

1 Notions de base

- 1.1 Transformée de Laplace
- 1.2 Transformée en Z
- 1.3 Signaux

1.4 Systèmes

1.5 Fonction de transfert

2 Filtrage

2.1 Introduction

2.2 Filtre analogique

2.3 Filtre RIF

2.4 Filtre RII

2.5 Critère de stabilité

2.6 Synthèse d'un filtre RII

2.7 Transformation bilinéaire

2.8 Application au filtre de Butterworth

2.9 Choix d'un filtre RII

2.10 Synthèse d'un filtre RIF

3 Logiciels

3.1 Routines Fortran

3.2 Filtrage avec Matlab

4. Filtre de Vondrak

✓ La transformée de Fourier

⇒ Bien adaptée pour l'analyse des signaux stationnaires et des régimes permanents des systèmes

⇒ Inadéquate pour l'analyse des phénomènes transitoires

✓ La transformée de Laplace se révèle bien mieux adaptée à l'analyse des signaux transitoires

Définition :

$$L\{x(t)\} = X_L(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, \text{ avec } p = \sigma + i\omega \text{ et } \sigma, \omega \in \mathfrak{R}$$

- $X_L(s)$ = fonction complexe de la variable complexe p
- Pour un signal causal ($x(t < 0) = 0$): $X_L(i2\pi f) = X(f)$
- X_L = généralisation de la T.F. dans le plan complexe
- X_L = outil de caractérisation des systèmes de traitement des signaux

Transformée inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} X_L(p) e^{pt} dp$$

Propriétés de la transformée de Laplace:

linéarité: $L\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} = a \cdot X_L(p) + b \cdot Y_L(p)$

décalage temporel: $L\{x(t - t_0)\} = X_L(p) \cdot e^{-pt_0}$

décalage 'fréquentiel': $L\{x(t) \cdot e^{-at}\} = X_L(p + a)$

dérivation : $L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = p \cdot X_L(p) - x(0)$ ← signal à t=0

dérivation multiple : $L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n \cdot X_L(p) - p^{n-1} \cdot x(0) - p^{n-2} \cdot \frac{df(0)}{dt} - \dots - \frac{df^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$

intégration : $L\left\{\int_0^t x(t') dt'\right\} = \frac{X_L(p)}{p}$

Produit de convolution :
$$\begin{cases} L\{x(t) * y(t)\} = X_L(p) Y_L(p) \\ L\{x(t) y(t)\} = X_L(p) * Y_L(p) \end{cases}$$

FILTRAGE NUMERIQUE - Transformée en Z (rappel)

- ✓ Comme pour les signaux analogiques, la transformée en Z est mieux adaptée à l'analyse des régimes transitoires que la transformée de Fourier

Définition

$$T_z\{x[k]\} = X_z(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot z^{-k}, \quad \text{avec } z \text{ complexe}$$

"Transformée en z de $x[k]$ "

- $X_z(z)$ = fonction complexe de la variable complexe z
- Pour les signaux usuels le *domaine de convergence* est un anneau centré sur l'origine du plan complexe, de rayon R_1 et R_2 (c'est-à-dire que $X_z(z)$ est défini pour $R_1 < |z| < R_2$)

$$R_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x[k]|^{1/k}$$

$$R_2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} |x[-k]|^{-1/k}$$

- pour $z = e^{i2\pi f}$, $X_z(z) \equiv X(f) \Rightarrow X_z =$ généralisation de la T.F.
- $X_z =$ outil de caractérisation des systèmes de traitement numérique des signaux

Propriétés de la transformée en Z:

Symétrie : $si\ x[k] \in \Re \Leftrightarrow X^*(z) = X(z^*)$

Théorème du retard : $TZ(x[k - k_0]) = X(z)z^{-k_0}$

Translation fréquentielle : $TZ(x[k]e^{j2\pi k\lambda_0}) = X(ze^{-j2\pi\lambda_0})$

Amortissement géométrique : $TZ(r^k x[k]) = X(z/r)$

Réversibilité : $TZ(x[-k]) = X(z^{-1})$

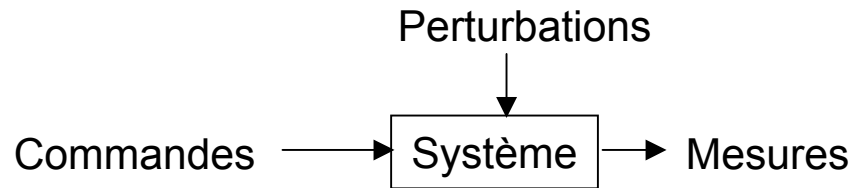
Produit de convolution : $TZ(h[k] * x[k]) = H(z)X(z)$

- ✓ On appelle signal une fonction d'une ou plusieurs variables engendrée par un phénomène physique
- ✓ Classification des signaux:
 - un signal **à temps continu** (signal analogique) $x(t)$ correspond à une grandeur dont la valeur existe à chaque instant t
 - un signal **à temps discret** $x[n]$ correspond à une grandeur dont la valeur n'est disponible qu'à certains instants t
 - un signal **échantillonné** est un cas particulier de signal discret, obtenu en faisant une mesure à intervalles de temps réguliers d'une grandeur analogique $x[n]=x(nT_e)$

✓ Classification des signaux:

- un signal **d'énergie finie** si $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ est convergente
- un signal **de puissance finie** si $P(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ est bornée
- un signal est **déterministe** si ses valeurs peuvent être prédites de façon exacte par un modèle mathématique
- un signal **aléatoire** (ou **stochastique**) n'est pas entièrement prédictible et ses valeurs sont considérées comme dépendant en partie du hasard
- un signal est dit **causal** s'il est identiquement nul pour les instants négatifs

- ✓ Un système est un ensemble de dispositifs qui établit un lien de cause à effet entre des signaux d'entrée (excitations) et des signaux de sortie (réponses ou mesures)
- ✓ Il faut distinguer deux types d'excitations : les commandes et les perturbations



- ✓ De façon générale, la relation de cause à effet qui lie la commande $x(t)$ et la mesure $y(t)$ est de la forme

$$y(t) = S(x; t)$$

- ✓ Un système est **linéaire** s'il vérifie le principe de superposition

$$S(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; t) = \lambda_1 S(x_1; t) + \lambda_2 S(x_2; t)$$

- ✓ Un tel système est alors parfaitement caractérisé par ses réponses impulsionnelles

$$\text{Si } x(t) = A_1 \delta(t - t_1) + A_2 \delta(t - t_2)$$

$$\begin{aligned} \text{alors } y(t) &= A_1 S[\delta(t - t_1); t] + A_2 S[\delta(t - t_2); t] \\ &= A_1 k(t, t_1) + A_2 k(t, t_2) \end{aligned}$$

où $k(t, t_1)$ correspond à la réponse du système à une impulsion produite à l'instant t_1

- ✓ Généralisation à un signal quelconque :

$$\forall x(t), \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \delta(t - u) du$$

$$\text{donc } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) k(t, u) du$$

- ✓ La réponse d'un système linéaire s'écrit donc comme moyenne pondérée des valeurs de l'excitation correspondante.

✓ Un système est dit **intemporel** (ou stationnaire ou invariant par translation temporelle) si sa réponse à une excitation décalée $x(t-t_0)$ est la version décalée de la réponse correspondante $y(t-t_0)$

✓ Pour un système linéaire intemporel, la réponse à une impulsion produite à l'instant t_1 est égale à la version décalée de t_1 de la réponse du système à une impulsion produite à l'instant $t=0$

$$k(t, t_1) = S[\delta(t - t_1); t] = S[\delta(t); t - t_1] = k(t - t_1, 0)$$

✓ Tout système linéaire intemporel est donc parfaitement caractérisé par un signal particulier qui correspond à sa réponse à une impulsion $h(t)=k(t,0)$

✓ La réponse à un signal quelconque s'écrit donc comme le produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionnelle

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)x(t - v)dv$$

- ✓ Propriété des systèmes linéaires intemporels : leur réponse à une excitation sinusoïdale (réponse harmonique) est une sinusoïde de même fréquence, éventuellement atténuée et déphasée

Si $x(t) = e^{\lambda t} e^{j\omega t}$ alors

$$\begin{aligned} y(t) = S(x;t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{\lambda(t-v)} e^{j\omega(t-v)} dv \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{-\lambda v} e^{-j\omega v} dv \right\} e^{\lambda t} e^{j\omega t} \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{-\lambda v} e^{-j\omega v} dv \right\} x(t) \end{aligned}$$

⏟
Facteur d'atténuation
et de déphasage

- ✓ Un système est **causal** si sa réponse ne précède jamais l'excitation qui lui correspond. Ainsi la réponse d'un tel système à une excitation causale est un signal causal.
- ✓ Un système est dit **réel** si sa réponse $y(t)$ à une excitation $x(t)$ réelle quelconque est un signal réel. La plupart des phénomènes physiques constituent des systèmes réels.
- ✓ Un système est **stable** si sa réponse $y(t)$ à une excitation bornée quelconque est un signal borné.

