

HARMONIQUES

SPHERIQUES

ANALYSE HARMONIQUE

&

SYNTHESE HARMONIQUE

SUR UNE SPHERE

I - DEFINITIONS - PROPRIETES

Eq. de Laplace en coordonnées sphériques
Harmoniques de surface
Fonctions de Legendre Polynômes

Fonctions associées ($m \geq 0$)

Diverses expressions : formules de Rodrigue
de Ferrer

Orthogonalité - Harmoniques normalisées

Formules de récurrence

Opérateur de Maxwell et fonctions de Legendre

Rotation des harmoniques

Translation des harmoniques

Formule d'addition

Développement de x^m sur $\{P_l(x)\}$

$\cos n\theta$ sur $\{P_l(\cos \theta)\}$

Développements de Fourier des harmoniques de surface

Propriétés spectrales : fonctions de covariance
invariance

Produits de fonctions de Legendre fonctions de transfert

II. DEVELOPPEMENTS EN SERIE . PROBLEMES AUX LIMITES

Le développement de $1/p$ en théorie du potentiel

Application au potentiel gravitationnel

Développements en séries d'harmoniques de surface

- application du th. de Stone-Weierstrass

- le théorème de Darboux

- le théorème de Runge en théorie du potentiel de gravitation

Problème de Dirichlet sur la sphère

Problème de Neumann

Problème aux limites de 3^{ème} type

III. QUELQUES APPLICATIONS

1. Potentiel mutuel

Potentiel d'un corps isolé

Potentiel de simple couche

Topographie d'une planète et son potentiel

2. Fonction océan

Topographie océanique et circulation moyenne

IV. L'ANALYSE HARMONIQUE SPHERIQUE

Principe

Formules de calcul dans le cas d'une grille régulière

- formulation intégrale

- estimation par moindres carrés

Optimisations et cas particuliers

Exemples

V. LA SYNTHÈSE HARMONIQUE SPHÉRIQUE

1. Synthèse de grilles :

Synthèse ponctuelle et synthèse moyenne

Optimisations

Exemples

2. Synthèse ponctuelle du potentiel de gravitation et de ses dérivées en mécanique spatiale :

Formulation non singulière

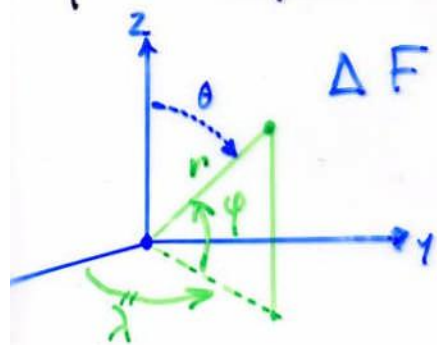
Champ de gravité

Tenseur gradient de gravité

Exemples

1- DEFINITIONS - PROPRIETES

Eq. de Laplace en coordonnées sphériques



$$\Delta F = 0$$

$$F(r, \varphi, \lambda)$$

$$F(r, \varphi, \lambda) = f(r) \underbrace{Y(\varphi, \lambda)}_{g(\varphi) h(\lambda)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 f'' + 2r f' - C f = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi g'' + \sin \varphi g' + \left(C \cos \varphi - \frac{D}{\cos \varphi} \right) g = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h'' + D h = 0 & (3) \end{cases}$$

Solutions physiquement acceptables :

$$C = n(n+1) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$D = m^2 \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$n \rightarrow -n-1$$

$$(1) \text{ invariant} \Rightarrow n = l \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad n = -l-1 \quad (l \in \mathbb{N})$$

$$m \rightarrow -m$$

$$(2), (3) \text{ invariants ... mais } |m| \leq l$$

$$f(r) = \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}$$

$$g(\varphi) = P_{lm}(\sin \varphi) \quad \text{ou} \quad P_{-l-1, m}(\sin \varphi) \quad (l \in \mathbb{N})$$

(fonctions de Legendre)

$$h(\lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}$$

harmoniques de surface :

$$Y_{lm}(\varphi, \lambda) = P_{lm}(\sin \varphi) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \quad \text{satisfait :}$$

~~-l~~ $-l \leq m \leq +l$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \tan \varphi \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + l(l+1)Y = 0 \quad (4)$$

linéarité

$$\Rightarrow Y_l(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^l \left[a_{lm} P_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda + b_{lm} P_{lm}(\sin \varphi) \sin m\lambda \right]$$

$a_{lm}, b_{lm} \in \mathbb{R}$ solution de (4)

● CONCLUSION :

$$F_i(r, \varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=0}^l (a_{lm} \cos m\lambda + b_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi)$$

$$F_e(r, \varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=0}^l (a_{lm} \cos m\lambda + b_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi)$$

sont les solutions générales de $\Delta F = 0$ pour ,
l'intérieur et l'extérieur d'une sphère , respectivement .

