

Filtrage des mesures gradiométriques

Gilles Métris

CERGA

Observatoire de la Côte d'Azur

Filtrage

Opération consistant à extraire d'un signal observé, le signal utile pour l'observateur.

Généralité sur les variables aléatoires

- Espérance d'une variable aléatoire:

$$E[f(X)] = \sum_i p_i f(x_i) \quad \text{en discret}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f(x) dx \quad \text{en continu (} T(x) = \text{densité de probabilité)}$$

$$E(X) = x \quad \text{pour un événement certain (non aléatoire)}$$

- Moments :

$$m_n = E(X^n)$$

$$m_1 = E[X] = \sum_i p_i x_i \quad \text{moyenne}$$

$$m_2 = E[X^2] = \sum_i p_i x_i^2 \quad \text{moyenne quadratique}$$

$$\mu_2 = E[(X - m_1)^2] = m_2 - m_1^2 \quad \text{moment centré d'ordre 2 = variance}$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} \quad \text{écart - type ou dispersion}$$

- Covariance de deux VA :
Coefficient de corrélation :

$$C_{12} = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$

$$\rho = \frac{C_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

En dimension n :
Matrice de covariance

$$[C_X] = E[X_c X_c^T] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \sigma_2^2 & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Processus aléatoires

- Processus aléatoire (ou stochastique) : génération d'une VA au cours du temps (au sens large) = fonction aléatoire.

En discret : séquence de VA $X[i]$

- Exemple :

- Résultat d'un lancé de dès = variable aléatoire
- Succession de lancés de dès = processus stochastique

- Les moments sont maintenant une fonction du temps :

$$\begin{array}{ll} m_n(t) = E[X(t)] & \text{en temps continu} \\ m_n[k] = E[X[k]] & \text{en temps discret} \end{array}$$

- Covariance mutuelle :

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]\} = C_{YX}(t_1, t_2) \text{ Covariance mutuelle}$$

$$C_X(t_1, t_2) = C_{XX}(t_1, t_2)$$

Covariance : mesure la ressemblance du "signal" avec sa copie tradatée

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t)$$

Variance (puissance du signal)

Si $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X^2 \delta(t_1 - t_2)$ la fonction aléatoire est non corrélée.

Stationnarité - Ergodicité

■ Stationnarité :

- Un processus aléatoire est stationnaire si tous ses moments sont indépendants de l'origine du temps.
- Stationnarité d'ordre 2 (ou faible) : la moyenne ne dépend pas du temps et la covariance ne dépend que de la différence entre les deux arguments \Rightarrow fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned}m_X(t) &= m_X \\C_X(t_1, t_2) &= C_X(\tau = t_1 - t_2) \\ \Rightarrow \sigma_X^2(t) &= C_X(t, t) = C_X(0) = \sigma_X^2\end{aligned}$$

- Ergodisme : un processus est ergodique si on peut remplacer les sommes sur des ensembles par des sommes temporelles.
Ex : au lieu de lancer N dés, on lance N fois successivement le même dés.

Ergodisme en moyenne :

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(t) dt &= m_X \quad \forall t_0 \quad \text{en continu} \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N} X(n) &= m_X \quad \forall n_0 \quad \text{en discret}\end{aligned}$$

Densité spectrale de puissance

Bruit blanc - bruit coloré

- **Densité spectrale de puissance (DSP)** : c'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\Gamma_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} C_X(\tau) d\tau \Leftrightarrow C_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} \Gamma_X(f) df$$
$$\Rightarrow \sigma_X^2 = C_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_X(f) df$$

La DSP décrit la répartition de la puissance σ^2 suivant les fréquences.

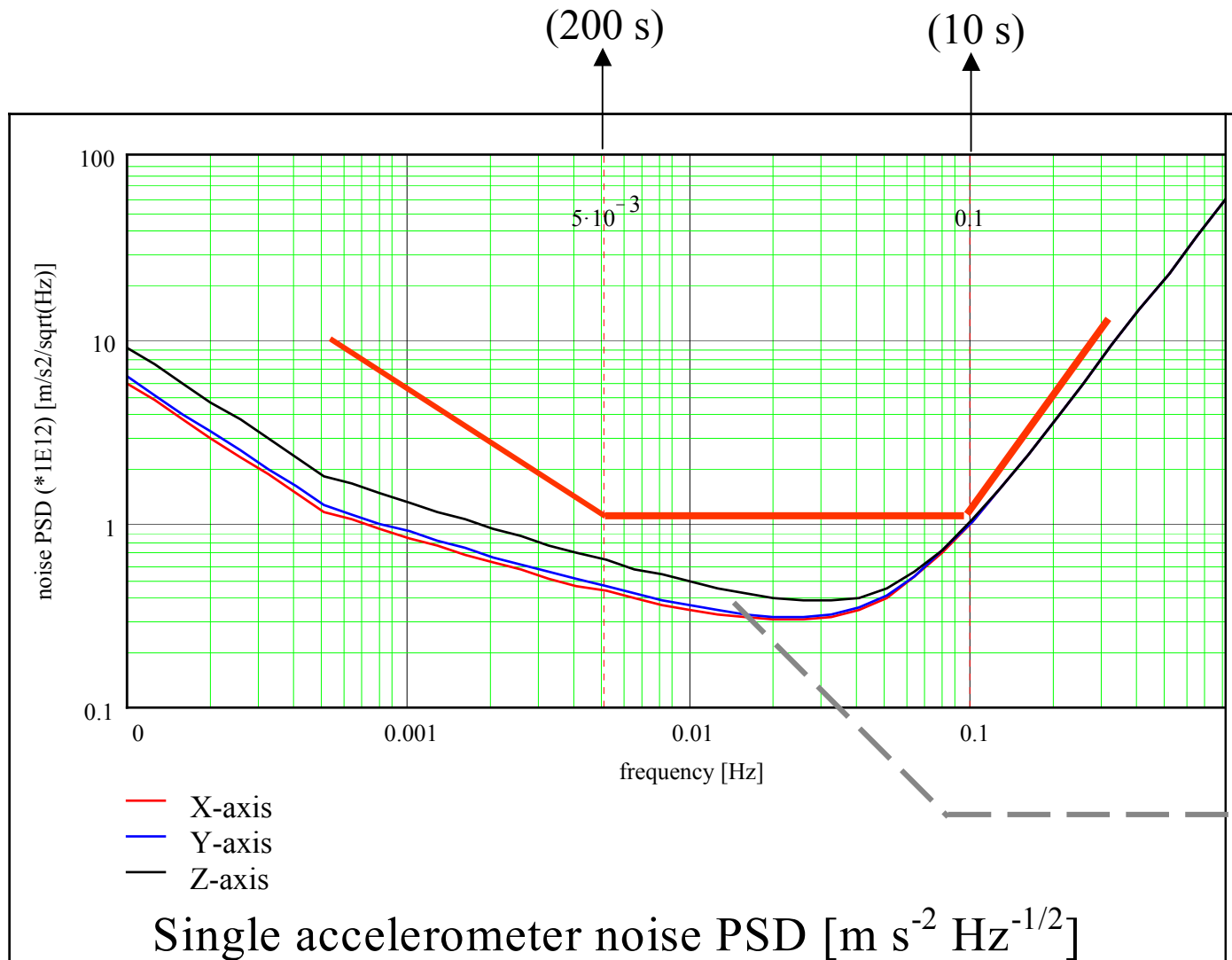
- Cas d'un processus non corrélé :