- ✓ Une fonction de transfert est une représentation mathématique de la relation entre l'entrée et la sortie d'un système
- ✓ Pour les signaux continus, la fonction de transfert est le rapport entre la transformée de Laplace de $y(t)$ sur la transformée de Laplace de $x(t)$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

- ✓ Pour les signaux discrets, la fonction de transfert s'exprime à partir des transformées en Z des signaux d'entrée et de sortie

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

FILTRAGE NUMERIQUE - Fonction de transfert

✓ Exemple d'un système dynamique décrit par une équation différentielle à coefficients constants:

$$\sum_{n=0}^q a_n \frac{d^n y}{dt^n}(t) = \sum_{m=0}^p b_m \frac{d^m x}{dt^m}(t) \text{ avec } p < q$$

✓ Transformée de Laplace de l'équation différentielle :

$$a_0 Y(p) + \sum_{n=1}^q a_n \left(p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k y}{dt^k}(0^+) p^{n-k-1} \right) = b_0 X(p) + \sum_{m=1}^p b_m \left(p^m X(p) - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{d^l x}{dt^l}(0^+) p^{m-l-1} \right)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \underline{Y_L(p)} + \underline{Y_F(p)}$$

Réponse libre

$$Y_L(p) = \frac{\sum_{n=1}^q \sum_{k=0}^{n-1} a_n \frac{d^k y}{dt^k}(0^+) p^{n-k-1} - \sum_{m=1}^p \sum_{l=0}^{m-1} b_m \frac{d^l x}{dt^l}(0^+) p^{m-l-1}}{\sum_{n=0}^q a_n p^n}$$

Réponse forcée

$$Y_F(p) = \frac{\sum_{m=0}^p b_m p^m}{\sum_{n=0}^q a_n p^n} X(p)$$

Fonction de Transfert $H(p) = \frac{Y_F(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{m=0}^p b_m p^m}{\sum_{n=0}^q a_n p^n}$

✓ **Exemple d'un système linéaire intemporel discret** décrit par une équation aux différences à coefficients constants:

$$\sum_{i=0}^p a[i]y[n-i] = \sum_{j=0}^q b[j]x[n-j] \text{ avec } a[0] \neq 0$$

✓ Transformée en Z de l'équation aux différences :

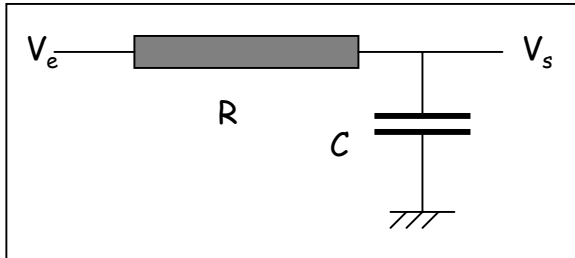
$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^p a[i]y[n-i] \right) z^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^q b[j]x[n-j] \right) z^{-n} \\ \sum_{i=0}^p a[i] \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-i] z^{-(n-i)} \right) z^{-i} &= \sum_{j=0}^q b[j] \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-j] z^{-(n-j)} \right) z^{-j} \\ \left(\sum_{i=0}^p a[i]z^{-i} \right) \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} \right)}_{Y(z)} &= \left(\sum_{j=0}^q b[j]z^{-j} \right) \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \right)}_{X(z)} \end{aligned}$$

$$\text{Fonction de Transfert } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^q b[j]z^{-j}}{\sum_{i=0}^p a[i]z^{-i}}$$

- ✓ Dans de nombreux cas, les localisations fréquentielles du signal recherché et des perturbations sont connues \Rightarrow envie de de construire un nouveau signal en excluant les perturbations
- ✓ C'est exactement le but du filtrage déterministe
- ✓ Il consiste à concevoir et à utiliser un système linéaire causal intemporel dont la fonction de transfert répond aux spécifications de l'utilisateur exprimé dans un gabarit fréquentiel.
- ✓ Nous allons montrer la nécessité de développer des formes standards de filtres analogiques et le besoin d'une méthodologie de conception des filtres numériques

FILTRAGE NUMERIQUE - Introduction

- ✓ Exemple d'un filtre passe-bas d'ordre 1:



Equation différentielle $V_e(t) = V_s(t) + RC \frac{dV_s(t)}{dt}$

Fonction de transfert $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$

⇒ Pente d'atténuation de -20dB/décade

- ✓ Pour améliorer les performances de filtrage (Pente d'atténuation inférieure à -20dB/décade)

⇒ N cellules d'ordre 1 en cascade par exemple

$$a_N \frac{d^N V_s(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} V_s(t)}{dt^{N-1}} + \dots + V_s(t) = V_e(t)$$

$$H(p) = \frac{1}{a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + 1}$$

⇒ Pente d'atténuation de -Nx20dB/décade

FILTRAGE NUMERIQUE - Introduction

- ✓ Passage au filtre numérique : il suffit d'échantillonner le signal analogique d'entrée aux instants nT_e où T_e est la période d'échantillonnage, puis de faire subir à ces échantillons une opération mathématique.
- ✓ Filtre passe-bas d'ordre 1 : on fait correspondre à l'équation différentielle une équation aux différences finies

$$V_e(nT_e) = V_s(nT_e) + RC \frac{V_s(nT_e) - V_s((n-1)T_e)}{T_e}$$

- ✓ D'où la relation de récurrence :

$$V_s(nT_e) = \left[\frac{RC}{T_e + RC} \right] V_s((n-1)T_e) + \left[\frac{RC}{T_e + RC} \right] V_e(nT_e)$$

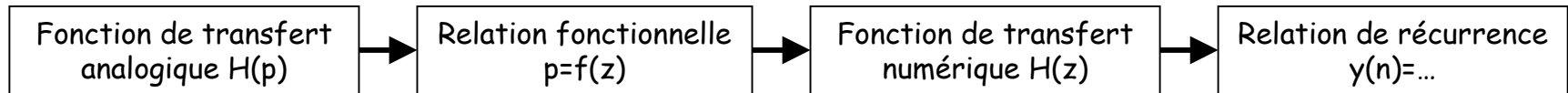
- ✓ Filtre d'ordre N : Il faudrait faire correspondre à l'équation différentielle d'ordre N une équation aux différences finies \Rightarrow démarche très « lourde »
- ✓ Nécessité de développer une méthodologie simple permettant d'obtenir rapidement les fonctions de récurrence des filtres numériques
- ✓ Les coefficients des filtres sont calculés à partir de fonctions modèles: réponse impulsionnelle ou réponse en fréquence de filtres analogiques connus

FILTRAGE NUMERIQUE - Introduction

- ✓ Dans le cas où la fonction modèle est la réponse impulsionnelle, les éléments $h(k)$ de la réponse impulsionnelle numérique se calculent à partir de la réponse impulsionnelle analogique $h(t)$. D'où, la fonction de transfert en Z du filtre:

$$H(z) = \sum_k h(k)z^{-k} \Rightarrow \text{Relation de récurrence}$$

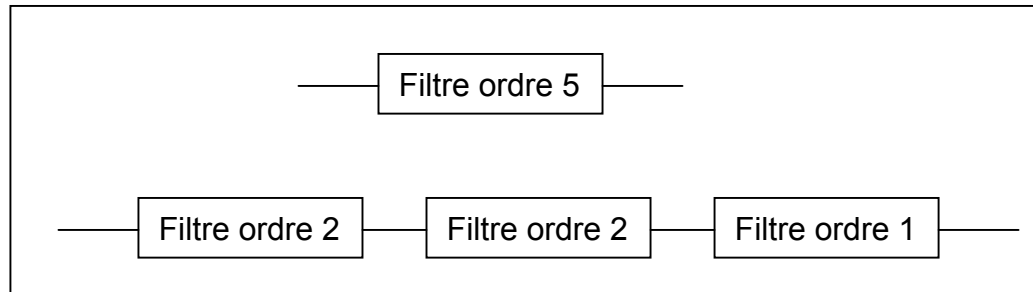
- ✓ Dans le cas où la fonction modèle est la réponse en fréquence, la procédure d'obtention de la relation de récurrence est la suivante:



- ✓ Un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$:

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i p^i}{\sum_{j=0}^N b_j p^j} \quad \text{avec } M \leq N$$

- ✓ Ordre du filtre définit le comportement asymptotique quand ω tend vers zéro ou l'infini. Par exemple, filtre d'ordre 4 \Rightarrow pente de -80dB/décade.
- ✓ Tout filtre peut être réalisé à partir de filtre d'ordre deux et un.



