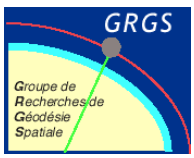
# L'analyse des perturbations orbitales

*Richard Biancale, CNES DSO/ED/GS/GTP*

- **principe**
- **études de sensibilité**




Ecole de Géodésie Spatiale 2-6 Septembre 2002 Forcalquier

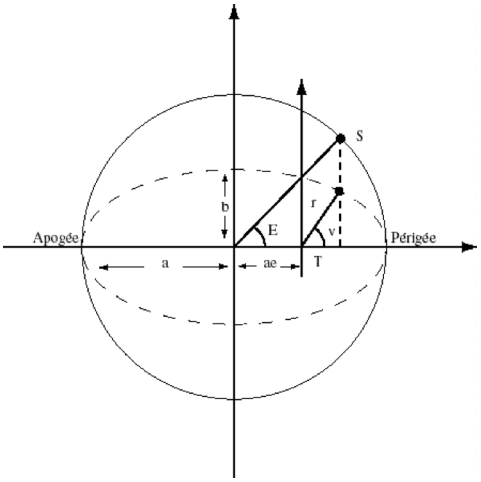
# Le mouvement elliptique

**<u>Les lois de Képler</u> : (1609)**

- **Les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le Soleil.**
- **Le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux.**
- **Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse :** $n^2 a^3 = GM$ **avec** $n = \frac{2\pi}{T}$

*Ce sont des lois descriptives. Newton en trouve la raison en énonçant en 1666 la loi de la gravitation universelle.*

**<u>Les éléments orbitaux képlériens</u> :**




***a*** **: demi-grand axe**

***e*** **: excentricité (*b = a (1-e²)^1/2*)**

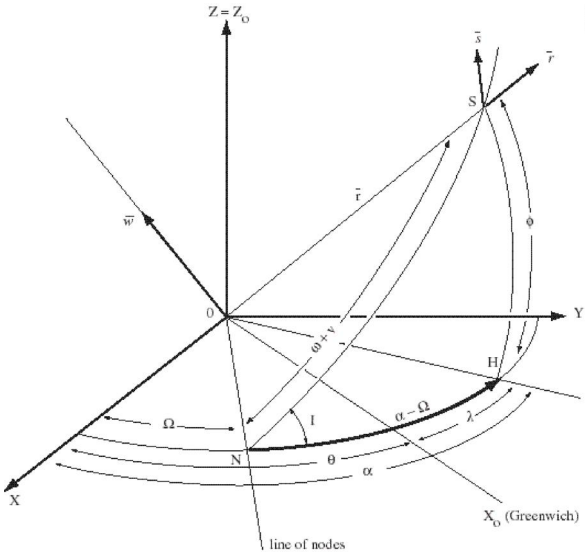
***i*** **: inclinaison**

***ω*** **: argument du périgée**

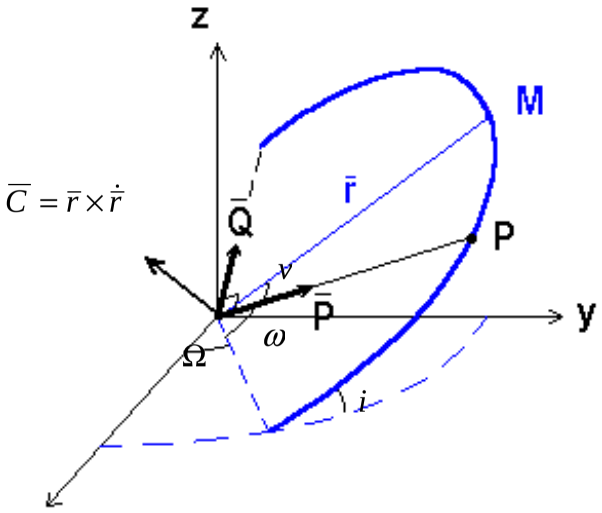
**Ω : argument du noeud**

***M*** **: anomalie moyenne (*M = n(t-t₀)*)**

**(*n = dM/dt* : moyen mouvement)**



# Transformation : coordonnées rectangulaires → éléments képlériens




$$\overline{C} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}}$$

$$\begin{cases} C = r^2 \dfrac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\,, \text{constante des aires} \\ \left\|\dot{\bar{r}}\right\|^2 = \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right), \text{intégrale des forces vives} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{r} - \dfrac{\left\|\dot{\bar{r}}\right\|^2}{\mu} \\ e^2 = 1 - \dfrac{C^2}{\mu a} \end{cases}$$

$$\mu = GM = n^2 a^3$$

$i$

$$\begin{cases} r = a\left(1 - e\cos E\right) \\ \dot{r} = \dfrac{na^2}{r} e\sin E = \dfrac{\sqrt{\mu a}}{r} e\sin E \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos E = \dfrac{a-r}{ae} \\ \sin E = \dfrac{r.\dot{r}}{e\sqrt{\mu a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos i = C_z / C \\ \sin i = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \,/ C \end{cases}$$

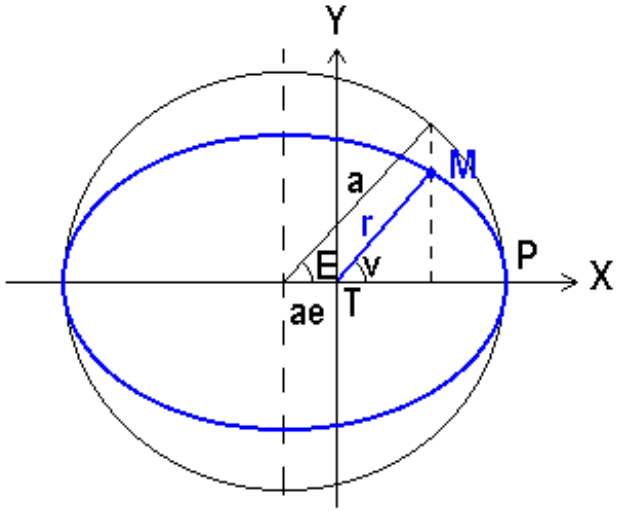
$$\begin{cases} \cos\Omega = -C_y \Big/ \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ \sin\Omega = C_x \Big/ \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\omega + v) = \left(yC_x - xC_y\right) \Big/ \left(r\sqrt{C_x^2 + C_y^2}\right) \\ \sin(\omega + v) = zC \Big/ \left(r\sqrt{C_x^2 + C_y^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos v = \dfrac{a}{r}\left(\cos E - e\right) \\ \sin v = \dfrac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\,\sin E \end{cases}$$

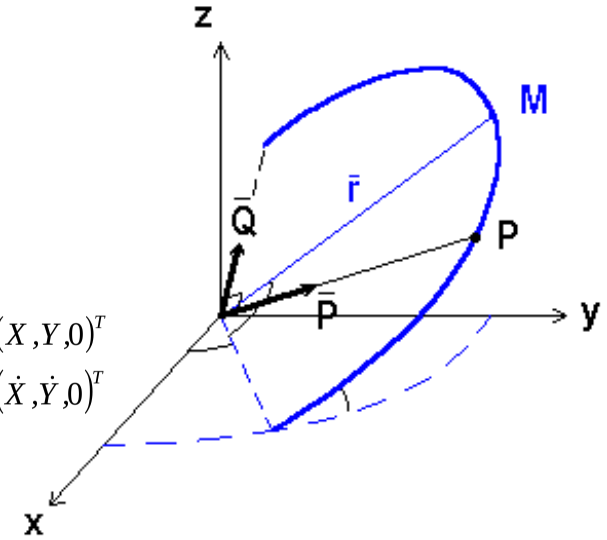
$$M = E - e\sin E;\; tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\; tg\,\frac{E}{2}$$

# Transformation : éléments képlériens → coordonnées rectangulaires




$$\boxed{\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{P}.X + \bar{Q}.Y \\ \dot{\bar{r}} &= \bar{P}.\dot{X} + \bar{Q}.\dot{Y}\end{aligned}}$$

$$\Re_3(-\Omega)\,\Re_1(-i)\,\Re_3(-\omega)\,(X,Y,0)^T$$
$$\Re_3(-\Omega)\,\Re_1(-i)\,\Re_3(-\omega)\,(\dot{X},\dot{Y},0)^T$$




$$\begin{cases} X = r\cos v = a(\cos E - e) \\ Y = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{r}\cos v - r\dfrac{dv}{dt}\sin v = -a\dfrac{dE}{dt}\sin E \\ \dot{Y} = \dot{r}\sin v + r\dfrac{dv}{dt}\cos v = a\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{dE}{dt}\cos E \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\sin v;\ \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r^2};\ \frac{dE}{dt} = \frac{na}{r}$$

$$\bar{P}\begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \cos i\,\sin\Omega\sin\omega \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos i\,\cos\Omega\sin\omega \\ \sin i\,\sin\omega \end{pmatrix}$$

$$\bar{Q} = \frac{\partial\bar{P}}{\partial\omega}\begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \cos i\,\sin\Omega\cos\omega \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos i\,\cos\Omega\cos\omega \\ \sin i\,\cos\omega \end{pmatrix}$$

# Le mouvement perturbé

**L'équation du mouvement elliptique répond au problème des 2 corps (ponctuels) :**

$$\ddot{\bar{r}} = -GM\frac{\bar{r}}{r^3}$$

**Les éléments képlériens : $a$, $e$, $i$, $\omega$, $\Omega$, et $n=dM/dt$ constants en sont une solution.**

**L'ajout d'accélérations complémentaires génère des perturbations de l'orbite elliptique :**

$$\ddot{\bar{r}} = -GM\frac{\bar{r}}{r^3} + \bar{\gamma}$$

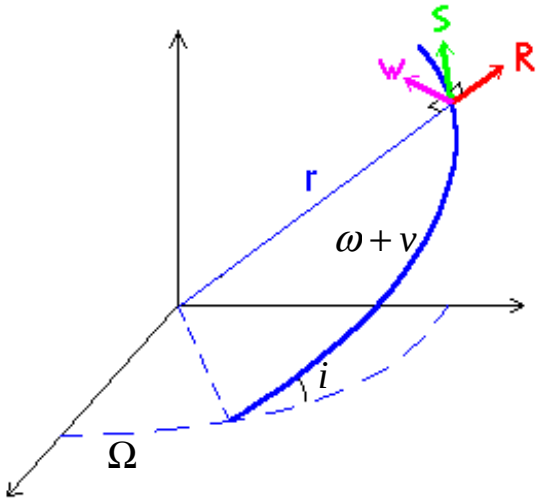
**Les éléments képlériens deviennent dépendants du temps sous la forme des équations de Gauss. On les appelle alors éléments osculateurs :**

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[Re\sin v + S(1+e\cos v)\right]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[R\sin v + S(\cos E + \cos v)\right]$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{Wr\cos(\omega+v)}{na^2\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{Wr\sin(\omega+v)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}$$




$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-R\cos v + S\cos v\left(1+\frac{1}{1+e\cos v}\right) - \frac{Wr\cos i\sin(\omega+v)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\right]$$

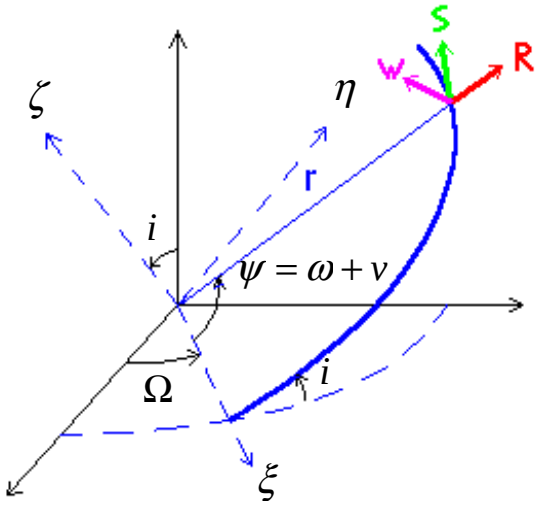
$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{nae}\left[R\left(\cos v - \frac{2e}{1+e\cos v}\right) - S\sin v\left(1+\frac{1}{1+e\cos v}\right)\right]$$

**Lorsque l'accélération perturbatrice dérive d'un potentiel (cas des forces gravitationnelles) :**

$$\bar{\gamma} = \bar{\nabla}\Re$$

**ce potentiel se dérive par rapport aux éléments orbitaux selon les composantes R,S,W de l'accélération perturbatrice :**

$$\frac{\partial \Re}{\partial \alpha} = R\frac{\partial r}{\partial \alpha} + Sr\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + W\frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}$$




**Les équations de Lagrange du mouvement perturbé s'en déduisent :**

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n.a}\frac{\partial \Re}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \Re}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \Re}{\partial M}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Re}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Re}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Re}{\partial i}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \Re}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \Re}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na}\frac{\partial \Re}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \Re}{\partial e}$$

-

# Développement de Kaula

## (W Kaula, 1966)

**Expression du potentiel au point (r, φ, λ + θ) dans le repère instantané :**

$$U = \frac{GM}{R}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=o}^{l}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\left(C_{lm}\cos m(\lambda+\theta) + S_{lm}\sin m(\lambda+\theta)\right)P_{lm}(\sin\varphi)$$

$$= \frac{GM}{R}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=o}^{l}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} R_e\left[(C_{lm} - iS_{lm})e^{im(\lambda+\theta)}\right]P_{lm}(\sin\varphi)$$

**Transformation de coordonnées de Kaula :**

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1} P_{lm}(\sin\varphi)e^{im(\lambda+\theta)} = \sum_{p=o}^{l}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(i)\,G_{lpq}(e)$$

$$\left[\begin{pmatrix}\cos\psi_{lmpq}\\ \sin\psi_{lmpq}\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\sin\psi_{lmpq}\\ -\cos\psi_{lmpq}\end{pmatrix}\right] \quad \begin{matrix} l-m\ pair \\ l-m\ impair\end{matrix}$$

avec : $\psi_{lmpq} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\theta)$

$$U = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=o}^{l}\sum_{p=o}^{l}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{lmpq}$$

$$\boxed{U_{lmpq} = \frac{GM}{R}\left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(i)\,G_{lpq}(e)\,S_{lmpq}(\omega,\Omega,M,\theta)}$$

avec :

$$S_{lmpq} = \begin{pmatrix}C_{lm}\\ -S_{lm}\end{pmatrix}\cos\psi_{lmpq} + \begin{pmatrix}S_{lm}\\ C_{lm}\end{pmatrix}\sin\psi_{lmpq} \quad \begin{matrix} l-m \text{ pair} \\ l-m \text{ impair}\end{matrix}$$

