

# **Analyses de covariances des nouvelles missions dédiées au géopotential**

Felix Perosanz, CNES-GRGS

## Différentes approches

<i>Methode d'evaluation</i>	<i>Exemple de logiciel</i>
Analyse des perturbation	SELECT PERGAME
Analyse de covariance a priori	MANEGE (e=0)
Analyse de covariance a posteriori (mesures simulees)	SLIMFAST (e=0) PANURGE (e quelconque)

## Le cas MANEGE

- Analyse de covariance a priori
  - pas de mesures... ni de second membre à calculer
- $e=0$
- La matrice normale N est formée analytiquement
- Possibilité de simuler tous les types d'observables
- Avec certaines hypothèses, N est block diagonale (rapide à inverser)

# Formalisme : Rappels

- “time wise approach” dans le domaine fréquentiel
- Faible excentricité
- Pour un type d’observable q donne :

$$q_{obs} = \sum_m \sum_\ell \sum_k H_{\ell mk}^{(q)} \tau_{\ell mk}^{(q)}$$

$H_{\ell mk}^{(q)}$  est la fonction analytique associée à la quantité observée q,  
 $\tau_{\ell mk}^{(q)}$  est une fonction du temps et des coefficients  $\bar{C}_{\ell m}$  et  $\bar{S}_{\ell m}$ .

$$q_{obs} = \sum_m \sum_\ell \left[ \sum_k H_{\ell mk}^{(q)} \cos X_{km}^{(q)} \right] \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{\ell m} \\ \bar{S}_{\ell m} \end{array} \right\} \pm \left[ \sum_k H_{\ell mk}^{(q)} \sin X_{km}^{(q)} \right] \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{\ell m} \\ \bar{C}_{\ell m} \end{array} \right\}$$

$$A_{km}^{(q)} = \sum_\ell H_{\ell mk}^{(q)} \left\{ \bar{C}_{\ell m} \text{ or } \bar{S}_{\ell m} \right\}$$

$$B_{km}^{(q)} = \sum_\ell H_{\ell mk}^{(q)} \left\{ \bar{S}_{\ell m} \text{ or } \bar{C}_{\ell m} \right\}$$

$$\mathcal{N}_{\ell_1 \ell_2 o}^{cc(q)} = \frac{N_p}{2} \sum_{k=k_{\min}^{[2]}}^{k_{\max}} \left[ H_{\ell_1 ok}^{(q)} H_{\ell_2 ok}^{(q)} + (-1)^{\ell+J(q)} H_{\ell_1 o, -k} H_{\ell_2 o, -k} \right] / \omega_{ko}^2$$

$$\mathcal{N}_{\ell_1 \ell_2 m}^{cc(q)} = \mathcal{N}_{\ell_1 \ell_2 m}^{ss(q)} = \frac{N_p}{2} \sum_{k=k_{\min}^{[2]}}^{k_{\max}} H_{\ell_1 mk}^{(q)} H_{\ell_2 mk}^{(q)} / \omega_{km}^2 \quad (V-5)$$

- où:
- les exposants cc et ss indiquent s'il s'agit de termes d'un bloc de coefficients  $\bar{C}_{\ell m}$  ou  $\bar{S}_{\ell m}$
  - pour un bloc associé à un ordre m,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont les degrés du terme considéré.
  - $k_{\min}$  et  $k_{\max}$  sont déterminés en fonction des valeurs de  $\ell_1, \ell_2$  et  $\beta_{\min}, \beta_{\max}$
  - $J(q)$  est égal à 1 pour  $q = \Delta v, \Delta w, \delta \Delta v$  et à 0 pour les autres observables.