$$C_X(\tau) = \delta(\tau)\sigma_X^2 \Rightarrow \Gamma_X(f) = \sigma_X^2$$

La DSP est la même à toutes les fréquences : on a un bruit blanc.

Inversement, si la DSP varie avec la fréquence (bruit coloré), le processus est corrélé.

GOCE : densité spectrale de bruit du gradiomètre



Spécification
initiale : **—**
3 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$ entre
0.005 et 0.1 Hz

*Performances
prédites (à partir
d'analyses et de
tests)*

Exemple d'un gradiomètre

La structure de l'équation d'observation est :

$$M(t_k) = K_0 + [A]([T](t_k) - [I](t_k))\Delta + b(t_k)$$

Biais

Matrice
instrumentale

Tenseur gradient
de gravité

= combinaison linéaire des coefficients du champ de gravité
que l'on veut déterminer.

Bruit

Bras du
gradiomètre

Tenseur
d'inertie

Gradiomètre (suite)

⇒ Equations d'observations linéaires classiques :

$$\begin{matrix} [M] \\ n1 \end{matrix} = \begin{matrix} [h] \\ n p \end{matrix} \begin{matrix} [X] \\ p1 \end{matrix} + [B] \quad \xrightarrow{\text{Pondération}} \quad \begin{matrix} [P][M] \\ nn \quad n1 \end{matrix} = \begin{matrix} [P][h] \\ n p \quad p1 \end{matrix} \begin{matrix} [X] \\ p1 \end{matrix} + \begin{matrix} [P][B] \\ nn \end{matrix}$$

[M] = Vecteur des observations

[X] = Vecteur des paramètres à déterminer (gravité...)

[h] = Matrice de configuration

[B] = Bruit (supposé centré et stationnaire d'ordre 2)

[P]^T[P] = Matrice de pondération

⇒ Solution classique (MC) = minimise erreur sur les observation

$$E([M - \hat{M}]^T [M - \hat{M}]) = \text{mini} \Rightarrow [\hat{X}] = ([h]^T [P]^T [P] [h])^{-1} [h]^T [P]^T [P] [M]$$

Choix de la pondération

Matrice $[P]$ qui minimise la variance sur l'estimation de $[X]$:

$$E([X - \hat{X}]^T [X - \hat{X}]) = \text{mini} \Rightarrow [P]^T [P] = E([B][B]^T)^{-1} = [R_b]^{-1}$$

$[R_b]$ = Matrice de covariance

$$R_{b_{ij}} = E(b_i b_j) = \Gamma[i - j] \text{ (fonction d'autocorrélation)}$$

$\Gamma[i - j] = \delta_{ij}$ pour un bruit blanc, mais pas pour un bruit coloré!

Il faut donc :

- Evaluer la fonction d'autocorrélation,
- En déduire la matrice de covariance et l'inverser.

Fonction d'autocorrélation

- Par définition, la densité spectrale de puissance (DSP) est la TF de la fonction d'autocorrélation.
- Inversement, connaissant la DSP (PSD en anglais), on peut en principe calculer la la fonction d'autocorrélation par TF inverse...
- ... mais :
 - la DSP à priori reste un modèle et est difficile à quantifier avec grande précision (les instruments ne peuvent être testés complètement au sol)
 - si la dynamique de bruit est très grande, une petite erreur relative de modèle dans une zone de bruit important peut dégrader nettement la restitution.

Inversion de la matrice de covariance

- En l'absence d'hypothèses (trop) restrictives, c'est une matrice carrée, pleine, de grande taille (autant que le nombre d'observations)
- C'est une matrice de Toeplitz symétrique ($R_{ij} = R_{ji} = R_{i-j}$) qui offre des algorithmes particuliers d'inversion (ou de décomposition).
- Le calcul est toujours lourd (si pas impraticable) dans le cas de plusieurs centaines de milliers d'observations.

Bilan :

- L'utilisation d'une matrice de pondération non diagonale dans l'espoir d'obtenir un estimateur à variance minimale en présence de bruit coloré représente un gros effort calculatoire pour une optimisation incertaine.
- Il est plus efficace d'effectuer un prétraitement sur le signal pour pouvoir ensuite appliquer une inversion par MC non pondérés (ou avec une pondération diagonale).

Principe

Au lieu de considérer les équations d'observations pour différentes dates :

$$M(t_k) = h_i(t_k)X_i$$

On peut travailler en fréquentiel et considérer les équations d'observation pour différentes fréquences :

$$M(f_k) = H_i(f_k)X_i$$

- Avantages :

- On obtient un bruit non corrélé (propriété de la TF)
- Connaissant la DSP, la pondération (diagonale) est directe.

$$W(f_k)M(f_k) = W(f_k)H_i(f_k)X_i$$

$$W^2(f_k) = \frac{1}{\Gamma(f_k)} \quad (\Gamma(f_k) = \text{DSP})$$

- Inconvénient : la projection en fréquentiel est toujours délicate.

- Quelles raies de projection choisir ?
- Celles prévues par une théorie linéaire du satellite ?
- Gros risque de perdre de l'information.
- Appliquer la FFT en utilisant toutes les raies (pas de perte d'information) ?