# Fonctions $F_{lmp}(i)$ et $G_{lpq}(e)$

$$F_{lmp}(i)=\sum_{t=0}^{(l-m)/2}\frac{(2l-2t)!}{2^{2l-2t}\,t!(l-t)!(l-m-2t)!}\sin^{l-m-2t}i\,(-1)^{(l-m)/2}\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\cos^{s}i$$
$$\times\sum_{c}\binom{l-m-2t+s}{c}\binom{m-s}{p-t-c}(-1)^{c}$$

*pour toutes les valeurs de c rendant non nuls les coefficients binômiaux*

*ou* :

$$F_{lmp}(i)=(-1)^{(l-m)/2}\frac{(l+m)!}{2^{l}\,l!}\binom{l}{p}\sum_{u}(-1)^{u}\binom{2p}{u}\binom{2l-2p}{l-m-u}\cos^{l+m-2p+2u}\frac{i}{2}\sin^{l-m+2p-2u}\frac{i}{2}$$

*avec* $\quad \sup(0,2p-l-m)\le u\le \inf(l-m,2p)$

$$G_{lpq}(e)=\frac{1}{\left(1-e^{2}\right)^{l-1/2}}\sum_{d=0}^{p'-1}\binom{l-1}{2d+l-2p'}\binom{2d+l-2p'}{d}\left(\frac{e}{2}\right)^{2d+l-2p'}$$

*pour* $\quad q=l-2p$ $\quad$ (*on ne considère pas les termes à courte période tels que* : $l-2p+q\neq 0$)

*avec* $\quad p'=p$ $\quad$ *pour* $p\le l/2$ $\quad$ *et* $\quad p'=l-p$ $\quad$ *pour* $p>l/2$

$\binom{l}{p}$ *est le coefficient binômial* $C_l^p=\dfrac{l!}{p!(l-p)!}$

*pour* $\quad e<<1$, $G_{lpq}(e)=O\left(e^{|q|}\right)$:

$G_{lp0}(e)=1,\ G_{lp1}(e)=(3l-4p+1)e/2,\ G_{lp-1}(e)=(-l+4p+1)e/2$

# Développement du potentiel de degré 2

$$U_2 = \sum_{p=o}^{2} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{20pq}$$

**pour e << 1, ne retenons que q = o :**

$$U_2 = \frac{GM}{R}\left(\frac{R}{a}\right)^3 \sum_{p=o}^{2} F_{2op}(i) G_{2po}(e) C_{20} \cos[(2-2p)(\omega + M)]$$

**p = o :** $\psi_{2000} = 2(\omega + M)$

**p = 1 :** $U_{2010} = \frac{GM}{R}\left(\frac{R}{a}\right)^3 F_{201}(i) G_{210}(e)$

**p = 2 :** $\psi_{2020} = -2(\omega + M)$

**équations de Lagrange ⇒ perturbations séculaires**

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{3n}{4\left(1-e^2\right)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20}\left(1 - 5\cos^2 i\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \dot{\bar{\Omega}} = \frac{3n}{2\left(1-e^2\right)^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20}\cos i$$

$$\frac{dM}{dt} = \dot{\bar{M}} = n - \frac{3n}{4\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(\frac{R}{a}\right)^2 C_{20}\left(3\cos^2 i - 1\right)$$

$n$ **: moyen mouvement** $\left(n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}\right)$

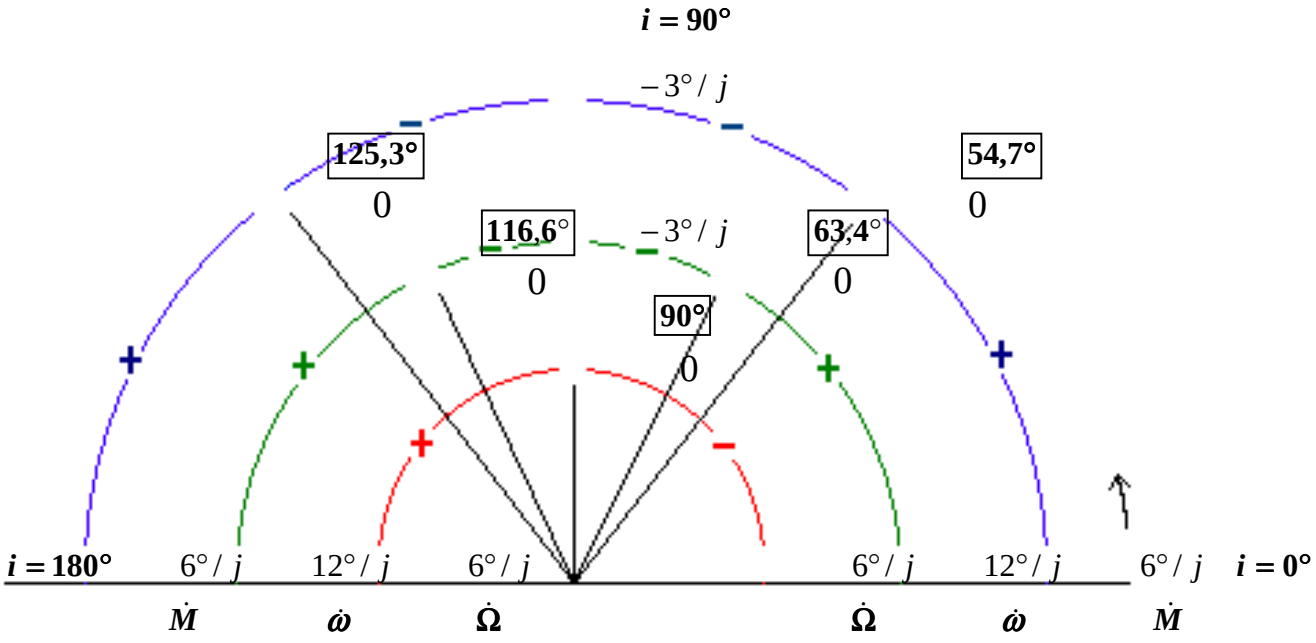
# Perturbations séculaires dues à $J_2$

nœud ascendant : $$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2} \cos i$$

périgée : $$\dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2} \left(5\cos^2 i - 1\right)$$

moyen mouvement : $$\dot{M} = n + \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{3/2}} \left(3\cos^2 i - 1\right)$$

variations des perturbations séculaires en fonction de l'inclinaison pour un satellite à 1000 km (e = 0) :




d'autre part : $e \uparrow \Rightarrow \dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M} \uparrow$

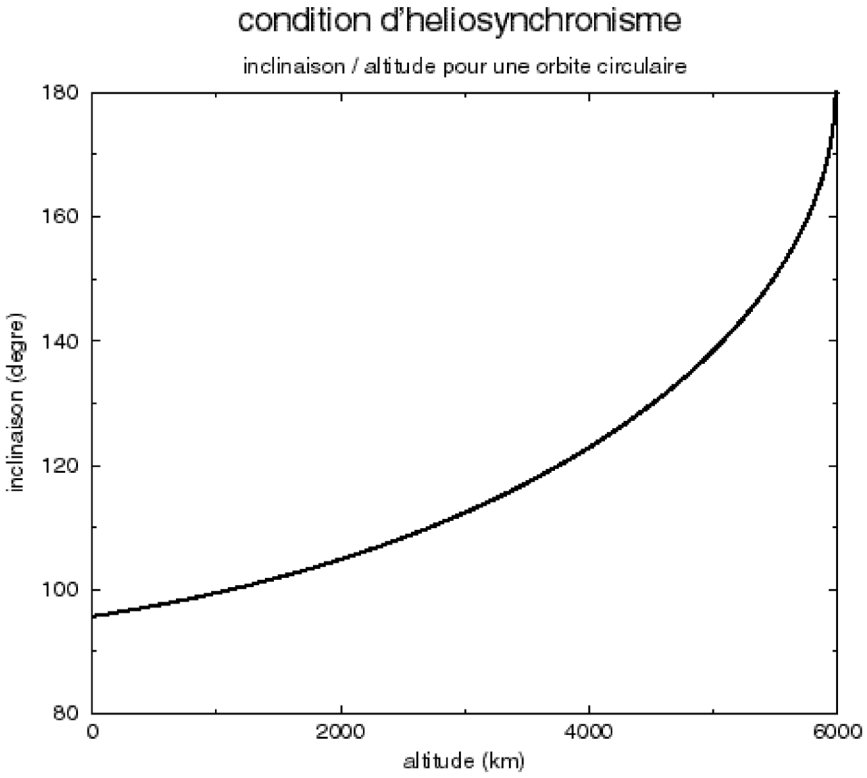
$a \uparrow \Rightarrow \dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M} \downarrow$

# Condition d’héliosynchronisme

**La ligne des noeuds de l'orbite suit le déplacement du Soleil (moyen) :**

$$\dot{\Omega} = \omega_s = 0.98561228° / j$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n \frac{R^2}{a^2} J_2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \cos i = \omega_s$$




# Condition de géostationnarité

**La période de révolution est égale à la période sidérale de rotation de la Terre (1 tour en 86164 s) :**

$e = 0,$

$i = 0,$

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega} + \dot{M} = \omega_T = 7{,}2921151 0^{-5} rd / s$$

**soit a = 42166 km**

# Perturbations périodiques

**Hypothèse : seul $S_{lmpq}(\omega,\Omega,M,\theta)$ dépend du temps à la fréquence**

$$\dot{\psi}_{lmpq} = (l-2p)\dot{\bar{\omega}} + (l-2p+q)\dot{\bar{M}} + m(\dot{\bar{\Omega}} - \dot{\theta})$$

**Equations de Lagrange ⇒ perturbations périodiques (2ème itération)**

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{2opo} = \frac{2}{na}\frac{\partial U_{2opo}}{\partial M}$$

$$\frac{\partial U_{2opo}}{\partial M} = -GM\frac{R^2}{a^3}(2-2p)F_{2op}(i)G_{2po}(e)C_{20}\sin\left[(2-2p)(\bar{\omega}+\bar{M})\right]$$

d'où par intégration :

$$\Delta a_{2opo} = 2\frac{GM}{na^2}\frac{R^2}{a^2}\frac{(2-2p)F_{2op}(i)G_{2po}(e)C_{20}\cos\left[(2-2p)(\bar{\omega}+\bar{M})\right]}{(2-2p)(\dot{\bar{\omega}}+\dot{\bar{M}})}$$

**L'intégration est similaire pour les autres éléments orbitaux.**

**A noter que pour $M$, le moyen mouvement $n$ subit une perturbation indirecte due à la 3ème loi de Képler telle que :**

$$\Delta n = -\frac{3}{2}n\frac{\Delta a}{a}$$

**Pas de 3ème itération ⇒ pas de termes en $C_{20}^2$**

**⇒ pas de longues périodes engendrées par les zonaux pairs**

**En règle générale, le calcul des longues périodes dues aux termes $C_{l0}^n$ n'est exact qu'à la (n + 2)ième itération.**

**De manière générale, on pose pour les éléments a, e, i :**

$\Delta\alpha_{lmpq} = C^{\alpha}_{lmpq}\, S_{lmpq}$ **(** *puisque $S_{lmpq}$ est dérivé / ω, Ω, M puis intégré en temps)*

**avec :** $$S_{lmpq} = \begin{Bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{Bmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \cos\psi_{lmpq} + \begin{Bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{Bmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \sin\psi_{lmpq}$$

**et pour les éléments ω, Ω, M :**

$\Delta\alpha_{lmpq} = C^{\alpha}_{lmpq}\, S^{*}_{lmpq}$ **(** *puisque $S_{lmpq}$ est seulement intégré en temps)*

**avec :** $$S^{*}_{lmpq} = \int S_{lmpq}\, d\psi = \begin{Bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{Bmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \sin\psi_{lmpq} - \begin{Bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{Bmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \cos\psi_{lmpq}$$

**Les coefficients $C^{\alpha}_{lmpq}$ sont déterminés par les expressions :**

$$C^{a}_{lmpq} = 2a\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\,(l-2p+q)\,\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

$$C^{e}_{lmpq} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\left[\sqrt{1-e^2}\,(l-2p+q) - (l-2p)\right]\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

$$C^{i}_{lmpq} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i} F_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\,((l-2p)\cos i - m)\,\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

$$C^{\omega}_{lmpq} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l}\left[\sqrt{1-e^2}\, F_{lmp}(i)\,\frac{G'_{lpq}(e)}{e} - \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i} F'_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\right]\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

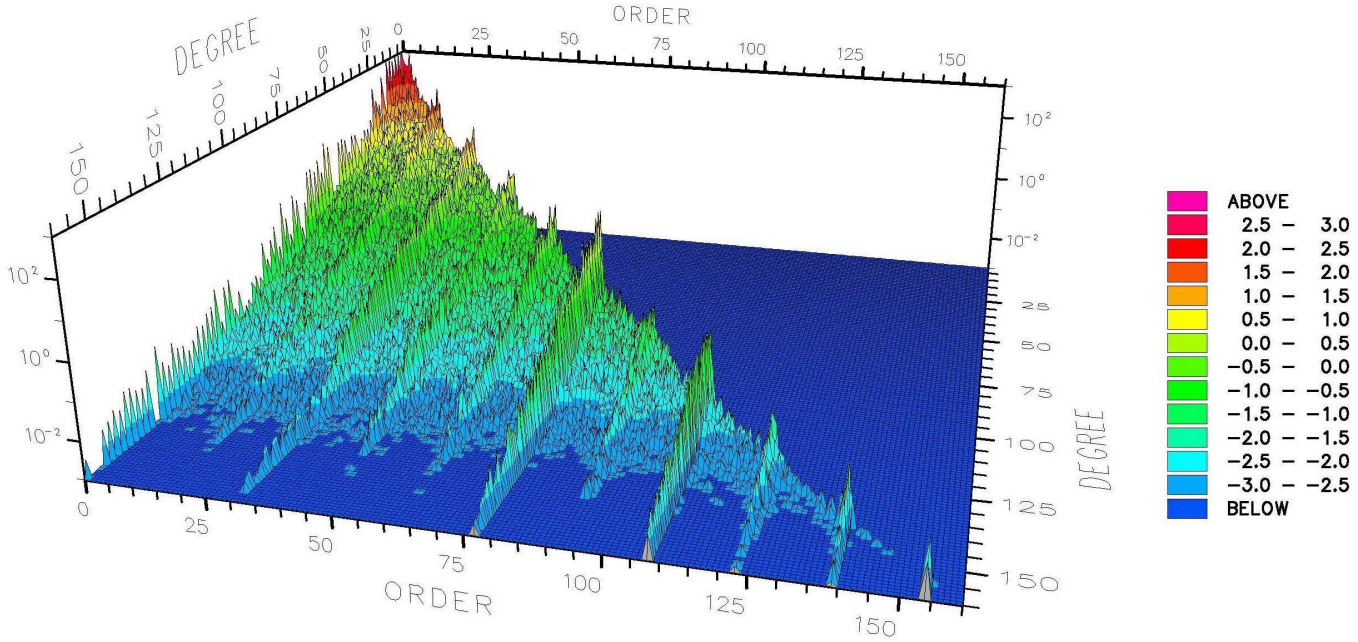
$$C^{\Omega}_{lmpq} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}\,\sin i} F'_{lmp}(i)\, G_{lpq}(e)\;\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

$$C^{M}_{lmpq} = \left(\frac{a_e}{a}\right)^{l}\left[2(l+1)G_{lpq}(e) - \frac{1-e^2}{e} G'_{lpq}(e) - 3\, G_{lpq}(e)\,(l-2p+q)\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}\right] F_{lmp}(i)\frac{n}{\dot{\psi}_{lmpq}}$$