Ecole d'été de

Observable q	$H_{\ell mk}^{(q)}$	$\tau_{\ell mk}^{(q)}$
Position Radiale $\Delta u$	$a \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \frac{\beta_{km}(\ell+1) - 2k}{\beta_{km}(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{C}_{\ell m} \cos X_{km} + \bar{S}_{\ell m} \sin X_{km}$
Position Tangentielle $\Delta v$	$a \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \frac{2\beta_{km}(\ell+1) - k(\beta_{km}^2 + 3)}{\beta_{km}^2(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ impair	$\bar{S}_{\ell m} \cos X_{km} - \bar{C}_{\ell m} \sin X_{km}$
Position Normale $\Delta w$	$a \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \frac{\bar{D}_{\ell, m, k-1} - \bar{D}_{\ell, m, k+1} - \bar{E}_{\ell, m, k-1} - \bar{E}_{\ell, m, k+1}}{2(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ impair $\bar{D}_{\ell mk} = \frac{d}{dI} [\bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2}]$ et $\bar{E}_{\ell mk} = \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \frac{k \cos I - m}{\sin I}$	$\bar{S}_{\ell m} \cos X_{km} - \bar{C}_{\ell m} \sin X_{km}$
Vitesse Totale $\Delta V$	$na \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \frac{k(\beta_{km}^2 + 1) - \beta_{km}(\ell+1)}{\beta_{km}(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{C}_{\ell m} \cos X_{km} + \bar{S}_{\ell m} \sin X_{km}$
Distance Inter-Satellite $\delta \Delta v$	$2a \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \sin \frac{k\alpha}{2} \frac{k(\beta_{km}^2 + 3) - 2\beta_{km}(\ell+1)}{\beta_{km}^2(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ pair	$-\bar{C}_{\ell m} \cos X'_{km} - \bar{S}_{\ell m} \sin X'_{km}$ avec $X'_{km} = X_{km} + k\alpha/2$
Vitesse Inter-Satellite $\delta \Delta v$	$2na \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} \sin \frac{k\alpha}{2} \frac{k(\beta_{km}^2 + 1) - \beta_{km}(\ell+1)}{\beta_{km}(\beta_{km}^2 - 1)}$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{S}_{\ell m} \cos X'_{km} - \bar{C}_{\ell m} \sin X'_{km}$ avec $X'_{km} = X_{km} + k\alpha/2$
Gradient Gravité Radial $\Delta \Gamma_{uu}$	$n^2 \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} (\ell+1)(\ell+2)$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{C}_{\ell m} \cos X_{km} + \bar{S}_{\ell m} \sin X_{km}$
Gradient Gravité Tangentiel $\Delta \Gamma_{vv}$	$-n^2 \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} (\ell+1+k^2)$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{C}_{\ell m} \cos X_{km} + \bar{S}_{\ell m} \sin X_{km}$
Gradient Gravité Normal $\Delta \Gamma_{ww}$	$n^2 \left(\frac{R}{a}\right)^\ell \bar{F}_{\ell, m, (\ell-k)/2} [k^2 - (\ell+1)^2]$ avec: $\ell - k$ pair	$\bar{C}_{\ell m} \cos X_{km} + \bar{S}_{\ell m} \sin X_{km}$

avec:  $X_{km} = k(\omega + M) + m(\Omega - \theta)$  et  $\beta_{km} = \dot{X}_{km}/n$

$$\bar{C}_{\ell m} = \begin{cases} \bar{C}_{\ell m} & \text{si } \ell - m \text{ est pair} \\ -\bar{S}_{\ell m} & \text{si } \ell - m \text{ est impair} \end{cases} \quad \bar{S}_{\ell m} = \begin{cases} \bar{S}_{\ell m} & \text{si } \ell - m \text{ est pair} \\ \bar{C}_{\ell m} & \text{si } \ell - m \text{ est impair} \end{cases}$$

