

Les Equations du Mouvement Orbital Perturbé

Cours de l'Ecole GRGS 2002

Pierre EXERTIER, Florent DELEFLIE,

Observatoire de la Côte d'Azur (CERGA/URA6527), Av. N. Copernic, F-06130 Grasse

21 février 2003

Résumé

Les équations du mouvement orbital perturbé sont établies à partir de la formulation du problème des deux corps. Le problème est étudié sous l'angle de la cinématique, ce qui permet de définir les repères utiles, en particulier le repère orbital. Ceci permet également d'interpréter de manière géométrique la définition des "éléments keplériens", variables sans doute les plus classiques en Mécanique Céleste.

A l'aide des trois intégrales premières du mouvement, on établit les équations de Gauss. Ces équations relient les dérivées temporelles des paramètres du mouvement aux composantes de la force perturbative considérée. En pratique, elles permettent en fait, en géodésie spatiale, d'intégrer les effets dissipatifs comme le freinage agissant sur les satellites artificiels.

Ensuite, à partir de l'expression des crochets de Lagrange, on établit les équations de Lagrange. Si les forces perturbatrices dérivent d'un potentiel, ces équations relient les dérivées temporelles des paramètres du mouvement à cette seule grandeur scalaire. En pratique, elles permettent de prendre en compte les champs gravitationnels, à condition toutefois d'avoir les expressions de leurs dérivées partielles par rapport à ces paramètres.

Enfin, on formule les différents types d'équations selon des jeux de paramètres orbitaux qui permettent de décrire tous les types d'orbites : éléments non singuliers en excentricité pour les orbites quasi-circulaires, éléments non singuliers en inclinaison pour les orbites équatoriales.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Aspects cinématiques	4
2.1	Définition de coordonnées sphériques	5
2.2	Un repère orienté par la position radiale	5
2.3	Un repère orienté par la vitesse	6
3	Le problème des deux corps	7
3.1	Les éléments elliptiques	7
3.2	Intégration de l'équation du mouvement	8
3.2.1	Intégrales premières	8
3.2.2	Etablissement d'une équation différentielle du second degré . . .	11
3.2.3	Troisième loi de Képler	13
3.2.4	Relations dans l'ellipse définissant le plan d'orbite	15
3.3	Des positions-vitesses aux éléments orbitaux	16
4	Les équations de Gauss	18
4.1	Définition des repères liés au satellite	18
4.2	Calcul des équations de Gauss	19
5	Les équations de Lagrange	26
5.1	Méthode de variation des paramètres	26
5.2	Les variables canoniques	29
5.3	Equations canoniques d'Hamilton	29
5.3.1	Lagrangien	29
5.4	Formulation hamiltonnienne	30

5.5	Récapitulation	31
6	Eléments non singuliers	32
6.1	Eléments non singuliers en excentricité	32
6.2	Eléments universels	36
7	Conclusion	38

1 Introduction

En application du principe fondamental de la dynamique, l'étude du mouvement des corps dans l'Univers s'effectue toujours à travers l'établissement d'équations différentielles : elles relient les accélérations des corps (i.e. les dérivées temporelles des vitesses) aux forces agissant sur eux, et mènent à un système d'équations différentielles : les équations du mouvement.

Le problème des deux corps – situation où l'on considère deux seuls corps qui constituent un système isolé en interaction gravitationnelle – jouit d'un statut privilégié en Mécanique Céleste et Spatiale, essentiellement pour deux raisons :

- le système d'équations différentielles qui le caractérise est l'un des seuls que l'on puisse intégrer de manière complètement analytique, menant de ce fait à la définition de variables à la signification physique aisée,
- il décrit de manière relativement fidèle la situation réelle, au moins en première approximation, puisque les corps étudiés sont généralement soumis principalement à l'attraction d'un corps central, que ce soit le Soleil dans le cas des planètes, ou la Terre pour l'étude du mouvement des satellites artificiels.

Ce problème des deux corps peut être décrit au moyen de deux particules¹ S et C de masses respectives m_S et m_C . La force \vec{F} créée par la masse m_C sur le satellite est donnée par la loi de la gravitation universelle :

$$\vec{F} = -Gm_P m_C \frac{\overrightarrow{CS}}{\|\overrightarrow{CS}\|^3} \quad (1)$$

où $G \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ est la constante de la gravitation universelle. Dans le cas du champ gravitationnel créé par la Terre, on a $\mu = Gm_C = 0,39860044144982 \cdot 10^{15} m^3 s^{-2}$ (valeur donnée par le modèle de champ de gravité GRIM5). Pour le Soleil, $\mu = Gm_C = 0,13271243772577 \cdot 10^{21} m^3 s^{-2}$.

2 Aspects cinématiques

En coordonnées rectangulaires, l'expression de la position d'un corps est très simple, puisque : $\overrightarrow{CS} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

Dans toute la suite, le point S est repéré indifféremment par rapport au point C dans un jeu de coordonnées rectangulaires ou sphériques (λ désigne une longitude, et φ la latitude par rapport à un équateur) :

$$S \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \quad S \left| \begin{array}{l} r \\ \lambda \\ \varphi \end{array} \right.$$

¹comme Satellite et Centre de masse

2.1 Définition de coordonnées sphériques

Pour définir correctement les vecteurs de base des coordonnées sphériques, il est utile d'introduire le point s , projection orthogonale du point S dans le plan (xCy) . Le premier vecteur de base, vecteur radial \vec{e}_r , est défini par :

$$\vec{e}_r = \frac{1}{\|\vec{CS}\|} \vec{CS}$$

Un intermédiaire pratique est le vecteur \vec{u} défini par :

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{Cs}\|} \vec{Cs}$$

Il permet notamment de définir la longitude λ par : $\lambda = (\vec{e}_x, \vec{u})$. Le vecteur de base correspondant \vec{e}_λ est ainsi construit de telle manière que :

$$(\vec{u}, \vec{e}_\lambda) = \frac{\pi}{2}$$

orienté par \vec{e}_z .

La latitude φ est définie par :

$$\varphi = (\vec{u}, \vec{e}_r)$$

orienté par \vec{e}_λ . Le troisième des vecteurs de base, \vec{e}_φ , est simplement défini par :

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\lambda$$

de telle manière que la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi)$ constitue une base orthonormale directe.

La définition du repère sphérique et de ses vecteurs de base étant faite (voir Fig. 1), on peut immédiatement écrire :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

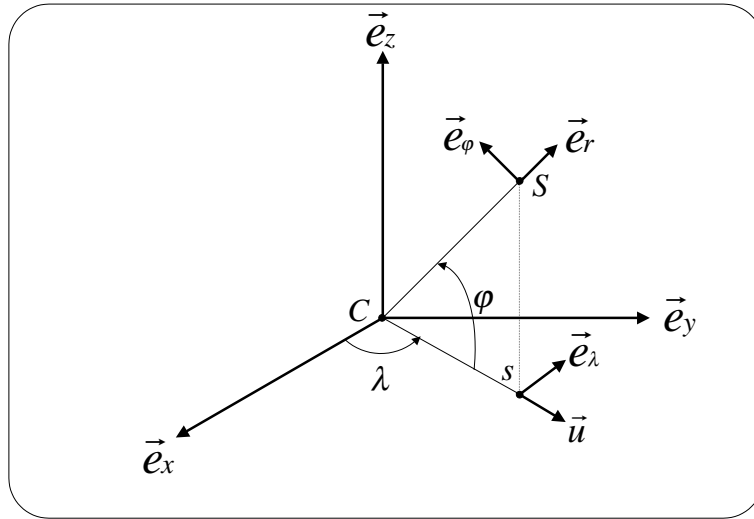
2.2 Un repère orienté par la position radiale

Il s'agit du repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, dans lequel la résultante \vec{F} de la force agissant sur le satellite se décompose selon :

$$\boxed{\vec{F} = R\vec{e}_r + S\vec{e}_s + W\vec{e}_w} \quad (2)$$

\vec{e}_s se situe dans le plan de l'orbite, orienté de telle sorte que $(\vec{e}_r, \vec{e}_s) = \frac{\pi}{2}$. \vec{e}_w est défini par $\vec{e}_w = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_s$

FIG. 1 – Coordonnées sphériques



2.3 Un repère orienté par la vitesse

Ce repère est très utile lorsqu'il s'agit de modéliser les forces proportionnelles à la vitesse (le freinage atmosphérique par exemple).