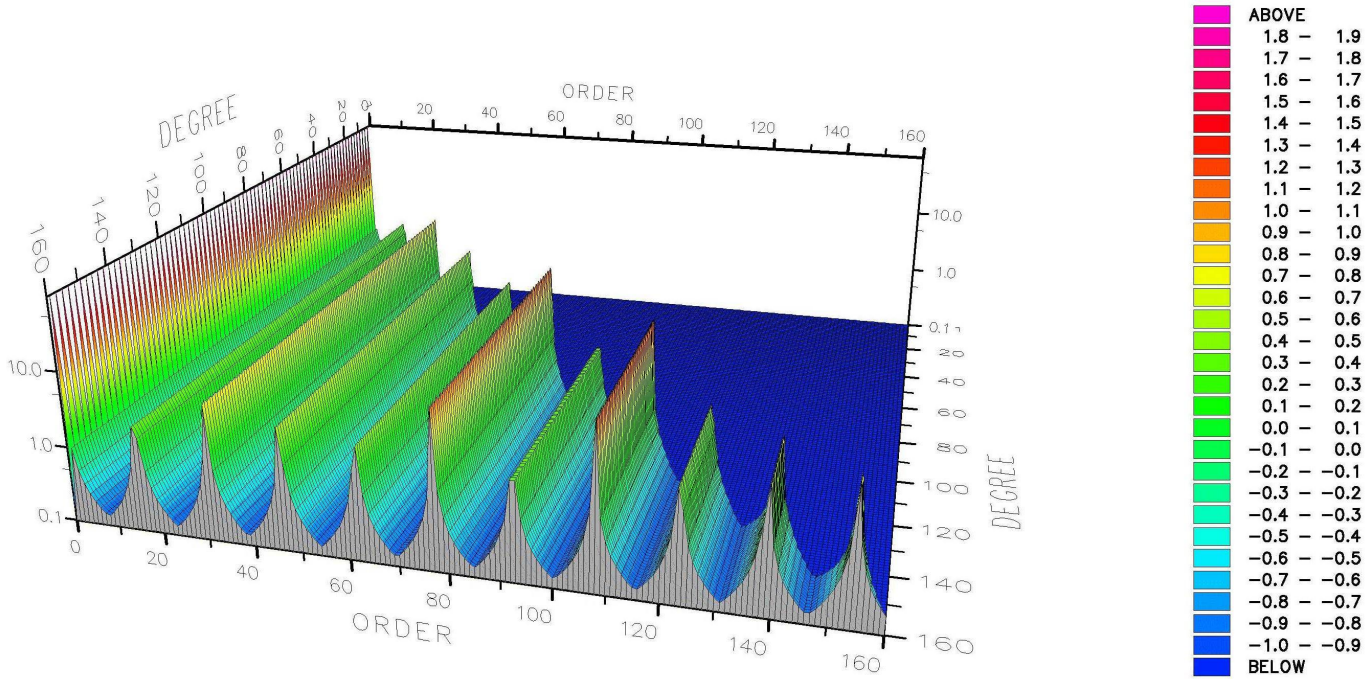
**où :** $$F'_{lmp}(i) = \frac{\partial F_{lmp}(i)}{\partial e} \quad et \quad G'_{lpq}(e) = \frac{\partial G_{lpq}(e)}{\partial e}$$

| **Harmoniques** | **Index** | | | **Fréquences** | **Périodes** | **Eléments** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\dot{\psi} = \boldsymbol{m}(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$ | $+(\boldsymbol{l} - 2\boldsymbol{p})\dot{\omega}$ | $+(\boldsymbol{l} - 2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})\dot{M}$ | $\dot{\psi}$ | | |
| **Zonaux pairs** | **0** | **0** | **0** | **0** | **séculaire** | **ω, Ω, M** |
| **Zonaux pairs** | **0** | **0** | **≠0** | $\boldsymbol{q}\dot{M}$ | **révolution** | **a, e, i, ω, Ω, M** |
| **Zonaux impairs (pairs, 2ème ordre)** | **0** | **≠0** | **0** | $(\boldsymbol{l} - 2\boldsymbol{p})\dot{\omega}$ | **périgée** | **e, i, ω, Ω, M** |
| **Tesseraux** | **≠0** | **0** | **0** | $\boldsymbol{m}(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$ | **jour** | **i, ω, Ω, M** |
| **Tesseraux de résonance** | **14**<br>**28** | **1**<br>**2** | **1**<br>**2** | $(\dot{\omega} + \dot{M}) - \boldsymbol{m}(\dot{\theta} - \dot{\Omega})$<br>$2(\dot{\omega} + \dot{M}) - 2\boldsymbol{m}(\dot{\theta} - \dot{\Omega})$ | **> jour**<br>**(+ sous multiples)** | **e, i, ω, Ω, M** |

***Satellite CHAMP (400 km)***
***Amplitudes des perturbations orbitales dues au champ de gravité par degré et par ordre des fonctions harmoniques sphériques (en m)***

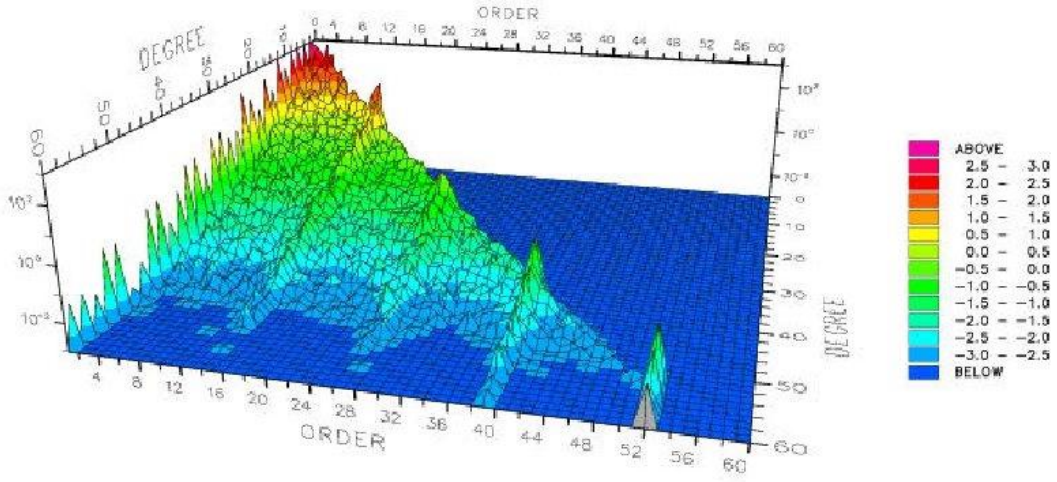



***Périodes maximales des perturbations orbitales (en jour)***

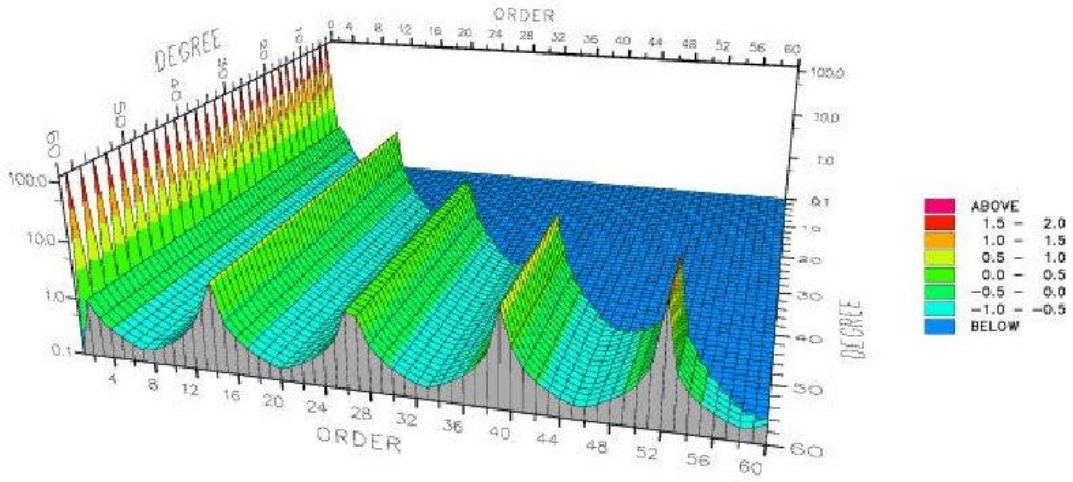


*Satellite TOPEX*

*Amplitudes des perturbations orbitales dues au champ de gravité par degré et par ordre des fonctions harmoniques sphériques (en cm)*

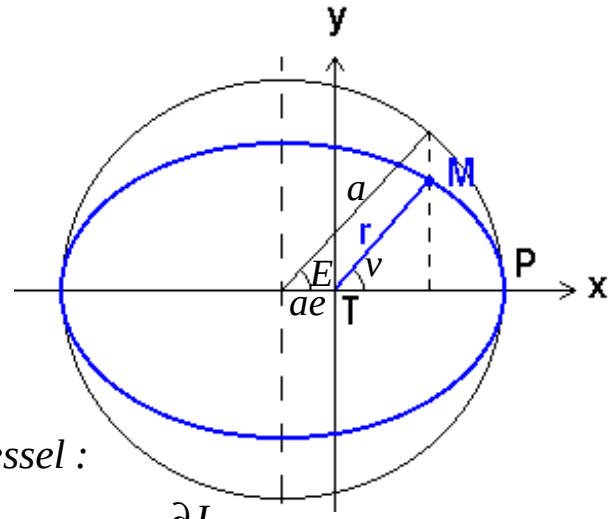



*Périodes maximales des perturbations orbitales (en jour)*



# Perturbations radiales, transverses et normales

## (G Rosborough, 1987)




**Perturbation radiale :**

la distance géocentrique s'exprime :

$$r = a(1 - e\cos E)$$

*En développant* $\cos E$ *en fonction de* $e$ *et de* $M$ *au moyen des fonctions de Bessel :*

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s^2} J_s'(se)\cos sM \quad , \text{ où } J_s' = \frac{\partial J_s}{\partial e}$$

*on obtient :*

$$r = a\left[1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} J_s'(se)\cos sM\right] = a\sum_{s=0}^{\infty} H_s \cos sM$$

$$\text{avec : } H_0 = 1 + \frac{e^2}{2} \quad \text{et} \quad H_s = -\frac{2e}{s^2} J_s'(se) \quad \text{pour } s = 1, 2, ..., \infty$$

$J_s$ *est la fonction de Bessel de premier type d'ordre* $s$ *:*

$$J_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(st - x\sin t)dt$$

$$\text{dont une propriété est : } \quad J_s'(x) = \frac{J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x)}{2}$$

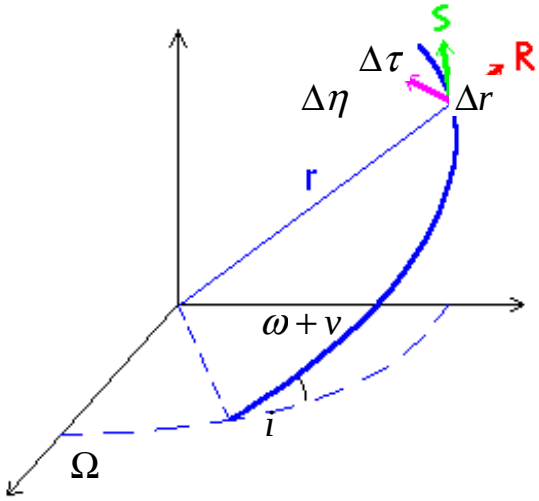
$r$ étant uniquement fonction de $a$, $e$, $M$, la **perturbation radiale** s'exprime :

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial r}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial r}{\partial M}\Delta M$$

$$= \Delta a\sum_{s=0}^{\infty} H_s \cos sM + a\Delta e\sum_{s=0}^{\infty} H_s' \cos sM - a\Delta M\sum_{s=0}^{\infty} sH_s \sin sM$$

$$\text{où : } \quad H_s' = \frac{\partial H_s}{\partial e}$$

**Perturbation transverse :**




dans le plan de l'orbite, elle s'exprime :

$$\Delta\tau = r\left[\Delta(\omega + v) + \Delta\Omega\cos i\right]$$

*L'anomalie vraie v se développe en fonction de e et de M au moyen des fonctions de Bessel* :

$$v = M + \sum_{u=1}^{\infty}\frac{2}{u}\left\{J_u(ue) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta^{\nu}\left[J_{u-\nu}(ue) + J_{u+\nu}(ue)\right]\right\}\sin uM$$

*avec* $\beta = \dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$

*soit en définissant :* $I_u = \dfrac{2}{u}\left\{J_u(ue) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta^{\nu}\left[J_{u-\nu}(ue) + J_{u+\nu}(ue)\right]\right\}$

$$v = M + \sum_{u=1}^{\infty} I_u \sin uM$$

Par dérivation, la perturbation en anomalie vraie s'exprime :

