



4ème Ecole d'été du GRGS

Déformations élastiques et viscoélastiques de la Terre

Exercices

Forcalquier
1er et 2 septembre 2008

Yves REGISTER

Contents

1	Descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement	3
1.1	Variables lagrangiennes et variables eulériennes	3
1.2	Variation lagrangienne et variation eulérienne	3
1.3	Force dérivant d'un potentiel	3
2	Oscillations sphéroïdales d'une sphère solide	4
2.1	Système sphéroïdal	4
2.2	Solution	4
2.2.1	Oscillations libres	5
2.2.2	Oscillations forcées	6
3	Modes radiaux	7
3.1	Système radial	7
3.2	Condition à la surface	7
3.3	Modèle homogène	7
3.4	Valeurs numériques	7
3.5	Résolution numérique	7
3.6	Solution analytique	9
4	Modes toroïdaux	10
4.1	Solution analytique	10
5	Modes sphéroïdaux d'une sphère liquide	10
6	Déformations statiques de modèles terrestres liquides	11
6.1	Déformations statiques d'une sphère liquide homogène	11
6.2	Déformations statiques d'une sphère liquide et équation de Clairaut	11
7	Variation du tenseur d'inertie	12
8	Surcharge glaciaire et déformations viscoélastiques	13
8.1	Rappel: Déformation élastique statique	13
8.1.1	Déformation d'un modèle solide homogène incompressible	13
8.1.2	Nombres de Love élastiques	13
8.2	Surcharge glaciaire	14
8.3	Viscoélasticité – Rhéologie de Maxwell	15
8.4	Nombres de Love viscoélastiques	16
8.5	Temps de relaxation	16
9	Formulaire	17
9.1	Harmoniques sphériques	17
9.2	Transformées de Fourier	17
9.3	Systèmes sphéroïdal et toroïdal	17

1 Descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement

1.1 Variables lagrangiennes et variables eulériennes

Soit la loi du mouvement $\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, où

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \\x_2 &= r_2 \\x_3 &= r_3 + u(r_1, r_2) \sin \omega t.\end{aligned}$$

Décrire le champ des déplacements dans les deux cas suivants:

1. $u(r_1, r_2) = a\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
2. $u(r_1, r_2) = a'(r_1^2 + r_2^2)$

1.2 Variation lagrangienne et variation eulérienne

En plus de la loi de mouvement $\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, on se donne la fonction $F(\mathbf{x}, t) = x^2 + bx \sin \omega t$.

1. Ecrire $F(\mathbf{x}, 0)$, $\Delta F(\mathbf{x}, t)$ et $\Delta f(\mathbf{r}, t)$.
2. Ecrire $f(\mathbf{r}, t)$, $f(\mathbf{r}, 0)$ et $\delta f(\mathbf{r}, t)$.
3. *Linéarisation.* On suppose que u et b sont des quantités petites. Linéariser $f(\mathbf{r}, t)$, $\Delta f(\mathbf{r}, t)$ et $\delta f(\mathbf{r}, t)$ et vérifier que $\delta f \simeq \Delta f + \mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, 0)$.
4. Ecrire, sans linéariser, les composantes du vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} F$, ainsi que celles de $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)$ et $\Delta \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$.
5. Ecrire et linéariser $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)$ et $\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.
6. Vérifier que $\delta \mathbf{v} \simeq \nabla_{\mathbf{r}} \delta f - \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, 0)$.
7. Vérifier que $\delta \mathbf{v} \simeq \Delta \mathbf{v} + \mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)$.

1.3 Force dérivant d'un potentiel

En plus de la loi de mouvement $\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$, on se donne le potentiel

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2.$$

En supposant que $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, répondre aux mêmes questions que dans la partie 2.

2 Oscillations sphéroïdales d'une sphère solide

Résoudre le système des équations des petites oscillations sphéroïdales d'un modèle de Terre sphérique, solide, homogène et incompressible. Considérer d'abord le cas des oscillations libres, puis celui des vibrations générées par un champ de force volumique irrotationnel de fréquence ω .

2.1 Système sphéroïdal

Le système sphéroïdal est donné par les 6 équations (2)-(7) de la Section 9.3.

2.2 Solution

Dans le cas particulier d'un modèle de référence homogène, on a

$$\rho = \text{const} \quad \Rightarrow \quad g_0 = \frac{4\pi}{3}G\rho r.$$

L'homogénéité signifie aussi que $\mu = \text{const}$. Par ailleurs, l'incompressibilité matérielle se traduit mathématiquement par $\lambda \rightarrow \infty$. Elle implique que le mouvement est isochore, ou indivergentiel: $X = 0$. L'indétermination du produit λX est alors levée en posant $\lambda X = \Pi$, où Π est une fonction finie de r .