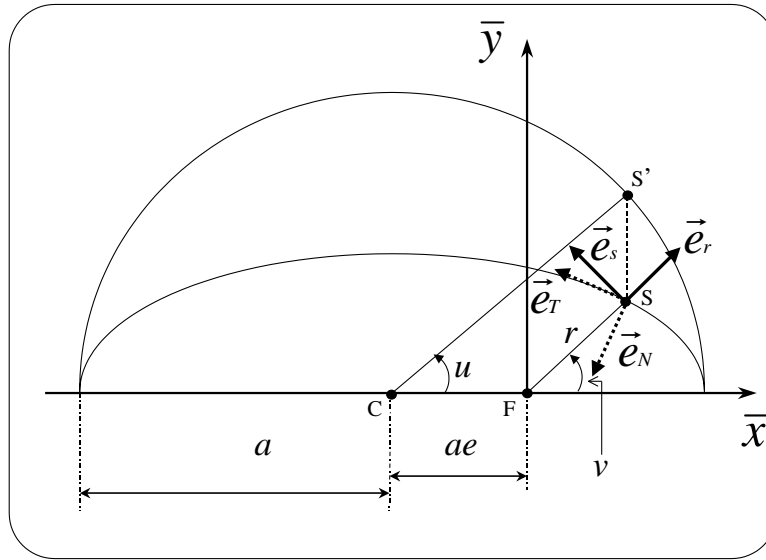
Le repère du plan de l'orbite (\vec{e}_r, \vec{e}_s) est alors remplacé par (\vec{e}_T, \vec{e}_N) , où \vec{e}_T est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, et \vec{e}_N le vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire. Le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_\varphi)$ est ainsi un repère direct (voir Fig. 2).

Dans ce repère, on note :

$$\vec{F} = T\vec{e}_T + N\vec{e}_N + W\vec{e}_\varphi \quad (3)$$

Les formules qui permettent d'exprimer T et N en fonction de R et S font appel à certaines relations de cinématique et du problème des deux corps : nous les établirons dans la prochaine section.

FIG. 2 – Deux repères mobiles avec le satellite
 O désigne le centre de l'ellipse. C'est aussi le centre du cercle osculateur qui permet de définir le point S' , lui-même permettant de définir l'anomalie excentrique u . Les deux repères sont ainsi (\vec{e}_r, \vec{e}_s) et (\vec{e}_T, \vec{e}_N) .



3 Le problème des deux corps

L'écriture des équations du mouvement, exprimées en coordonnées rectangulaires, mène au système suivant (on a noté $\mu = Gm_C$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} \right) \\ \ddot{y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{r} \right) \\ \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{r} \right) \end{cases} \quad (4)$$

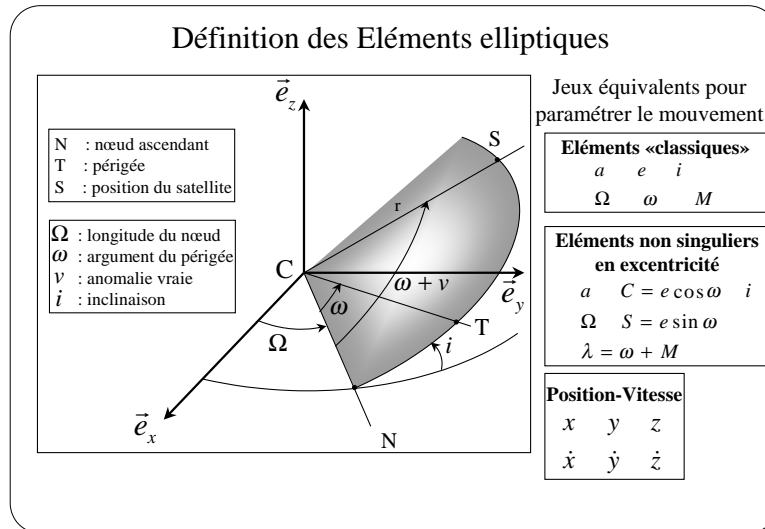
3.1 Les éléments elliptiques

L'intégration du système non perturbé permet de définir les éléments elliptiques traditionnels qui permettent de positionner de manière géométrique un corps sur son orbite (voir figures 3 et 2) :

- éléments caractérisant la géométrie de l'ellipse :
 - a , demi grand axe de l'ellipse
 - e , excentricité

- éléments positionnant le plan de l'orbite dans l'espace :
 - i , inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de référence
 - Ω , longitude du nœud ascendant
- éléments repérant la position du corps sur son orbite :
 - \bar{n} , moyen mouvement
 - ω , argument du péricentre (*joue le rôle de position initiale*)

FIG. 3 – Positionnement du plan de l'orbite dans l'espace



De nombreux intermédiaires de calcul sont nécessaires, et ne sont pas dénués d'intérêt, puisqu'ils sont fréquemment réutilisés dans de nombreux problèmes de mécanique céleste.

3.2 Intégration de l'équation du mouvement

3.2.1 Intégrales premières

- Relation de l'énergie

De $(\ddot{\vec{r}} = -\mu/r^3 \vec{r})$ qui est la formulation des équations du mouvement (4) en fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on déduit :

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{r} \right) \cdot \dot{\vec{r}}$$

et on conclut :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

On peut donc définir une quantité h , dite *constante de l'énergie (mécanique)* par (où : $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$) :

$$\boxed{h = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}} \quad (5)$$

- Intégrale des aires

L'intégrale des aires est basée sur le fait que :

$$\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{0} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}})$$

La constante des aires, notée \vec{C} et de norme C constante (moment cinétique perpendiculaire au plan d'orbite), est ainsi définie par :

$$\boxed{\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{V}} \quad (6)$$

Remarque :

→ si $C = 0$, \vec{r} et \vec{V} sont colinéaires pour tout temps : le mouvement est rectiligne.

→ si $C \neq 0$, le mouvement est plan. Un vecteur normal à ce plan est \vec{C} (c'est le moment cinétique au plan de l'orbite).