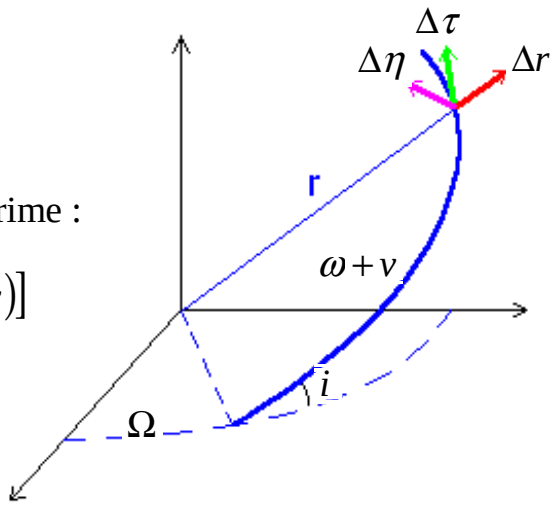
$$\Delta v = \Delta M + \Delta M\sum_{u=1}^{\infty} uI_u \cos uM + \Delta e\sum_{u=1}^{\infty} I'_u \sin uM$$

et la **perturbation transverse** s'écrit donc:

$$\Delta\tau = r\left[\Delta\omega + \Delta M + \Delta\Omega\cos i + \Delta M\sum_{u=1}^{\infty} uI_u \cos uM + \Delta e\sum_{u=1}^{\infty} I'_u \sin uM\right]$$

*où :* $I'_u = \dfrac{\partial I_u}{\partial e}$

**Perturbation normale :**




perpendiculaire au plan de l'orbite, elle s'exprime :

$$\Delta\eta = r\left[\Delta i \sin(\omega + v) - \Delta\Omega \sin i \cos(\omega + v)\right]$$

*Les fonctions trigonométriques de l' anomalie vraie se développent en fonction de e et de M au moyen des fonctions de Bessel :*

$$\cos v = -e + \frac{2\left(1-e^2\right)}{e}\sum_{u=1}^{\infty} J_u(ue)\cos uM$$

$$\sin v = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{u=1}^{\infty}\frac{1}{u}J'_u(ue)\sin uM \qquad , où\ J'_u = \frac{\partial J_u}{\partial e}$$

*soit en définissant :* $R_0 = -e$ *et* $R_u = \frac{2\left(1-e^2\right)}{e}J_u(ue)$ *pour* $u = 1, 2, ..., \infty$

*et :* $Q_0 = 0$ *et* $Q_u = \frac{2}{u}\sqrt{1-e^2}\,J'_u(ue)$ *pour* $u = 1, 2, ..., \infty$

*on obtient :*

$$\cos v = \sum_{u=0}^{\infty} R_u \cos uM \quad et \quad \sin v = \sum_{u=0}^{\infty} Q_u \sin uM$$

En substituant dans l'expression de la **perturbation normale**, il vient :

$$\Delta\eta = a\sum_{s=0}^{\infty} H_s \cos sM \left\{ \begin{array}{l} \left[\Delta i \sin\omega - \Delta\Omega \sin i \cos\omega\right]\sum_{u=0}^{\infty} R_u \cos uM \\ + \left[\Delta i \cos\omega + \Delta\Omega \sin i \sin\omega\right]\sum_{u=0}^{\infty} Q_u \sin uM \end{array} \right\}$$

**Les perturbations radiale, transverse et normale générées par le potentiel gravitationnel se déduisent des perturbations en éléments képlériens :**

$$\Delta r = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\Delta r_{lmpq} \quad où \quad \Delta r_{lmpq} = C^{r}_{lmpq} S_{lmpq}$$

$$\Delta \tau = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\Delta \tau_{lmpq} \quad où \quad \Delta \tau_{lmpq} = C^{\tau}_{lmpq} S^{*}_{lmpq}$$

$$\Delta \eta = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\Delta \eta_{lmpq} \quad où \quad \Delta \eta_{lmpq} = C^{\eta+}_{lmpq} S^{*}_{(l+1)mpq} - C^{\eta-}_{lmpq} S^{*}_{(l-1)mpq}$$

**et où les coefficients $C_{lmpq}$ s'expriment (**remarquant : $\psi_{lmpq} \pm sM = \psi_{lmp,q\pm s}$**) :**

$$C^{r}_{lmpq} = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[C^{a}_{lmps}\tilde{\bar{H}}_{q-s} + aC^{e}_{lmps}\tilde{\bar{H}}'_{q-s} + a(q-s)C^{M}_{lmps}\tilde{\bar{H}}_{q-s}\right]$$

$$C^{\tau}_{lmpq} = a\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[\tilde{\bar{H}}_{q-s}\left(C^{\omega}_{lmps} + C^{M}_{lmps} + C^{\Omega}_{lmps}\cos i\right) + \sum_{u=-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{H}}_{u-s}\left(C^{e}_{lmps}\tilde{\bar{I}}'_{q-u} + (q-u)C^{M}_{lmps}\tilde{\bar{I}}_{q-u}\right)\right]$$

$$C^{\eta+}_{lmpq} = \frac{a}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{u=-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{H}}_{u-s}\left(C^{i}_{lmps} - C^{\Omega}_{lmps}\sin i\right)\left(\tilde{\bar{R}}_{q-u+1} + \tilde{\bar{Q}}_{q-u+1}\right)$$

$$C^{\eta-}_{lmpq} = \frac{a}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{u=-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{H}}_{u-s}\left(C^{i}_{lmps} + C^{\Omega}_{lmps}\sin i\right)\left(\tilde{\bar{R}}_{q-u-1} - \tilde{\bar{Q}}_{q-u-1}\right)$$

*avec :*

$$\tilde{\bar{H}}_0 = H_0 = 1 + \frac{e^2}{2} \quad et \quad \tilde{\bar{H}}_s = \tilde{\bar{H}}_{-s} = \frac{H_s}{2} \quad pour\ s = 1, 2, ..., \infty$$

$$\tilde{\bar{I}}_0 = I_0 = 0 \quad et \quad \tilde{\bar{I}}_u = \tilde{\bar{I}}_{-u} = \frac{I_u}{2} \quad pour\ u = 1, 2, ..., \infty$$

$$\tilde{\bar{R}}_0 = R_0 = -e \quad et \quad \tilde{\bar{R}}_u = \tilde{\bar{R}}_{-u} = \frac{R_u}{2} \quad pour \quad u = 1, 2, ..., \infty$$

$$\tilde{\bar{Q}}_0 = Q_0 = 0 \quad et \quad \tilde{\bar{Q}}_u = \tilde{\bar{Q}}_{-u} = \frac{Q_u}{2} \quad pour \quad u = 1, 2, ..., \infty$$

$$et : \quad \tilde{\tilde{H}}'_u = \frac{\partial \tilde{\tilde{H}}_u}{\partial e}, \quad \tilde{\tilde{I}}'_u = \frac{\partial \tilde{\tilde{I}}_u}{\partial e}$$

**Dans le cas de petites excentricités, on peut en première approximation se limiter au terme d'ordre 0 en e. Dans ce cas, les coefficients des perturbations radiale, transverse et normale s'explicitent :**

$$C^{r}_{lmp0} = na\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} F_{lmp}(i)\left[\frac{2(l-2p)}{\dot{\psi}_{lmp0}} + \frac{4p-3l-1}{2\dot{\psi}_{lmp1}} + \frac{4p-l+1}{2\dot{\psi}_{lmp-1}}\right]$$

$$C^{\tau}_{lmp0} = na\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} F_{lmp}(i)\left[\frac{2(l+1)-3(l-2p)\dfrac{n}{\dot{\psi}_{lmp0}}}{\dot{\psi}_{lmp0}} + \frac{4p-3l-1}{2\dot{\psi}_{lmp1}} + \frac{l-4p-1}{2\dot{\psi}_{lmp-1}}\right]$$

$$C^{\eta+}_{lmpq} = \frac{a}{2}\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{n}{\dot{\psi}_{lmp0}}\left\{[(l-2p)\cos i - m]\frac{F_{lmp}(i)}{\sin i} - F'_{lmp}(i)\right\}$$

$$C^{\eta-}_{lmpq} = \frac{a}{2}\left(\frac{a_e}{a}\right)^{l} \frac{n}{\dot{\psi}_{lmp0}}\left\{[(l-2p)\cos i - m]\frac{F_{lmp}(i)}{\sin i} + F'_{lmp}(i)\right\}$$

# La perturbation radiale moyenne

(G Rosborough, 1987, G Balmino, 1992)

Pour un degré *l* et un ordre *m* fixés, la perturbation radiale d'orbite s'exprime :

$$\Delta r_{lm} = \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-Q}^{Q} C^{r}_{lmpq} S_{lmpq}$$

La perturbation moyenne quadratique due à ce terme s'écrit donc :

$$< \Delta r^2_{lm} > = \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-Q}^{Q} \sum_{p'=0}^{l} \sum_{q'=-Q}^{Q} C^{r}_{lmpq} C^{r}_{lmp'q'} < S_{lmpq} S_{lmp'q'} >$$

La moyenne de fonctions sinus et cosinus : $<S_{lmpq}S_{lmp'q'}>$ est nulle exceptée pour : $\psi_{lmpq} = \pm\psi_{lmp'q'}$ , soit pour $p=p'$ et $q=q'$ , où elle vaut selon la parité de *l-m* :

$$< S^2_{lmpq} > = C^2_{lm} < \begin{pmatrix} cos^2 \\ sin^2 \end{pmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \psi_{lmpq} > + S^2_{lm} < \begin{pmatrix} sin^2 \\ cos^2 \end{pmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \psi_{lmpq} >$$

$$= \frac{C^2_{lm} + S^2_{lm}}{2}$$

d'où :

$$< \Delta r^2_{lm} > = \frac{C^2_{lm} + S^2_{lm}}{2} \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-Q}^{Q} C^{r\,2}_{lmpq}$$

A noter que pour $p'=l-p$ et $q'=-q$ la condition est également satisfaite lorsque *m=0*, c'est à dire pour les zonaux : $\psi_{l0,l-p,-q} = -(l-2p)(\omega + M) - qM = -\psi_{l0\,pq}$

Dans ce cas, il faut en plus distinguer entre *l* pair et *l* impair :

$$< S_{l0\,pq} S_{l0,l-p,-q} > = C^2_{l0} < \begin{pmatrix} cos \\ sin \end{pmatrix}^{l\ pair}_{l\ impair} \psi_{l0\,pq} \begin{pmatrix} cos \\ sin \end{pmatrix}^{l\ pair}_{l\ impair} \psi_{l0,l-p,-q} >$$

$$= (-1)^l \frac{C^2_{l0}}{2}$$

d'où :

$$< \Delta r^2_{l0} > = \frac{C^2_{l0}}{2} \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-Q}^{Q} \left[ C^{r\,2}_{l0\,pq} + (-1)^l C^{r}_{l0\,pq} C^{r}_{l0,l-p,-q} \right]$$

Pour calculer la perturbation moyenne cumulée au degré *l*, il suffit de sommer les équations précédentes sur les ordres, de *m=0* à *l* :

$$< \Delta r_{(l)}^2 > = \sum_{m=0}^{l} < \Delta r_{lm}^2 >$$

Par contre, pour calculer la perturbation moyenne cumulée à l'ordre *m*, sur les degrés de *l=m* à *L*, il faut tout d'abord inverser l'ordre de sommation entre *l* et *m* en posant par exemple *k=l-2p* comme nouvel indice:

$$\psi_{lmpq} = \psi_{kqm} = k(\omega + M) + qM + m(\Omega - \theta)$$

La perturbation radiale s'écrit alors :

$$\Delta r = \sum_{m=0}^{L} \sum_{k=-L}^{+L} \sum_{q=-Q}^{Q} \sum_{l=l_{min}}^{L} C^r_{lm,(l-k)/2,q} \, S_{lm,(l-k)/2,q}$$

$$avec : \quad l_{min} = max(2, |k|, m)$$

Elle s'explicite pour les harmoniques zonales (*m=0*), considérant $\psi_{-k,-q,0} = -\psi_{kq0}$ :

$$\Delta r_{(m=0)} = \sum_{q=1}^{Q} \left[ \sum_{l=2}^{L} \left( C^r_{l,0,l/2,q} + C^r_{l0,l/2,-q} \right) \begin{pmatrix} C_{l0} \\ S_{l0} \end{pmatrix} \right] cos\, qM$$
$$+ \sum_{k=1}^{L} \sum_{q=-Q}^{Q} \left[ \sum_{l=l_{min}}^{L} \left( C^r_{l0,(l-k)/2,q} + (-1)^l C^r_{l0,(l+k)/2,-q} \right) \begin{pmatrix} C_{l0} \\ S_{l0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} cos \\ sin \end{pmatrix}_{k\ impair}^{k\ pair} \psi_{kq0}$$

ou encore en posant $l - k = 2j$ :

$$\Delta r_{(m=0)} = \sum_{q=1}^{Q} \left[ \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} \left( C^r_{2j,0,j,q} + C^r_{2j,0,j,-q} \right) \begin{pmatrix} C_{2j,0} \\ S_{2j,0} \end{pmatrix} \right] cos\, qM$$
$$+ \sum_{k=1}^{L} \sum_{q=-Q}^{Q} \left[ \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} \left( C^r_{k+2j,0,j,q} + (-1)^k C^r_{k+2j,0,k+j,-q} \right) \begin{pmatrix} C_{k+2j,0} \\ S_{k+2j,0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} cos \\ sin \end{pmatrix}_{k\ impair}^{k\ pair} \psi_{kq0}$$

$$avec : \quad j_{min} = max(2, 1 - k/2)$$
$$j_{max} = (L - k)/2$$

et pour les harmoniques tessérales ($m>0$) :

$$\Delta r_{(m>0)} = \sum_{k=-L}^{L}\sum_{q=-Q}^{Q}\left[\left(\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} C^{r}_{k+2j,m,j,q}\begin{pmatrix} C_{k+2j,m} \\ -S_{k+2j,m}\end{pmatrix}\right)\cos\psi_{kqm} + \left(\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} C^{r}_{k+2j,m,j,q}\begin{pmatrix} S_{k+2j,m} \\ C_{k+2j,m}\end{pmatrix}\right)\sin\psi_{kqm}\right]$$

$$\textit{en posant :}\quad l = k+2j \quad \textit{soit :}\quad j = (l-k)/2$$

$$\textit{avec :}\quad j_{min} = max(0, 1-k/2, -k, (m-k)/2)$$

$$j_{max} = (L-k)/2$$

La perturbation moyenne quadratique cumulée à l'ordre *m* s'en déduit pour les harmoniques zonales et tessérales:

$$\Delta r^{2}_{(m=0)} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q}\left[\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}\left(C^{r}_{2j,0,j,q} + C^{r}_{2j,0,j,-q}\right)\begin{pmatrix} C_{2j,0} \\ S_{2j,0}\end{pmatrix}\right]^{2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\sum_{q=-Q}^{Q}\left[\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}\left(C^{r}_{k+2j,0,j,q} + (-1)^{k} C^{r}_{k+2j,0,k+j,-q}\right)\begin{pmatrix} C_{k+2j,0} \\ S_{k+2j,0}\end{pmatrix}\right]^{2}$$

$$\Delta r^{2}_{(m>0)} = \frac{1}{2}\sum_{k=-L}^{L}\sum_{q=-Q}^{Q}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} C^{r}_{k+2j,m,j,q}\begin{pmatrix} C_{k+2j,m} \\ -S_{k+2j,m}\end{pmatrix}\right)^{2} \\ +\left(\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} C^{r}_{k+2j,m,j,q}\begin{pmatrix} S_{k+2j,m} \\ C_{k+2j,m}\end{pmatrix}\right)^{2}\end{array}\right]$$