Simplification supplémentaire

- Utiliser seulement le domaine fréquentiel sur lequel la DSP peut être considérée comme uniforme

$$M(f_k) = H_i(f_k)X_i \quad \text{si } f_k \in [f_1, f_2]$$

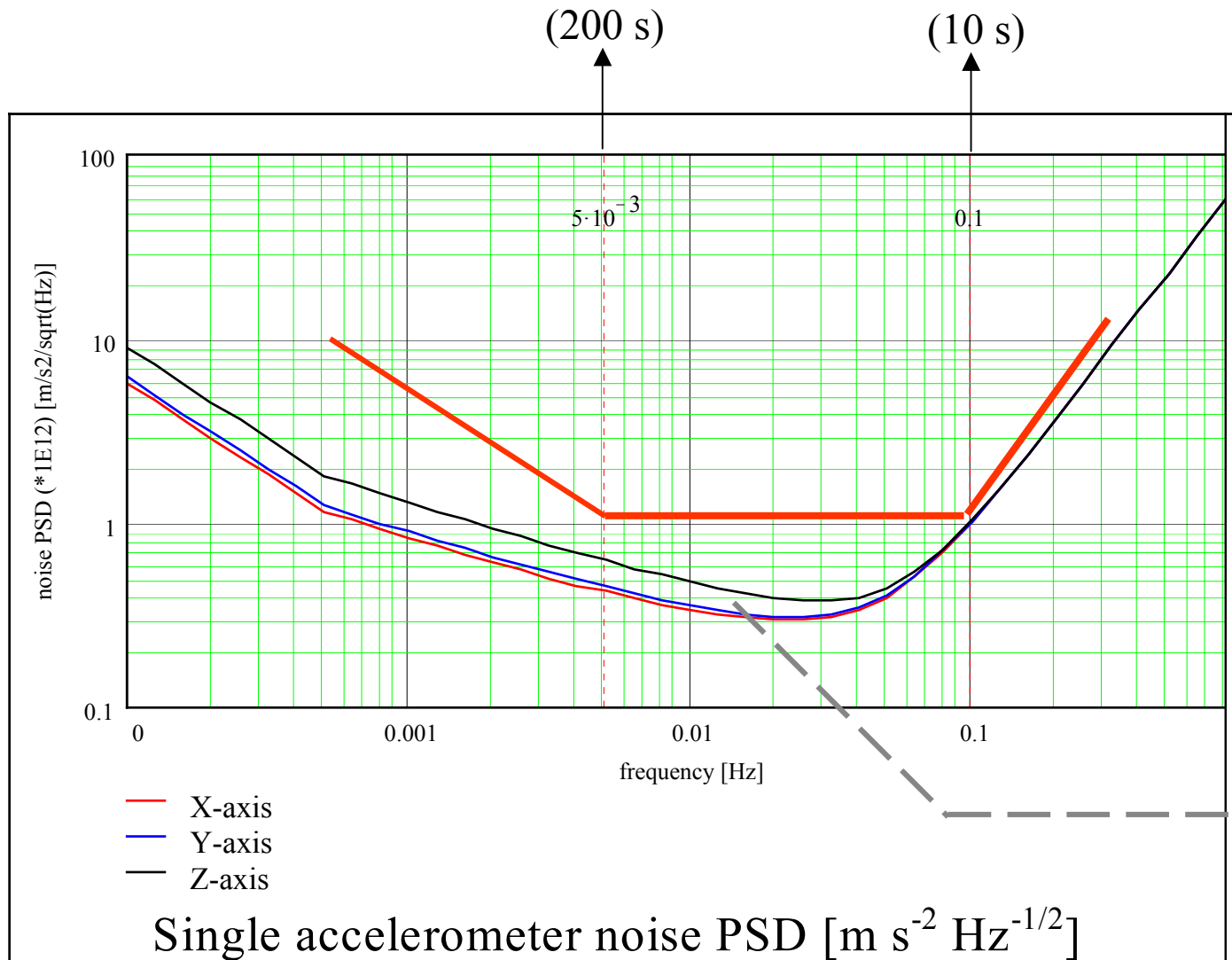
- Cela revient à appliquer un filtre passe bande :

$$W(f_k)M(f_k) = W(f_k)H_i(f_k)X_i$$
$$W(f_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_k \in [f_1, f_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Avantage : ce filtre (classique) peut-être appliqué directement en temporel

$$w(t_k)M(t_k) = w(t_k)h_i(t_k)X_i$$

GOCE : densité spectrale de bruit du gradiomètre



Spécification
initiale : **—**
3 mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$ entre
0.005 et 0.1 Hz

*Performances
prédites (à partir
d'analyses et de
tests)*

Stratégie

- ① Choisir un filtre passe-bande,
- ② Appliquer ce filtre (en temporel)
 - Aux observations,
 - Aux dérivées partielles (matrice de configuration)
 - ⇒ Signaux ne comprenant que les fréquences « utilisables »

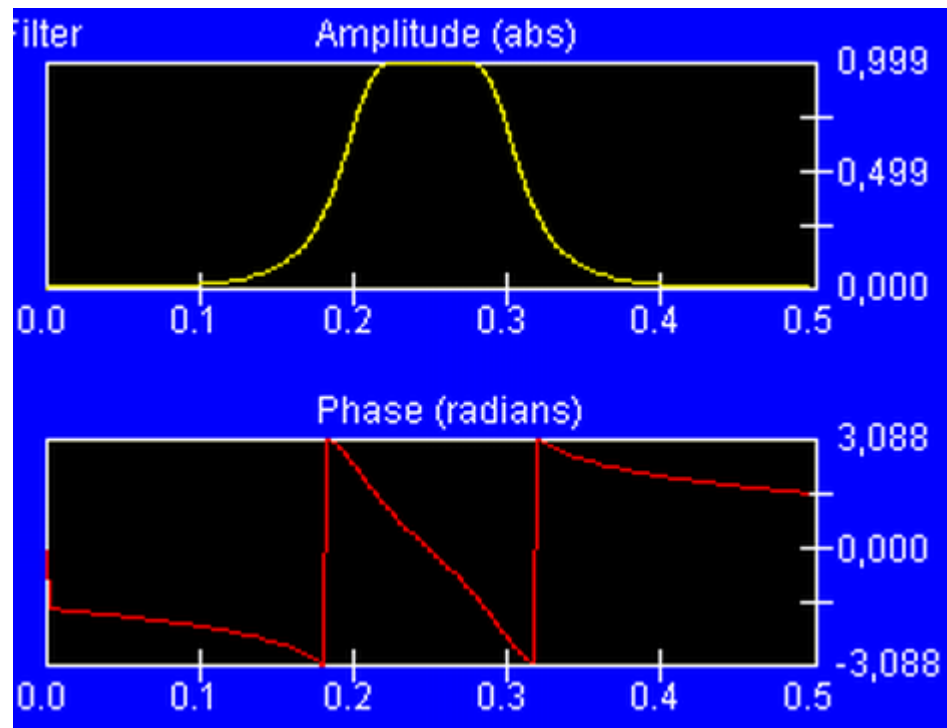
Il est indispensable d 'appliquer le même filtre aux observations et aux dérivées partielles pour obtenir les mêmes « distorsions »
- ③ Appliquer les MC aux signaux filtrés.

