

LE GEOCENTRE: CONCEPTS, DEFINITION ET REALISATION

M. GREFF ^a, R. BIANCALE, J.F. CRETAUX, J.M. LEMOINE, S. LOYER ^b,
H. LEGROS, P. GEGOUT ^c, M. FEISSEL ^{df}, P. SILLARD ^d, P. EXERTIER ^e

^a Institut de Physique du Globe de Paris

^b GRGS-CNES, Toulouse

^c Institut de Physique du Globe de Strasbourg

^d LAREG-IGN, Marne La Vallée

^e CERGA-OCA, Grasse

^f Observatoire de Paris

18 Janvier 2001

1 Concepts et définitions

1.1 Centre de masse

La masse du système Terre (comprenant la Terre solide, son noyau fluide, l'océan et l'atmosphère), considéré comme un système isolé, se conserve.

Le centre de masse C_m est défini par la nullité du moment de degré 1 de la densité dans le volume du système :

$$\frac{1}{M_T} \int_{V_{systeme}} \rho \overline{C_m P} dv = 0 \quad (1)$$

où P sont les points courants de l'intérieur du système, M_T la masse totale et ρ la densité de la planète.

Il semble préférable de rejeter le terme 'centre de gravité'.

En l'absence de toute force extérieure (nous ne prenons pas en compte ici l'influence gravitationnelle du Soleil, de la Lune et des planètes), la Terre est un système isolé, quels que soient les déplacements de masse générés en son sein d'après le principe d'action-réaction.

1.2 Modélisation des mouvements de stations et relation avec les repères de référence

En géodésie comme dans toutes les sciences métrologiques, on distingue traditionnellement le concept de sa réalisation. Pour les systèmes de référence, cette distinction s'opère comme suit:

- un système de référence terrestre idéal est un espace affine euclidien muni d'une base orthonormée comobile avec la surface terrestre, d'échelle proche de l'unité, d'origine voisine du centre des masses de la Terre

- un système de référence terrestre conventionnel consiste en la description des lois de la physique, des constantes et des algorithmes réalisant le système idéal
- enfin, un repère de référence terrestre conventionnel est la donnée de coordonnées d'évènements exprimées dans le système conventionnel précédent. Ces évènements sont par exemple les positions occupées par un ensemble de stations (réseau) à un instant donné. On dit alors que le système terrestre est réalisé par le jeu de coordonnées des stations du réseau. Le repère est donc une réalisation du système terrestre.

Le concept de système idéal est relativement flou, mais est nécessaire pour construire une hiérarchie théorique entre un concept et sa mise en pratique. Dans un sens, le système conventionnel est lui aussi une réalisation du système idéal. Puisque la notion de système idéal est floue, on peut très bien considérer que deux systèmes conventionnels n'ont pas la même origine. C'est ce que nous faisons dans la suite du texte.

On considère deux systèmes conventionnels, l'un vérifiant rigoureusement les hypothèses du système idéal (repère non tournant, centré au centre des masses de la Terre et d'échelle unité), et l'autre possédant une orientation, une échelle et une origine arbitraires. La transformation entre ces deux systèmes est une similitude (les bases sont des trièdres orthonormés). Ainsi, on écrira pour une station indiquée i

$$\overrightarrow{C_m M_i}(t) = \overrightarrow{O M_i^\delta}(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\dot{O M_i^\delta}} + \vec{T}(t) + \mu(t)\overline{\overline{R}}(t) \left[\overrightarrow{O M_i^\delta}(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\dot{O M_i^\delta}} \right] \quad (2)$$

où O est l'origine du second système, $\vec{T}(t)$, $\mu(t)$ et $\overline{\overline{R}}(t)$ correspondant respectivement au vecteur de translation, au facteur d'homothétie et à la matrice de rotation qui permettent de changer de système. On en déduit une relation entre les coordonnées cartésiennes de la station dans les deux repères:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i^o \\ Y_i^o \\ Z_i^o \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} \dot{X}_i^o \\ \dot{Y}_i^o \\ \dot{Z}_i^o \end{pmatrix} + \vec{T}(t) + \mu(t)\overline{\overline{R}}(t) \left[\overrightarrow{O M_i^\delta}(t_0) + (t - t_0)\overrightarrow{\dot{O M_i^\delta}} \right] \quad (3)$$

Du fait de la forme presque sphérique de la Terre, les déformations s'étudient au mieux à partir d'une représentation de tous les paramètres dans un système de coordonnées sphériques par des fonctions sphériques, notées $Y_n^m(\theta, \lambda)$, fonctions harmoniques de degré n et d'ordre m , solutions de l'équation de Laplace. Ainsi les fonctions excitatrices, le champ de déplacement sphéroïdal $\vec{u}(r, \theta, \lambda)$ et la perturbation du potentiel de gravitation $\Phi(r, \theta, \lambda)$ vont se développer en séries de fonctions sphériques; on aura par exemple:

$$\vec{u}(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_{1n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda) \frac{\vec{r}}{r} + r y_{3n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (4)$$

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Phi_n(r) Y_n^m(\theta, \lambda)$$

où θ et λ sont respectivement la colatitute et la longitude. Il faut noter que le terme de degré $n = 1$ dans la décomposition en harmoniques sphériques du déplacement décrit une translation de la planète.