On désigne par θ l'angle polaire dans le plan de l'orbite (avec $d\vec{e}_r/dt = \dot{\theta} \vec{e}_s$). Dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, l'intégrale des aires s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_s) \\ &= r^2\dot{\theta} \vec{e}_w \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\|\vec{C}\| = r^2\dot{\theta}$$

En coordonnées rectangulaires, le vecteur \vec{C} est repéré dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au moyen des angles i et Ω définis par :

$$\boxed{i = (\vec{e}_z, \vec{C})} \quad (7)$$

et :

$$\boxed{\Omega = (\vec{e}_x, C\vec{N})} \quad (8)$$

où CN , ligne des nœuds, correspond à l'intersection du plan de l'orbite et du plan (xOy) (voir Fig. 3).

Avec cette paramétrisation, le plan de l'orbite, à travers le vecteur \vec{C} , est positionné dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ grâce à deux rotations :

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}$$

Ceci est équivalent à :

$$\vec{C} = C \sin \Omega \sin i \vec{e}_x - C \cos \Omega \sin i \vec{e}_y + C \cos i \vec{e}_z \quad (9)$$

- Intégrale de Laplace

L'intégrale de Laplace est une intégrale qui permet de définir le vecteur excentricité ou *vecteur de Laplace* (dirigé vers le périégée, sa norme étant l'excentricité). Elle est très utile dans certains cas, mais n'est pas indépendante des deux premières. Les relations précédentes permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} \wedge \vec{C} &= -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) &= \vec{r} \wedge (r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r)) \\ &= r^3 \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \dot{\vec{e}}_r) \\ &= r^3 (\dot{\vec{e}}_r \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - (\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{e}}_r) \vec{e}_r \end{aligned}$$

On arrive donc à :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}) = -\frac{\mu}{r^3} (-r^3 \vec{e}_r) = \mu \dot{\vec{e}}_r$$

On peut donc définir le vecteur excentricité \vec{E} par :

$$\vec{E} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}}{\mu} - \vec{e}_r = \frac{\vec{V} \wedge \vec{C}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (10)$$

où \vec{E} est dans le plan de l'orbite et $\vec{E} \cdot \vec{C} = 0$.

3.2.2 Etablissement d'une équation différentielle du second degré

Les intégrales premières ont permis de définir un jeu de 4 constantes : h , C , i , et Ω . Le système différentiel du mouvement, système de 3 équations du second ordre, équivalent à un système de six équations à six inconnues, ne comporte donc plus que deux indéterminations, ce qui mène à réduire le système à une seule équation différentielle du second degré.

Comme :

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

on déduit :

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mu}{r} = 2h$$

En écrivant :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}, \quad \text{avec : } \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

on aboutit à :

$$\frac{C^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2h \quad (11)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, une approche classique consiste à envisager le changement de variable suivant :

$$\left| u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} \right. \quad (12)$$

L'équation s'écrit désormais :

$$C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 \left(u^2 + \frac{2\mu u}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4} \right) - 2\mu \left(u + \frac{\mu}{C^2} \right) = 2h$$

ou, après développement :

$$\left| \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \left(\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2h}{C^2} \right) = 0 \right. \quad (13)$$

Sous cette forme, l'équation est beaucoup plus sympathique (on remarque que $h \geq -\mu^2/2C^2$). En notant ω la constante d'intégration, on peut écrire :

$$u = \frac{\mu}{C^2} \left(1 + \frac{2hC^2}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - \omega)$$

soit :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2hC^2}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cos(\theta - \omega) \quad (14)$$

Par identification avec la paramétrisation usuelle d'une conique, on peut définir un certain nombre de grandeurs :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos v)$$

$$\begin{aligned} e &= \left(1 + \frac{2hC^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p &= \frac{C^2}{\mu} \\ v &= \theta - \omega \\ q &= \frac{p}{1 + e} \end{aligned}$$

(15)

L'expression de l'excentricité se déduit de (15) par :

$$e^2 = 1 + \frac{2hC^2}{\mu^2} = 1 + \frac{2hp}{\mu^2} = 1 + \frac{2hq(1 + e)}{\mu^2}$$

En ajoutant h^2q^2/μ^2 à chacun des termes, on aboutit à une nouvelle expression :

$$e = 1 + \frac{2hq}{\mu}$$

(16)

Pour l'expression de la vitesse, on se sert de :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_s \\ \dot{v} &= \dot{\theta} \\ -\frac{\dot{r}}{r^2} &= -\frac{e}{p}\sin v\dot{v} \end{aligned}$$

Ceci mène aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} V^2 &= \|\dot{\vec{r}}\|^2 \\ &= (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 \\ &= \left(\frac{Ce}{p}\sin v\right)^2 + \left(\frac{C}{p}(1 + e \cos v)\right)^2 \\ &= \frac{C^2}{p^2}(e^2 + 1 + 2e \cos v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C^2}{p^2}(2(1 + e \cos v) - (1 - e^2)) \\
&= \frac{C^2}{p^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right) \\
&= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right)
\end{aligned}$$

3.2.3 Troisième loi de Képler

La troisième loi prend la forme connue :

$$\bar{n}^2 a^3 = \mu \quad (17)$$

On restreint le cas général à la situation elliptique où $h \leq 0$. L'intégration de l'équation du mouvement permet d'établir l'équation de Kepler :

$ \begin{aligned} \bar{n}(t - t_0) &= u - e \sin u \\ \bar{n}(t - t_0) &= M \end{aligned} $	(18)
---	------

Dans cette équation, on trouve :

- \bar{n} : le moyen mouvement
- t_0 : le temps de passage au périhélie
- u : l'anomalie excentrique (parfois notée E)
- M : l'anomalie moyenne

La recherche des valeurs de u vérifiant l'équation de Kepler (18) définit une équation implicite qui n'admet pas de solution analytique explicite. La recherche de méthodes visant à résoudre cette équation a fait l'objet de nombreuses publications, et l'on peut classer ces méthodes en deux grandes catégories :

- celles qui visent à obtenir une expression littérale d'une approximation de la solution,
- celles qui visent à obtenir une valeur numérique de l'anomalie excentrique.

- 1er exemple (d'après Jean-Louis Sagnier) : développement en série de Taylor. $u - l$ étant une fonction analytique de e au voisinage de $e = 0$, une des méthodes consiste à écrire un développement en puissances de l'excentricité, dont les fonctions sont des fonctions de l .

Ecrivons l'équation de Kepler sous la forme : $u = l + e \sin u$. A l'ordre 0 en excentricité, on a :

$$u = l + o(e).$$

On obtient maintenant l'approximation d'ordre 1 en substituant la précédente dans le second membre de l'équation de Kepler :

$$u = l + e \sin(l + o(e)) = l + e(\sin l + o(e)),$$

soit :

$$u = l + e \sin l + o(e^2).$$

De même, en substituant ce dernier résultat dans le second membre de l'équation de Kepler, on obtient l'approximation d'ordre 2 :

$$u = l + e \sin(l + e \sin l + o(e^2)) = l + e(\sin l + \cos l(e \sin l) + o(e^2)),$$

soit :

$$u = l + e \sin l + \frac{1}{2}e^2 \sin 2l + o(e^3)$$

Une nouvelle itération, conduite de la même manière, donnerait l'approximation d'ordre 3 :

$$u = l + e \sin l + \frac{1}{2}e^2 \sin 2l + \frac{1}{8}e^3(-\sin l + 3 \sin 3l) + o(e^4)$$

et ainsi de suite.