Caractéristiques du filtre

- Contraintes fortes :
 - Passe bande,
 - Très forte atténuation loin de la bande passante (le bruit devient très fort).
- Contraintes faibles :

Grâce au fait que l'on applique le même filtre aux observations et aux dérivées partielles, on peut admettre

 - Un gain un peu différent de 1 dans la bande passante,
 - Une transition pas spécialement raide,
 - Un déphasage à peu près quelconque.



Filtres numériques

- **Filtre = Système Linéaire Invariant (SLI)**

- **Système linéaire :**

Le signal en sortie du système est obtenu à partir du signal d'entrée par un opérateur linéaire.

Exemple : La transformée de Fourier est un SL

$$y[l] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-2\pi i k l / N}$$

- **Système invariant :**

La transformation effectuée par le système est indépendante de l'origine temporelle (sauf phase transitoire)

$$y[l] = G\{x[k]\} \Rightarrow y[l - n] = G\{x[k - n]\}$$

Représentation des filtres numériques

- Filtre numérique = discret
(par opposition à filtre analogique = continu)
- Discrétisation = **échantillonnage à pas fixe T_e**
⇒ Fréquence d'échantillonnage f_e
- Notation : $x[t = kT_e] \equiv x[k]$

- Filtrage linéaire :
$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x[k-n]$$

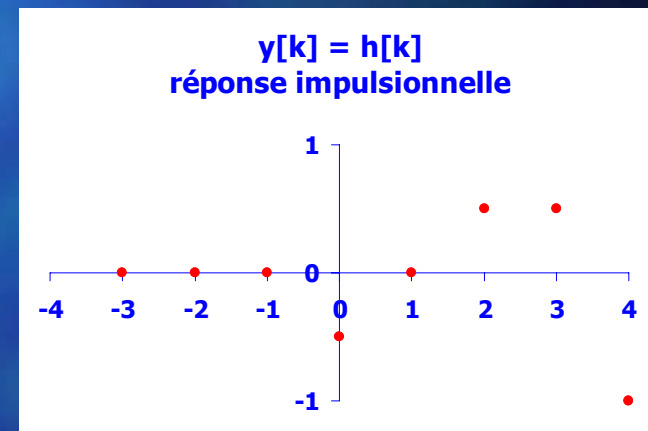
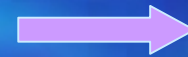
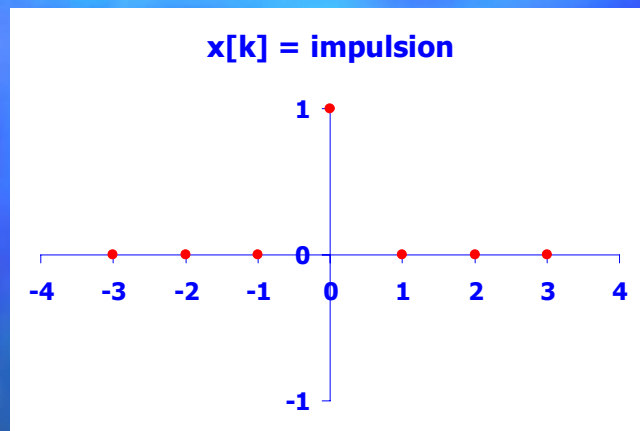
si $a_n = 0 \quad \forall n < 0$ le filtre est causal

- Le système est en général dynamique : $y[k_0]$ est fonction de x à la date k_0 mais aussi à d'autres dates k

Réponse impulsionnelle



C'est la réponse du filtre à une impulsion :



$$x[k] = \delta[k] \Rightarrow y[k] = h[k]$$

h = réponse impulsionnelle ou séquence de pondération.

Relation de convolution

■ Problème :

- entrée $x[k]$ (k = variable et non pas une date fixée)
- sortie $y[k_0]$ (k_0 = date fixée) ?

- Impulsion à la date 0 \Rightarrow réponse $y[k_0] = h[k_0]$ à la date k_0
- Impulsion à la date k \Rightarrow réponse $y[k_0] = h[k_0 - k]$ à la date k_0 (invariance)
- Entrée $x[k]$ à la date k \Rightarrow réponse $y[k_0] = x[k]h[k_0 - k]$ à la date k_0
- Entrées à toutes les dates k \Rightarrow réponse $y[k_0] = \sum_k x[k]h[k_0 - k]$ à la date k_0

↓ changement d'indice : $n = k_0 - k$

$$\begin{aligned}y[k_0] &= \sum_{n=-\infty_1}^{+\infty_2} h[n]x[k_0 - n] \\ &= h * x[k_0]\end{aligned}$$

Systemes IIR et FIR

Si $h[n] = 0 \quad \forall n \notin [N_1, N_2] \Rightarrow$ Réponse Impulsionnelle Finie (FIR): $y[k] = \sum_{N_1}^{N_2} h[n]x[k-n]$

Sinon \Rightarrow Réponse Impulsionnelle Infinie (IIR)

Réalisation ? Stabilité ?

Si $h[n] = 0 \quad \forall n < 0 \Rightarrow$ Filtre causal: $y[k] = \sum_0^{+\infty} h[n]x[k-n]$

Exemple :

$$y[k] = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K x[k-n]$$

\Downarrow

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2K+1} & -K \leq n \leq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \text{non causal}$$

Filtres réalisables

- Un filtre FIR est toujours réalisable car il demande un nombre fini d'opérations.
- Un filtre IIR numérique n'est pas réalisable en appliquant directement la relation de convolution qui demande un nombre infini d'opérations.
- A une date k , on peut utiliser :
 - un nombre fini d'entrées antérieures (système causal),
 - un nombre fini de sorties strictement antérieures⇒ filtre causal le plus général réalisable :

$$y[k] = -\sum_{i=1}^I \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^J \alpha_j x[k-j]$$

Equation aux différences d'ordre I

Relation entre RI et équation aux différences

$$y[k] = -\sum_{i=1}^I \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^J \alpha_j x[k-j]$$
$$x[k] = \delta[k] \Rightarrow h[k] = -\sum_{i=1}^I \beta_i h[k-i] + \sum_{j=0}^J \alpha_j \delta[k-j]$$
$$= -\sum_{i=1}^I \beta_i h[k-i] \quad \text{pour } k \geq J$$

Ainsi l'ensemble des filtres réalisables est restreint par cette récurrence sur la RI.