# L’erreur radiale d’orbite

A partir d’une matrice de covariance (Γ) des coefficients harmoniques sphériques d’un modèle de champ de gravité, on définit chaque élément de variance ou covariance par :

$$\Gamma^{CC}_{lml'm'} = E\left[\delta C_{lm}\delta C_{l'm'}\right]$$
$$\Gamma^{SS}_{lml'm'} = E\left[\delta S_{lm}\delta S_{l'm'}\right]$$
$$\Gamma^{CS}_{lml'm'} = \Gamma^{SC}_{l'm'lm} = E\left[\delta C_{lm}\delta S_{l'm'}\right]$$

En appliquant l’opérateur statistique E (espérance mathématique) aux formules de l’erreur moyenne quadratique, on obtient l’erreur radiale d’orbite générée par les variances d’un coefficient zonal :

$$< E\left(\delta r^2_{l0}\right) > = \sigma^2\left(\delta r_{l0}\right) = \frac{\Gamma^{CC}_{l0l0}}{2}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-Q}^{Q}\left[C^{r\,2}_{l0\,pq} + (-1)^l C^{r}_{l0\,pq}C^{r}_{l0,l-p,-q}\right]$$

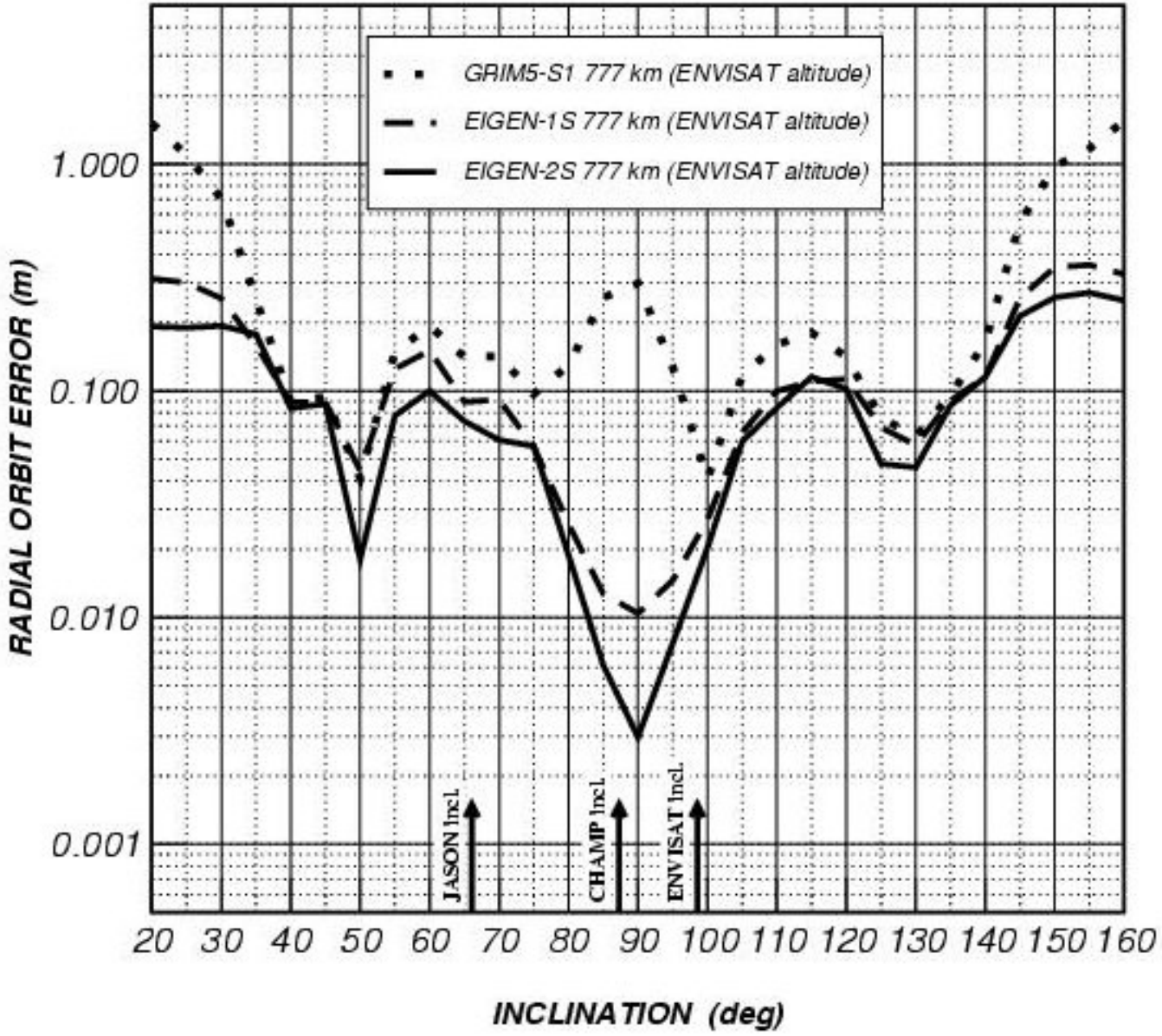
ou de coefficients tesséraux :

$$< E\left(\delta r^2_{lm}\right) > = \sigma^2\left(\delta r_{lm}\right) = \frac{\Gamma^{CC}_{lmlm} + \Gamma^{SS}_{lmlm}}{2}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-Q}^{Q}C^{r\,2}_{l0\,pq}$$

L’erreur radiale par degré ou par ordre s’en déduit de la même façon par application de l’opérateur E aux moyennes quadratiques $< \Delta r^2_{(l)} >$ ou $< \Delta r^2_{(m)} >$.

L’erreur radiale totale : $\sigma^2\left(\delta r\right) = \sum_{m=0}^{L} < \Delta r^2_{(m)} >$ donne une information synthétique de la qualité d’un modèle à travers sa matrice de covariance. Elle est souvent représentée par inclinaison à demi-grand axe donné, ce qui met en évidence les apports et les défauts des informations satellitales.

*EXPECTED RADIAL ORBIT ERROR AS A FUNCTION OF INCLINATION FROM COVARIANCE MATRICES*



# Les erreurs géographiquement corrélées

Les erreurs géographiquement corrélées sont d'intérêt pour les missions altimétriques. Elles se déduisent des mêmes équations de la perturbation radiale d'orbite, mais converties du domaine temporel au domaine spatial dans le système terrestre. Cette transformation correspond à l'inverse de celle de Kaula puisqu'il s'agit d'exprimer la perturbation radiale (développée en éléments d'orbite) en fonction de la latitude et de la longitude terrestres (φ, λ).

Pour simplifier, considérons seulement les termes d'ordre 0 en excentricité :

$$\Delta r = \sum_{l=2}^{L} \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{l} C^{r}_{lmp0} S_{lmp0}$$

avec :

$$C^{r}_{lmp0} = na \left( \frac{a_e}{a} \right)^{l} F_{lmp}(i) \left[ \frac{2(l-2p)}{\dot{\psi}_{lmp0}} + \frac{4p-3l-1}{2\dot{\psi}_{lmp1}} + \frac{4p-l+1}{2\dot{\psi}_{lmp-1}} \right]$$

et :

$$S_{lmp0} = \begin{Bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{Bmatrix}_{l-m\ impair}^{l-m\ pair} cos\,\psi_{lmp0} + \begin{Bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{Bmatrix}_{l-m\ impair}^{l-m\ pair} sin\,\psi_{lmp0}$$

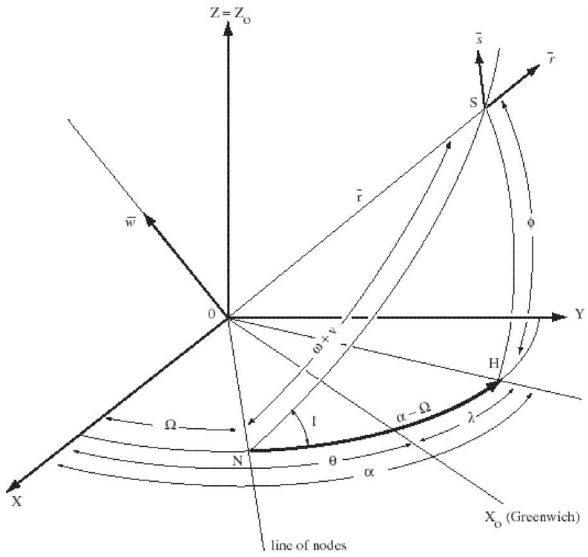
$$\psi_{lmp0} = (l-2p)(\omega + M) + m(\Omega - \theta)$$

La transformation utilise la relation de longitude :

$$\Omega - \theta = \lambda - (\alpha - \Omega)$$

et les relations de trigonométrie sphérique suivantes en fonction de la latitude :

$$\sin\varphi = \sin i \, \sin(\omega + M)$$
$$\cos\varphi \cos(\alpha - \Omega) = \cos(\omega + M)$$
$$\cos\varphi \sin(\alpha - \Omega) = \cos i \, \sin(\omega + M)$$




De ces 3 dernières relations, on tire :

$$\sin(\omega + M) = \frac{\sin\varphi}{\sin i}$$

$$\cos^2(\omega + M) = \frac{\sin^2 i - \sin^2\varphi}{\sin^2 i}$$

Il reste donc une indétermination de signe sur *cos(ω+M)* qui fait distinguer les passages montants (*cos(ω+M)>0*) des passages descendants (*cos(ω+M)< 0*) pour lesquels on définit respectivement $\sigma = 0$ et $\sigma = 1$.

En définitive, la perturbation radiale s'exprime en coordonnées terrestres :

$$\Delta r = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} M_{lm}\left(C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda\right) \qquad \textit{partie moyenne}$$

$$+(-1)^{\sigma}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} V_{lm}\left(C_{lm}\sin m\lambda - S_{lm}\cos m\lambda\right) \qquad \textit{partie variable}$$

*avec* :

$$M_{lm} = \sum_{p=0}^{l} C^{r}_{lmp0}\begin{pmatrix}\Phi^{c}_{lmp}\\ -\Phi^{c}_{lmp}\end{pmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ impair} \quad et \quad V_{lm} = \sum_{p=0}^{l} C^{r}_{lmp0}\begin{pmatrix}\Phi^{s}_{lmp}\\ \Phi^{c}_{lmp}\end{pmatrix}^{l-m\ pair}_{l-m\ inpair}$$

Il est à remarquer que les termes zonaux ne génèrent pas de partie variable.

Les fonctions $\Phi^c$ et $\Phi^s$ sont directement proportionnelles au cosinus et sinus de l'argument : *(l-2p) (ω+M) – m (α - Ω)* . Elle peuvent s'écrire également en fonction de l'inclinaison et de la latitude sous la forme :

$$\Phi^c_{lmp} = \left\{ Y^c_H Z^c_m + \left[ (l-2p)/H \right] Y^s_H Z^s_m \right\} \Big/ \left( cos^m \varphi \, sin^{m+H} \, i \right)$$

$$\Phi^s_{lmp} = \left\{ \left[ (l-2p)/H \right] Y^s_H Z^c_m - Y^c_H Z^s_m \right\} \Big/ \left( cos^m \varphi \, sin^{m+H} \, i \right)$$

*avec :*

$$H = |l-2p|$$

$$Y^c_H = \sum_{k=0}^{H/2} \binom{H}{2k} (-1)^k \left( sin^2 \, i - sin^2 \, \varphi \right)^{H/2-k} \, sin^{2k} \, \varphi$$

$$Y^s_H = \sum_{k=0}^{(H-1)/2} \binom{H}{2k+1} (-1)^k \left( sin^2 \, i - sin^2 \, \varphi \right)^{(H-1)/2-k} \, sin^{2k+1} \, \varphi$$

$$Z^c_m = \sum_{k=0}^{m/2} \binom{m}{2k} (-1)^k \, cos^{2k} \, i \left( sin^2 \, i - sin^2 \, \varphi \right)^{m/2-k} \, sin^{2k} \, \varphi$$

$$Z^s_m = \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \binom{m}{2k+1} (-1)^k \, cos^{2k+1} \, i \left( sin^2 \, i - sin^2 \, \varphi \right)^{(m-1)/2-k} \, sin^{2k+1} \, \varphi$$

La partie moyenne est constante en latitude-longitude et décrit des perturbations géographiquement corrélées entre les latitudes extrêmes –i et +i alors que la partie variable est distincte entre les passages montants et descendants (du fait du terme $(-1)^\sigma$ ).