Par conséquent, l'équation de Poisson pour la perturbation du potentiel se réduit à l'équation de Laplace. De plus, l'annulation de la divergence du déplacement fournit V en fonction de U et de sa dérivée. En effectuant ensuite l'opération (10) - $r \frac{d}{dr}$ (11) entre les équations (10) et (11), on élimine les inconnues ϕ_1 et Π , aboutissant ainsi à une équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre dont l'inconnue est U :

$$\begin{aligned} & \omega^2 \left[U - \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left(r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + 4r \frac{dU}{dr} + 2U \right) \right] \\ & - \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{\ell(\ell+1)} \left(r^2 \frac{d^4 U}{dr^4} + 8r \frac{d^3 U}{dr^3} + 12 \frac{d^2 U}{dr^2} \right) - 2 \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)+2}{r^2} U \right] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Nous cherchons une solution de cette équation sous la forme

$$U = r^s \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i.$$

Les coefficients a_i et l'exposant s sont déterminés en introduisant cette solution dans l'équation (1). Puisque l'équation obtenue est valable pour tout r , s est solution de l'équation indicelle

$$s(s-1)(s-2)(s-3) + 8s(s-1)(s-2) + 12s(s-1) - \ell(\ell+1)[2s(s-1) + 4s + 2] = 0$$

pourvu que $a_0 \neq 0$. Donc, $s = -\ell - 2, -\ell, \ell - 1, \ell + 1$. De plus, les a_i (avec i pair et $i \geq 2$) sont déterminés par la relation de récurrence

$$a_i = -a_{i-2\kappa} \frac{(i+s-2)(i+s+1) + 2 - \ell(\ell+1)}{(i+s-1)(i+s)(i+s+1)(i+s+2) - 2\ell(\ell+1)[(i+s)(i+s+1) + 1] + \ell^2(\ell+1)^2},$$

avec $\kappa = \rho\omega^2/\mu$. Après avoir simplifié cette relation pour les 4 valeurs possibles de s , U s'exprime comme la somme de 4 solutions linéairement indépendantes

$$U = r^{\ell+1} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{2i} r^{2i} + r^{\ell-1} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} r^{2i} + r^{-\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i} r^{2i} + r^{-\ell-2} \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i} r^{2i},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{2i} &= -\frac{\alpha_{2i-2\kappa}}{(2i+2)(2i+2\ell+3)} \\ \beta_{2i} &= -\frac{\beta_{2i-2\kappa}}{2i(2i+2\ell+1)} \\ \gamma_{2i} &= -\frac{\gamma_{2i-2\kappa}}{(2i+2)(2i-2\ell+1)} \\ \delta_{2i} &= -\frac{\delta_{2i-2\kappa}}{2i(2i-2\ell-1)}. \end{aligned}$$

En combinant judicieusement certains termes des première et deuxième solutions d'un côté et certains termes des troisième et quatrième solutions de l'autre, on trouve finalement pour U

$$U = Ar^{\ell-1} + B\frac{j_{\ell}(\kappa r)}{r} + Cr^{-\ell-2} + D\frac{j_{-\ell-1}(\kappa r)}{r},$$

A , B , C et D étant des constantes. La fonction notée $j_{\ell}(x)$ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ donnée par

$$\begin{aligned} j_{\ell}(x) &= x^{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i i! (2i + 2\ell + 1)!!} x^{2i} \\ &= x^{\ell} \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Elle est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 j_{\ell}}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dj_{\ell}}{dx} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] j_{\ell} = 0.$$

La même méthode de résolution appliquée à l'équation de Laplace pour ϕ_1 fournit rapidement

$$\phi_1 = Er^{\ell} + Fr^{-\ell-1},$$

où E et F sont d'autres constantes d'intégration.

Si la couche solide contient l'origine, il faut que $C = D = F = 0$ pour que les solutions y soient régulières.

2.2.1 Oscillations libres

Aucune force extérieure n'étant appliquée au corps sphérique homogène de rayon a , les conditions à la surface $r = a$ s'écrivent

$$\begin{aligned} R(a) &= \Pi(a) + 2\mu \frac{dU}{dr}(a) = 0 \\ S(a) &= \mu \left[\frac{dV}{dr}(a) - \frac{V(a)}{a} + \frac{U(a)}{a} \right] = 0 \\ \psi(a) + \frac{\ell+1}{a} \phi_1(a) &= 0. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu, la variable V est déterminée en fonction de U par la relation $X = 0$, où X est la composante de degré ℓ de la divergence du déplacement donnée par l'équation (15). Quant à la fonction $\Pi(r)$, elle peut être déduite de l'équation (11). L'ensemble des trois conditions aux limites forment alors un système algébrique linéaire et homogène dont les inconnues sont A , B et E . Il ne possède une solution que si son déterminant est nul, ce qui donne une équation (transcendante dans ce cas-ci) dont les solutions sont les *fréquences propres* du modèle terrestre:

$$\frac{2}{\kappa a} \frac{\frac{dj_{\ell}}{dx}(\kappa a) - \frac{\ell}{a} j_{\ell}(\kappa a)}{j_{\ell}(\kappa a)} + \frac{(2\ell+1) + \ell g_0 \rho a / [(2\ell+1)\mu] - \kappa^2 a^2 / [2(\ell-1)]}{\ell(\ell+1) + \ell g_0 \rho a / [(2\ell+1)\mu] - \kappa^2 a^2 / [2(\ell-1)]} = 0$$

Les constantes A , B et E et les *fonctions propres* correspondant à une fréquence propre donnée sont alors calculées en substituant une condition arbitraire, par exemple $U(a) = 1$, à une des conditions à la surface extérieure.