- ✓ Filtre d'ordre 1 : $H(p)=1/(1+\tau p)$ pour un passe-bas et $H(p)=\tau p/(1+\tau p)$ pour un passe haut.

✓ filtre passe-bas d'ordre deux:

$$H(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \longrightarrow$$

Forme canonique

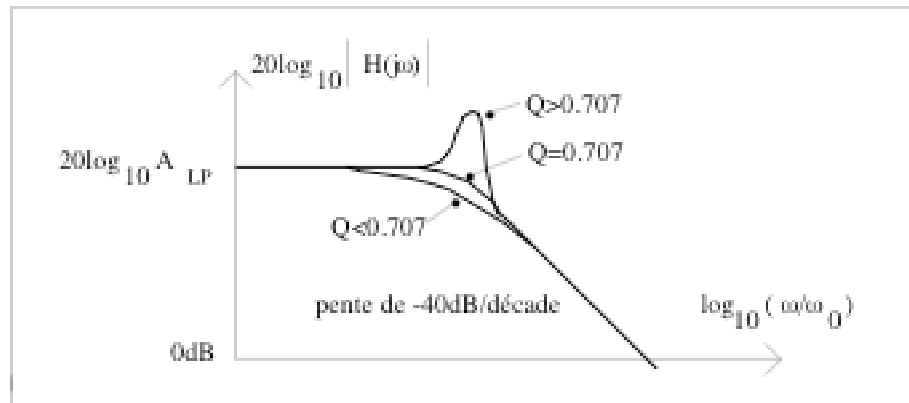
$$H(p) = A_{LP} \frac{\omega_0^2}{p^2 + p \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Gain basse
fréquence

Coefficient de
surtension

En variable réduite $s=p/\omega_0$

$$H(s) = A_{LP} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{Q} + 1}$$



$Q=0.707 \Rightarrow$ Butterworth

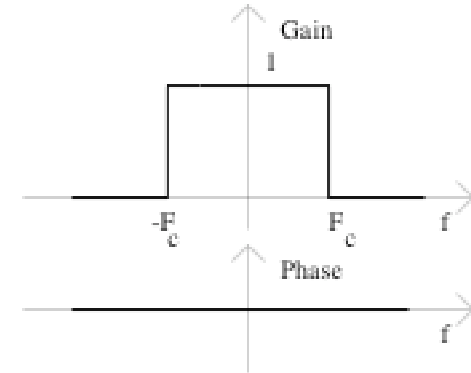
$Q=0.577 \Rightarrow$ Bessel

$Q=0.863 \Rightarrow$ Chebyshev (ripple band = 0.5dB)

$Q=1.128 \Rightarrow$ Chebyshev (ripple band = 2dB)

- ✓ Remarque: le filtre passe-bas idéal serait le filtre suivant:

$$H(f) = 1 \text{ si } -F_c < f < F_c \\ = 0 \text{ sinon}$$



- ✓ Réponse impulsionnelle : $h(t) = \frac{\sin(2\pi F_c t)}{\pi t}$

⇒ Ce filtre est irréalisable car **non causal** (la réponse précède l'entrée)

- ✓ Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui fait correspondre à une suite d'échantillons $x(n)$ une autre suite d'échantillons $y(n)$:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j)$$

Filtre RIF

- ✓ Les filtres à réponse impulsionnelle finie (□RIF ou FIR). Les coefficients a_j sont nuls :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

- ✓ La fonction de transfert des filtres RIF s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

- ✓ $H(z)$ est aussi la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $\Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$
 - $\Rightarrow b_i = h(i)$ et les coefficients $h(k) = 0$ pour $k > M$
 - \Rightarrow d'où filtre à réponse impulsionnelle finie
 - \Rightarrow filtre toujours stable car la sortie revient toujours à zéro après suppression de l'excitation

Filtre RII

- ✓ Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (□RII ou IIR). Les coefficients a_j sont non-nuls :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j)$$

- ✓ La fonction de transfert des filtres RII s'écrit :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

- ✓ La réponse impulsionnelle de ces filtres est infinie
⇒ Ces filtres peuvent devenir instables

✓ La décomposition en éléments simples de $H(z)$ conduit :

- soit à des termes de la forme $\frac{A}{(1-az^{-1})}$ pour un pôle situé en $z=a$

- soit à des termes de la forme $\frac{B+Cz^{-1}}{(1-2\beta z^{-1}+\alpha^2 z^{-2})}$ pour des pôles

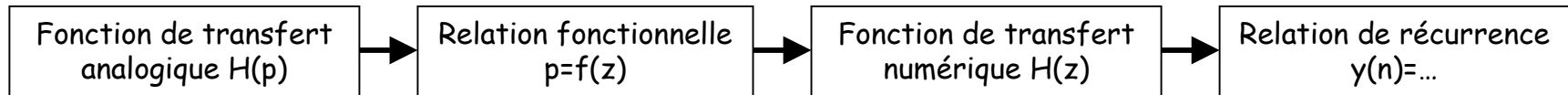
imaginaires conjugués situés en $z_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ de module $|z_{1,2}| = \alpha$

✓ Les transformées inverses de ces deux expressions sont des suites qui convergent uniquement si a et α sont inférieurs à l'unité

✓ Un système numérique est stable si le module des pôles reste inférieur à l'unité

FILTRAGE NUMERIQUE - Synthèse d'un filtre RII

- ✓ La procédure d'obtention de la relation de récurrence est la suivante:



- ✓ Deux difficultés apparaissent:

- Calculer la fonction de transfert numérique $H(z)$ à partir de la fonction de transfert analogique $H(p)$ \Rightarrow transformation bilinéaire
- Calculer les coefficients a_j et b_i de $H(z)$ pour obtenir la relation de récurrence à appliquer \Rightarrow calcul des pôles de $H(p)$

FILTRAGE NUMERIQUE - Transformation bilinéaire

✓ On définit la variable de Laplace réduite $s=p/\omega_c$ où $\omega_c=2\pi f_c$ avec f_c la fréquence de coupure du filtre analogique modèle

✓ On établit une relation entre la variable s et la variable z . Les variables z et ω sont liées par la relation suivante :

$$z = \exp\left(j2\pi \frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

où $\omega_e=2\pi f_e$ avec f_e la fréquence d'échantillonnage. On en déduit une relation entre p et z : $p=f_e \ln(z)$

✓ Si p/f_e reste voisin de zéro alors z est voisin de 1. En posant $z=(1+x)/(1-x)$ avec $x \ll 1$, on peut alors montrer que :

$$\ln(z) \approx 2 \frac{z-1}{z+1}$$

✓ D'où l'expression théorique de la transformation bilinéaire:

$$p = 2f_e \frac{z-1}{z+1}$$

⇒ cette transformation engendre une distorsion des fréquences entre le domaine analogique et le domaine numérique

✓ Dans la pratique, pour minimiser la distorsion autour de la fréquence de coupure du filtre utilisé, on utilise la formule suivante:

$$s = \frac{1}{\tan(\pi f_c / f_e)} \frac{z-1}{z+1}$$

- ✓ L'expression de la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth d'ordre n est :

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

- ✓ $|H_n(0)|^2=1$ et $|H_n(\omega)|^2$ tend vers 0 quand ω tend vers l'infini. Au voisinage de ω_c :

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2\omega_c}(\omega - \omega_c) + O((\omega - \omega_c)^2)$$

⇒ Ceci montre que la pente de $|H_n(\omega)|^2$ augmente avec l'ordre n mais aussi avec $1/\omega_c$: **le filtre est d'autant plus sélectif que la fréquence de coupure est basse**

- ✓ La fonction de transfert en variable de Laplace réduite est :

$$|H_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

- ✓ Comme $H_n(s)$ est la fonction de transfert d'un système réel, ses coefficients sont réels. De plus, comme $|H_n(s)|^2$ est paire, $|H_n(s)| = |H_n(-s)|$. On peut alors montrer que $H_n(s)$ est la fraction rationnelle regroupant les n pôles de $|H_n(s)|^2$ se trouvant à gauche de l'axe imaginaire (σ_i) :