On obtient ainsi les premiers termes de la série de Taylor en e qui représente la solution analytique de l'équation de Kepler, et, en ordonnant différemment, ceux de la série de Fourier :

$$u = l + \left(e - \frac{1}{8}e^3 + o(e^5)\right) \sin l + \left(\frac{1}{2}e^2 + o(e^4)\right) \sin 2l + \left(\frac{3}{8}e^3 + o(e^5)\right) \sin 3l + o(e^4)$$

On observe que le coefficient de $\sin l$ se développe suivant les puissances impaires de e , le terme de plus bas degré étant de degré 1. Puis, le coefficient de $\sin 2l$ se développe suivant les puissances paires de e , le terme de plus bas degré étant de degré 2, et ainsi de suite. Plus généralement, le coefficient de $\sin kl$ se développe suivant les puissances de e ayant même parité que k , le terme de plus bas degré étant de degré k . On dit que cette série possède la propriété de d'Alembert, propriété que l'on établit à partir des caractéristiques du développement en série entière des fonctions de Bessel.

- 2eme exemple.

On peut se contenter d'une solution numérique, et utiliser des méthodes classiques de résolution comme la dichotomie, la méthode de Newton. Nous présentons ici la méthode des substitutions successives : on choisit une valeur approchée u_0 de u (par exemple l ou $l + e \sin l$) et on calcule les premiers termes de la suite définie par : $u_{n+1} = l + e \sin u_n$, qui converge vers u .

Dès que $|u - u_n|$ est assez petit, l'erreur est approximativement multipliée par $e \cos u$ à

chaque itération. On montre facilement que quand n croît, l'erreur sur u_n se rapproche de

$$\frac{e \cos u_n}{1 - e \cos u_n} (u_n - u_{n-1}),$$

ce qui fournit un test pour arrêter les itérations compte tenu de la précision souhaitée.

3.2.4 Relations dans l'ellipse définissant le plan d'orbite

En notant \bar{x} et \bar{y} les coordonnées rectangulaires dans le plan de l'orbite ($O\bar{x}$ dirigé vers le périhélie), on peut écrire (voir Fig. 2) :

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos v = a \cos u - ae \\ \bar{y} = r \sin v = \sqrt{1 - e^2} a \sin u \end{cases} \quad (19)$$

En résumé, les relations entre les angles u et v sont :

$$r \cos v = a(\cos u - e) \quad (20)$$

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \quad (21)$$

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (22)$$

ce qui mène à :

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \end{cases} \quad (23)$$

Expressions du rayon vecteur :

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{q(1 + e)}{1 + e \cos v} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \\ = a \frac{dM}{du} \end{cases} \quad (24)$$

Expression de la constante des aires :

$$| C = \sqrt{\mu p} = \bar{n} a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (25)$$

A partir des équations en u et v , on a :

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \frac{v}{2} &= \sin^2 \frac{v}{2} / \cos^2 \frac{v}{2} \\
 &= \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} \\
 &= \frac{1 - e \cos u - \cos u + e}{1 - e \cos u + \cos u - e} \\
 &= \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{(1 - e)(1 + \cos u)}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2}} \quad (26)$$

3.3 Des positions-vitesses aux éléments orbitaux

Il y a une correspondance bijective, à un instant donné, entre le mouvement décrit à l'aide d'un vecteur position $\vec{r}(x, y, z)$ et d'une vitesse $\vec{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, et les éléments orbitaux $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$. On se propose ici d'expliciter cette transformation, à l'aide des formules établies dans les paragraphes précédents.

Expression du demi-grand axe a :

$$\boxed{a = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mu} \right)^{-1}} \quad (27)$$

On déduit le moyen mouvement de la troisième loi de Kepler :

$$\boxed{\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \quad (28)$$

L'excentricité e est définie comme la norme du vecteur excentricité \vec{E} (avec $e = \|\vec{E}\|$) :

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{V})}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}} \quad (29)$$

Les trois autres éléments sont des angles que l'on détermine à partir de leurs lignes trigonométriques (cosinus et sinus). De :

$$\vec{r} \wedge \vec{V} \equiv \begin{cases} |\vec{r} \wedge \vec{V}| \sin \Omega \sin i \\ |\vec{r} \wedge \vec{V}| \cos \Omega \sin i \\ |\vec{r} \wedge \vec{V}| \cos i \end{cases} \quad \text{on déduit } i \text{ et } \Omega \text{ avec :}$$

$$i = \text{Arccos} \left(\frac{xy - \dot{x}y}{|\vec{r} \wedge \vec{V}|} \right) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sin \Omega &= \frac{y\dot{z} - \dot{y}z}{|\vec{r} \wedge \vec{V}| \sin i} \\ \cos \Omega &= -\frac{z\dot{x} - \dot{z}x}{|\vec{r} \wedge \vec{V}| \sin i} \end{aligned} \quad (31)$$

Pour déterminer l'argument du périégée, on commence par déterminer l'anomalie vraie v . En effet :

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{1}{e} \left(\frac{|\vec{r} \wedge \vec{V}|}{\mu r} - 1 \right) \\ \sin v &= \frac{|\vec{r} \wedge \vec{V}|}{re} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \end{aligned} \quad (32)$$

donnent v . Et :

$$\begin{aligned} \cos(\omega + v) &= \frac{1}{r} (x \cos \Omega + y \sin \Omega) \\ \sin(\omega + v) &= \frac{z}{r \sin i} \end{aligned} \quad (33)$$

donnent $\omega + v$, ceci permettant de trouver $\omega = (\omega + v) - v$.

Enfin, t_0 désignant l'un des temps de passage au périégée, on peut exprimer l'anomalie moyenne M à une époque t grâce à l'équation de Kepler :

$$M = \bar{n}(t - t_0) \quad (34)$$

4 Les équations de Gauss

Il existe des cas où la force perturbatrice que l'on considère dérive d'un potentiel, ce qui n'est pas vrai en général. Dans ce cas, l'écriture des équations du mouvement correspondantes doit se faire en considérant directement la force elle-même à travers ses composantes, exprimées dans un repère judicieusement choisi.

4.1 Définition des repères liés au satellite

Rappelons que les équations du mouvement perturbé s'expriment comme :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\gamma} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{F}$$

Un repère "naturel" est $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ tel qu'il a été défini dans la partie 2, où φ caractérise le plan de l'orbite osculatrice. On rappelle que dans ce repère, la force \vec{F} se met sous la forme :

$$\vec{F} = \mathbf{R}\vec{e}_r + \mathbf{S}\vec{e}_s + \mathbf{W}\vec{e}_w \quad (35)$$

Ce repère est très pratique pour établir les équations analogues aux équations de Lagrange (voir plus loin). Les composantes des vecteurs dans ce repère sont, par exemple :

$$\begin{aligned} \vec{V} &: \left[\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}e \sin v; \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}(1+e \cos v); 0 \right] \\ \vec{r} &: [r; 0; 0] \end{aligned}$$

Mais, d'un point de vue pratique, il vaut mieux se placer dans un repère mobile lié au satellite. Le repère du plan de l'orbite (\vec{e}_r, \vec{e}_s) est alors remplacé par (\vec{e}_T, \vec{e}_N) , où \vec{e}_T est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, et \vec{e}_N le vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire. Dans ce repère, on a :

$$\vec{F} = \mathbf{T}\vec{e}_T + \mathbf{N}\vec{e}_N + \mathbf{W}\vec{e}_w \quad (36)$$

La vitesse \vec{V} du satellite s'exprime par :

$$\vec{V} = V\vec{e}_T = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{v}\vec{e}_\chi$$

Les formules qui permettent d'exprimer \mathbf{T} et \mathbf{N} en fonction de \mathbf{R} et \mathbf{S} font appel à certaines relations de cinématique et du problème des deux corps.