EXEMPLE: $\rho = 5515 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,482 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $a = 6371 \text{ km}$.

Quelques périodes propres (en s):

${}_1S_1 = 1995,3$	${}_0S_2 = 2603,0$	${}_0S_3 = 1767,5$	${}_0S_4 = 1392,7$	${}_0S_5 = 1164,4$
${}_2S_1 = 1037,5$	${}_1S_2 = 1407,4$	${}_1S_3 = 1079,2$	${}_1S_4 = 880,8$	${}_1S_5 = 750,7$
${}_3S_1 = 720,8$	${}_2S_2 = 869,8$	${}_2S_3 = 749,6$	${}_2S_4 = 658,2$	${}_2S_5 = 586,3$
${}_4S_1 = 554,7$	${}_3S_2 = 635,0$	${}_3S_3 = 568,7$	${}_3S_4 = 515,6$	${}_3S_5 = 471,7$
${}_5S_1 = 451,5$	${}_4S_2 = 501,9$	${}_4S_3 = 459,2$	${}_4S_4 = 423,7$	${}_4S_5 = 393,6$
	${}_5S_2 = 415,6$	${}_5S_3 = 385,5$	${}_5S_4 = 360,0$	${}_5S_5 = 337,6$

2.2.2 Oscillations forcées

Si la force extérieure de fréquence ω dérive du potentiel ϕ_{ext} , les équations de mouvement sont inchangées pourvu que l'on inclue le potentiel perturbateur ϕ_{ext} dans la variable ϕ_1 . Par contre, la troisième des conditions de continuité à la surface extérieure devient:

$$\psi(a) + \frac{\ell + 1}{a}\phi_1(a) = \frac{2\ell + 1}{a}\phi_{\text{ext}\ell}(a).$$

Les trois conditions aux limites constituent par conséquent un système algébrique non homogène dont les solutions sont A , B et E .

3 Modes radiaux

3.1 Système radial

Une déformation radiale est une déformation sphéroïdale pour laquelle le degré harmonique $\ell = 0$. Puisqu'il n'y a pas de variation de gravité associée à une déformation radiale d'un modèle de Terre sphérique et que $V = 0$ et $S = 0$, le système radial est un système différentiel du deuxième ordre:

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} U \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{r}\zeta & \frac{1}{\beta} \\ -\rho\omega^2 - \frac{4}{r}(\rho g - \frac{\gamma}{r}) & -\frac{4}{r}\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ R \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda + 2\mu \\ \zeta &= \frac{\lambda}{\beta} \\ \xi &= \frac{\mu}{\beta} \\ \gamma &= \xi(3\lambda + 2\mu). \end{aligned}$$

Evidemment, puisque nous étudions les oscillations libres, aucune force de volume n'est appliquée.

3.2 Condition à la surface

Pour un mode normal, aucune contrainte n'est appliquée en surface:

$$R(a) = 0.$$

3.3 Modèle homogène

On montre facilement que la gravité à l'intérieur d'un modèle homogène est une fonction linéaire du rayon:

$$g = \frac{4\pi}{3}G\rho r.$$

3.4 Valeurs numériques

$$\begin{aligned} a &= 6371000 \text{ m} \\ \rho &= 5515 \text{ kg/m}^3 \\ \lambda &= 3,5 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \\ \mu &= 1,4 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$

3.5 Résolution numérique

Il s'agit de trouver les fréquences propres du système radial. On procède comme suit:

1. On choisit une fréquence d'essai ω_1 .
2. En utilisant une méthode de différences finies, on intègre le système radial:
 - (a) A proximité du centre (pratiquement: quelques km), on démarre l'intégration avec, par exemple, le vecteur $(U_0, R_0) = (0, 10^{-5})$.
 - (b) A l'aide d'un bon algorithme, on propage ce vecteur jusqu'à la surface $r = a$.
 - (c) Si $R(a, \omega_1) = 0$, la fréquence ω_1 est une fréquence propre. Sinon, on continue de la sorte:
3. On choisit une autre fréquence d'essai ω_2 et on recommence l'intégration. Si $R(a, \omega_2) = 0$, la fréquence ω_2 est une fréquence propre.
4. Sinon, on recherche les zéros de la fonction $R(a, \omega)$ au moyen d'un algorithme de calcul des zéros d'une fonction, par exemple par dichotomie.