Exemple

$$h[k] = \begin{cases} \beta^k & k \geq 0 \quad (\beta < 1) \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Equation de convolution : $y[k] = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n x[k-n] \Rightarrow$ non réalisable

Mais : $h[k] = \beta h[k-1]$

\Rightarrow Equation aux différences $y[k] = \beta y[k-1] + x[k]$

Condition initiale ?

Par exemple $y[0] = x[0]$ si $x[k < 0] = 0$

Fonctions propres d'un filtre

$$\begin{aligned}\text{Soit } x[k] &= z^k \quad z \text{ complexe} \\ \Rightarrow y[k] &= \sum_n h[n]z^{k-n} \\ &= z^k \sum_n h[n]z^{-n} \\ &= x[k]H(z)\end{aligned}$$

- La réponse est proportionnelle à l'entrée
- z^k est une fonction propre du filtre
- $H(z)$ est la transmittance (ou fonction de transfert) du filtre

Réponse en fréquence

Des fonctions propres particulières sont les fonctions harmoniques

$$x[k] = e^{2\pi j\nu k} \quad \nu \text{ réel}$$

↓

$$y[k] = x[k]H(\nu)$$

$$H(\nu) = \sum_n h[n]e^{2\pi j\nu n} : \text{TF de } h = \text{réponse en fréquence}$$

$$|H(\nu)| = \text{Gain du filtre à la fréquence } \nu$$

$$\text{Arg}(H(\nu)) = \text{Déphasage du filtre à la fréquence } \nu$$

Transformée en Z

- Par analogie avec la TF discrète

$$X(v) = \sum_n x[n]e^{-i2\pi n}$$

la fonction $X(z) = \sum_n x[n]z^{-n}$ est appelée **Transformée en z de x**.

- C'est une série de Laurent, convergente sur une couronne

centrée sur O : $0 \leq r < |z| < R \leq \infty$

- Ainsi la fonction de transfert

$$H(z) = \sum_n h[n]z^{-n}$$

est la Transformée en z de la RI.

Propriétés de la TZ

- Retard : $u[k] = x[k - k_0] \Rightarrow U(z) = z^{-k_0} X(z)$

- Transformation du produit de convolution en produit simple :

$$\begin{aligned} y[k] = h * x[k] &\Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \\ &\Downarrow \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

- Linéarité

Transmittance d'un filtre réalisable

■ Equation aux différences :
$$y[k] + \sum_{i=1}^m \beta_i y[k-i] = \sum_{j=0}^n \alpha_j x[k-j]$$

■ Transformée en Z :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^m \beta_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j z^{-j}\right) X(z) \quad \text{car } TZ(y[k-i]) = z^{-1} TZ(y[k])$$

⇓

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_m z^{-m}} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

La transmittance est une fraction rationnelle de deux polynômes en z^{-1} (ou en z)

- n = ordre du filtre
- les racines de $N(z)$ sont les zéros de la transmittance
- les racines de $D(z)$ sont les pôles de la transmittance.

Stabilité

- **Stabilité EBSB** : *un filtre est stable EBSB si à toute Entrée Bornée correspond une Sortie Bornée.*
- Equation de convolution :
 - Un FIR est toujours stable (suite finie)
 - Un IIR peut être instable (suite infinie)
- Confirmé par l'étude de la transmittance :
Rôle fondamental des 0 et des pôles
 - $m = 0$: non récursif ; FIR ; tous zéros ; MA
 - $n=0$: récursif ; IIR ; tous pôles ; AR
 - $m \neq 0$ et $n \neq 0$: récursif ; IIR ; pôle-zéros ; ARMA

$$H(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_m z^{-m}}$$

Stabilité d'un filtre causal

- Stabilité EBSB :
 - Entrée bornée \Rightarrow sortie bornée
 - $\Leftrightarrow \sum |h[n]| < \infty$
 - $\Leftrightarrow H(z) = \sum h[n]z^{-n}$ est absolument convergente pour $|z| < 1$
 - \Leftrightarrow La couronne de convergence de $H(z)$ contient le cercle unité
 - $\Leftrightarrow 0 < r < 1 < R$

- Filtre causal :
 - $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$
 - $\Leftrightarrow H(z) = \sum_0^{+\infty} h[n]z^{-n}$
 - $= \sum_0^{+\infty} \frac{h[n]}{z^n}$
 - $\Rightarrow R = +\infty$

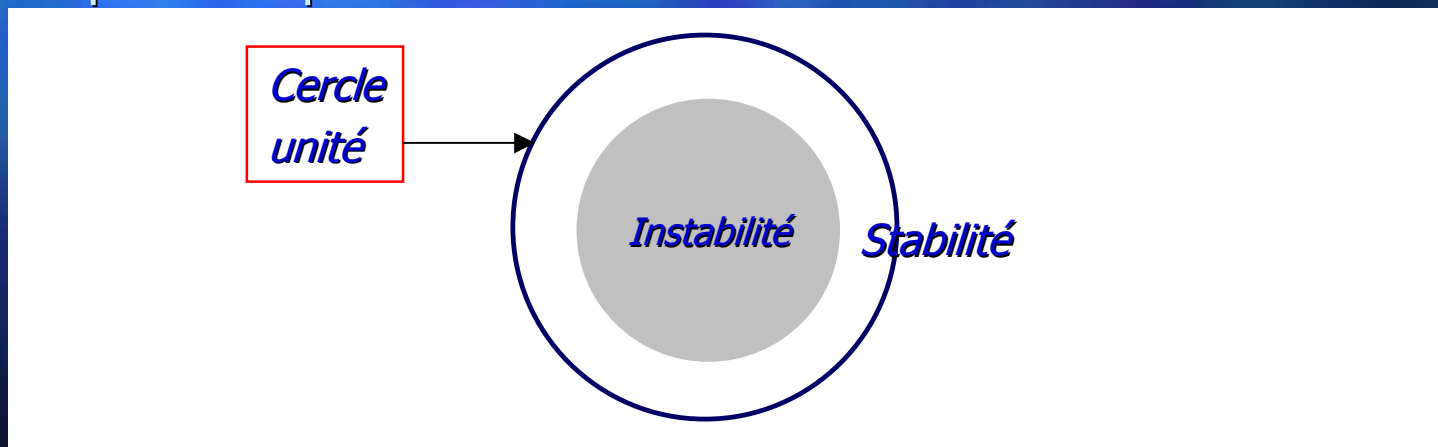
Stabilité d'un filtre causal

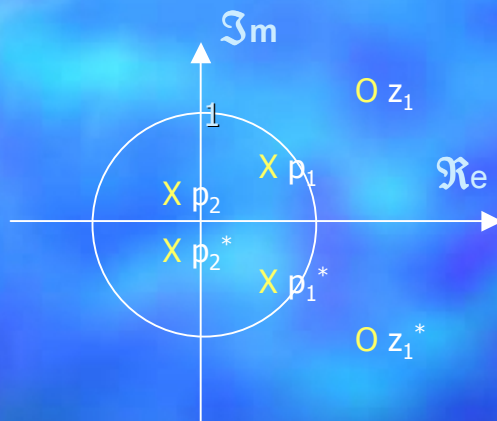
- Filtre causal stable :