Un repère ayant pour origine le centre de masse C_m est un repère naturel pour l'orbitographie des satellites. En effet, dans ce cas, le potentiel gravitationnel ne comporte pas de terme de degré 1 dans sa décomposition en harmoniques sphériques. Dans une certaine mesure, c'est aussi un repère naturel pour la forme de la surface océanique.

Le point de vue géophysique (supposant a-priori un système de référence et une configuration de référence (non observable) dont on étudiera les perturbations) se situe lui-aussi dans un cadre dynamique et il paraît donc naturel de prendre un repère centré au centre de masse C_m . La configuration de référence sera donc centrée en son centre de masse C_m . Sous l'effet de redistributions de masse de degré 1 (par 'degré 1', on entendra, par la suite, degré 1 dans la décomposition en harmoniques sphériques), la Terre se déforme; on pose

$$\overrightarrow{C_m M_i}(t) = \overrightarrow{C_m M_i^0} + \vec{u}_i(t) \quad (5)$$

On peut montrer qu'au premier ordre en déplacement, la position des stations se déduit de leurs positions initiales par une translation locale faisant intervenir les nombres de Love h_1 et l_1 associés respectivement au déplacement radial et tangentiel.

Soit une surcharge en surface dont le potentiel de degré 1 s'écrit:

$$S_1^e(\theta, \lambda) = S_{10} \cos \theta + (S_{11}^c \cos \lambda + S_{11}^s \sin \lambda) \sin \theta \quad (6)$$

Sous l'action de cette surcharge la Terre se déforme et le déplacement de sa surface ($r = R_T$, où R_T est le rayon de la sphère initiale de référence) s'écrit, en coordonnées sphériques:

$$\vec{u}(R_T, \theta, \lambda) = \begin{pmatrix} u_r(\theta, \lambda) \\ u_\theta(\theta, \lambda) \\ u_\lambda(\theta, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \frac{S_1^e(\theta, \lambda)}{g_o} \\ l_1 \frac{1}{g_o} \frac{\partial S_1^e(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \\ l_1 \frac{1}{g_o} \frac{\partial S_1^e(\theta, \lambda)}{\sin \theta \partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (7)$$

où g_o est la gravité radiale en surface. Les nombres de Love h_1 et l_1 se calculent en résolvant les équations de la gravito-élasticité et des conditions de continuité pour une Terre soumise à une surcharge en surface, dans un repère lié au centre des masses de la Terre déformable. Si la sphère initiale de référence est compressible, stratifiée radialement en densité et en rigidité selon le modèle sismologique PREM (Anderson and Dziewonski, 1981), on obtient les valeurs numériques : $h_1 = -1.2858$ et $l_1 = -0.8958$. Il faut noter que l'on trouve dans la littérature des nombres de Love exprimant les déformations dans des repères non-centrés au centre des masses de la Terre déformable (par exemple Farrell (1972)).

On peut calculer les perturbations des coordonnées cartésiennes, notées (X_i, Y_i, Z_i) d'une station M_i située à la colatitude θ_i et à la longitude λ_i , dans un repère lié au centre de masse, sous l'action d'une surcharge en surface:

$$\overrightarrow{C_m M_i} = R_T \vec{e}_r + \vec{u}(R_T, \theta_i, \lambda_i) = X_i \vec{e}_x + Y_i \vec{e}_y + Z_i \vec{e}_z \quad (8)$$

$$\text{avec } \begin{cases} X_i - X_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3} \frac{S_{11}^c}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3} \left[\frac{S_{10}}{g_o} Y_{21}^c + \frac{S_{11}^s}{2g_o} Y_{22}^s + \frac{S_{11}^c}{g_o} \left(\frac{1}{2} Y_{22}^c - Y_{20} \right) \right] \\ Y_i - Y_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3} \frac{S_{11}^s}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3} \left[\frac{S_{10}}{g_o} Y_{21}^c + \frac{S_{11}^c}{2g_o} Y_{22}^s - \frac{S_{11}^s}{g_o} \left(\frac{1}{2} Y_{22}^c + Y_{20} \right) \right] \\ Z_i - Z_i^o = \frac{h_1+2l_1}{3} \frac{S_{10}}{g_o} + \frac{h_1-l_1}{3} \left[2 \frac{S_{10}}{g_o} Y_{20} + \frac{S_{11}^c}{g_o} Y_{21}^c + \frac{S_{11}^s}{g_o} Y_{21}^s \right] \end{cases} \quad (9)$$

avec $[X_i^o, Y_i^o, Z_i^o] = [R_T \sin \theta_i \cos \lambda_i, R_T \sin \theta_i \sin \lambda_i, R_T \cos \theta_i]$.