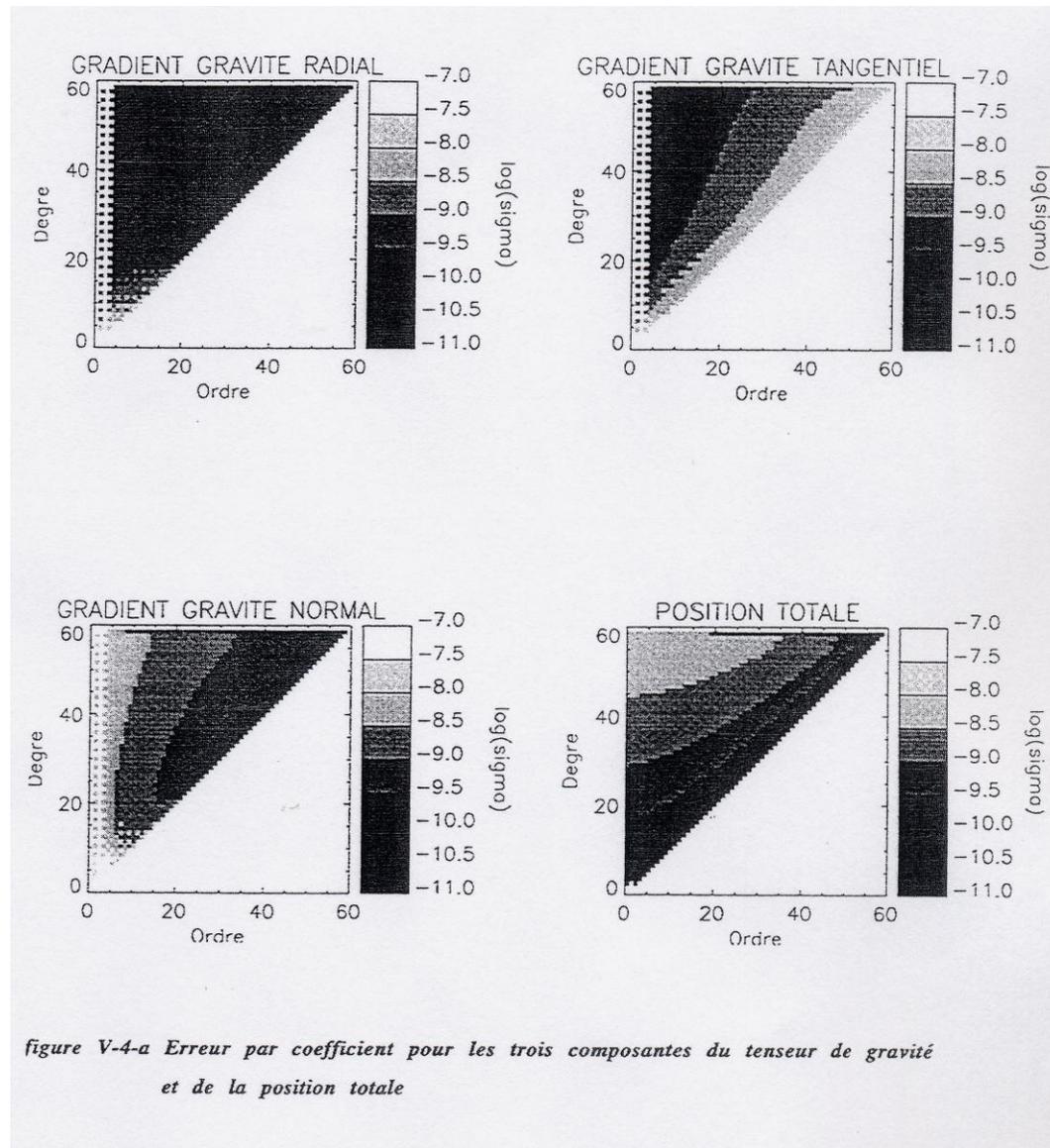
$\bar{F}_{\ell mp}$  fonctions de l'inclinaison I (Kaula, 1966)  
 $\theta$  temps sidéral  
 $\beta_{km}$  fréquence de la perturbation observée en cycle par révolution du satellite ( $\neq 1$ )  
 $\alpha$  distance angulaire inter-satellites ( $< 10^\circ$ )