$$\begin{cases} 0 < r < 1 \\ R = +\infty \end{cases}$$

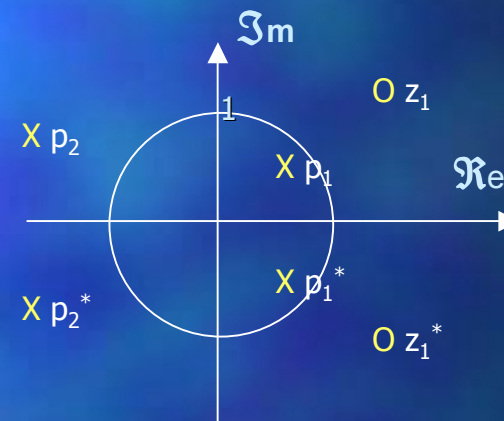
⇒ Tous les pôles p vérifient $|p| < r < 1$

- Un filtre causal est stable EBSB si et seulement si tous les pôles de sa transmittance sont strictement à l'intérieur du cercle unité du plan complexe.





Filtre stable



Filtre instable

$$H(z) = \lambda \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_1^* z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})(1 - p_2^* z^{-1})} = \lambda \frac{z^2 (z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)(z - p_2)(z - p_2^*)}$$

Caractéristiques générales

- Les filtres FIR sont les seuls à permettre un déphasage linéaire (par rapport à la fréquence)
- Les filtres IIR sont en général plus économiques mais plus sujets à des erreurs numériques, même quand ils sont stables (récursivité)
- Un zéro z_i de H placé sur le cercle unité correspond à un zéro de transmission de la fréquence $\nu_i = \text{Arg}(z_i)$.
- Un pôle p_i de H placé sur le cercle unité correspond à une résonance de transmission de la fréquence $\nu_i = \text{Arg}(p_i)$.

Exemple : filtre de Butterworth

Fonctions de Butterworth :

$$|F_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Filtre analogique :

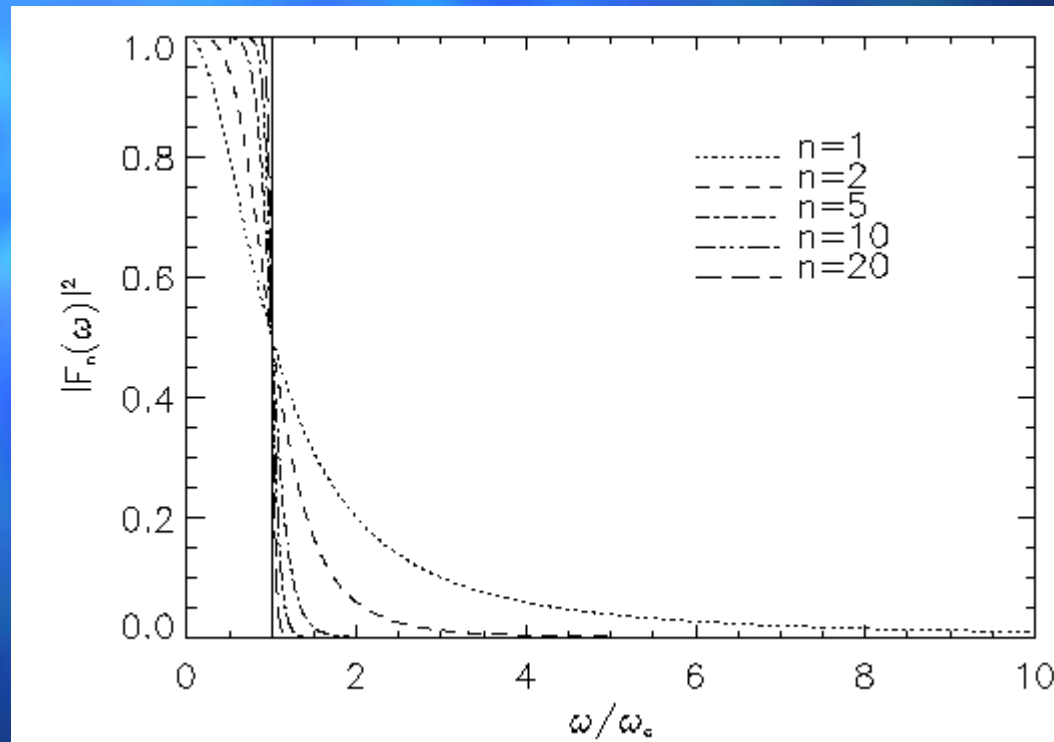
$$|F(\omega)|^2 = |H(p=i\omega)|^2 = |H(p)H(-p)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{i\omega_c}\right)^{2n}}$$

$$\left|H_n\left(s = \frac{p}{\omega_c}\right)\right|^2 = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - \sigma_i)}, \quad \sigma_i : n \text{ pôles à partie réelle négative (stabilité)}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} \exp\left[j\left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)\frac{\pi}{2}\right], & n \text{ pair} \\ \exp\left[j\left(1 + \frac{i}{n}\right)\pi\right], & n \text{ impair} \end{cases}$$

Fonctions de Butterworth



Passage au discret

La transformation bilinéaire est la méthode la plus courante pour synthétiser un filtre numérique à partir d'un filtre analogique

Fonction de transfert en $p \Rightarrow$ Fonction de transfert en z

$$H(p) \Rightarrow H(z)$$

$$p \Rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$T_e = \text{pas d'échantillonnage}$$

Correspondance entre fréquence numérique et fréquence analogique :

$$f^a = \frac{1}{\pi T_e} \tan(\pi f^n T_e)$$



Substitution :

$$s = \frac{1}{\tan(\pi f_c / f_e)} \frac{z - 1}{z + 1}$$



Filtre passe bas \Rightarrow filtre passe bande

$$\omega_p \Rightarrow (\omega_b, \omega_h)$$

$$z^{-1} \Rightarrow \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{1+k} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{1+k} Z^{-1} + 1}$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_h + \omega_b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_h - \omega_b}{2}\right)}$$

$$k = \cot\left(\frac{\omega_h - \omega_b}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$