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - \sigma_i)}$$

✓ Si n est pair, on peut montrer que :

$$\sigma_i = \exp\left[j\left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad i = [1, \dots, n]$$

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{s^2 + 2s \sin\left[\left(\frac{2i-1}{n}\right)\frac{\pi}{2}\right] + 1}$$

✓ Si n est impair, on peut montrer que :

$$\sigma_i = \exp\left[j\left(1 + \frac{i}{n}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad i = \left[-\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}\right]$$

$$H_n(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{s^2 + 2s \cos\left[\left(\frac{i}{n}\right)\pi\right] + 1}$$

✓ Par exemple pour $n=2$ et $n=3$:

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

- ✓ En appliquant la transformation bilinéaire, on obtient l'expression de la fonction de transfert numérique :

$$H_n(z) = \frac{(z+1)^n}{\prod_{i=1}^n [k(z-1) - \sigma_i(z+1)]} \quad \text{avec } k = [\tan(\pi f_c / f_e)]^{-1}$$

- ✓ On en déduit que les pôles de $H_n(z)$ sont :

$$z_i = \frac{k + \sigma_i}{k - \sigma_i}$$

- ✓ $H_n(z)$ est une fraction rationnelle qui s'écrit :

$$H_n(z) = \frac{(z+1)^n}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}$$

- ✓ Connaissant les pôles de $H_n(z)$, on peut en déduire par identification les coefficients a_i et b_j , d'où la relation de récurrence \Rightarrow méthode très « lourde » lorsque n est grand

✓ Il est aussi possible de décomposer $H_n(z)$ en cellule d'ordre 2 :

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \left[\frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + a_2^{(i)}z^{-2}}{b_0^{(i)} + b_1^{(i)}z^{-1} + b_2^{(i)}z^{-2}} \right] \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$H_n(s) = \left[\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+k}z^{-1} \right] \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + a_2^{(i)}z^{-2}}{b_0^{(i)} + b_1^{(i)}z^{-1} + b_2^{(i)}z^{-2}} \right] \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

✓ l'expression des coefficients est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(i)} &= \frac{1}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ a_1^{(i)} &= \frac{2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ a_2^{(i)} &= \frac{1}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ b_0^{(i)} &= 1 \\ b_1^{(i)} &= \frac{2 - 2k^2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ b_2^{(i)} &= \frac{k^2 + 2\Re(\sigma_i)k + 1}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \end{aligned} \right\} \text{ pour } i \in \left[1, \frac{n}{2} \right]$$

FILTRAGE NUMERIQUE - Application au filtre de Butterworth

- ✓ Pour passer d'un filtre passe-bas à un filtre passe-haut de même fréquence de coupure, il suffit de soustraire le résultat du filtre passe-bas au signal original.
- ✓ En terme de fonction de transfert, cela revient à remplacer s par $1/s$
- ✓ D'où l'expression de la fonction de transfert numérique:

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \left[\frac{c_0^{(i)} + c_1^{(i)}z^{-1} + c_2^{(i)}z^{-2}}{d_0^{(i)} + d_1^{(i)}z^{-1} + d_2^{(i)}z^{-2}} \right] \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$H_n(s) = \left[\frac{\frac{k}{1+k} - \frac{k}{1+k}z^{-1}}{1 - \frac{k-1}{1+k}z^{-1}} \right] \prod_{i=1}^{n/2} \left[\frac{c_0^{(i)} + c_1^{(i)}z^{-1} + c_2^{(i)}z^{-2}}{d_0^{(i)} + d_1^{(i)}z^{-1} + d_2^{(i)}z^{-2}} \right] \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{(i)} = \frac{k^2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ c_1^{(i)} = \frac{-2k^2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ c_2^{(i)} = \frac{k^2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ d_0^{(i)} = 1 \\ d_1^{(i)} = \frac{2 - 2k^2}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \\ d_2^{(i)} = \frac{k^2 + 2\Re(\sigma_i)k + 1}{k^2 - 2\Re(\sigma_i)k + 1} \end{array} \right. \quad \text{pour } i \in \left[1, \frac{n}{2} \right]$$

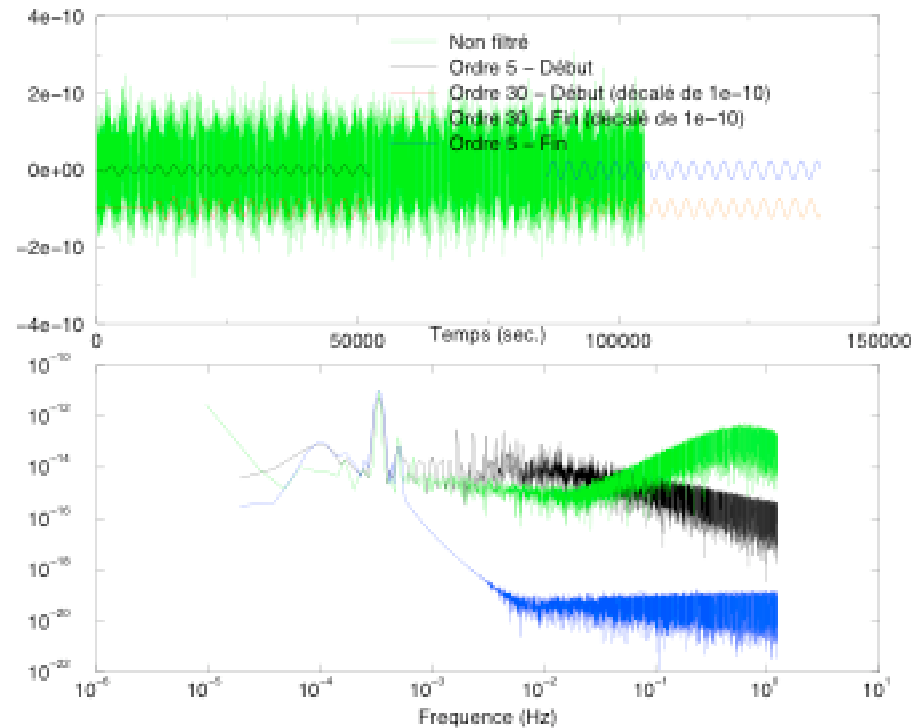
FILTRAGE NUMERIQUE - Choix d'un filtre RII

✓ Comment choisir l'ordre d'un filtre?

⇒ A priori il suffit d'augmenter l'ordre à volonté pour obtenir une sélectivité maximale

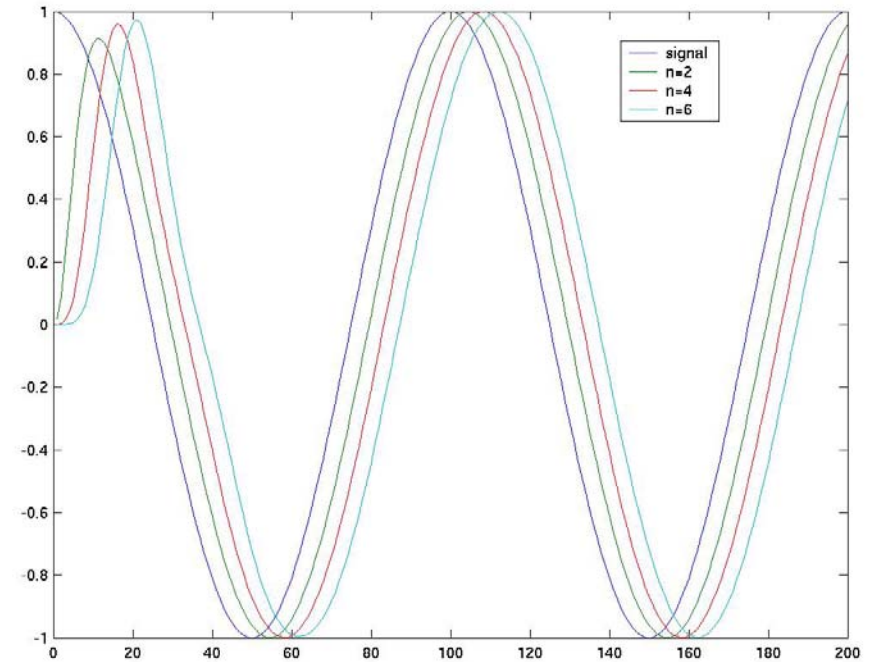
✓ Il faut tout de même garder en mémoire les points suivants:

✓ Un filtre RII a une période d'initialisation avant le régime permanent qui augmente avec l'ordre du filtre



FILTRAGE NUMERIQUE - Choix d'un filtre RII

✓ Un filtre RII déphase le signal. Le déphasage augmente avec l'ordre du filtre.