5. Programme MatLab de calcul des modes radiaux.

Système radial

```
function Dy = DRadial(r, y);
global bigG rho lambda mu beta zeta ksi gamma omega bigG
g = 4 * pi * bigG * rho * r / 3;
A11 = -2 * zeta / r;
A12 = 1 / beta;
A21 = -rho * omega * omega - 4 / r * (rho * g - gamma / r);
A22 = - 4 * ksi / r;
A = [A11 A12
     A21 A22];
Dy = A * y;
```

Programme principal

```
clear all
format long
```

Définition des variables et constantes

```
global rho lambda mu beta zeta ksi gamma omega bigG
eps = 1e-10;
bigG = 6.67e-11;
rmin = 10000.0;
radius = 6371000.0;
rspan = [rmin radius];
rho = 5515.0;
mu = 1.4e11;
lambda = 3.5e11;
beta = lambda + 2 * mu;
zeta = lambda / beta;
ksi = mu / beta;
gamma = ksi * (3 * lambda + 2 * mu);
options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', 1e-8);
period1 = input('Période inférieure : ');
period2 = input('Période supérieure : ');
omega1 = 2 * pi / period1;
omega2 = 2 * pi / period2;
omega = omega1;
```

Intégration de $r = 10$ km à la surface du vecteur $y_0 = (0, 10^{-5})$ pour la fréquence ω_1 . L'intégrateur prédéfini est ode45.

```
y0 = [ 0; 1e-5 ];
[ r, y ] = ode45(@DRadial, rspan, y0, options);
nmax = length(r);
f1 = y(nmax, 2)
```

Intégration de $r = 10$ km à la surface du vecteur $y_0 = (0, 10^{-5})$ pour la fréquence ω_2 .

```
omega = omega2;
[ r, y ] = ode45(@DRadial, rspan, y0, options);
nmax = length(r);
f2 = y(nmax, 2)
```

Test sur les signes de $R_1(a)$ et $R_2(a)$ ($f1$ et $f2$): s'ils ont le même signe, il y a 0 ou un nombre pair de fréquences propres entre ω_1 et ω_2 et on recommence avec deux autres valeurs de ω_1 et ω_2 ; sinon, il y en a un nombre impair et on en cherche une par dichotomie.

```
while f1 * f2 > 0
    period1 = input('Période inférieure : ');
    period2 = input('Période supérieure : ');
    omega1 = 2 * pi / period1;
    omega2 = 2 * pi / period2;
```



```

    omega = omega1;
    [ r, y ] = ode45(@DRadial, rspan, y0, options);
    nmax = length(r);
    f1 = y(nmax, 2)
    omega = omega2;
    [ r, y ] = ode45(@DRadial, rspan, y0, options);
    nmax = length(r);
    f2 = y(nmax, 2)
end
if f1 == 0
    period = 2 * pi / omega1;
elseif f2 == 0
    period = 2 * pi / omega2;
else
    n = 0;
    while abs(omega1 - omega2) > eps
        n = n + 1;
        omega3 = (omega1 + omega2) / 2;
        omega = omega3;
        [ r, y ] = ode45(@DRadial, rspan, y0, options);
        nmax = length(r);
        f3 = y(nmax, 2);
        if f3 == 0
            niterations = n
            period = 2 * pi / omega3;
            return
        end
        if f1 * f3 < 0
            omega2 = omega3;
        else
            omega1 = omega3;
            f1 = f3;
        end
    end
    niterations = n
    period = 2 * pi / omega1
end
figure(1)
plot(r, y(:, 1))

```

3.6 Solution analytique

Dans le cas d'un modèle homogène, le système radial peut être résolu analytiquement. Si on pose

$$\kappa^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \left(\omega^2 + \frac{16\pi}{3} G\rho \right),$$

on trouve

$$U = A j_1(\kappa r),$$

où A est une constante d'intégration et $j_1(x)$ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre 1. La relation de dispersion fournissant les fréquences propres s'écrit

$$\text{tg}(\kappa a) = \frac{\kappa a}{1 - \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} \kappa^2 a^2}.$$

4 Modes toroïdaux

Soit un modèle de Terre homogène. Résoudre analytiquement et numériquement le système toroïdal homogène (8) – (9), la condition en surface étant $T(a) = 0$. On prendra $\rho = 5515 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,482 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ et $a = 6371 \text{ km}$. Pour chacune des valeurs de ℓ comprises dans l'intervalle $[1, 5]$, calculer les 5 fréquences propres les plus petites et dessiner les fonctions propres W et T correspondantes.

4.1 Solution analytique

Si on pose $\kappa^2 = \rho\omega^2/\mu$, on trouve

$$W = A j_\ell(\kappa r),$$

où A est une constante d'intégration et $j_\ell(x)$ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ . Sachant que

$$\frac{dj_\ell}{dx} = j_{\ell-1} - \frac{\ell+1}{x} j_\ell,$$

la relation de dispersion fournissant les fréquences propres s'écrit

$$j_{\ell-1}(\kappa a) = \frac{n+2}{\kappa a} j_\ell(\kappa a).$$

5 Modes sphéroïdaux d'une sphère liquide

Résoudre le système des équations des petites oscillations sphéroïdales d'un modèle de Terre sphérique, liquide, homogène et incompressible. Considérer d'abord le cas des oscillations libres, puis celui des vibrations générées par un champ de force volumique irrotationnel de fréquence ω . En particulier, montrer que le spectre de vibration ne contient, pour un ℓ donné, qu'une seule fréquence donnée par

$$\omega^2 = \frac{2\ell(\ell-1)}{2\ell+1} \frac{g(a)}{a}.$$

6 Déformations statiques de modèles terrestres liquides

6.1 Déformations statiques d'une sphère liquide homogène

Résoudre le système des équations des déformations statiques sphéroïdales d'une couche liquide à symétrie sphérique homogène. Considérer d'abord un milieu compressible, puis un milieu incompressible.