En utilisant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{a(1-e^2)}(1+e \cos v) \\ C &= r^2\dot{v} = \bar{n}a^2\sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

on arrive à exprimer \vec{e}_T^\rightarrow :

$$\vec{e}_T^\rightarrow = \frac{\bar{n}ae \sin v}{V\sqrt{1-e^2}} \vec{e}_r^\rightarrow + \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(1 + e \cos v) \vec{e}_\lambda^\rightarrow$$

et aussi, par simple rotation des repères :

$$\vec{e}_N^\rightarrow = -\frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}}(1 + e \cos v) \vec{e}_r^\rightarrow + \frac{\bar{n}ae \sin v}{V\sqrt{1-e^2}} \vec{e}_\lambda^\rightarrow$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}} [\mathbf{T} e \sin v - \mathbf{N} (1 + e \cos v)] \\ \mathbf{S} &= \frac{\bar{n}a}{V\sqrt{1-e^2}} [\mathbf{T} (1 + e \cos v) + \mathbf{N} e \sin v] \end{aligned} \quad (37)$$

De même, en référence à la partie sur les aspects cinématiques, on peut noter le passage du repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ au repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ en fonction des angles orbitaux :

$$\begin{cases} \vec{e}_r^\rightarrow = (\cos(\omega + v) \cos \Omega - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + v)) \vec{e}_x^\rightarrow \\ \quad + (\cos(\omega + v) \sin \Omega + \cos i \cos \Omega \sin(\omega + v)) \vec{e}_y^\rightarrow \quad + \sin(\omega + v) \sin i \vec{e}_z^\rightarrow \\ \vec{e}_s^\rightarrow = (-\cos \Omega \sin(\omega + v) - \cos(\omega + v) \sin \Omega \cos i) \vec{e}_x^\rightarrow \\ \quad + (-\sin \Omega \sin(\omega + v) + \cos(\omega + v) \cos i \cos \Omega) \vec{e}_y^\rightarrow \quad + \cos(\omega + v) \sin i \vec{e}_z^\rightarrow \\ \vec{e}_w^\rightarrow = \sin i \sin \Omega \vec{e}_x^\rightarrow \\ \quad - \sin i \cos \Omega \vec{e}_y^\rightarrow \quad + \cos i \vec{e}_z^\rightarrow \end{cases} \quad (38)$$

4.2 Calcul des équations de Gauss

L'établissement de ces équations repose sur la situation bien connue du problème des deux corps, où l'on dispose de l'expression explicite de toutes les quantités nécessaires, et également d'intégrales premières.

Avec les trois intégrales premières et l'expression de l'accélération perturbatrice \vec{F}^\rightarrow , on a :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{C}} &= \vec{r} \wedge \vec{F}^\rightarrow \\ \dot{h} &= \vec{V} \cdot \vec{F}^\rightarrow \\ \dot{\vec{e}} &= \frac{1}{\mu} [\vec{F}^\rightarrow \wedge \vec{C} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{F}^\rightarrow)] \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\dot{h} = \frac{\bar{n}ae \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \mathbf{R} + \frac{\bar{n}a}{\sqrt{1-e^2}}(1+e \cos v) \mathbf{S}$$

Etablissement de $\frac{da}{dt}$

Avec :

$$a = -\frac{\mu}{2h} \quad \text{d'où : } \dot{a} = \frac{\mu}{2h^2} \dot{h}$$

on obtient :

$$\dot{a} = \frac{2}{\bar{n}\sqrt{1-e^2}} (\mathbf{R} e \sin v + \mathbf{S} (1+e \cos v)) \quad (39)$$

Etablissement de $\frac{de}{dt}$, de $\frac{di}{dt}$ et de $\frac{d\Omega}{dt}$

Avec : $a(1-e^2) = C^2/\mu$, on a :

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 - \frac{C^2}{\mu a} \\ 2e\dot{e} &= -\frac{2C}{\mu a} r \mathbf{S} + \frac{C^2}{\mu a^2} \dot{a} \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a} (\mathbf{R} \sin v + (\cos u + \cos v) \mathbf{S}) \quad (40)$$

La constante des aires exprimée en coordonnées rectangulaires est :

$$\vec{C} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \begin{vmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{vmatrix}$$

Son équivalent dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$ est :

$$\vec{C} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \begin{vmatrix} 0 \\ -r \mathbf{W} \\ r \mathbf{S} \end{vmatrix}$$

Par comparaison, on déduit :

$$\dot{i} = \frac{r}{\bar{n}a^2\sqrt{1-e^2}} \cos(\omega + v) \mathbf{W} \quad (41)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{\bar{n}a^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \quad (42)$$

Etablissement de $\frac{d\omega}{dt}$, et de $\frac{dM}{dt}$

A partir de :

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial r}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial r}{\partial M} \dot{M}$$

Et des relations suivantes :

$$r = a(1 - e \cos u) \quad \dot{r} = ae \sin u \dot{u} = \frac{\bar{n}a^2}{r} e \sin u$$

$$M = u - e \sin u \quad \dot{u}(1 - e \cos u) = \bar{n}$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos v} \sin v$$

on obtient, avec l'expression de \dot{a} :

$$\dot{M} = \bar{n} + \frac{1-e^2}{\bar{n}ae} \left[\left(\frac{-2e}{1+e \cos v} + \cos v \right) \mathbf{R} - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \sin v \mathbf{S} \right] \quad (43)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}ae} \left[-\cos v \mathbf{R} + \left(1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \sin v \mathbf{S} \right] \\ &\quad - \frac{r \cos i}{\bar{n}a^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \end{aligned} \quad (44)$$

Récapitulation : dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, les équations de Gauss s'écrivent, en ne considérant comme variable rapide que l'anomalie vraie v (avec $\eta = \sqrt{1-e^2}$) :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2ae \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \mathbf{R} + \frac{2a(1 + e \cos v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \mathbf{S} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{e + 2 \cos v + e \cos^2 v}{1 + e \cos v} \mathbf{S} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v)} \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\eta \cos v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \mathbf{R} + \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) \mathbf{S} \\
&\quad - \frac{\eta \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(\frac{-2e}{1 + e \cos v} + \cos v\right) \mathbf{R} - \frac{\eta^2 \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) \mathbf{S}
\end{aligned} \tag{45}$$

Les équations de Gauss analogues exprimées avec l'anomalie excentrique u utilisent la dépendance entre u et v :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2ae \sin u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{R} + \frac{2a\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{S} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta^2 \sin u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{R} + \frac{\eta(2 \cos u - e \cos^2 u - e)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 - e \cos u)} \mathbf{S} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1 - e \cos u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \cos(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1 - e \cos u}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{\sin u(2 - e \cos u - e^2)}{1 - e \cos(u)} \mathbf{S} \\
&\quad - \frac{(1 - e \cos u) \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta \sin i} \sin(\omega + v) \mathbf{W} \\
\frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \left(-3e + \frac{e^3 - 2e^3 \cos^2 u + \cos u}{1 - e \cos u} \right) \mathbf{R} - \frac{\sin v(2 - e \cos u - e^2)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \mathbf{S}
\end{aligned}
\tag{46}$$