✓ Problème numérique lorsque $k=1/\tan(\pi f_c/f_e)$ très grand. Le dénominateur de $H_n(z)$ contient un terme en k^n et un terme égal à un. Par exemple si $f_e=10\text{Hz}$ et $f_c=3\cdot 10^{-4}\text{Hz} \Rightarrow k=10^4$. Avec 16 chiffres significatifs, il ne faut pas dépasser l'ordre 4.

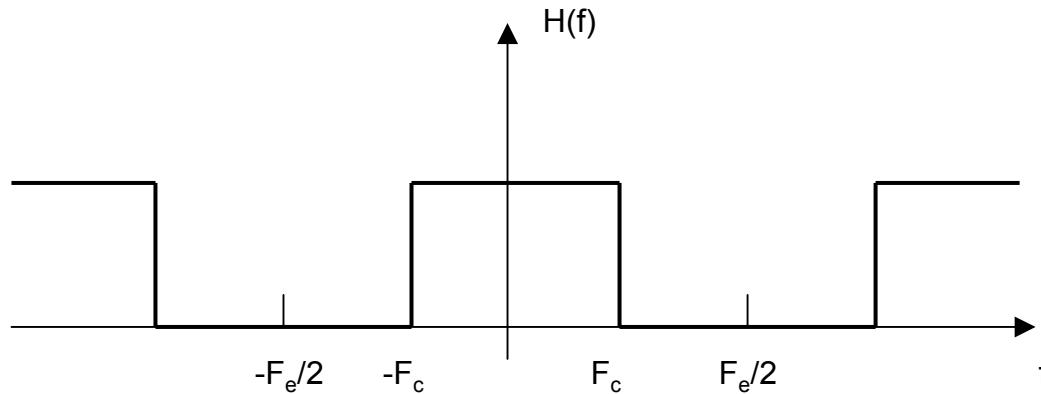
⇒ Utiliser plus de chiffres significatifs pour calculer puis appliquer le filtre

⇒ Sous échantillonner si cela n'entraîne pas de perte du signal utile (filtre pass-bas avant pour éviter le phénomène de repliement)

✓ Si $k \gg 1$ alors les pôles sont proches du cercle unité. Une faible erreur numérique peut rendre le filtre instable.

FILTRAGE NUMERIQUE - Synthèse d'un filtre RIF

- ✓ Le calcul des coefficients repose sur l'utilisation de la transformée numérique et des fenêtres spectrales (rectangulaire, Hanning, Hamming,...)
- ✓ Exemple: Calcul du filtre RIF ayant la fonction de transfert suivante



- ✓ Les échantillons de la réponse impulsionnelle sont calculés de la manière suivante:

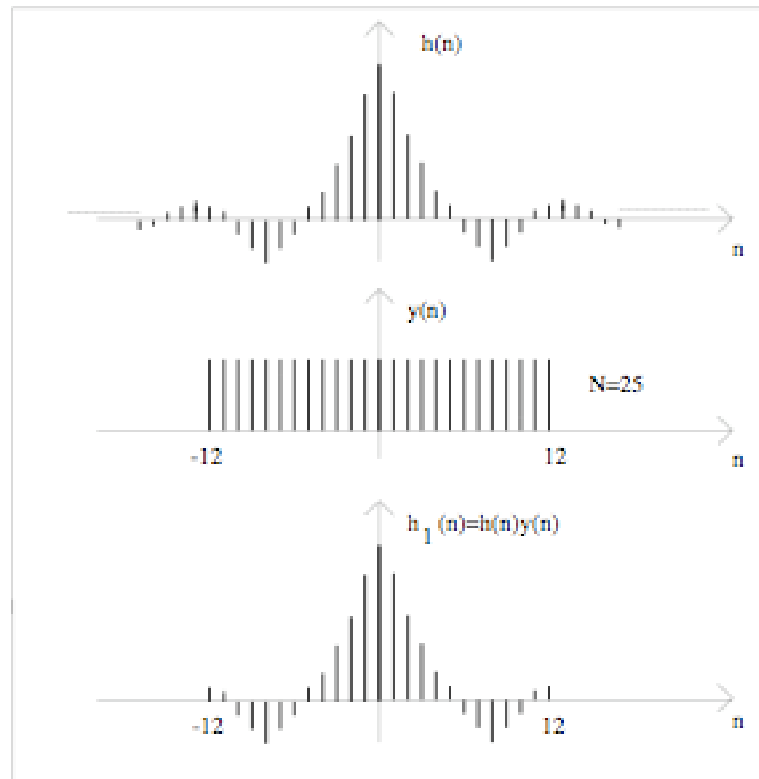
$$h(n) = T_e \int_{-F_c/2}^{F_c/2} e^{j2\pi f n T_e} df = \frac{\sin(2\pi F_c n T_e)}{\pi n}$$

- ✓ Deux problèmes :
 - La suite des échantillons est infinie
 - $h(n)$ est non causal

FILTRAGE NUMERIQUE - Synthèse d'un filtre RIF

- ✓ Le premier problème est résolu en tronquant $h(n)$
- ✓ Pour ce faire, on multiplie $h(n)$ par une fenêtre de pondération (rectangulaire, hanning,...)

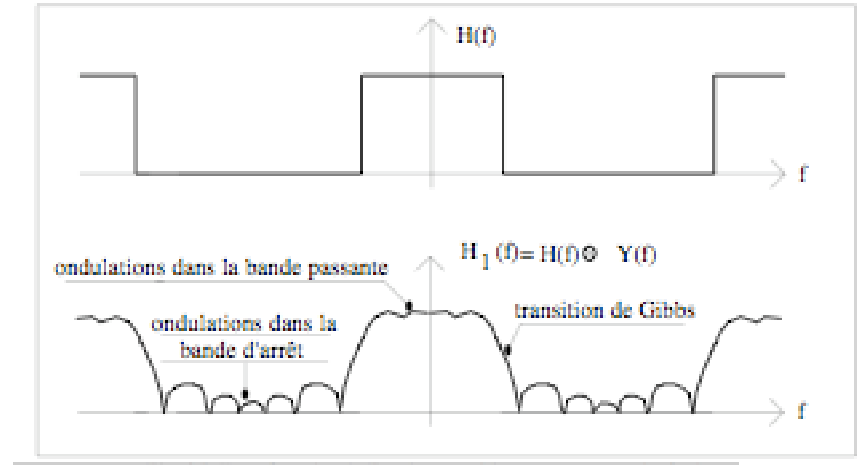
$$h_1(n) = h(n)y(n) \longrightarrow H_1(f) = H(f) * Y(f)$$



FILTRAGE NUMERIQUE - Synthèse d'un filtre RIF

✓ Conséquences:

- la transition entre la bande passante et la bande d'arrêt (transition de Gibbs) est moins abrupte
- l'apparition d'ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt

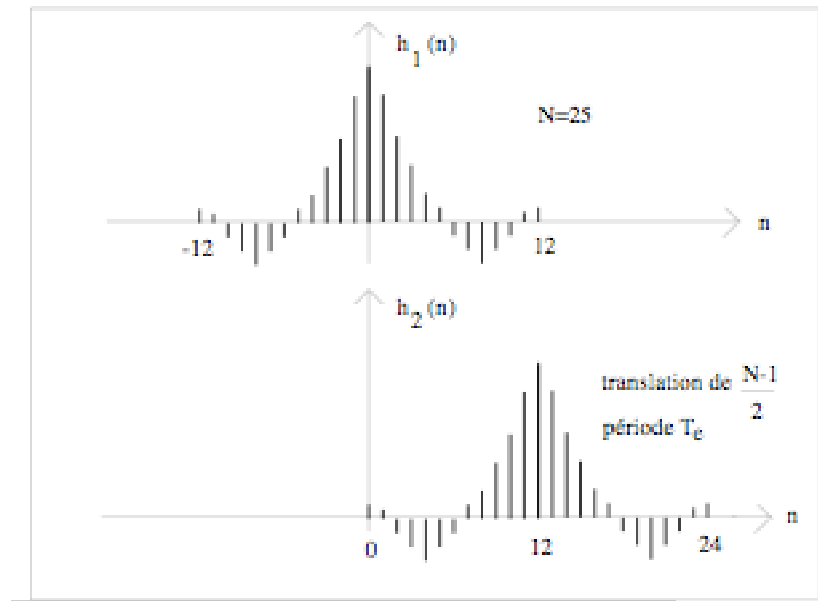


- ✓ Selon les types de fenêtre, la transition de Gibbs et les ondulations sont plus ou moins prononcés