6.2 Déformations statiques d'une sphère liquide et équation de Clairaut

Considérer le système des équations des petites déformations statiques d'une sphère liquide inhomogène incompressible.

1. Montrer que $R = 0$ et que $\phi_1 = -gU$.
2. En déduire une équation différentielle du second ordre régissant U . On introduira la densité moyenne $\bar{\rho}$ donnée par

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

et on se souviendra que

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

3. Considérer une déformation de degré 2. La forme statique que prend la sphère liquide est alors, en première approximation, celle d'un ellipsoïde aplati aux pôles. L'aplatissement est défini par $\alpha = (b - c)/b$ où b et c sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de ellipsoïde. α est généralement une fonction de r . On a en fait:

$$b = r + U(r)P_2(\cos \frac{\pi}{2})$$

et

$$c = r + U(r)P_2(\cos 0),$$

où $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ est le polynôme de Legendre de degré 2. Etablir l'équation différentielle de Clairaut à laquelle obéit α :

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{6}{r} \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{d\alpha}{dr} + \frac{6}{r^2} \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 \right) \alpha = 0.$$

4. Le potentiel perturbateur étant le potentiel $\phi_{\text{ext}} = -\frac{1}{2}|\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$ provenant de la rotation uniforme à la vitesse $\mathbf{\Omega}$ autour de l'axe Oz , écrire la condition à la surface libre associée à l'équation de Clairaut. On partira de la condition suivante à la surface libre $r = a$:

$$\psi(a) + \frac{\ell + 1}{a} \phi_1(a) = \frac{2\ell + 1}{a} \phi_{\text{ext}\ell}(a).$$

7 Variation du tenseur d'inertie

On considère un modèle de Terre à symétrie sphérique et un potentiel perturbateur ϕ_{ext} de degré 2 et d'ordre 0 ou 1.

1. Montrer que les variations des composantes du tenseur d'inertie sont telles que $I_{11} = I_{22}$ et $I_{11} + I_{22} + I_{33} = 0$.
2. Montrer que

$$I_{31} = \sqrt{\frac{5}{12\pi}} \frac{k_2 a^3}{G} \phi_{\text{ext}2}^c 1(a),$$

$$I_{32} = \sqrt{\frac{5}{12\pi}} \frac{k_2 a^3}{G} \phi_{\text{ext}2}^s 1(a),$$

et

$$I_{33} = \frac{2}{3} \frac{k_2 a^3}{G} \phi_{\text{ext}2}^0(a),$$

où k_2 est le nombre de Love de degré 2, a est le rayon du modèle sphérique et G est la constante universelle de la gravitation.

8 Surcharge glaciaire et déformations viscoélastiques

Dans cet exercice, le degré harmonique est désigné par n .

8.1 Rappel: Déformation élastique statique

8.1.1 Déformation d'un modèle solide homogène incompressible

La déformation élastique, statique et sphéroïdale de degré harmonique n d'un modèle de Terre solide homogène incompressible est caractérisée par les scalaires U , R , V , S , ϕ_1 , ψ :

$$\begin{aligned} U &= C_1 r^{n+1} + C_2 r^{n-1} \\ R &= 2\mu \left[\frac{n^2 - n - 3}{n} C_1 r^n + (n-1) C_2 r^{n-2} \right] + \frac{4\pi}{3} G \rho^2 (C_1 r^{n+2} + C_2 r^n) + \rho C_3 r^n \\ V &= \frac{n+3}{n(n+1)} C_1 r^{n+1} + \frac{1}{n} C_2 r^{n-1} \\ S &= 2\mu \left(\frac{n+2}{n+1} C_1 r^n + \frac{n-1}{n} C_2 r^{n-2} \right) \\ \phi_1 &= C_3 r^n \\ \psi &= n C_3 r^{n-1} + 4\pi G \rho (C_1 r^{n+1} + C_2 r^{n-1}), \end{aligned}$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration.