## Remarques

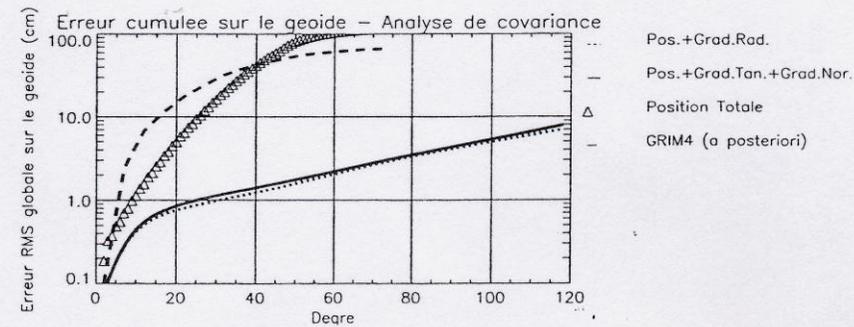
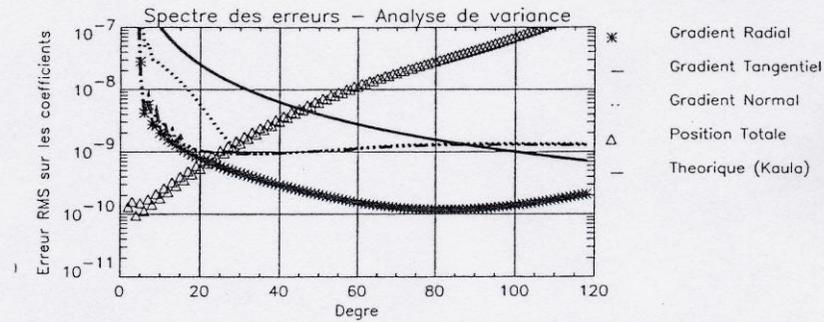
- Les équations normales sont calculées analytiquement par type d'observable, par cycle de répétitivité... puis sont cummulées si nécessaire.
- Chaque type d'observable est associé à une fonction  $H_{lmk}$
- En plus du bruit (blanc) associé à l'observable, possibilité d'introduire un bruit coloré en conservant la structure diagonale de la matrice.
- Paramètres :
  - orbitaux
  - type d'instrument (d'observable) et fréquence de mesure
  - durée de mission (multiple d'un cycle de répétitivité)

# Interprétation

- Après inversion de la matrice normale on tire de la diagonale :
  - les erreurs par coefficient
  - le spectre des erreurs
  - les erreurs sur le géoïde



Orbite	Observable	Sigma a priori	$\beta_{\min} / \beta_{\max}$ cycle/revo	$\Delta t$
317 km Héliosynchrone $T_{\text{rep}}=31$ jours	$\Delta u$	$\sigma_u = 3 \text{ cm}$	1/140	10 s
	$\Delta v$	$\sigma_v = 9 \text{ cm}$	1/140	10 s
	$\Delta w$	$\sigma_w = 6 \text{ cm}$	1/140	10 s
	$\Delta\Gamma_u$	$\sigma_{uu} = 10^{-2} E\ddot{o}t$	1/140	4 s
	$\Delta\Gamma_v$	$\sigma_{vv} = 10^{-2} E\ddot{o}t$	1/140	4 s
	$\Delta\Gamma_w$	$\sigma_{ww} = 10^{-2} E\ddot{o}t$	1/140	4 s



## Cas PANURGE

- Analyse de covariance a posteriori
  - mesures simulées avec une distribution quelconque (réaliste)
- Observation directe de la perturbation (pas d'intégration numérique couteuse)
- Excentricité quelconque
- Possibilité de projeter les observations dans une direction donnée (cas planétaire)
- Matrices normales (pleines !) générées par type d'observables et par période d'observation puis cumulées et inversées avec les outils classiques de DYNAMO

# Formalisme

Dans le cas general:

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \bar{c} \\ \Delta u \\ \Delta \dot{v} \\ \Delta \bar{c} \\ \Delta \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ \text{matrice} \\ \text{Jacobienne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ a \Delta e \\ a \Delta I \\ a \Delta \Omega \\ a \Delta w \\ a \Delta n \end{bmatrix}$$