La projection sur la Terre de l'erreur radiale d'orbite pour un terme *l,m* issue d'une matrice de covariance se représente par :

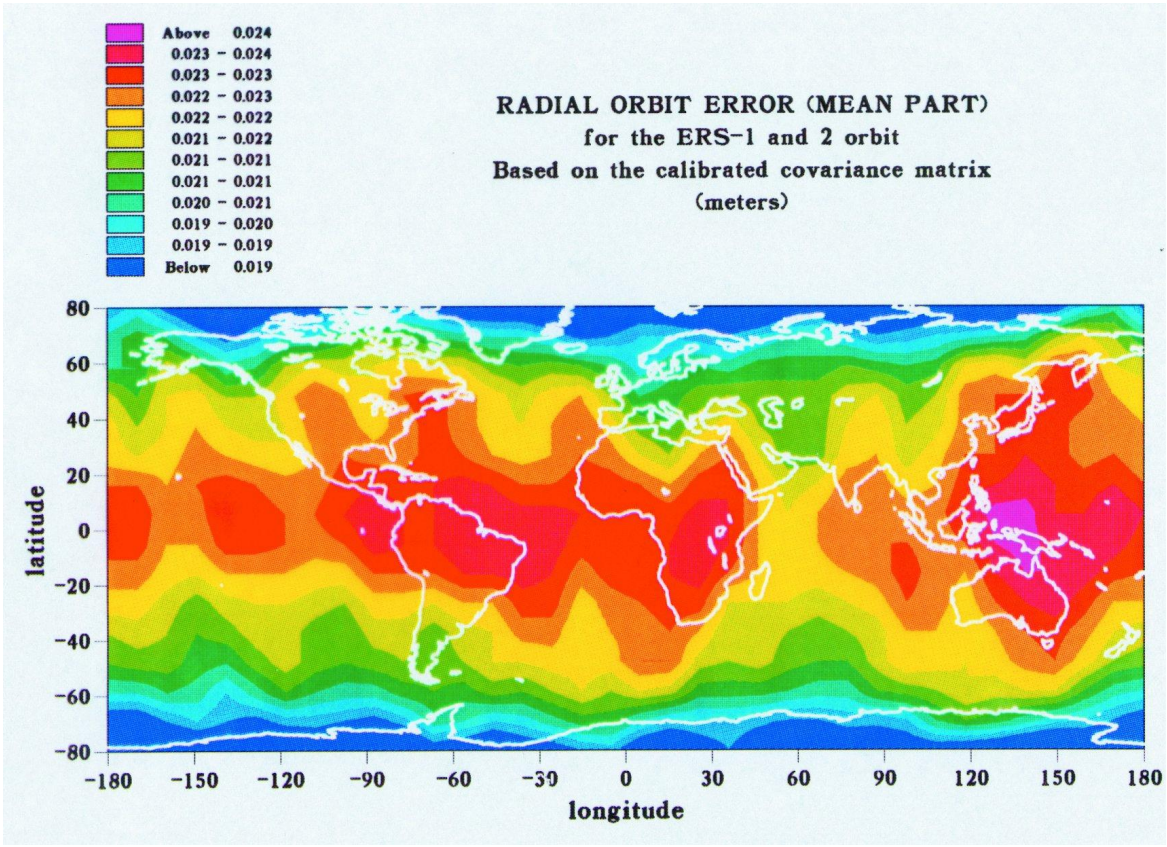
$$< E\left(\delta r^2_{lm}\right) > = \sigma^2 \left(\delta r_{lm}\right) = M^2_{lm} \left( \Gamma^{CC}_{lmlm} \, cos^2 \, m\lambda + \Gamma^{SS}_{lmlm} \, sin^2 \, m\lambda + 2\Gamma^{CS}_{lmlm} \, cos \, m\lambda \, sin \, m\lambda \right)$$
$$+ V^2_{lm} \left( \Gamma^{CC}_{lmlm} \, sin^2 \, m\lambda + \Gamma^{SS}_{lmlm} \, cos^2 \, m\lambda - 2\Gamma^{CS}_{lmlm} \, cos \, m\lambda \, sin \, m\lambda \right)$$

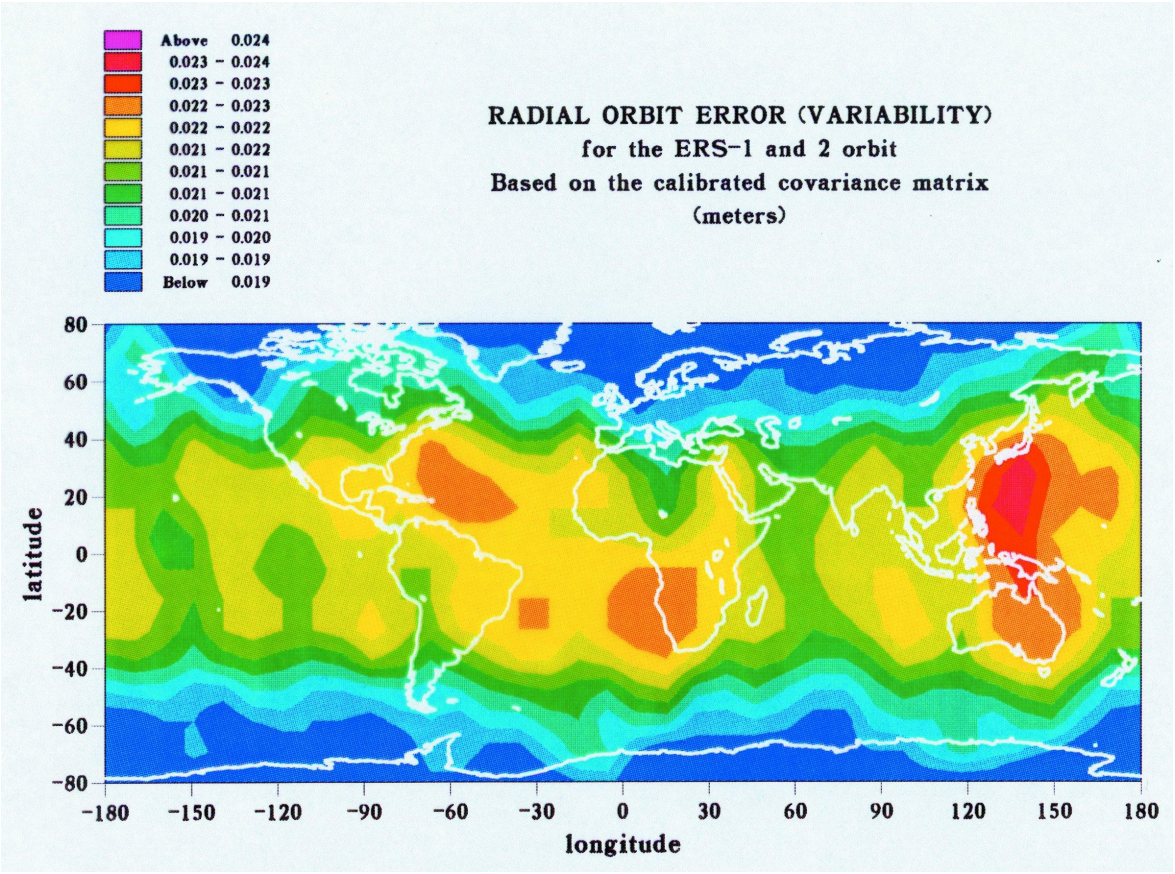
La sommation à tous les degrés et ordres se fait, comme précédemment, sur les indices *l*, *m*, *j=(l-k)/2* , *k=l-2p*, pour la partie moyenne :

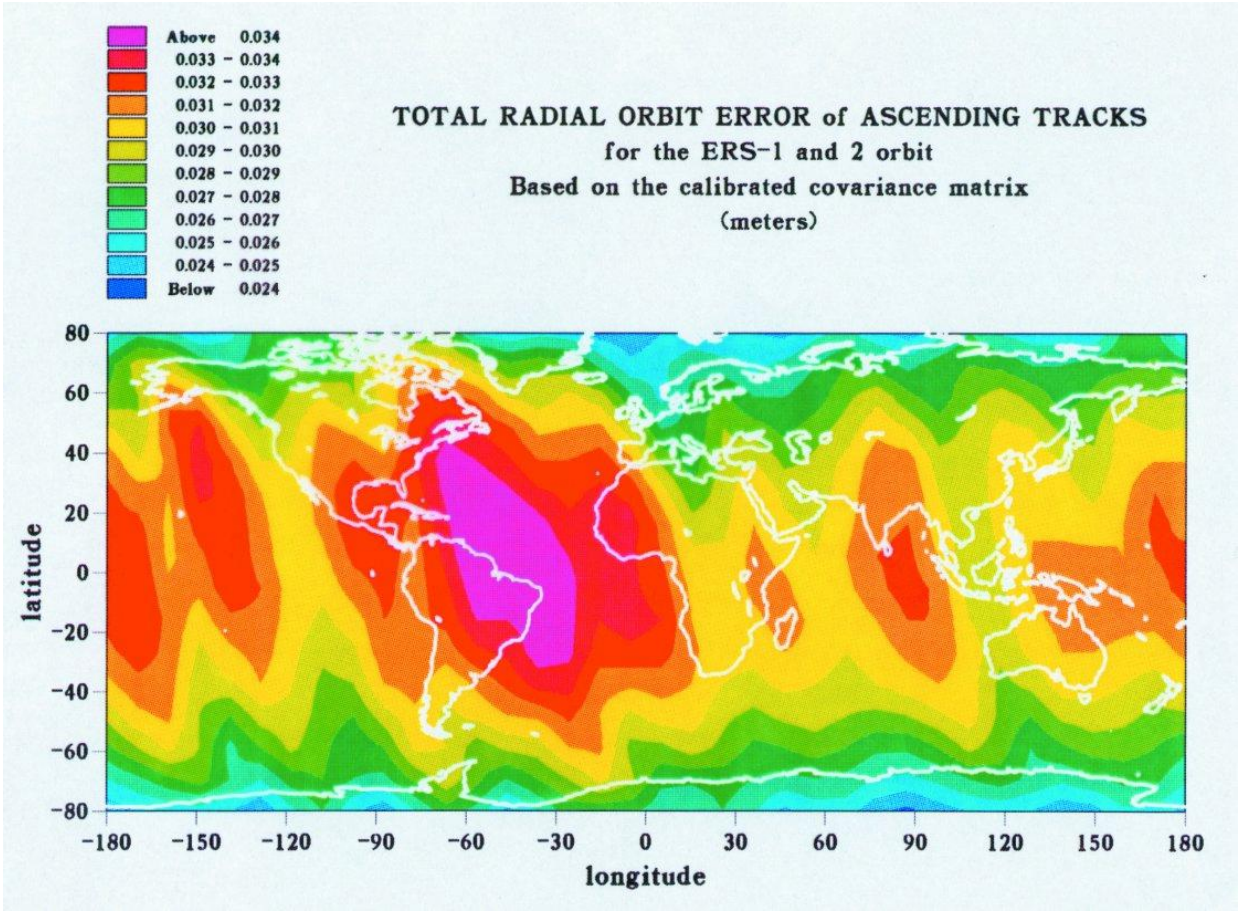
$$\sigma^2(\delta r_M) = \sum_{l=2}^{L}\sum_{j=2}^{L}\sum_{m=0}^{l}\sum_{k=0}^{l} M_{lm}M_{jk}\begin{bmatrix} \Gamma^{CC}_{lmlm}\cos m\lambda\cos k\lambda \\ +\Gamma^{SS}_{lmlm}\sin m\lambda\sin k\lambda \\ +2\Gamma^{CS}_{lmlm}\cos m\lambda\sin k\lambda \end{bmatrix}$$

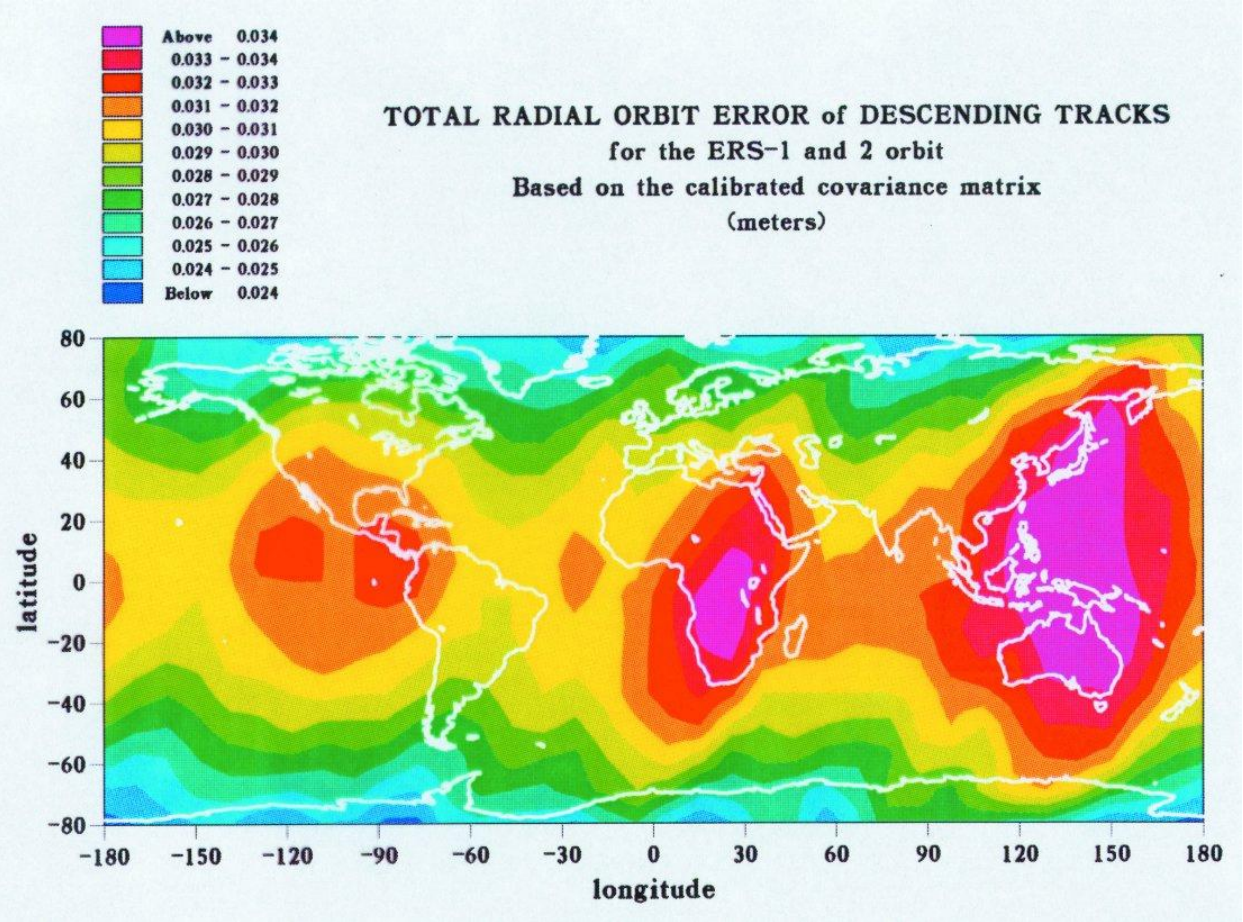
et pour la partie variable :

$$\sigma^2(\delta r_V) = \sum_{l=2}^{L}\sum_{j=2}^{L}\sum_{m=0}^{l}\sum_{k=0}^{l} V_{lm}V_{jk}\begin{bmatrix} \Gamma^{CC}_{lmlm}\sin m\lambda\sin k\lambda \\ +\Gamma^{SS}_{lmlm}\cos m\lambda\cos k\lambda \\ -2\Gamma^{CS}_{lmlm}\sin m\lambda\cos k\lambda \end{bmatrix}$$