Les harmoniques sphériques de degré 2 sont définies par:

$$Y_{20} = \frac{3 \cos(\theta_i)^2 - 1}{2}; \quad Y_{21}^c = 3 \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \lambda_i; \quad Y_{21}^s = 3 \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \lambda_i; \quad (10)$$

$$Y_{22}^c = 3 \sin(\theta_i)^2 \cos 2\lambda_i; \quad Y_{22}^s = 3 \sin(\theta_i)^2 \sin 2\lambda_i$$

1.3 Centre de figure et centre de forme

Pour rejoindre le point de vue géodésien, il faut trouver dans le déplacement $\vec{u}(R_T, \theta, \lambda)$ local une partie globale.

D'un point de vue strictement géométrique, on peut définir un **centre de figure** C_f par rapport à la surface de la Terre S_{Terre} (solide et liquide) tel que :

$$\frac{1}{A} \int_{S_{Terre}} \vec{C}_f \vec{S} ds = 0 \quad (11)$$

où S sont les points courants de la surface terrestre d'aire A .

Pour calculer les coordonnées du centre de figure C_f , on considère le déplacement moyen en surface dans un repère lié au centre de masse:

$$\vec{C}_m C_f = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \int \int X_i \sin(\theta_i) d\theta_i d\lambda_i \\ \int \int Y_i \sin(\theta_i) d\theta_i d\lambda_i \\ \int \int Z_i \sin(\theta_i) d\theta_i d\lambda_i \end{pmatrix} = \frac{h_1 + 2l_1}{3} \begin{pmatrix} \frac{S_{11}^c}{g_o} \\ \frac{S_{11}^s}{g_o} \\ \frac{S_{10}}{g_o} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Pour les valeurs numériques des nombres de Love h_1 et l_1 données précédemment, on trouve $\frac{h_1+2l_1}{3} = -1.025$; l'élasticité du manteau est négligeable pour la détermination du centre de figure (une planète parfaitement rigide aurait $h_1 = -1$; $l_1 = -1$ et donc $\frac{h_1+2l_1}{3} = -1$).

Il ne faut pas confondre ce centre de figure avec le centre de la sphère translaturée. En effet, au premier ordre en déplacement, d'après l'équation (9) on a la relation:

$$\left(X_i - h_1 \frac{S_{11}^c}{g_o} \right)^2 + \left(Y_i - h_1 \frac{S_{11}^s}{g_o} \right)^2 + \left(Z_i - h_1 \frac{S_{10}}{g_o} \right)^2 = R_T^2 \quad (13)$$

La **forme** de la sphère dans l'état perturbé est une sphère translatée. On peut définir un centre C_{forme} comme le centre de la sphère précédente translatée avec:

$$\overrightarrow{C_m C_{forme}} = \begin{pmatrix} h_1 \frac{S_{11}^c}{g_o} \\ h_1 \frac{S_{11}^s}{g_o} \\ h_1 \frac{S_{10}}{g_o} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Il faut noter que l'élasticité du manteau n'est plus négligeable pour la détermination du centre de forme ($h_1 = -1.2858 \neq -1$).

Néanmoins, si l'on peut définir mathématiquement cette notion de forme, ou encore de topographie de degré 1, il est difficile de la relier aux observations des stations.

La notion de centre de figure a été fréquemment utilisée dans la littérature (Trupin et al. 1992; Dong et al., 1997; Greff and Legros, 2000). Cependant, la réalisation de ce centre de figure repose sur un échantillonnage de la surface terrestre par des stations d'observations. Il s'ensuit une réalisation imparfaite et éventuellement biaisée de ce centre de figure.

1.4 Origine du repère géométrique

On introduit un **centre géométrique défini par les mesures**. Dans cette référence géométrique que nous allons préciser, la position du centre de masse varie dans le temps. Etant donné un réseau de stations réparties à la surface de la Terre, l'analyse des observations par les méthodes dynamiques (ces méthodes reliant la position des stations de suivi aux trajectoires calculées par rapport au centre des masses) permet de réaliser un repère géométrique implicite par l'attribution de coordonnées explicites aux stations. Autrement dit, les coordonnées apparaissent dans les équations de réduction des observations; les éléments de définition du repère [cf équation (2)] eux n'interviennent pas.