8.1.2 Nombres de Love élastiques

1. Montrer que, lorsque ce modèle de Terre est déformé par un potentiel volumique statique ϕ_{ext} dont la composante harmonique de degré n est $\phi_{\text{ext},n}$, les nombres de Love de volume h_n^e , k_n^e et ℓ_n^e définis par

$$U(a) = -h_n^e \frac{\phi_{\text{ext},n}}{g_0} \quad V(a) = -\ell_n^e \frac{\phi_{\text{ext},n}}{g_0} \quad \phi_1(a) = (1 + k_n^e) \phi_{\text{ext},n}$$

valent

$$\begin{aligned} h_n^e &= \frac{2n+1}{2(n-1)} \frac{n}{(2n^2+4n+3) \frac{\mu}{\rho g_0 a} + n} \\ k_n^e &= \frac{3}{2(n-1)} \frac{n}{(2n^2+4n+3) \frac{\mu}{\rho g_0 a} + n} \\ \ell_n^e &= \frac{3}{2(n-1)} \frac{1}{(2n^2+4n+3) \frac{\mu}{\rho g_0 a} + n}. \end{aligned}$$

2. Montrer que, lorsque ce modèle Terre est déformé par une pression p qui est appliquée à la surface extérieure et dont la composante harmonique de degré n est p_n , les nombres de Love de pression \bar{h}_n^e , \bar{k}_n^e et $\bar{\ell}_n^e$ définis par

$$U(a) = \bar{h}_n^e \frac{p_n}{\rho g_0} \quad V(a) = \bar{\ell}_n^e \frac{p_n}{\rho g_0} \quad \phi_1(a) = (1 + \bar{k}_n^e) \frac{p_n}{\rho}$$

valent

$$\bar{h}_n^e = -h_n^e \quad \bar{k}_n^e = -k_n^e \quad \bar{\ell}_n^e = -\ell_n^e.$$

3. Montrer que, lorsque ce modèle de Terre est déformé par une densité surfacique σ qui est appliquée à la surface extérieure et dont la composante harmonique de degré n est σ_n , les nombres de Love de charge $h_n'^e$, $k_n'^e$ et $\ell_n'^e$ définis par

$$U(a) = -h_n'^e \frac{3\sigma_n}{(2n+1)\rho} \quad V(a) = -\ell_n'^e \frac{3\sigma_n}{(2n+1)\rho} \quad \phi_1(a) = (1 + k_n'^e) \frac{3\sigma_n g_0}{(2n+1)\rho}$$

valent

$$h_n'^e = \frac{2n+1}{3} \bar{h}_n^e + h_n^e \quad k_n'^e = \frac{2n+1}{3} \bar{k}_n^e + k_n^e \quad \ell_n'^e = \frac{2n+1}{3} \bar{\ell}_n^e + \ell_n^e.$$

Il faut d'abord montrer que la surcharge de densité σ crée un potentiel d'attraction

$$\phi_{\text{ext}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3g_0}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\sigma_n}{\rho} P_n^0(\cos \theta),$$

considérer ensuite que la surcharge de densité σ exerce une pression $p = g_0\sigma$ et, enfin, sommer ces deux effets.

8.2 Surcharge glaciaire

Calculer la décomposition en harmoniques sphériques de la surcharge σ qu'est une calotte de glace polaire. Supposer qu'il s'agit d'une mince couche de hauteur $h \ll a$, de densité constante ρ_g et formant une calotte d'ouverture α centrée au pôle Nord. Son expression mathématique est donc

$$\sigma = \rho_g h H(\alpha - \theta)$$

où H est la fonction échelon: $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ sinon. Il faut alors calculer les coefficients σ_n^m tels que

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sigma_n^m Y_n^m(\theta, \varphi).$$

En utilisant les relations

$$P_n^0(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} (P_{n+1}^0 - P_{n-1}^0) \quad \text{et} \quad P_n^0(1) = 1,$$