Above 0.024
0.023 - 0.024
0.023 - 0.023
0.022 - 0.023
0.022 - 0.022
0.021 - 0.022
0.021 - 0.021
0.021 - 0.021
0.020 - 0.021
0.019 - 0.020
0.019 - 0.019
Below 0.019
RADIAL ORBIT ERROR (MEAN PART)
for the ERS-1 and 2 orbit
Based on the calibrated covariance matrix
(meters)
latitude
longitude
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-180 -150 -120 -90 -60 -30 0 30 60 90 120 150 180


Above 0.024
0.023 - 0.024
0.023 - 0.023
0.022 - 0.023
0.022 - 0.022
0.021 - 0.022
0.021 - 0.021
0.021 - 0.021
0.020 - 0.021
0.019 - 0.020
0.019 - 0.019
Below 0.019
RADIAL ORBIT ERROR (VARIABILITY)
for the ERS-1 and 2 orbit
Based on the calibrated covariance matrix
(meters)
latitude
longitude
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-180 -150 -120 -90 -60 -30 0 30 60 90 120 150 180


Above 0.034
0.033 - 0.034
0.032 - 0.033
0.031 - 0.032
0.030 - 0.031
0.029 - 0.030
0.028 - 0.029
0.027 - 0.028
0.026 - 0.027
0.025 - 0.026
0.024 - 0.025
Below 0.024
TOTAL RADIAL ORBIT ERROR of ASCENDING TRACKS
for the ERS-1 and 2 orbit
Based on the calibrated covariance matrix
(meters)
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
latitude
-180 -150 -120 -90 -60 -30 0 30 60 90 120 150 180
longitude


Above 0.034
0.033 - 0.034
0.032 - 0.033
0.031 - 0.032
0.030 - 0.031
0.029 - 0.030
0.028 - 0.029
0.027 - 0.028
0.026 - 0.027
0.025 - 0.026
0.024 - 0.025
Below 0.024
TOTAL RADIAL ORBIT ERROR of DESCENDING TRACKS
for the ERS-1 and 2 orbit
Based on the calibrated covariance matrix
(meters)
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
latitude
-180 -150 -120 -90 -60 -30 0 30 60 90 120 150 180
longitude

# Développement de Kaula

*application au potentiel luni-solaire*

**L'expression du potentiel luni-solaire au point (r, φ, λ+θ) dans le repère instantané peut s'écrire sous la forme classique du potentiel de volume :**

$$U = \frac{Gm_\Theta}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_\Theta}\right)^{l+1}\sum_{m=0}^{l}\left(A_{lm}\cos m(\lambda+\theta)+B_{lm}\sin m(\lambda+\theta)\right)P_{lm}(\sin\varphi)$$

**dont les coefficients $A_{lm}$ et $B_{lm}$ dépendent des éléments orbitaux du corps (lune ou soleil):**

$$\begin{cases} A_{lm} = (2-\delta_{0m})\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_{lm}(\sin\varphi_\Theta)\cos m\lambda_\Theta \\ B_{lm} = (2-\delta_{0m})\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_{lm}(\sin\varphi_\Theta)\sin m\lambda_\Theta \end{cases}$$

**Appliquant la transformation de Kaula à la fois au potentiel luni-solaire et aux coefficients $A_{lm}$ et $B_{lm}$ :**

$$A_{lm} = (2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\sum_{p'=o}^{l}\sum_{q'=-\infty}^{+\infty}F_{lmp'}(i_\Theta)G_{lp'q'}(e_\Theta)\begin{pmatrix}\cos\psi^\Theta_{lmp'q'} & l-m\ pair\\ \sin\psi^\Theta_{lmp'q'} & l-m\ impair\end{pmatrix}$$

$$B_{lm} = (2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\sum_{p'=o}^{l}\sum_{q'=-\infty}^{+\infty}F_{lmp'}(i_\Theta)G_{lp'q'}(e_\Theta)\begin{pmatrix}\sin\psi^\Theta_{lmp'q'} & l-m\ pair\\ -\cos\psi^\Theta_{lmp'q'} & l-m\ impair\end{pmatrix}$$

**avec :** $\psi^\Theta_{lmpq} = (l-2p')\omega_\Theta + (l-2p'+q')M_\Theta + m\Omega_\Theta$

**il vient :**

$$U = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=o}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{p'=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{q'=-\infty}^{+\infty}U_{lmpp'qq'}$$

$$U_{lmpqp'q'} = \frac{Gm_\Theta}{a}\left(\frac{a}{a_\Theta}\right)^{l+1}(2-\delta_{0m})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}F_{lmp}(i)\ F_{lmp'}(i_\Theta)\ G_{lpq}(e)\ G_{lp'q'}(e_\Theta)$$
$$\cos\left[(l-2p)\omega+(l-2p+q)M-(l-2p')\omega_\Theta-(l-2p'+q')M_\Theta+m(\Omega-\Omega_\Theta)\right]$$

# Développement de Kaula

## *application aux marées océaniques*

**Expression du potentiel de simple couche au point (r, φ, λ+θ) dans le repère instantané :**

$$U = 4\pi G R \rho_w \sum_n \sum_{l=2}^{L} \frac{1+k_l'}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^{l} \xi_{n,lm}$$

avec : $\xi_{n,lm} = \sum_{+}^{-} \left( C_{n,lm}^{\pm} \cos(\sigma_n \pm m(\lambda+\theta)) + S_{n,lm}^{\pm} \sin(\sigma_n \pm m(\lambda+\theta)) \right) P_{lm}(\sin\varphi)$

$$= \sum_{+}^{-} R_e \left[ \left( C_{n,lm}^{\pm} \mp i S_{n,lm}^{\pm} \right) e^{\pm i\sigma_n} e^{m(\lambda+\theta)} \right] P_{lm}(\sin\varphi)$$

**Transformation de coordonnées de Kaula :**

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1} P_{lm}(\sin\varphi) e^{im(\lambda+\theta)} e^{\pm i\sigma_n} = \sum_{p=o}^{l} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) \left[ \begin{pmatrix} \cos\psi_{n,mpq}^{\pm} \\ \sin\psi_{n,lmpq}^{\pm} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin\psi_{n,lmpq}^{\pm} \\ -\cos\psi_{n,lmpq}^{\pm} \end{pmatrix} \right] \quad \begin{matrix} l-m \text{ pair} \\ l-m \text{ impair} \end{matrix}$$

avec : $\psi_{n,lmpq}^{\pm} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\theta) \pm \sigma_n = \psi_{lmpq} \pm \sigma_n$

$$U = \sum_n \sum_{l=2}^{L} \sum_{m=0}^{l} \sum_{+}^{-} \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} U_{n,lmpq}$$

$$U_{n,lmpq} = 4\pi G R \rho_w \frac{1+k_l'}{2l+1} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} F_{lmp}(i) G_{lpq}(e) S_{n,lmpq}^{\pm}(\omega,\Omega,M,\theta,\sigma_n)$$

avec : $S_{n,lmpq}^{\pm} = \begin{pmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{pmatrix} \cos\psi_{n,lmpq}^{\pm} + \begin{pmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{pmatrix} \sin\psi_{n,lmpq}^{\pm} \quad \begin{matrix} l-m \text{ pair} \\ l-m \text{ impair} \end{matrix}$

**numéro de Doodson :**

$n_1\ n_2\ n_2\ .\ n_4\ n_5\ n_6$ (ex., *M2 = 255.555*)

**argument de Doodson :**

$$\sigma_n = n_1\,\tau + (n_2 - 5)\,s + (n_3 - 5)\,h + (n_4 - 5)\,p + (n_5 - 5)\,N' + (n_6 - 5)\,p_s$$

soit en utilisant $\tau = \theta + \pi - s$ :

$$\sigma_n = n_1\,(\theta + \pi) + (n_2 - n_1 - 5)\,s + (n_3 - 5)\,h + (n_4 - 5)\,p + (n_5 - 5)\,N' + (n_6 - 5)\,p_s$$

**fréquence de marée:**

$$\dot{\sigma}_n = n_1\dot{\theta} + (n_2 - n_1 - 5)\,\dot{s} + (n_3 - 5)\,\dot{h} + (n_4 - 5)\,\dot{p} + (n_5 - 5)\,\dot{N}' + (n_6 - 5)\,\dot{p}_s$$

$$= n_1\dot{\theta} + \dot{\sigma}'_n$$

**fréquence orbitale:**

$$\dot{\psi}^{\pm}_{n,lmpq} = \dot{\psi}_{lmpq} \pm \dot{\sigma}_n$$

$$= (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m\dot{\Omega} - (m \mp n_1)\dot{\theta} \pm \dot{\sigma}'_n$$

**périodes : longue révolution longue diurne longue**

**observations :**

pour $\boldsymbol{m = n_1}$ et $\boldsymbol{l-2p+q = 0}$ : présence de longues périodes pour les ondes progrades seulement : $\boldsymbol{n_1}\left(\dot{\Omega} - \dot{s}\right)$ + … et de périodes sub-diurnes pour les ondes rétrogrades : $\boldsymbol{n_1}\left(\dot{\Omega} - 2\dot{\theta}\right)$ + …

pour $\boldsymbol{m \neq n_1}$ et $\boldsymbol{l-2p+q = 0}$ : présence de périodes sub-diurnes : $(\boldsymbol{m \pm n_1})\,\dot{\theta}$ + …

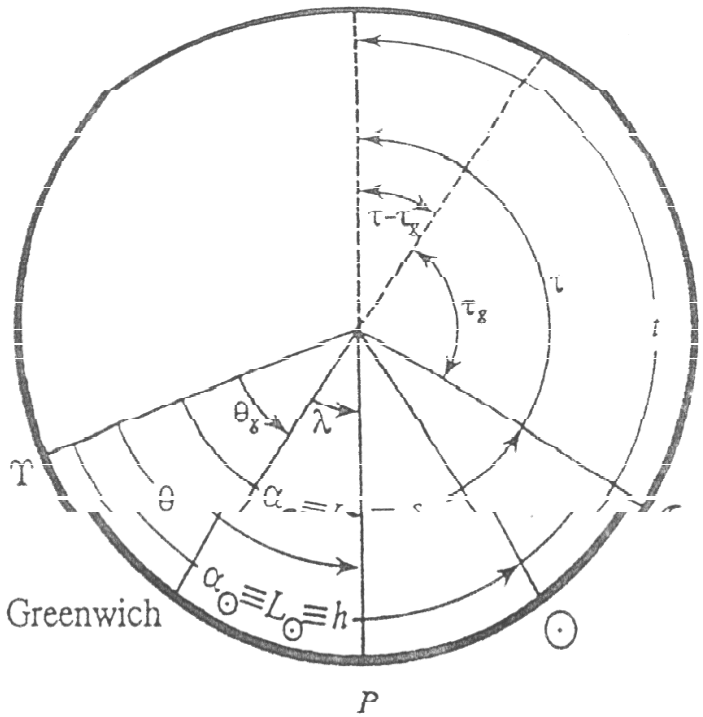
pour $\boldsymbol{l-2p+q \neq 0}$ : présence de courtes périodes : $(\boldsymbol{l-2p+q})\,\dot{M}$ + … et de résonances si : $(\boldsymbol{l-2p+q})\,\dot{M} \approx (\boldsymbol{m \mp n_1})\,\dot{\theta}$ , c'est à dire pour : $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{l-2p+q})\,\dfrac{\dot{M}}{\dot{\theta}} \pm \boldsymbol{n_1}$

# Angles fondamentaux de Doodson

| angle | **fréquence** (°/h) | **période** (j/an) | |
|---|---|---|---|
| θ | 15.0410686 | 0.9972696 j | jour sidéral |
| **t** | 15. | 1. j | jour solaire moyen |
| **Arguments de Doodson** | | | |
| **τ** | 14.4920521 | 1.035050 j | jour lunaire moyen |
| **s** | 0.5490165 | 27.321582 j | mois tropique moyen |
| **h** | 0.0410686 | 365.242199 j | année tropique moyenne |
| **p** | 0.0046418 | 8.847309 ans | rév. du périgée lunaire moyen |
| **N′** | 0.0022064 | 18.612904 ans | rév. du nœud lunaire moyen |
| **$p_s$** | 0.0000020 | 20940.2766 ans | révolution du périhélie |