que l'on peut écrire:  $J = [J_j^i]$  <sup>ligne</sup> <sub>colonne</sub>

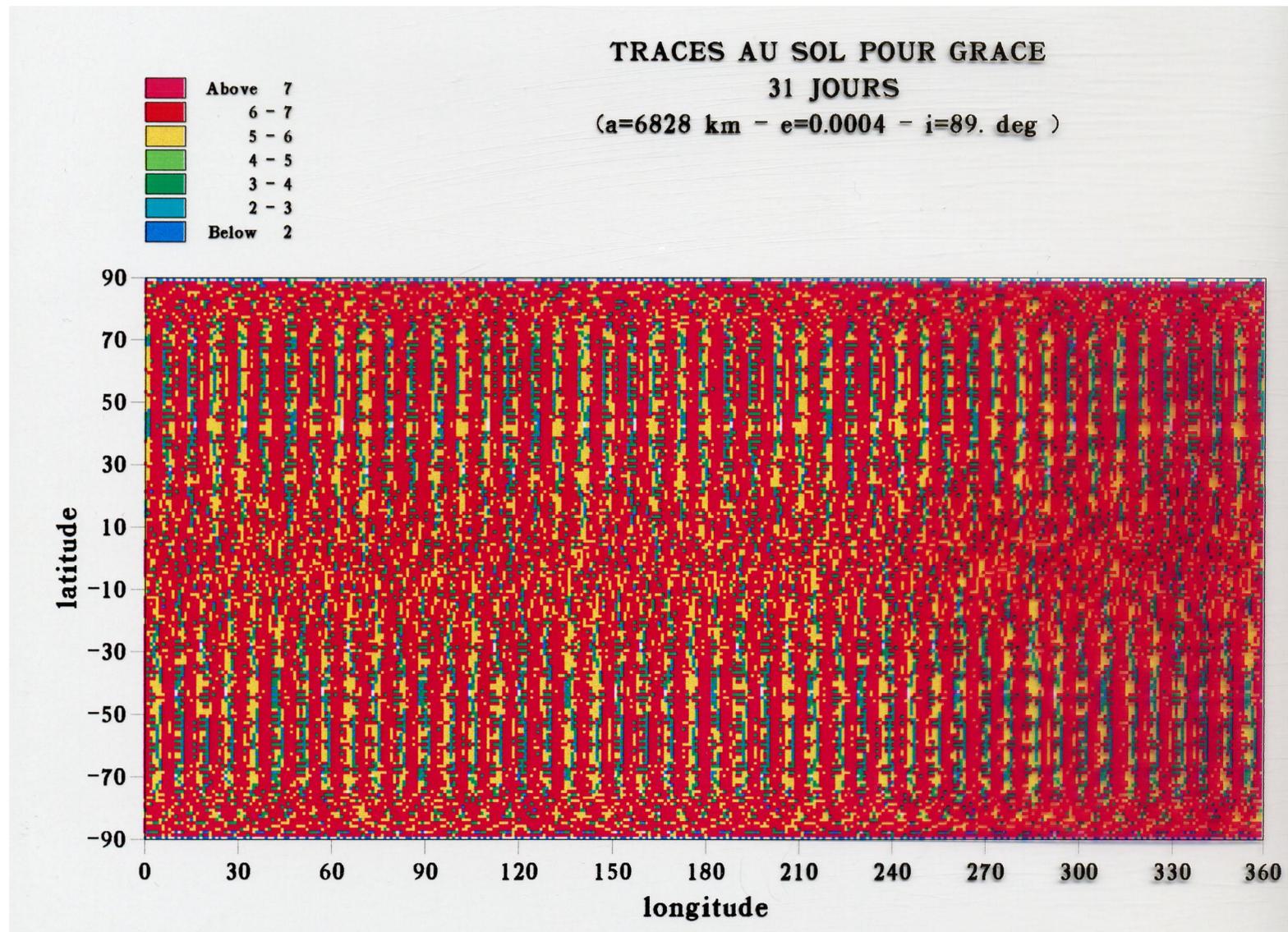
$$\Delta p^i = \sum_{j=1}^6 J_j^i \Delta \xi_j^d \quad (i=1, 6)$$