FILTRAGE NUMERIQUE - Synthèse d'un filtre RIF

- ✓ Pour supprimer la non-causalité du filtre, il faut tradater les échantillons $h(n)$ de manière à rendre le filtre causal

$$h_2(n) = h_1\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$



- ✓ Cette translation ne modifie pas le module de la fonction de transfert du filtre (pas de modification des capacités de réjection) mais par contre il y a une modification linéaire de la phase

$$\text{Arg}[H_2(f)] = -2\pi f \left(\frac{N-1}{2} \right) T_e$$

FILTRAGE NUMERIQUE - Comparaison RII et RIF

Type de filtre	RII	RIF
Méthode de calcul des coefficients	Fonctions modèles (Butterworth,...)	Fenêtrage (rectangulaire, Hanning,...)
Avantages	Peu de coefficients: -> rapidité de calcul -> peu d'espace mémoire	Phase linéaire (pas de déformation des signaux) Toujours stable
Inconvénients	Phase non linéaire Risque d'instabilité	Nombre de coefficients élevé: -> temps de calcul long ->espace mémoire important

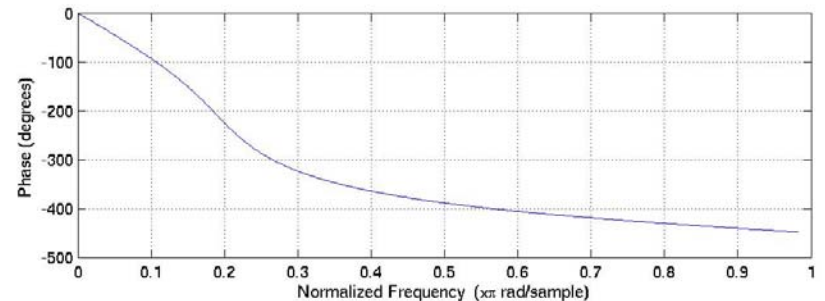
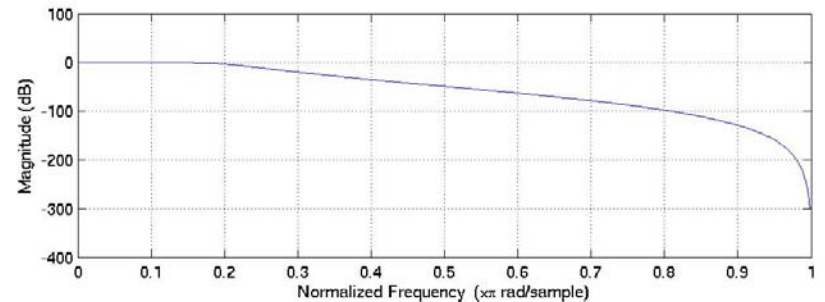
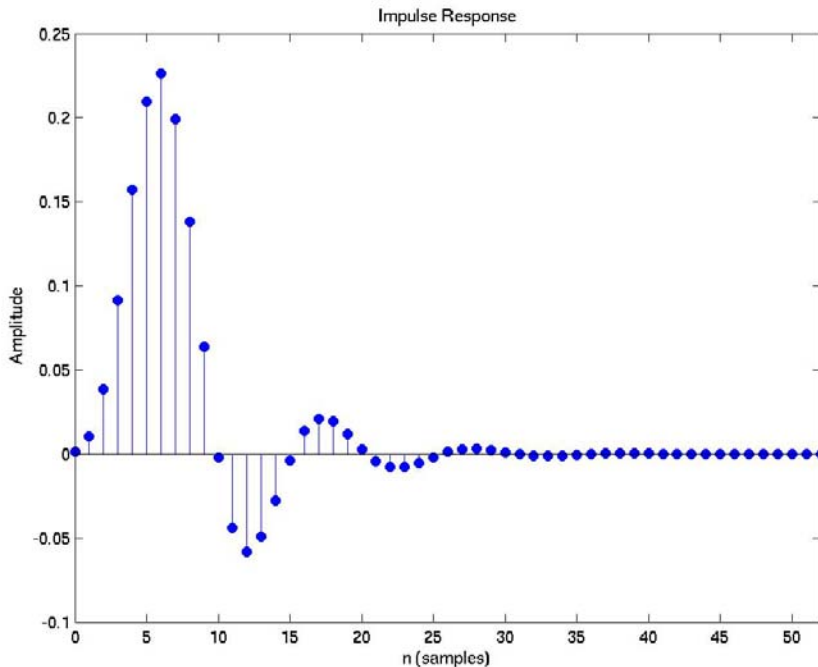
FILTRAGE NUMERIQUE - Routines FORTRAN

- ✓ Ces routines ont été développées pour préparer le traitement des données de la mission MICROSCOPE
- ✓ Elles ont été testées pour le traitement des données GOCE.
- ✓ 3 Routines en Fortran 90 :
 - CALCOF** : Calcul des coefficients d'un filtre RII de Butterworth passe-bas ou passe-haut
 - CALIIR** : Application d'un filtre RII passe-bas ou passe-haut. Les coefficients sont soit calculés avec les formules précédentes soit lus dans un fichier
 - BPASS** : Application d'un filtre RII passe-bande par applications successives d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe haut

FILTRAGE NUMERIQUE - Filtrage avec Matlab

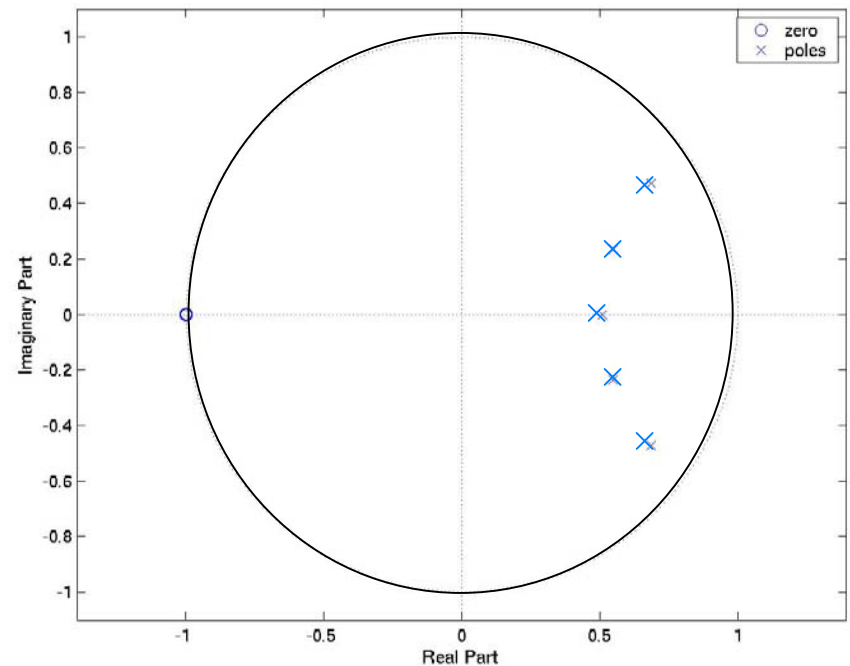
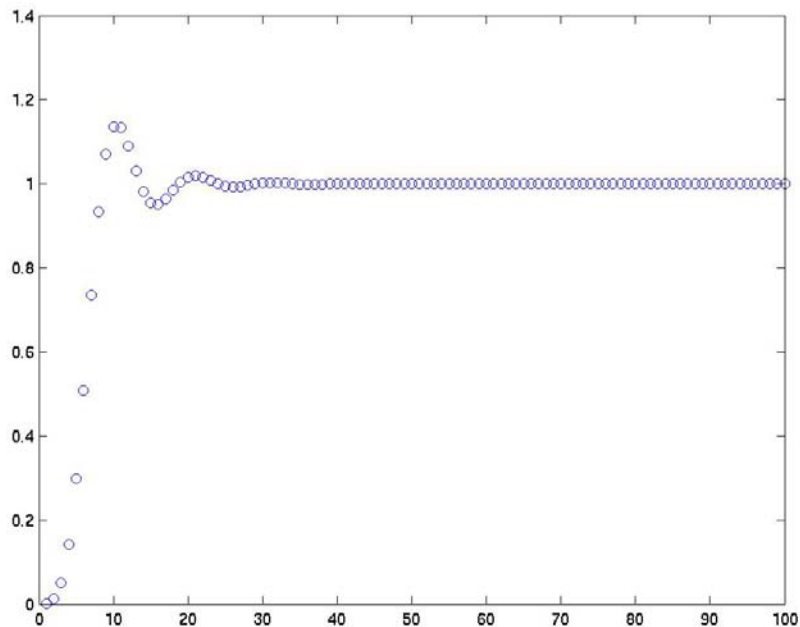
✓ Synthèse d'un filtre RII :

```
N=5; % Ordre du filtre
B=1000; % Bande passante
fe=10000; % Fréquence d'échantillonnage
[num,den]=butter(N,2*B/fe) % Calcul des coefficients
figure(1)
impz(num,den); % Affichage de la réponse impulsionnelle
figure(2)
freqz(num, den) ; % Diagramme de Bode
```