Aspects pratiques

Choix du filtre :

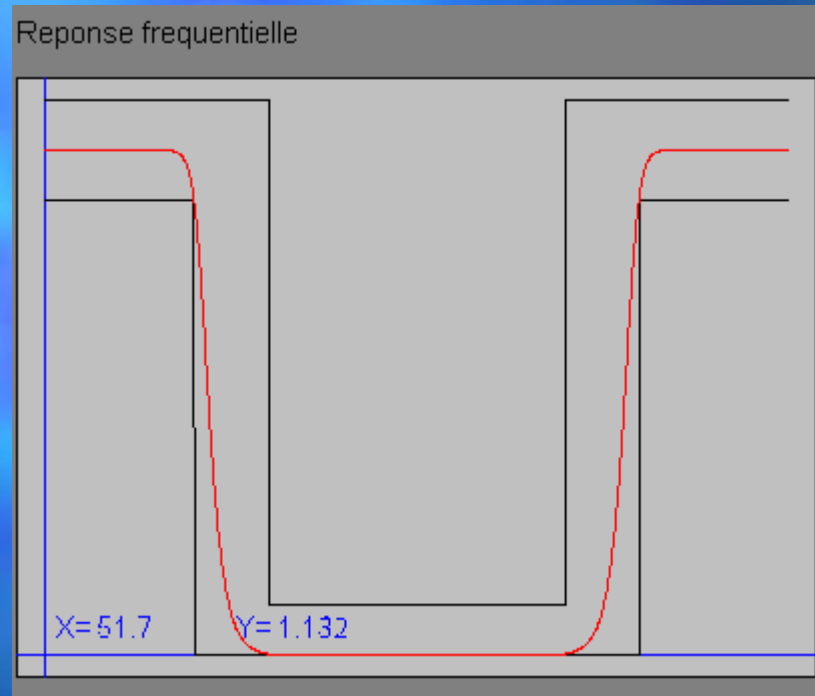
- fonctions de base : Butterworth, Tchebytcheff, elliptique...
- ou filtre spécial (\Rightarrow équations de Yule-Walker...)
- ordre : ordre augmente \Rightarrow
 - @ amélioration des performances en amplitude,
 - @ augmentation du déphasage (en général),
 - @ perte de données au début (phase d'initialisation)
 - @ augmentation du coût en temps de calcul.
- ou gabarit.
- fréquences de transition :
 - @ le filtre utilise des numéros d'événement, pas le temps
 - \Rightarrow utilisation de fréquences normalisées :

En temporel : $t_k = kT_e$

En fréquentiel : $f = \nu f_e \Rightarrow \nu = \frac{f}{f_e}$

$$0 \leq f \leq \frac{f_e}{2} \Rightarrow 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

Gabarit d'un filtre



Aspects pratiques (suite)

Utilisation du filtre :

- *fonction de transfert*
- *programmation en cellule*

Elaboration du filtre : logiciels existants

Utilisation de la fonction de transfert

Fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_m z^{-m}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}} = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

parfois $H(z) = G \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ ce qui permet d'imposer $\alpha_0 = 1$



Equation aux différences :

$$y[k] + \sum_{i=1}^n \beta_i y[k-i] = G \sum_{j=0}^m \alpha_j x[k-j]$$



*Programmation récursive
(boucle sur k)*

$$y[k] = -\sum_{i=1}^n \beta_i y[k-i] + G \sum_{j=0}^m \alpha_j x[k-j]$$

Initialisation :

$$\begin{aligned} y[1] &= G\alpha_0 x[1] \\ y[2] &= -\beta_1 y[1] + G(\alpha_0 x[2] + \alpha_1 x[1]) \\ &\vdots \end{aligned}$$



Représentation en cellules

Il est pratique d'utiliser une factorisation de la fonction de transfert en cellules du second ordre (fournie par les logiciels en général) :

Fonction de transfert :

$$H(z) = \prod_{i=1}^q H_q(z) = \prod_{i=1}^q \frac{N_q^{(2)}(z^{-1})}{D_q^{(2)}(z^{-1})}$$

Réponse impulsionnelle :

$$h[k] = h_1 * h_2 * \dots * h_q[k]$$

Programmation séquentielle des cellules :

$$x \xrightarrow{h_1} x_1 \xrightarrow{h_2} x_2 \dots \xrightarrow{h_{q1}} y$$



Traitement du signal interactif

■ Directement sur le WEB :

- Liste de sites montrants des démos :

http://www.ensicaen.ismra.fr/~furon/Liens_Java/_appletsJava.html

- Un tableau de bord permettant de visualiser à la fois les zéros et les pôles, la RI, la réponse en fréquence pour les filtres les plus courants :

http://wwwext.enssat.fr:8080/RECHERCHE/ARCHI/Enseignement/Signal/V2/Java_Filtre.html

- Conception automatique de filtres, visualisation de leur réponse en fréquence et affichage de la fonction de transfert :

<http://www.nauticom.net/www/jdtaft/>

http://dolphin.wmin.ac.uk/filter_design.html

■ Logiciels :