Soit un réseau de N stations M_i , $i = 1..N$. On définit le barycentre G de ce réseau par:

$$\sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (15)$$

On peut noter que cette équation (15) est un pendant de l'équation (11) dans le cas d'une Terre échantillonnée.

Un réseau de stations représente un échantillonnage non uniforme de la surface terrestre. Il s'ensuit que la position de son barycentre diffère par une translation constante inconnue de celle du centre géométrique. Mais, pour un même réseau de stations, les variations temporelles de G sont identiques à celles du centre géométrique.

Le rattachement au centre de masse de ce repère géométrique implicite est obtenu en imposant, dans l'analyse, la nullité des coefficients de degré 1 dans la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel.

1.5 Recommandations

On recommande d'appeler **géocentre**, ce centre géométrique défini par les mesures. On utilisera cette définition dans la suite.

L'ITRF 2000 (International Terrestrial Reference Frame) réalise une origine O du système conventionnel qui est, elle-aussi, rattachée au centre de masse en annulant les coefficients de degré 1 du potentiel gravitationnel. On peut recommander aux géodésiens de se repérer par rapport à cette origine.

Les géophysiciens travaillant dans une configuration initiale de référence non-réalisable perdront une constante par rapport aux observations géodésiques. En conséquence, seules les variations temporelles du géocentre calculé et du géocentre réalisé pourront être comparées.

2 Variations temporelles et réalisation du géocentre

Les variations temporelles du géocentre reflètent les déformations de surface de la croûte terrestre correspondant à une translation globale du réseau dans un large spectre de fréquences.

Elles sont causées par des phénomènes de charges de degré 1 internes ou en surface:

- des phénomènes séculaires (tectonique, rebond post-glaciaire, évolution dynamique des masses mantéliques par convection ...)
- des phénomènes maréaux (marées terrestre, polaire...)
- des phénomènes de forçage (surcharges en surface, de type eaux continentales, neige, glace, atmosphère, océans ...)
- des phénomènes aléatoires dus à des causes accidentelles (séisme ...)

La réalisation du géocentre passe par l'ajustement des coordonnées (par exemple X_i) de chaque station i par rapport à un référentiel ayant pour origine C_m , au moyen d'une modélisation qui inclut:

- une constante X_{oi} qui définit la position de la station à un date donnée par rapport au géocentre
- des termes variant dans le temps: un terme séculaire $\dot{X}_i t$ qui traduit une translation lente de chaque station du réseau et des termes périodiques qui représentent les déplacements dûs aux surcharges ou aux marées à la fréquence ω_k
- un terme aléatoire $\epsilon_i(t)$

On peut donc décrire la variation temporelle des coordonnées (par exemple X_i) dans le référentiel ayant pour origine C_m sous la forme:

$$X_i(t) = X_{oi} + \dot{X}_i t + \sum_k a_k^i \sin(\omega_k t - \phi_k^i) + \epsilon_i(t) \quad (16)$$

C'est la partie commune à toutes les stations qui est interprétée comme une mesure de la variation du géocentre.

Dans la figure 1, on montre un exemple détermination des termes annuels et semi-annuels du géocentre issu de la solution GRIM5 (GRGS/GFZ).

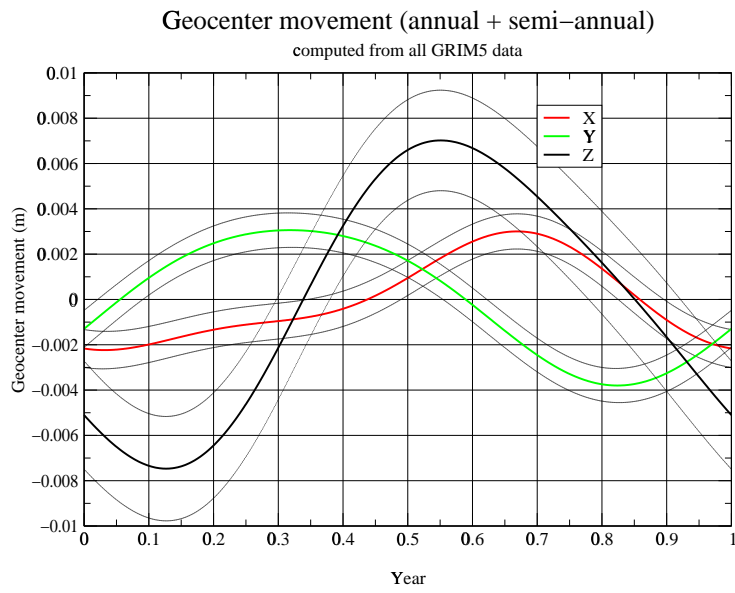


Figure 1: Exemple de détermination des termes périodiques annuels et semi-annuels du géocentre issu de la solution GRIM5 (GRGS/GFZ)