L'expression dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_W)$ est déduite des formules qui relient \mathbf{N} et \mathbf{T} à \mathbf{R} et \mathbf{S} . On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \sqrt{1+e^2+2e\cos v} \mathbf{T} \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\eta^2}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} \frac{\sin v}{1+e\cos v} \mathbf{N} + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{2(e+\cos v)}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} \mathbf{T} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\eta \cos(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1+e\cos v)} \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1+e\cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} \frac{2e+\cos v+e^2\cos v}{1+e\cos v} \mathbf{T} \\
&\quad + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} 2\sin v \mathbf{N} - \frac{\eta \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1+e\cos v) \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{dM}{dt} - \bar{n} &= -\frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} \frac{\eta^2 \cos v}{1+e\cos v} \mathbf{T} \\
&\quad - \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} 2\sin v \left(1 + \frac{e^2}{1+e\cos v}\right) \mathbf{N}
\end{aligned}
\tag{47}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\cos(\omega+v) &= \cos\omega \cos v - \sin v \sin\omega \\
&= \cos\omega \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} - \sin\omega \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{1 - e\cos u} \\
\sin(\omega+v) &= \sin\omega \cos v + \sin v \cos\omega \\
&= \sin\omega \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} + \cos\omega \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{1 - e\cos u}
\end{aligned}$$

L'expression analogue en fonction de l'anomalie excentrique u est :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \sqrt{\frac{1+e \cos u}{1-e \cos u}} \mathbf{T} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \sqrt{\frac{1-e \cos u}{1+e \cos u}} \sin u \mathbf{N} + \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} 2 \cos u \mathbf{T} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{(1-e \cos u) \cos(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1-e \cos u) \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \sqrt{\frac{1-e \cos u}{1+e \cos u}} (e + \cos u) \mathbf{N} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} \eta^2 \sin u \mathbf{T} \\
 &\quad - \frac{\cos i (1-e \cos u) \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \sqrt{\frac{1-e \cos u}{1+e \cos u}} (e - \cos u) \mathbf{N} \\
 &\quad - \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} 2\eta \sin u \left(1 + \frac{e^2}{\eta^2} (1-e \cos u) \right) \mathbf{T}
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

5 Les équations de Lagrange

On désigne à nouveau par $\vec{F}(X, Y, Z)$ (composantes données ici dans un jeu de coordonnées cartésiennes) la force qui perturbe le mouvement du satellite. \vec{F} est en général une fonction de la position, de la vitesse, et du temps. La prise en compte des composantes de la force mène aux équations de Gauss présentées dans la section précédente.

Le travail élémentaire de \vec{F} est défini par :

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{P}$$

où : $d\vec{P}(dx, dy, dz)$ est le vecteur déplacement élémentaire. Quand elle existe, on définit la *fonction de force* $U = U(x, y, z)$ par :

$$dW_{\vec{F}} = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (49)$$

de telle sorte que :

$$\vec{F} = -\text{grad} U \quad (50)$$

Pour un satellite de masse m soumis à une force centrale newtonienne, la fonction de force U_0 est, avec les notations déjà introduites :

$$U_0 = \mu \frac{m}{r} \quad (51)$$

Le formalisme classique utilisant une fonction de force est bien pratique, car il permet de ne raisonner que sur une seule fonction (U) scalaire, réduisant ainsi la complexité des situations.

5.1 Méthode de variation des paramètres

On considère ainsi le mouvement d'une particule soumise au potentiel central U_0 et à un potentiel perturbateur U . Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (52)$$

Le cas où $U = 0$ a permis d'intégrer le système différentiel : c'est le problème des deux corps. Le mouvement du satellite est décrit en fonction du temps t et de 6 constantes d'intégration notées dans la suite σ_i (les éléments elliptiques par exemple). On peut résumer cette situation par la notation suivante :

$$\vec{r} = \begin{cases} x(t, \sigma_i) \\ y(t, \sigma_i) \\ z(t, \sigma_i) \end{cases}$$

Quand U est non nul, le système n'est plus intégrable de manière complètement analytique : le mouvement n'est képlérien qu'en première approximation, même si l'on peut définir à tout instant une orbite *osculatrice* à partir des vecteurs \vec{CS} et $d\vec{CS}/dt$.

Dans ce cadre, les constantes σ_i sont en fait dépendantes du temps, ce qui mène à vouloir déterminer les quantités $d\sigma_i/dt$, qui apparaissent en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} \end{aligned}$$

Or, par définition de l'orbite osculatrice, les coordonnées dépendent uniquement du temps, pour un temps fixé. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir :

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = 0 \quad (53)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = 0 \quad (54)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = 0 \quad (55)$$

De plus, en dérivant une deuxième fois par rapport au temps, on a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\sigma_i}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} \right) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \end{aligned}$$

En égalant les deuxièmes termes, et en procédant de même pour les trois coordonnées, on arrive à :

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (56)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{y}}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (57)$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{z}}{\partial \sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (58)$$

On dispose ainsi d'un système de 6 équations, système dont on peut modifier l'écriture en introduisant les crochets de Lagrange $[\sigma_j, \sigma_i]$. Sous forme matricielle, cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & [\sigma_1, \sigma_2] & \cdots & [\sigma_1, \sigma_6] \\ -[\sigma_1, \sigma_2] & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & [\sigma_5, \sigma_6] \\ -[\sigma_1, \sigma_6] & \cdots & -[\sigma_5, \sigma_6] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (59)$$

L'inversion d'un tel système, dans le cas général, n'est pas chose aisée. Par contre, si l'on choisit des variables bien adaptées (les variables canoniques), le calcul se simplifie considérablement.

5.2 Les variables canoniques

L'écriture de l'équation (59) est considérablement simplifiée si l'on choisit α_l et β_l ($l=1,2,3$) tels que :

$$\boxed{\begin{aligned} [\alpha_l, \alpha_m] &= 0 \\ [\beta_l, \beta_m] &= 0 \\ [\alpha_l, \beta_m] &= \delta_{l,m} \end{aligned}} \quad (60)$$

(59) s'écrira ainsi :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial U}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial U}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial U}{\partial \beta_3} \end{pmatrix} \quad (61)$$

Il existe plusieurs jeux de variables canoniques, qui s'expriment tous en fonction des éléments kepleriens classiques. Celui que l'on retrouve le plus souvent dans la littérature, parce qu'il apparaît de façon naturelle par manipulation des formules classiques de mécanique analytique, est constitué par les variables dites de Delaunay :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{\mu a} \\ G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \\ H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} l = M \\ g = \omega \\ h = \Omega \end{array} \right. \quad (62)$$

5.3 Equations canoniques d'Hamilton

5.3.1 Lagrangien

Chaque corps est ainsi caractérisé par un ensemble de variables traduisant sa position (variables notées q_j) et sa vitesse (variables notées \dot{q}_j).