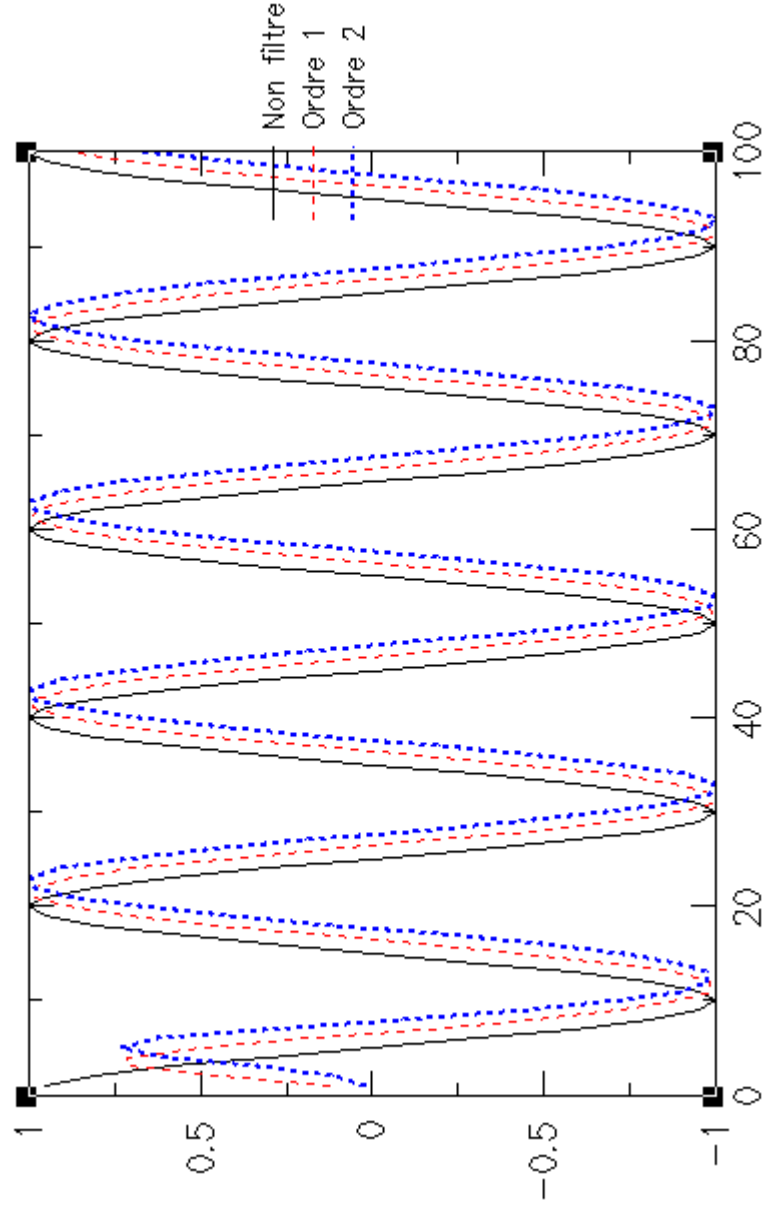
- MATLAB : logiciel universellement utilisé dans le monde du traitement du signal ; puissant mais onéreux.
- SCILAB : logiciel gratuit développé par l'INRIA (<http://www-rocq.inria.fr/scilab/>) offrant des fonctions intéressantes mais peu convivial.
- OCTAVE : une autre alternative gratuite à MATLAB (plus répandue apparemment) : <http://www.octave.org/>

Exemples

- Construction interactive de filtre sur
<http://www.nauticom.net/www/jdtaft/iir.htm>
- Mise en évidence du déphasage
- GOCE :
 $f_b = 0.005 \text{ Hz}, \quad f_h = 0.1 \text{ Hz}$
 $\Rightarrow f_c = 0.0525 \text{ Hz}, \quad \Delta = 0.0995 \text{ Hz}$
 $f_e = 10 \text{ Hz} \Rightarrow v_c = 0.00525, \quad \delta = 0.00995$



Déphasage dans la bande passante



- Le filtre d'ordre 2 a un gain plus proche de 1,...
- ... mais il déphase plus.
- Noter les effets de l'initialisation



Processus MA, AR, ARMA

- Ce sont des modèles de processus stochastiques qui reposent sur la transformation d'un bruit blanc par un filtre linéaire.
- Filtre FIR \Rightarrow Modèle à moyenne mobile (MA)

$$y[k] = \sum_{j=0}^n \alpha_j b[k-j]$$

- Filtre IIR tous pôles \Rightarrow Modèle autorégressif (AR)

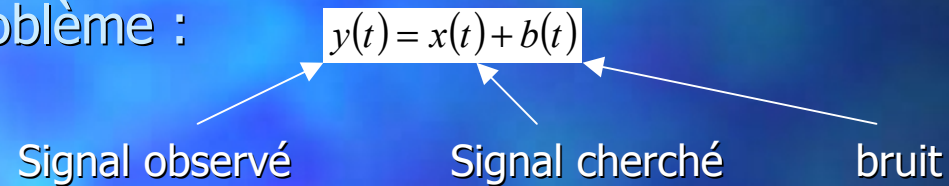
$$y[k] = \sum_{i=0}^m \beta_i y[k-i] + \sigma b[k]$$

- Filtre IIR \Rightarrow Modèle autorégressif à moyenne mobile (ARMA)

$$y[k] = \sum_{i=0}^m \beta_i y[k-i] + \sum_{j=0}^n \alpha_j b[k-j]$$

Filtrage optimal de Wiener

- Position du problème :



On cherche un filtre linéaire $w(t)$ tel que :

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= w(t) * y(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) y(t - \tau) d\tau\end{aligned}$$

Filtre optimal \Rightarrow minimisation de l'erreur d'estimation
 \Leftrightarrow principe d'orthogonalité

$$\begin{aligned}
& E\{(x(t) - \hat{x}(t))y(t - \tau)\} = 0 \quad \forall \tau \\
\Leftrightarrow & E\left\{\left(x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} w(\sigma)y(t - \sigma)\right)y(t - \tau)\right\} = 0 \quad \forall \tau \\
\Leftrightarrow & E\{x(t)y(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\sigma)E\{y(t - \sigma)y(t - \tau)\}d\sigma \\
\Leftrightarrow & C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\sigma)C_{yy}(\tau - \sigma)d\sigma = w * C_{yy}(\tau) \\
& \quad \quad \quad TF \quad \Downarrow \\
& \Gamma_{xy}(f) = W(f)\Gamma_{yy}(f) \\
\Leftrightarrow & W(f) = \frac{\Gamma_{xy}(f)}{\Gamma_{yy}(f)}
\end{aligned}$$

La DSP de y peut-être calculée à partir des observations
mais on n'a en général pas accès à la DSP mutuelle de x et y....

... un truc à essayer

$$\begin{aligned}y(t) = x(t) + b(t) &\Rightarrow C_{yy}(t) = C_{xx}(t) + C_{bb}(t) + C_{xb}(t) \\ &= C_{xx}(t) + C_{bb}(t) \text{ si le bruit et le signal sont non corrélés.} \\ &\Downarrow \\ \Gamma_{yy}(f) &= \Gamma_{xx}(f) + \Gamma_{bb}(f)\end{aligned}$$



$$W(f) = \frac{\Gamma_{yy}(f) - \Gamma_{bb}(f)}{\Gamma_{yy}(f)}$$

Calculable si on a une idée à priori de la DSP du bruit.

Bibliographie

- « Processus stochastiques, estimation et prédiction », cours de M. Gevers et L. Vandendorpe, Université catholique de Louvain.
- Représentation des signaux certains et des systèmes », Dominique Beauvois et Yves Tanguy, Supélec, 01139.
- « Traitement numérique des signaux certains », Yves Tanguy, Supélec, 01140.
- « Filtrage analogique et numérique », cours Dept GEII IUT Bordeaux I, G. Couturier.