FILTRAGE NUMERIQUE - Filtrage avec Matlab

```
x=ones(100,1); % x=saut unité
y=filter(num,den,x); % y=réponse indicielle
figure(3)
plot(y,'bo') % Affichage de la réponse indicielle
figure(4)
P=roots(den) % Calcul des pôles
Z=roots(num) % Calcul des zéros
zplane(num,den); % Affichage des pôles et des zéros
```



FILTRAGE NUMERIQUE - Filtrage avec Matlab

✓ Matlab permet aussi de calculer les coefficients d'un filtre RII en le décomposant en cellules d'ordre 2

```
N=5; % Ordre du filtre
B=1000; % Bande passante
fe=10000; % Fréquence d'échantillonnage
[num,den]=butter(N,2*B/fe) % Calcul des coefficients
[Z,P,K]=tf2zp(num,den); % Calcul des pôles, des zéros et du facteur
% multiplicatif K
[SOS,G]=zp2sos(Z,P,K); % donne la matrice SOS et le gain
```

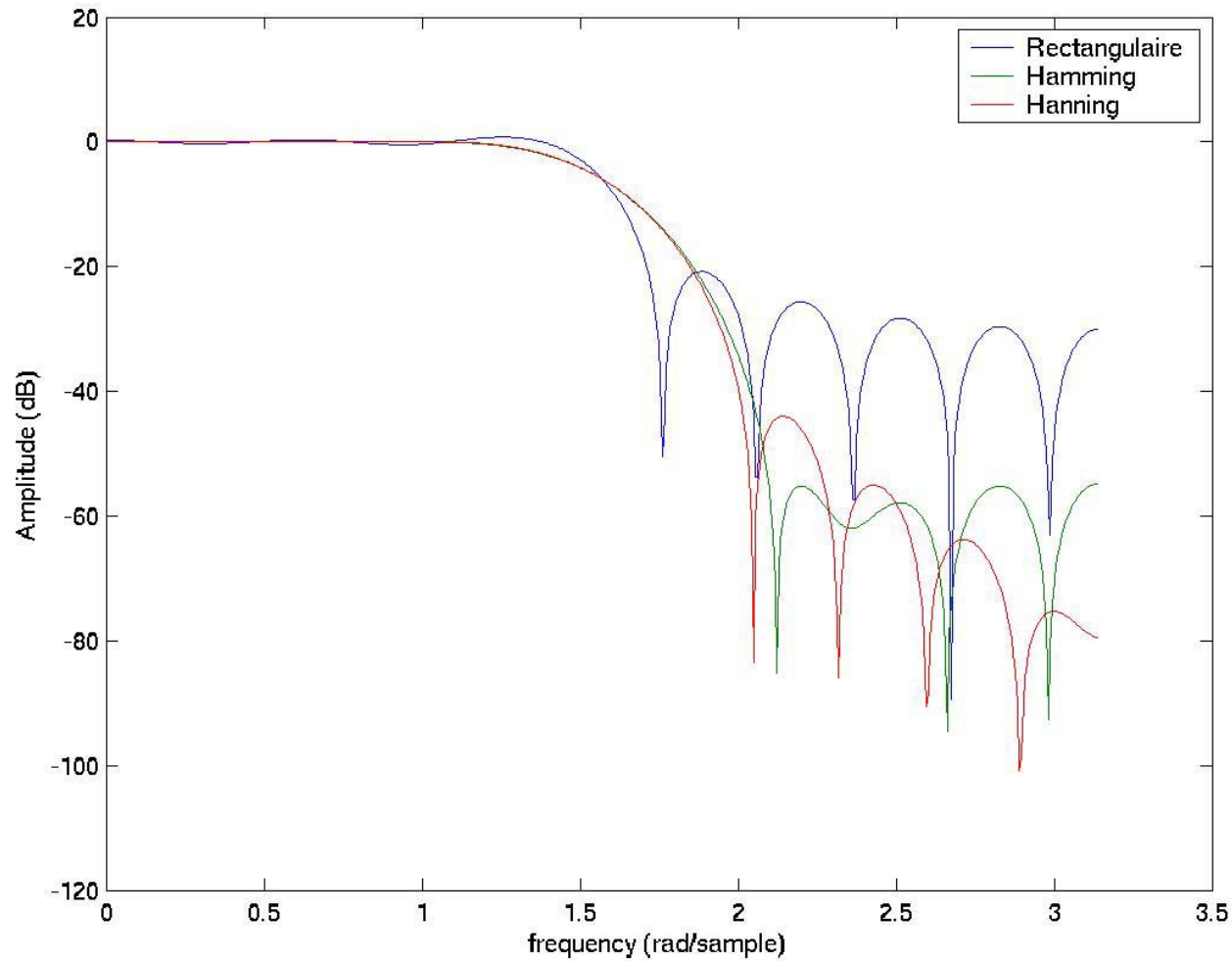
$$H(z) = G \times \frac{b_0^{(1)} + b_1^{(1)}z^{-1}}{a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z^{-1}} \times \prod_{i=2}^3 \frac{b_0^{(i)} + b_1^{(i)}z^{-1} + b_2^{(i)}z^{-2}}{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + a_2^{(i)}z^{-2}}$$

$$SOS = \begin{pmatrix} b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & 0 & a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & 0 \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \\ b_0^{(3)} & b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & a_0^{(3)} & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

✓ Synthèse de filtres RIF

```
N=20;      % Ordre du filtre
A=[1];    % Pas de contre-réaction
% Calcul des coefficients de 3 filtres
num_rect=fir1(N,0.5,'low',boxcar(N+1),'noscale');
num_hann=fir1(N,0.5,'low',hanning(N+1),'noscale');
num_hamm=fir1(N,0.5,'low',hamming(N+1),'noscale');
% Calcul des fonctions de transfert
[ft_rect,w]=freqz(num_rect,A);
[ft_hann,w]=freqz(num_hann,A);
[ft_hamm,w]=freqz(num_hamm,A);
% Transformation en dB
ft_rect_db=20*log10(abs(ft_rect));
ft_hann_db=20*log10(abs(ft_hann));
ft_hamm_db=20*log10(abs(ft_hamm));
% Affichage des digrammes de Bode
plot(w,ft_rect_db,w,ft_hann_db,w,ft_hamm_db)
legend('Rectangulaire','Hanning','Hamming')
xlabel('frequency (rad/sample)')
ylabel('Amplitude (dB)')
```

FILTRAGE NUMERIQUE - Filtrage avec Matlab



FILTRAGE NUMERIQUE - Filtre de Vondrak

- ✓ L'algorithme de Vondrak permet de filtrer une série temporelle de mesures non-équidistantes en tenant compte du poids de chaque mesure.
- ✓ Cet algorithme est présenté en détail dans les 2 articles suivant:
 - « A contribution to the problem of smoothing observational data », J.Vondrak, Bull. Astron. Inst. Czech. 20 (1969), 349-355
 - « Problem of smoothing observational data II », J.Vondrak, Bull. Astron. Inst. Czech. 28 (1977), 84-89
- ✓ L'algorithme est basé sur la minimisation de la fonction suivante :