## Relation entre les temps solaire et lunaire moyens :

$$s + \tau = h + t = \theta + \pi$$



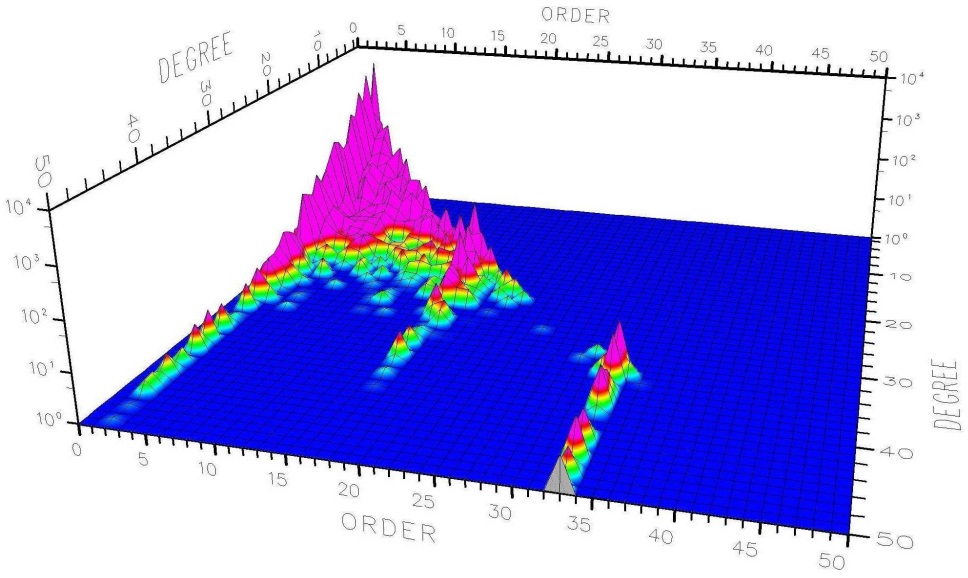
# MAREES OCEANIQUES

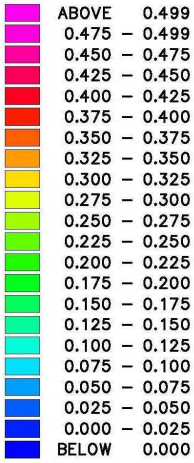
| A4 Onde | F9.3 DOODSON | F10.4 /J | F10.3 OCEAN JOUR | F6.1 H0(CM) | 9x L | M | F10.3 ERS-1 JOUR | 3F10.2 P 0 S I T I 0 N RAD | TANG | 3F10.4 (CM) NORM | V I T E S S E RAD | TANG | (MM/S) NORM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oml | 55.565 | .0009 | 6798.384 | 2.8 | 2 | 0 | 6798.384 | 5.7 | 11521.69 | 1277.85 | .0595 | .0595 | .0001 |
| Sa | 56.554 | .0172 | 365.260 | -.5 | 2 | 0 | 365.260 | .6 | 1345.67 | 149.25 | .0069 | .0069 | .0003 |
| | | | | | 3 | 0 | 182.074 | 114.0 | 228.12 | .20 | 1.1895 | 1.1895 | .0000 |
| Ssa | 57.555 | .0344 | 182.621 | -3.1 | 2 | 0 | 182.621 | .2 | 408.76 | 45.33 | .0021 | .0021 | .0002 |
| | | | | | 3 | 0 | 363.079 | 23.3 | 46.72 | .04 | .2436 | .2436 | .0000 |
| Sta | 58.554 | .0516 | 121.749 | -.2 | 2 | 0 | 121.749 | .0 | 10.82 | 1.20 | .0001 | .0001 | .0000 |
| Msm | 63.655 | .1975 | 31.812 | -.7 | | | | | | | | | |
| | 65.445 | .2271 | 27.667 | .2 | | | | | | | | | |
| Mm | 65.455 | .2280 | 27.554 | -3.5 | 2 | 0 | 27.555 | .0 | 32.27 | 3.58 | .0002 | .0002 | .0001 |
| | | | | | 3 | 0 | 35.636 | 4.1 | 8.35 | .01 | .0435 | .0435 | .0000 |
| | 65.465 | .2290 | 27.443 | .2 | | | | | | | | | |
| | 65.555 | .2300 | 27.321 | -.4 | | | | | | | | | |
| | 65.655 | .2319 | 27 092 | .2 | | | | | | | | | |
| Msf | 73.555 | .4255 | 14.765 | -.6 | | | | | | | | | |
| | 75.355 | .4561 | 13.777 | -.3 | | | | | | | | | |
| Mf | 75.555 | .4599 | 13.661 | -6.7 | 2 | 0 | 13.661 | .0 | 38.95 | 4.32 | .0002 | .0002 | .0002 |
| | | | | | 3 | 0 | 15.391 | .8 | 1.66 | .00 | .0086 | .0086 | .0000 |
| | 75.565 | .4609 | 13.633 | -2.8 | | | | | | | | | |
| | 75.575 | .4618 | 13.606 | -.3 | | | | | | | | | |
| Mstm | 83.655 | .6575 | 9.557 | -.2 | | | | | | | | | |
| | 83.665 | .6584 | 9 543 | -.1 | | | | | | | | | |
| Mtm | 85.455 | .6880 | 9.133 | -1.3 | 2 | 0 | 9.133 | .0 | 4.02 | .45 | .0000 | .0000 | .0000 |
| | 85.465 | .6889 | 9.121 | -.5 | | | | | | | | | |
| Msqm | 93.555 | .8855 | 7.096 | -.2 | | | | | | | | | |
| | 95.355 | .9160 | 6.859 | -.2 | | | | | | | | | |
| | 117.655 | 5.1869 | 1.211 | -.2 | | | | | | | | | |
| 2Q1 | 125.755 | 5.3844 | 1.167 | -.7 | 2 | 1 | 6.991 | .0 | .71 | .55 | .0000 | .0000 | .0001 |
| Sig1 | 127.555 | 5.4149 | 1.160 | -.8 | 2 | 1 | 7.236 | .0 | .88 | .69 | .0000 | .0000 | .0001 |
| | | | | | 3 | 1 | 7.695 | .1 | .35 | .00 | .0018 | .0018 | .0000 |
| | 135.645 | 5.6115 | 1.120 | -.9 | | | | | | | | | |
| Ql | 135.655 | 5.6124 | 1.120 | -5.0 | 2 | 1 | 9.367 | .0 | 6.69 | 5.21 | .0000 | .0000 | .0004 |
| | | | | | 3 | 1 | 10.150 | 1.1 | 2.36 | .00 | .0123 | .0123 | .0000 |
| Ro1 | 137.445 | 5.6420 | 1.114 | -.2 | 2 | 1 | 9.814 | .0 | 1.31 | 1.02 | .0000 | .0000 | .0001 |
| | | | | | 3 | 1 | 10.676 | .2 | .45 | .00 | .0024 | .0024 | .0000 |
| | 137.455 | 5.6429 | 1.114 | -1.0 | | | | | | | | | |
| | 145.545 | 5.8395 | 1.076 | -4.9 | | | | | | | | | |
| 01 | 145.555 | 5.8404 | 1.076 | -26.2 | 2 | 1 | 14.191 | .0 | 48.47 | 37.72 | .0003 | .0003 | .0019 |
| | | | | | 3 | 1 | 16.068 | 7.8 | 15.66 | .03 | .0817 | .0817 | .0000 |
| | 145.755 | 5.8441 | 1.075 | .2 | | | | | | | | | |
| Tau1 | 147.555 | 5.8749 | 1.070 | .3 | | | | | | | | | |
| | 153.655 | 6.0380 | 1.041 | .2 | | | | | | | | | |
| | 155.455 | 6.0685 | 1.035 | .7 | | | | | | | | | |
| | 155.555 | 6.0704 | 1.035 | -.4 | | | | | | | | | |
| M1 | 155.655 | 6.0724 | 1.035 | 2.1 | 2 | 1 | 29.802 | .0 | 7.25 | 5.64 | .0000 | .0000 | .0001 |
| | | | | | 3 | 1 | 39.488 | 1.0 | 2.12 | .00 | .0110 | .0110 | .0000 |
| | 155.665 | 6.0733 | 1.035 | .4 | | | | | | | | | |

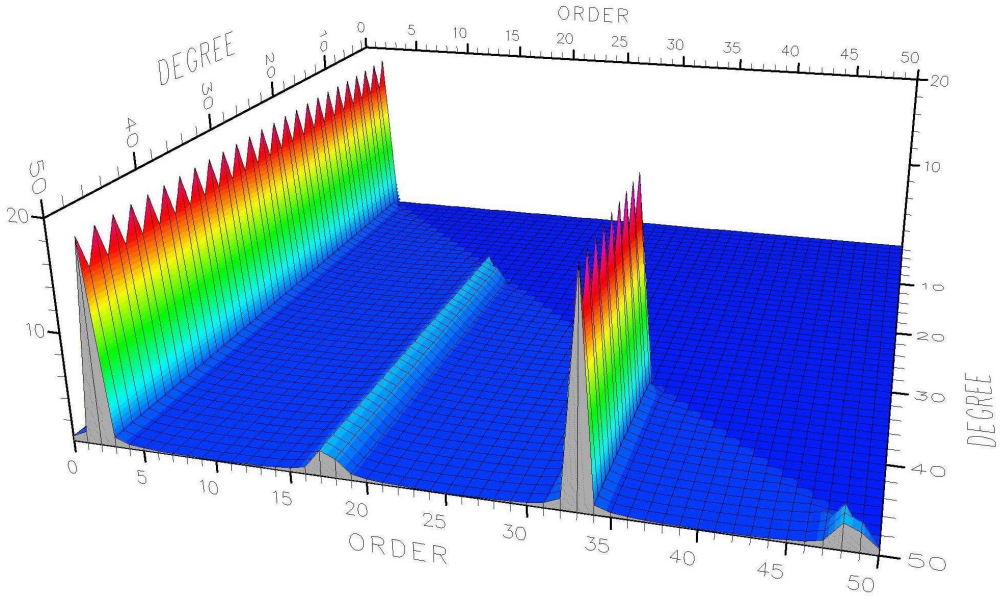
| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Xi1 | 157.455 | 6.1029 | 1.030 | .4 | 2 | 1 | 34.846 | .0 | 1.58 | 1.23 | .0000 | .0000 | .0000 |
| | | | | | 3 | 1 | 48.858 | .2 | .47 | .00 | .0025 | .0025 | .0000 |
| Pi1 | 162.55e | 6.2488 | 1.006 | -.7 | 2 | 1 | 182.599 | .0 | 14.11 | 10.98 | .0001 | .0001 | .0000 |
| | | | | | 3 | 1 | 363.167 | 2.6 | 5.23 | .01 | .0273 | .0273 | .0000 |
| Pl | 163.355 | 6.2660 | 1.003 | -12.2 | 2 | 1 | 365.153 | .2 | 477.28 | 371.42 | .0025 | .0025 | .0007 |
| | | | | | 3 | 1 | 182.101 | 23.1 | 46.37 | .08 | .2418 | .2418 | .0000 |
| S1 | 164.556 | 6.2832 | 1.000 | .3 | | | | | | | | | |
| Kl- | 165.545 | 6.2995 | .997 | -.7 | | | | | | | | | |
| KI | 165.555 | 6.3004 | .997 | 36.9 | 2 | 1 | 365.331 | .7 | 1432.93 | 1115.12 | .0074 | .0074 | .0022 |
| | | | | | 3 | 1 | 182.056 | 77.1 | 154.28 | .59 | .8045 | .8045 | .0000 |
| KI+ | 165.565 | 6.3013 | .997 | 5.0 | | | | | | | | | |
| Psil | 166.554 | 6.3176 | .995 | .3 | | | | | | | | | |
| Phil | 167.555 | 6.3348 | .992 | .5 | 2 | 1 | 121.757 | .0 | 6.64 | 5.16 | .0000 | .0000 | .0000 |
| Ttal | 173.655 | 6.4979 | .967 | .4 | 2 | 1 | 29.264 | .0 | 1.13 | .88 | .0000 | .0000 | .0000 |
| J1 | 175.455 | 6.5284 | .962 | 2.1 | 2 | 1 | 25.622 | .0 | 5.00 | 3.89 | .0000 | .0000 | .0001 |
| | 175.465 | 6.5293 | .962 | .4 | | | | | | | | | |
| | 183.555 | 6.7259 | .934 | .3 | | | | | | | | | |
| | 185.355 | 6.7564 | .930 | .2 | | | | | | | | | |
| Ool | 185.555 | 6.7603 | .929 | 1.1 | 2 | 1 | 13.168 | .0 | 1.23 | .96 | .0000 | .0000 | .0001 |
| | 185.565 | 6.7613 | .929 | .7 | | | | | | | | | |
| Nul | 195.455 | 6.9884 | .899 | .2 | | | | | | | | | |
| 3N2 | 225.855 | 11.4568 | .548 | .2 | | | | | | | | | |
| Eps2 | 227.655 | 11.4873 | .547 | .5 | 2 | 2 | 5.823 | .0 | 1.27 | .31 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2N2 | 235.755 | 11.6848 | .538 | 1.6 | 2 | 2 | 7.127 | .0 | 5.53 | 1.33 | .0000 | .0000 | .0001 |
| Mu2 | 237.555 | 11.7153 | .536 | 1.9 | 2 | 2 | 7.383 | .0 | 7.55 | 1.82 | .0000 | .0000 | .0002 |
| | 245.555 | 11.9109 | .527 | -.4 | | | | | | | | | |
| | 245.645 | 11.9119 | .527 | -.5 | | | | | | | | | |
| N2 | 245.655 | 11.9128 | .527 | 12.1 | 2 | 2 | 9.614 | .0 | 57.53 | 13.86 | .0003 | .0003 | .0010 |
| | | | | | 3 | 2 | 8.909 | 1.3 | 2.67 | .00 | .0139 | .0139 | .0000 |
| Nu2 | 247.455 | 11.9433 | .526 | 2.3 | 2 | 2 | 10.084 | .0 | 11.19 | 2.70 | .0001 | .0001 | .0002 |
| Gam2 | 253.755 | 12.1103 | .519 | -.2 | | | | | | | | | |
| Alf2 | 254.556 | 12.1236 | .518 | -.2 | | | | | | | | | |
| | 255.545 | 12.1399 | .518 | -2.4 | | | | | | | | | |
| M2 | 255.555 | 12.1408 | .518 | 63.2 | 2 | 2 | 14.765 | .2 | 413.64 | 99.66 | .0021 | .0021 | .0049 |
| | | | | | 3 | 2 | 13.165 | 10.5 | 21.08 | .03 | .1099 | .1099 | .0000 |
| Bet2 | 256.554 | 12.1580 | .517 | .2 | | | | | | | | | |
| Lam2 | 263.655 | 12.3383 | .509 | -.5 | 2 | 2 | 27.554 | .0 | 4.98 | 1.20 | .0000 | .0000 | .0000 |
| L2 | 265.455 | 12.3689 | .508 | -1.8 | 2 | 2 | 31.811 | .0 | 21.56 | 5.19 | .0001 | .0001 | .0001 |
| | | | | | 3 | 2 | 25.210 | .4 | .81 | .00 | .0042 | .0042 | .0000 |
| | 265.555 | 12.3708 | .508 | .4 | | | | | | | | | |
| | 265.655 | 12.3727 | .508 | .4 | | | | | | | | | |
| | 265.665 | 12.3737 | .508 | .2 | | | | | | | | | |
| T2 | 272.556 | 12.5492 | .501 | 1.7 | 2 | 2 | 365.081 | .1 | 211.87 | 51.05 | .0011 | .0011 | .0001 |
| | | | | | 3 | 2 | 91.165 | 2.4 | 4.87 | .01 | .0254 | .0254 | .0000 |
| S2 | 273.555 | 12.5664 | .500 | 29.4 | 3 | 2 | 121.486 | 63.2 | 126.45 | .14 | .6594 | .6594 | .0000 |
| R2 | 274.554 | 12.5836 | .499 | -.2 | | | | | | | | | |
| K2 | 275.555 | 12.6008 | .499 | 8.0 | 2 | 2 | 182.666 | .2 | 454.12 | 109.41 | .0023 | .0023 | .0004 |
| | | | | | 3 | 2 | 362.903 | 46.5 | 93.03 | .11 | .4851 | .4851 | .0000 |
| K2- | 275.565 | 12.6017 | .499 | 2.4 | | | | | | | | | |
| K2+ | 275.575 | 12.6026 | .499 | .3 | | | | | | | | | |
| Eta2 | 285.455 | 12.8288 | .490 | .4 | 2 | 2 | 23.943 | .0 | 2.61 | .63 | .0000 | .0000 | .0000 |
| | 285.465 | 12.8297 | .490 | .2 | | | | | | | | | |

Satellite CHAMP (400 km)

Amplitudes des perturbations orbitales de la marée océanique M2+ par degré et ordre des fonctions harmoniques sphériques (en mm)




Périodes maximales des perturbations orbitales (en jour)