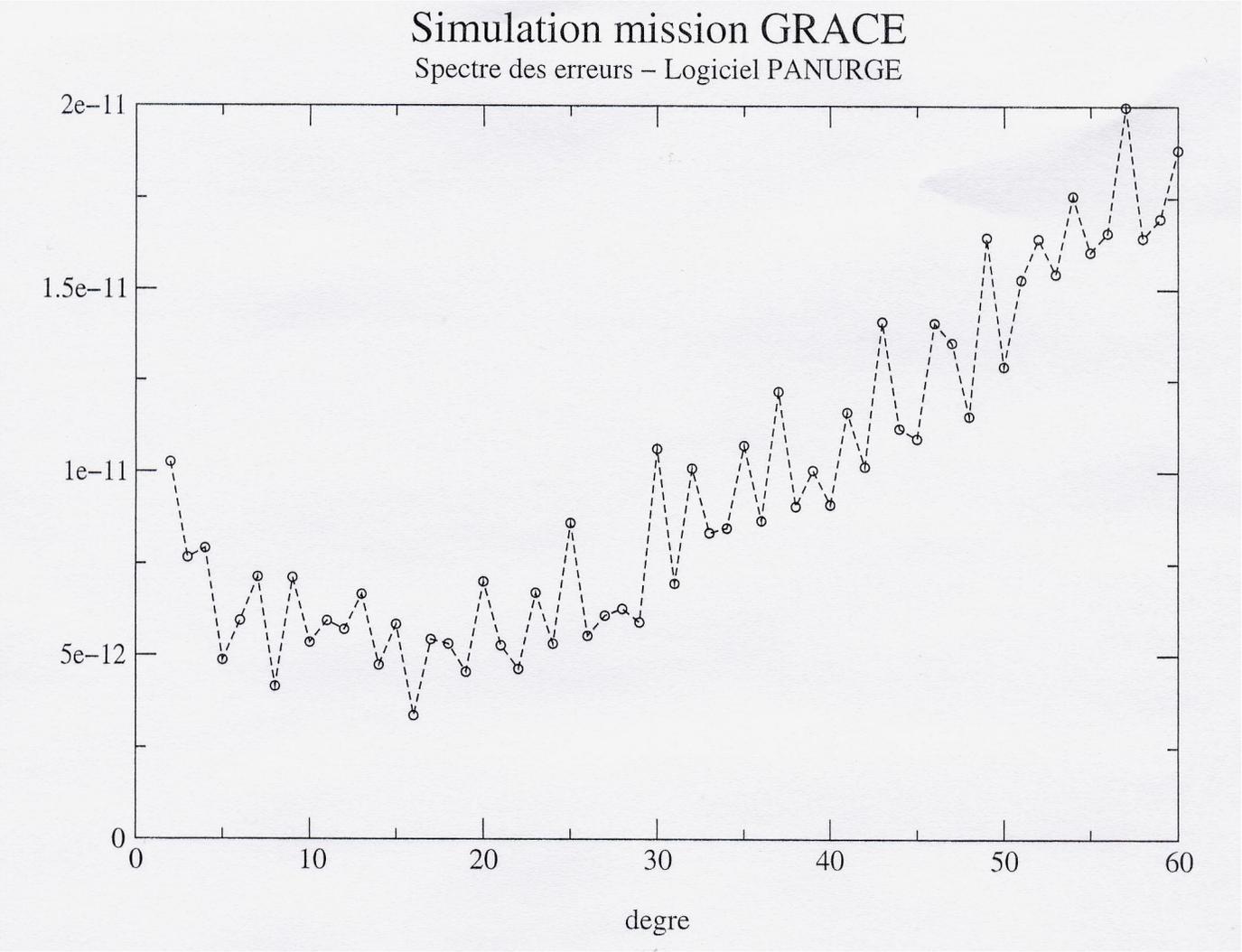
Formalisme de Kaula:

$$\Delta \xi_{lmpq}^d = C_{lmpq}^d \begin{cases} S_{lmpq} \\ S_{lmpq}^* \end{cases} \quad \text{pour } a, e, I$$