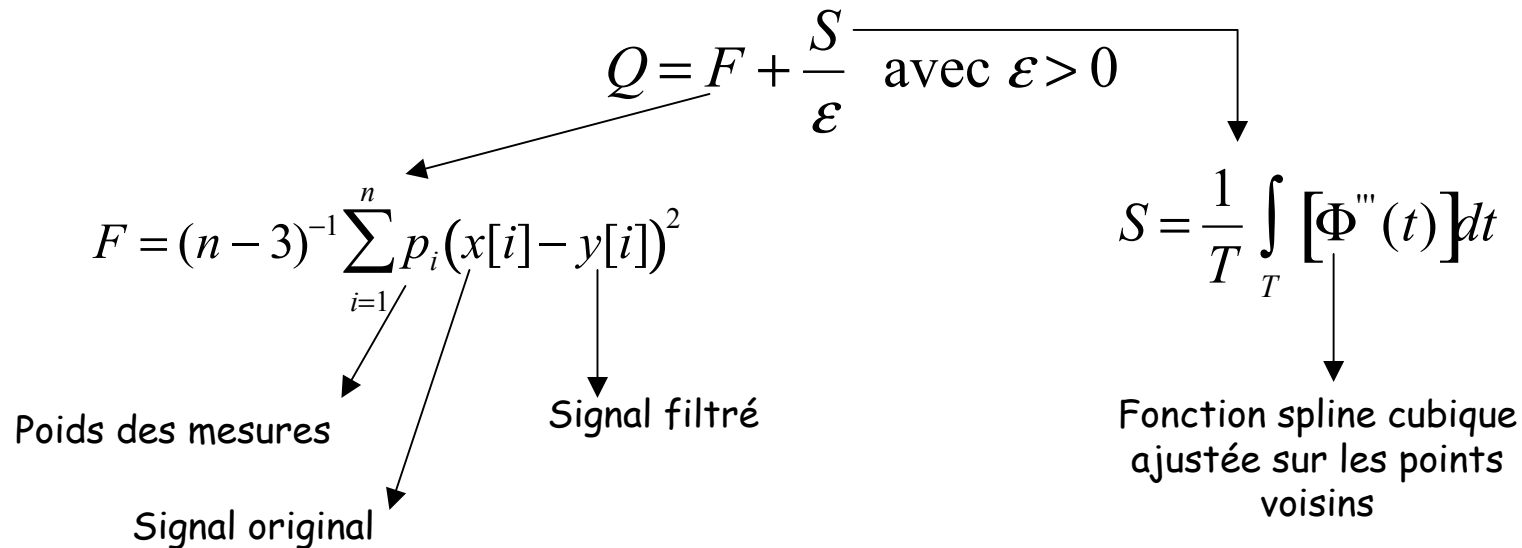
$$Q = F + \frac{S}{\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

$F = (n-3)^{-1} \sum_{i=1}^n p_i (x[i] - y[i])^2$

Poids des mesures → p_i
Signal original → $x[i]$
Signal filtré → $y[i]$

$S = \frac{1}{T} \int_T [\Phi'''(t)] dt$

Fonction spline cubique ajustée sur les points voisins → $\Phi'''(t)$



- ✓ Les fonctions F et S sont normalisées afin d'obtenir un filtrage dont la qualité est indépendante de la longueur de la série et de la densité des points
- ✓ Problème: Choix du paramètre ε en fonction des caractéristiques du filtre souhaité

Soit $R(P)$ la fonction représentant le pouvoir de réjection filtre à la période P

On définit P_0 , P_1 et P_2 de telle sorte que $R(P_0)=0.5$, $R(P_1)=0.01$ et $\square R(P_2)=0.99$

Le filtre est synthétisé en fixant P_0

=> Calcul de P_1 et P_2

$$P_1 = P_0 10^{-0.367} \qquad P_2 = P_0 10^{0.367}$$

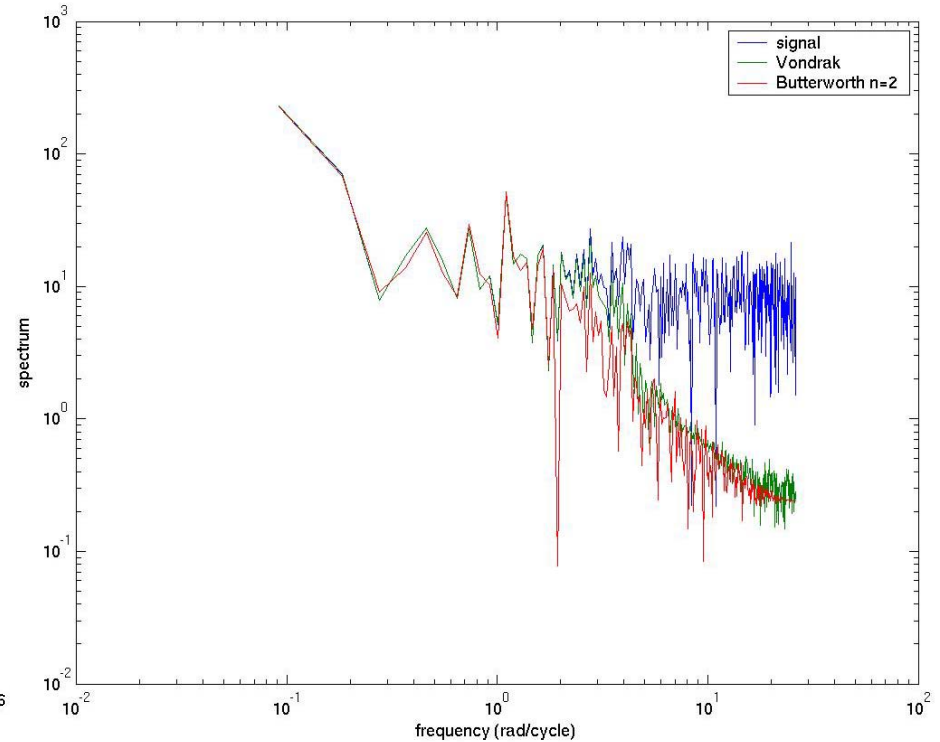
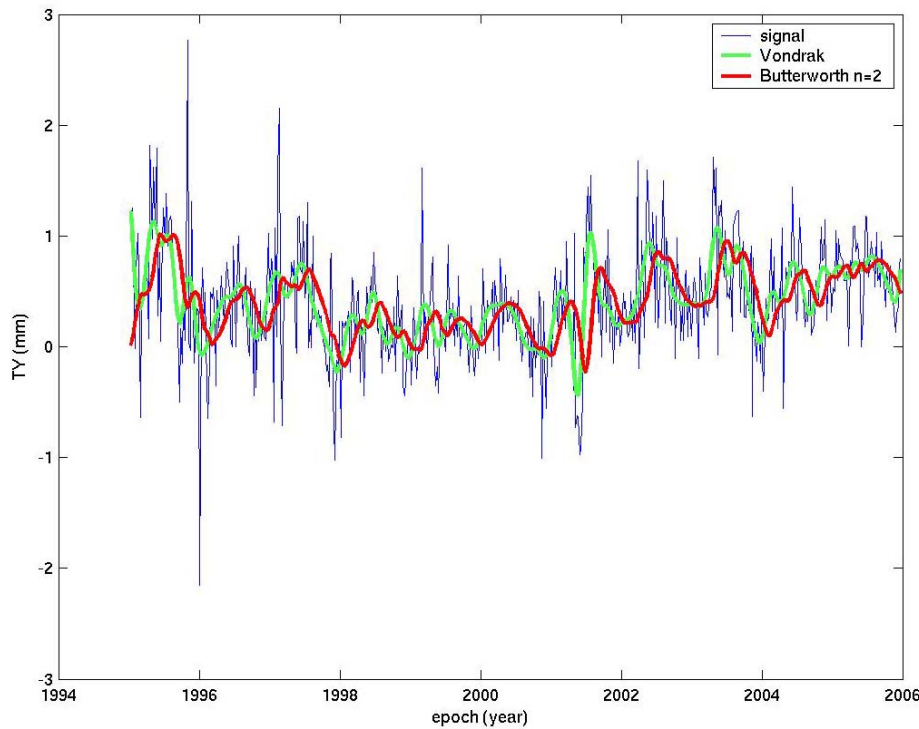
=> Calcul de ε

$$\varepsilon = \frac{p_{moy} 10^{4.75}}{P_0^6} \quad \text{avec } p_{moy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i$$

- ✓ Il est aussi possible d'obtenir des filtres passe-haut, passe-bande, coupe-bande.

FILTRAGE NUMERIQUE - Filtre de Vondrak

- ✓ Série temporelle de la composante Y du géocentre mesurée par SLR
- ✓ Série échantillonnée à 7 jours
- ✓ Application du filtre de Vondrak et d'un filtre de Butterworth d'ordre 2



- ✓ Inconvénients du filtre de Butterworth par rapport au filtre de Vondrak: phase d'initialisation et déphasage du signal
- ✓ Avantages du filtre de Butterworth par rapport au filtre de Vondrak: il est possible d'augmenter le pouvoir de réjection en augmentant l'ordre du filtre. Impossible pour le filtre de Vondrak.

FILTRAGE NUMERIQUE - Filtre de Vondrak

- ✓ □ Exemple d'application du filtre de Vondrak sur une série temporelle non-équirépartie