Le vecteur \vec{r}_i est fonction des positions q_j et du temps t :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

On a ainsi :

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (63)$$

d'où on déduit :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (64)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, et en raisonnant non plus en termes de forces mais en terme d'énergie, les équations du mouvement prennent ainsi la forme suivante (*c'est l'algorithme de Lagrange*) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (65)$$

où le lagrangien \mathcal{L} (fontion de q_j , \dot{q}_j , et de t) est défini par :

$$\mathcal{L} = T + U \quad (66)$$

avec :

- $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$ *énergie cinétique du système*
- U : *potentiel dont dérive la résultante des forces*

5.4 Formulation hamiltonnienne

La forme des équations de Lagrange incite à définir les variables dites de Poisson :

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Sous cette forme, on peut exprimer les \dot{q}_i en fontion des autres variables :

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(p_j, q_j, t)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

d'où :

$$d(p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}) = \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

En posant donc :

$$\mathcal{H}(p_j, q_j, t) = p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

(hamiltonien du système), on aboutit aux équations canoniques d'Hamilton suivantes :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (67)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad (68)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (69)$$

On obtient ainsi, grâce à cette approche, un système d'équations canoniques.

5.5 Récapitulation

On déduit la forme des équations de Lagrange de la forme des équations canoniques, en reliant dL , dG , dH , dl , dg , dh à da , de , di , $d\Omega$, $d\omega$, dM .

Si U désigne le potentiel de la force qui perturbe le mouvement, les équations de Lagrange formulées en éléments kepleriens classiques s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\cos i}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= \bar{n} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{\bar{n}a^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} \end{aligned} \quad (70)$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier des équations de Gauss.

6 Éléments non singuliers

Les équations présentées dans les deux sections précédentes ne s'appliquent pas dans le cas où les orbites sont circulaires ($e = 0$) ou équatoriales ($i = 0$). Dans ce cas, non seulement il y a des divisions par zéro dans les équations de la dynamique, mais deux des six éléments elliptiques, l'argument du périégée ω et la longitude du nœud ascendant Ω , ne sont plus définis.

Dans la pratique, ces situations ne se produisent jamais, puisque l'excentricité ou l'inclinaison ne sont jamais rigoureusement nulles : à un instant donné, il est toujours possible de définir 6 éléments à partir d'une position (3 coordonnées) et d'une vitesse (3 coordonnées également).

D'un point de vue dynamique, cependant, les éléments elliptiques traditionnels ne peuvent pas décrire d'une manière consistante les orbites au voisinage des singularités en excentricité et en inclinaison : la stabilité des algorithmes d'intégration numérique est largement pénalisée par les divisions proches de zéro.

On utilise ainsi des jeux de 6 variables dits *non singuliers* qui restent parfaitement définis au voisinage de ces singularités. Le prix à payer est une forme sensiblement plus complexe que les équations formulées en éléments orbitaux classiques, puisque les éléments métriques et les éléments angulaires sont inévitablement mixés. Ces jeux non singuliers sont déduits du jeu d'éléments kepleriens classiques par des transformations qui s'apparentent à une projection d'un jeu de variables polaires en coordonnées cartésiennes.

6.1 Éléments non singuliers en excentricité

Il existe plusieurs jeux d'éléments non singuliers en excentricité. On peut citer des variables canoniques non singulières qui ont été introduites par Poincaré :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = L \\ X_2 = \sqrt{2(L - G)} \cos g \\ X_3 = H \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = l + g \\ x_2 = -\sqrt{2(L - G)} \sin g \\ x_3 = h \end{array} \right. \quad (71)$$

Les équations de la dynamique exprimées dans ce jeu de variables sont très complexes et difficilement manipulables. En pratique, on préfère en général utiliser un jeu de variables le plus proche possible des éléments orbitaux traditionnels.

En fait, dans le jeu des six éléments orbitaux classiques, seule la paire (e, ω) n'est pas adaptée à la description des orbites quasi-circulaires, car l'argument du périégée ω (noté g sous forme canonique) devient indéfini lorsqu'on se rapproche du pôle ($e = 0$).

En revanche, les coordonnées du type rectangulaire ($C = e \cos \omega$, $S = e \sin \omega$) restent, elles, bien définies. De plus, l'addition de l'anomalie moyenne M (l sous notation canonique) et de l'argument du périhélie ω (on définit ainsi la longitude moyenne $\lambda = \omega + l$) élimine l'occurrence de divisions par l'excentricité (voir ci-après).

Les équations en éléments non singuliers en excentricité que nous présentons sont ainsi exprimées dans le jeu suivant :

$$\left| \begin{array}{l} a \\ C \\ i \end{array} \right. = e \cos \omega \quad \left| \begin{array}{l} \Omega \\ S \\ \lambda \end{array} \right. = \begin{array}{l} e \sin \omega \\ \omega + M \end{array} \quad (72)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial e} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial C} C + \frac{\partial}{\partial S} S \right) \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial S} C - \frac{\partial}{\partial C} S + \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (75)$$

et que

$$\frac{dC}{dt} = \cos \omega \frac{de}{dt} - e \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \quad (76)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sin \omega \frac{de}{dt} + e \cos \omega \frac{d\omega}{dt} \quad (77)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{dM}{dt} \quad (78)$$

on peut déduire l'expression des équations de Lagrange en éléments non singuliers en excentricité :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{L} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{dC}{dt} &= -\frac{\eta}{L} \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{S \cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{C}{L} \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
&\quad + C \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial S} - S \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial C} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{\eta}{L} \frac{\partial U}{\partial C} - \frac{C \cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{S}{L} \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
\frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{C}{L} \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{\partial U}{\partial C} + \frac{S}{L} \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{\partial U}{\partial S} \\
&\quad - \frac{\cos i}{L \eta \sin i} \frac{\partial U}{\partial i} - \frac{2a}{L} \frac{\partial U}{\partial a}
\end{aligned} \tag{79}$$

En éléments non singuliers, l'analogie de l'anomalie excentrique u est la quantité $\psi = \omega + u$. On a la correspondance (il suffit d'utiliser la définition de ψ et de développer les lignes trigonométriques) :

$$\begin{aligned}
e \cos u &= C \cos \psi + S \sin \psi \\
e \sin u &= C \sin \psi - S \cos \psi
\end{aligned} \tag{80}$$

En définissant les notations $\nu = C \cos \psi + S \sin \psi$ et $\xi = C \sin \psi - S \cos \psi$, on a ainsi :

$$\cos(\omega + v) = \frac{\cos \psi - C}{1 - \nu} + \frac{1}{1 + \eta} \frac{S\xi}{1 - \nu} \tag{81}$$

$$\sin(\omega + v) = \frac{\sin \psi - S}{1 - \nu} - \frac{1}{1 + \eta} \frac{C\xi}{1 - \nu} \tag{82}$$

Dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$, les équations de Gauss sont :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\xi}{1-\nu} \mathbf{R} + \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \left(1 + \frac{\nu - (C^2 + S^2)}{1-\nu} \right) \mathbf{S} \\
\frac{dC}{dt} &= \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(\eta \cos(\omega + v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1+\eta} \right) \mathbf{S} \\
&\quad + \frac{S(1-\nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{(1-\nu) \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1-\nu) \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \left(\eta \sin(\omega + v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1+\eta} \right) \mathbf{S} \\
&\quad - \frac{C(1-\nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \left(-2 \frac{1-\nu}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\eta(\nu - (C^2 + S^2))}{(1+\eta)(1-\nu)} \right) \mathbf{R} \\
&\quad + \frac{\xi(2-\nu - (C^2 + S^2))}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1-\nu)(1+\eta)} \mathbf{S} - \frac{(1-\nu) \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W}
\end{aligned} \tag{83}$$

Parallèlement, les équations exprimées dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_w)$ utilisent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} (-\eta \mathbf{N} + \xi \mathbf{T}) \\
\mathbf{S} &= \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} (\xi \mathbf{N} + \eta \mathbf{T})
\end{aligned} \tag{84}$$