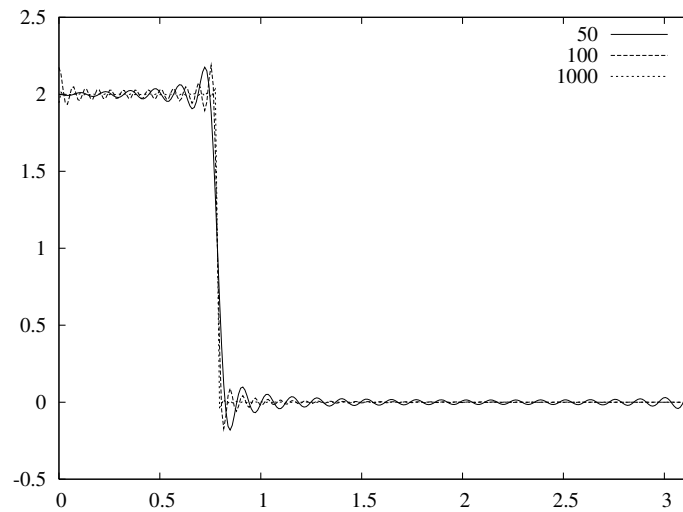
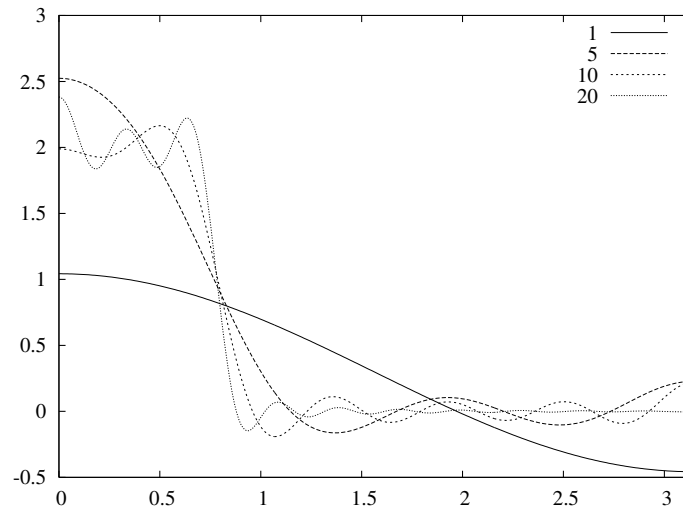
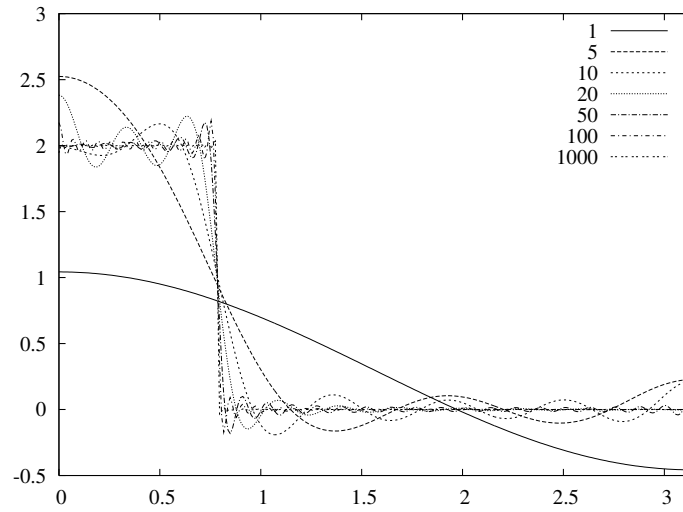
on trouve

$$\sigma = \frac{\rho_g h}{2} \left\{ (1 - \cos \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}^0(\cos \alpha) - P_{n+1}^0(\cos \alpha)] P_n^0(\cos \theta) \right\}.$$

Les 3 figures suivantes représentent la fonction

$$(1 - \cos \alpha) + \sum_{n=1}^N [P_{n-1}^0(\cos \alpha) - P_{n+1}^0(\cos \alpha)] P_n^0(\cos \theta)$$

en fonction de θ pour $\alpha = \pi/4$ et pour différentes valeurs de N .



8.3 Viscoélasticité – Rhéologie de Maxwell

Selon le modèle de Maxwell, un solide viscoélastique possède une équation constitutive du type

$$\frac{d}{dt} \underline{T}_{ij} + \frac{\mu}{\nu} (\underline{T}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k \underline{T}_{kk}) = 2\mu \frac{d}{dt} \underline{e}_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_k \frac{d}{dt} \underline{e}_{kk}$$

où les \underline{T}_{ij} sont les composantes du tenseur des tensions, les \underline{e}_{ij} sont celles du tenseur des déformations, λ et μ sont les paramètres élastiques de Lamé et ν est la viscosité. Le solide de Maxwell est généralement symbolisé par un ressort et un piston disposés en série. Montrer que la transformée de Fourier de cette équation constitutive s'écrit

$$T_{ij} = \tilde{\lambda} \delta_{ij} \sum_k e_{kk} + 2\tilde{\mu} e_{ij}$$

où T_{ij} et e_{ij} désignent les transformées de Fourier de \underline{T}_{ij} et \underline{e}_{ij} , respectivement, où

$$\tilde{\lambda} = \frac{i\omega\lambda + \frac{\mu}{\nu}(\lambda + 2\mu/3)}{i\omega + \frac{\mu}{\nu}}$$

et où

$$\tilde{\mu} = \frac{i\omega\mu}{i\omega + \frac{\mu}{\nu}}.$$

Par conséquent, *dans le domaine des fréquences*, la relation tension-déformation a la même forme dans le cas du solide de Maxwell que dans la cas du solide élastique, à condition de remplacer les paramètres de Lamé λ et μ par $\tilde{\lambda}(\omega)$ et $\tilde{\mu}(\omega)$, respectivement. Cette propriété constitue le principe de correspondance.

8.4 Nombres de Love viscoélastiques

1. Calculer les nombres de Love de surcharge viscoélastiques quasi-statiques $h'_n(\omega)$, $k'_n(\omega)$ et $\ell'_n(\omega)$ d'un globe homogène et incompressible ayant une rhéologie maxwellienne. Pour alléger les écritures, poser

