **perturbation** aléatoire de l'évolution dynamique de l'état X_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Dans le cas où l'état du système n'est pas directement observable, le système précédent doit être complété par une équation d'observation de la forme

$$Z_k = H_k X_k + h_k + V_k$$

qui est la somme

- d'un signal lié à l'état X_k : $H_k X_k + h_k$
- d'un bruit de mesure : V_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Dans le cas où l'état du système n'est pas directement observable, le système précédent doit être complété par une équation d'observation de la forme

$$Z_k = H_k X_k + h_k + V_k$$

qui est la somme

- d'un signal lié à l'état X_k : $H_k X_k + h_k$
- d'un bruit de mesure : V_k

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Dans le cas où l'état du système n'est pas directement observable, le système précédent doit être complété par une équation d'observation de la forme

$$Z_k = H_k X_k + h_k + V_k$$

qui est la somme

- d'un signal lié à l'état X_k : $H_k X_k + h_k$
- d'un bruit de mesure : V_k

Plan

Espace de
probabilités

Variabes aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état & équation d'observation

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \in \mathbb{R}^p$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $h_k \in \mathbb{R}^p$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état & équation d'observation

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \in \mathbb{R}^p$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $h_k \in \mathbb{R}^p$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état & équation d'observation

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \in \mathbb{R}^p$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $h_k \in \mathbb{R}^p$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état & équation d'observation

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \in \mathbb{R}^p$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $h_k \in \mathbb{R}^p$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Systèmes linéaires gaussiens

Equation d'état & équation d'observation

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + f_k + W_k \\ Z_k &= H_k X_k + h_k + V_k \end{cases}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k \in \mathbb{R}^p$, $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $h_k \in \mathbb{R}^p$ et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne \bar{X}_0 , de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG) avec équation d'observation

Proposition (P13)

Le processus $\{(X_k, Z_k)\}$ de sortie du SLG est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^{n+p} . En particulier, chaque (X_k, Z_k) est un vecteur gaussien de moyenne et de matrice de covariance respectivement données par

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_k \\ \bar{Z}_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_k^X & Q_k^{XZ} \\ Q_k^{ZX} & Q_k^Z \end{pmatrix}$$

Plan

Espace de
probabilités

Variables aléatoires

Probabilité
conditionnelle

Fonction
caractéristique

Vecteurs gaussiens

Processus aléatoires

Systèmes linéaires
gaussiens

Sortie d'un système linéaire gaussien (SLG) avec équation d'observation

Proposition (P13)

avec,

$$\bar{X}_k = F_k \bar{X}_{k-1} + f_k$$

$$Q_k^X = F_k Q_{k-1}^X F_k^T + Q_k^W$$

$$\bar{Z}_k = H_k \bar{X}_{k-1} + h_k$$

$$Q_k^Z = H_k Q_{k-1}^X H_k^T + Q_k^V$$

$$Q_k^{XZ} = Q_k^X H_k^T$$