Ces équations sont :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \mathbf{T} \\
\frac{dC}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-\eta^2 \sin(\omega+v) + \xi \left(\eta \cos(\omega+v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{N} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(\xi \eta \sin(\omega+v) + \eta \left(\eta \cos(\omega+v) + \cos \psi - \frac{C\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{T} \\
&\quad + \frac{S(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{(1-\nu) \cos(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{(1-\nu) \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(\eta^2 \cos(\omega+v) + \xi \left(\eta \sin(\omega+v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{N} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-\xi \eta \cos(\omega+v) + \eta \left(\eta \sin(\omega+v) + \sin \psi - \frac{S\nu}{1+\eta} \right) \right) \mathbf{T} \\
&\quad - \frac{C(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
\frac{d\lambda}{dt} - \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(2\eta(1-\nu) + \frac{1}{(1+\eta)(1-\nu)} \left(\eta^2(\nu-e^2) + \xi^2(2-\nu-e^2) \right) \right) \mathbf{N} \\
&\quad + \frac{2\xi}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-\nu^2}} \left(-1 + \nu + \frac{\eta}{1+\eta} \right) \mathbf{T} - \frac{(1-\nu) \cos i \sin(\omega+v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W}
\end{aligned} \tag{85}$$

6.2 Éléments universels

Les éléments dits *universels* sont des éléments qui suppriment toute singularité dans les équations de Lagrange. Les éléments *universels* que l'on retrouve le plus souvent dans la littérature sont :

$$\begin{array}{|l}
a = a \\
e_x = e \cos(\omega + \Omega) \\
i_x = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
\Lambda = \omega + \Omega + M \\
e_y = e \sin(\omega + \Omega) \\
i_y = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega
\end{array}$$

Le choix du vecteur excentricité e_x, e_y est relativement uniforme. En revanche, celui du vecteur inclinaison est plus varié : il fait appel suivant les cas, soit à la fonction sinus, soit à la fonction tangente, avec i ou $\frac{i}{2}$ selon les cas.

Toutes les équations du mouvement correspondantes s'établissent de la même manière que celles présentées dans les sections précédentes. Les systèmes d'équations qui découlent du choix de tel ou tel jeu de paramètres sont apparemment semblables, puisqu'ils permettent tous l'élimination des singularités. En fait, non seulement les systèmes diffèrent quelque peu dans leur expression, mais le développement associé de la fonction perturbatrice est plus ou moins complexe. Il n'existe pas de règle générale pour choisir un jeu de paramètres. Cependant, le choix de $\left(\sin \frac{i}{2}\right)$ pour le vecteur inclinaison permet de simplifier les équations de Lagrange correspondantes :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \\
\frac{de_x}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2} \frac{\partial U}{\partial e_y} - \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial i_x} i_x + \frac{\partial U}{\partial i_y} i_y \right) e_y \mathbf{A} \\
&\quad - \frac{1}{\bar{n}a^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial U}{\partial \Lambda} e_x \\
\frac{de_y}{dt} &= +\frac{\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^2} \frac{\partial U}{\partial e_x} + \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial i_x} i_x + \frac{\partial U}{\partial i_y} i_y \right) e_x \mathbf{A} \\
&\quad - \frac{1}{\bar{n}a^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial U}{\partial \Lambda} e_y \\
\frac{di_x}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial e_x} e_y - \frac{\partial U}{\partial e_y} e_x - \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \right) i_x \mathbf{A} - \frac{\partial U}{\partial i_y} \mathbf{B} \right] \\
\frac{di_y}{dt} &= \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial e_x} e_y - \frac{\partial U}{\partial e_y} e_x - \frac{\partial U}{\partial \Lambda} \right) i_y \mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial i_x} \mathbf{B} \right] \\
\frac{d\Lambda}{dt} &= \bar{n} - \frac{2}{\bar{n}a} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{1}{\bar{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial i_x} i_x + \frac{\partial U}{\partial i_y} i_y \right) \mathbf{A} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{n}a^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial e_x} e_x + \frac{\partial U}{\partial e_y} e_y \right)
\end{aligned} \tag{86}$$

avec, et suivant la forme du vecteur inclinaison \mathbf{i} :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A} = 1/2 & \mathbf{B} = 1/4 & : \text{ pour } \mathbf{i} \text{ en } \sin \frac{i}{2} \\
\mathbf{A} = 1/(2 \cos^2 \frac{i}{2}) & \mathbf{B} = 1/(4 \cos^4 \frac{i}{2}) & : \text{ pour } \mathbf{i} \text{ en } \tan \frac{i}{2} \\
\mathbf{A} = 1/(\cos i (1 + \cos i)) & \mathbf{B} = 1/(\cos^3 i) & : \text{ pour } \mathbf{i} \text{ en } \tan i \\
\mathbf{A} = \cos i / (1 + \cos i) & \mathbf{B} = \cos i & : \text{ pour } \mathbf{i} \text{ en } \sin i
\end{array}$$

7 Conclusion

Avec l'oscillateur harmonique, le problème des deux corps constitue l'un des deux problèmes de base de la mécanique céleste. Les formules présentées ici ont servi à définir les équations de la dynamique classique.

Selon les cas, on peut utiliser les équations de Lagrange ou les équations de Gauss. Ces équations sont d'une nature différente de celles qui décrivent le mouvement orbital avec des positions et des vitesses : en permettant une distinction d'effets à courtes et à longues périodes, d'effets cumulatifs, les éléments orbitaux ou les jeux qui en sont déduits permettent d'associer aisément une perturbation et le type d'effet qu'il engendre sur l'orbite : une décroissance du demi-grand axe pour le freinage atmosphérique, des effets périodiques sur l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant pour les effets de troisième corps par exemple.

Enfin, qu'elles soient intégrées dans un mode numérique ou analytique, les équations de la dynamique doivent avoir un second membre exprimé dans les mêmes variables que celles dont on a établi les dérivées : les composantes des forces dans le cas des équations de Gauss, et les potentiels pour les équations de Lagrange, doivent être exprimés relativement à ces variables.

ANNEXE

L'analyse des perturbations orbitales consiste à identifier, dans les modifications d'orbite des satellites, les différentes sources de perturbations : déplacements de masse d'origine géophysique ou climatique, frottement atmosphérique...

Les périodes caractéristiques de ces phénomènes (de quelques mois à quelques milliers d'années) sont de plusieurs ordres de grandeur plus grand que la période du satellite, qui fait le tour de la Terre en quelques heures. D'où l'idée de s'affranchir de la variables rapide (l'anomalie moyenne) dans les équations aux perturbations, en essayant d'obtenir de nouveaux systèmes dépendant de 5 variables, dits systèmes moyens. Ils sont obtenus en calculant, sur une révolution du satellite, la valeur moyenne des équations dites 'instantanées' établies précédemment. Ces systèmes constituent l'une des bases de la théorie du mouvement moyen.

Equations de Gauss moyennes en éléments orbitaux (repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_w)$)

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{S} \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{\eta e}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{S} \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{e \cos \omega}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} \mathbf{W} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \frac{e \sin \omega}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R} + \frac{3}{2} \frac{e \sin \omega \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta \sin i} \mathbf{W} \\
 \frac{dM}{dt} - \bar{n} &= \frac{-3}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{87}$$