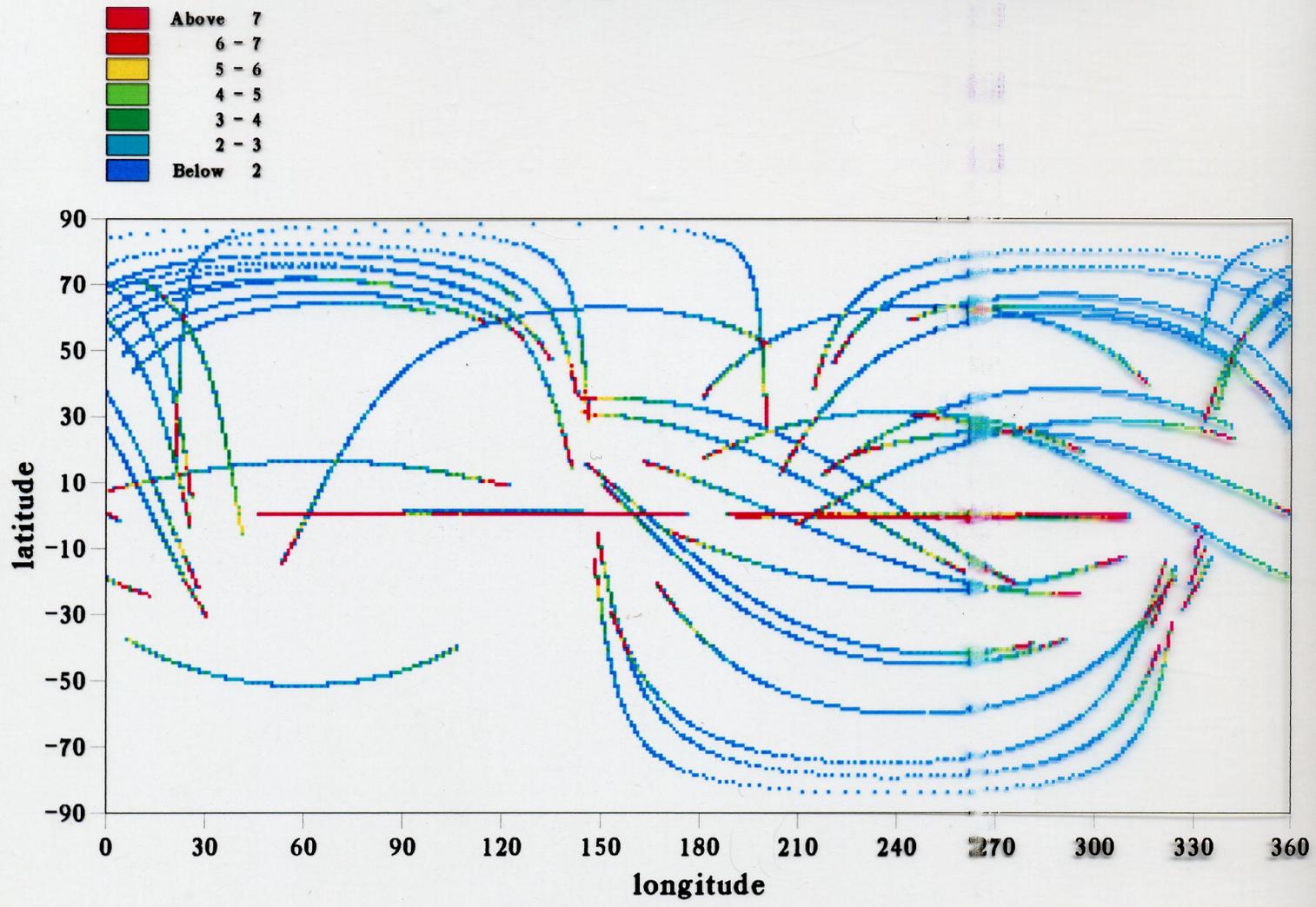
$$= C_{lmpq}^d \begin{cases} \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{bmatrix} \cos \psi_{lmpq} \\ \begin{bmatrix} -S_{lm} \\ -C_{lm} \end{bmatrix} \cos \psi_{lmpq} \end{cases} + \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix} \sin \psi_{lmpq} \quad \text{pour } \Omega, \omega, M$$

$\psi$   
F, F'  
G, G'





# TRACES AU SOL DES 44 FLY-BY DE TITAN



*Erreurs sur les anomalies de geoides de Titan (metres - deg n*