$$\mu_n = \frac{2n^2 + 4n + 3}{n} \frac{\mu}{\rho g_0 a}$$

et

$$\tau_n = (1 + \mu_n) \frac{\nu}{\mu}.$$

2. Calculer ensuite leurs transformées de Fourier inverses $\underline{h}'_n(t)$, $\underline{k}'_n(t)$ et $\underline{\ell}'_n(t)$.
3. Le déplacement radial de degré harmonique n étant donné par $U(a, \omega) = -h'_n(\omega) \phi_{\text{ext}'_n}(a, \omega) / g_0$ dans le domaine des fréquences, sa transformée de Fourier inverse fournit le déplacement radial $u_n^r(a, t)$ dans le domaine temporel. $u_n^r(a, t)$ s'obtient donc en calculant le produit de convolution des fonctions $\underline{h}'_n(t)$ et $\underline{\phi}_{\text{ext}'_n}(a, t)$ qui sont les transformées de Fourier inverses de $h'_n(\omega)$ et $\phi_{\text{ext}'_n}(a, \omega)$:

$$u_n^r(a, t) = -\frac{1}{g_0} \underline{h}'_n \star \underline{\phi}_{\text{ext}'_n} = -\frac{1}{g_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{h}'_n(t-t') \underline{\phi}_{\text{ext}'_n}(a, t') dt'$$

En supposant qu'une calotte glaciaire s'établit instantanément en $t = 0$, c'est à dire que $\underline{\phi}_{\text{ext}'_n}(a, t) = \underline{\phi}_{\text{ext}'_n}(a) H(t)$, calculer le déplacement radial viscoélastique subséquent à cette surcharge.

4. Montrer que, lorsque $t \rightarrow \infty$, le corps se comporte comme un fluide. En déduire l'équilibre isostatique.
5. Enfin, calculer la variation du potentiel en surface.

8.5 Temps de relaxation

Etudier les temps de relaxation τ_n en fonction de n . Pour la Terre, considérer les valeurs numériques caractéristiques suivantes: $\rho = 5515 \text{ kg/m}^3$, $a = 6371 \text{ km}$, $\mu = 10^{11} \text{ Pa}$ et $\nu = 10^{21} \text{ Pa s}$.

9 Formulaire

9.1 Harmoniques sphériques

- Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ sont les fonctions propres relatives aux valeurs propres $-\ell(\ell+1)$ du laplacien de surface en coordonnées sphériques θ, φ :

$$\nabla_S^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = Y_\ell^{cm}(\theta, \varphi) + iY_\ell^{sm}(\theta, \varphi)$$

où

$$P_\ell^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell.$$

- Orthogonalité des harmoniques sphériques:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_{\ell'}^{m'*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

- Développement de $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} Y_\ell^{m*}(\theta', \varphi') Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

où $r_{<} = \inf(r, r')$ et $r_{>} = \sup(r, r')$.

9.2 Transformées de Fourier

- TF $[\delta(t)] = 1$
- TF $[e^{-t/\tau} H(t)] = \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}}$

9.3 Systèmes sphéroïdal et toroïdal

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{2\lambda}{\beta r} U + \frac{1}{\beta} R + \frac{\ell(\ell+1)\lambda}{\beta r} V \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dr} = \left[-\rho\omega^2 - \frac{4\rho g}{r} + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\beta r^2} \right] U - \frac{4\mu}{\beta r} R + \ell(\ell+1) \left[\frac{\rho g}{r} - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\beta r^2} \right] V + \frac{\ell(\ell+1)}{r} S + \rho\psi \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{r} (V - U) + \frac{1}{\mu} S \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dr} = & \left[\frac{\rho g}{r} - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\beta r^2} \right] U - \frac{\lambda}{\beta r} R + \left\{ -\rho\omega^2 + \frac{2\mu}{\beta r^2} [\lambda(2\ell^2+2\ell-1) + 2\mu(\ell^2+\ell-1)] \right\} V \\ & - \frac{3}{r} S + \frac{\rho}{r} \phi_1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d\phi_1}{dr} = \psi - 4\pi G\rho U \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{4\pi G\rho\ell(\ell+1)}{r} V + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \phi_1 - \frac{2}{r} \psi \quad (7)$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{1}{r}W + \frac{1}{\mu}T \quad (8)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left[-\rho\omega^2 + (\ell^2 + \ell - 2) \frac{\mu}{r^2} \right] W - \frac{3}{r}T \quad (9)$$

ou

$$\begin{aligned} \omega^2 U - \frac{d\phi_1}{dr} + gX - \frac{d}{dr}(gU) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\lambda X + 2\mu \frac{dU}{dr} \right) \\ + \frac{\mu}{\rho r} \left[4 \left(\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right) + \ell(\ell+1) \left(\frac{3V}{r} - \frac{dV}{dr} - \frac{U}{r} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 V - \frac{\phi_1}{r} - \frac{gU}{r} + \frac{\lambda X}{\rho r} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} \left[\mu \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} + \frac{U}{r} \right) \right] \\ + \frac{\mu}{\rho r} \left\{ \left[3 \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r} [5U - V - 2\ell(\ell+1)V] \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d^2\phi_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi_1}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \phi_1 = -4\pi G \left(\rho X + \frac{d\rho}{dr} U \right) \quad (12)$$

$$\omega^2 W + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)W}{r^2} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right) = 0 \quad (13)$$

où

$$\beta = \lambda + 2\mu \quad (14)$$

$$X = \frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} - \frac{\ell(\ell+1)V}{r} \quad (15)$$