Sous forme complexe :

$$Y_{lm}(\varphi, \lambda) = P_{lm}(\sin \varphi) e^{im\lambda} \quad ; \quad \begin{matrix} l \in \mathbb{N} \\ -l \leq m \leq +l \end{matrix}$$

$$\begin{cases} F_i(r, \varphi, \lambda) \\ F_e(r, \varphi, \lambda) \end{cases} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{cases} r^l \\ r^{-l-1} \end{cases} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm} e^{im\lambda} P_{lm}(\sin \varphi)$$

$$\underline{Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \text{harmoniques de surface}}$$

Fonctions de Legendre

6.

On pose $x = \sin \varphi$ $g(\varphi) \rightarrow G(x)$

$$2) : (1-x^2) G'' - 2x G' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] G = 0 \quad (2')$$

$m=0$: $G = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l]$: polynôme de Legendre, de degré l
satisfait (2') $= P_l(x)$ •

$m \neq 0$: fonctions associées de 1^{ère} espèce :

$m > 0$: $G = (1-x^2)^{m/2} \underbrace{\frac{d^m}{dx^m} [P_l(x)]}_{\text{polynôme d'Helmholtz (d: } l-m)}$ $= P_{lm}(x)$ •

$m < 0$: $G = (1-x^2)^{-m/2} \int_1^x du_1 \int_1^{u_1} du_2 \dots \int_1^{u_{m'-1}} P_l(u_{m'}) du_{m'}$
($m' = -m$)

$$= \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{(m'-1)!} \int_1^x (x-t)^{m'-1} P_l(t) dt$$

$$\Rightarrow P_{l,-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(x^2-1)^l]$$

 $= P_{l,-m}(x)$ •

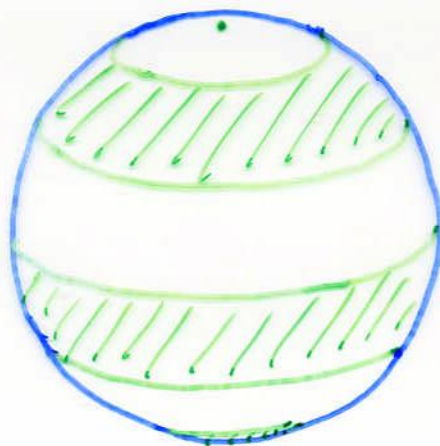
Remarque: Fonctions associées de 2^{de} espèce, aussi solutions de (2') :

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} P_l(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{l-k}(x)$$

$$Q_{lm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_l(x)}{dx^m} \quad \dots \dots \dots \begin{matrix} m > 0 \\ \text{ou } m < 0 \end{matrix}$$

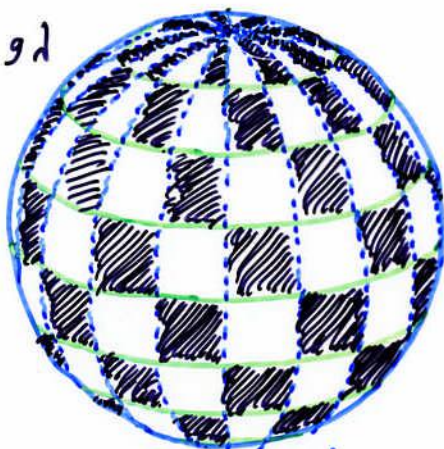
Exemples :

$$P_5(\sin \varphi)$$



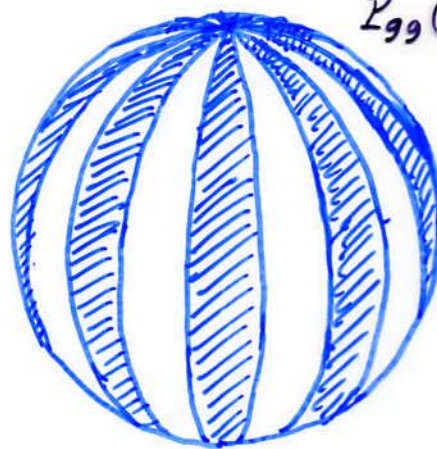
Fonctions
zonales : $m=0$

$$P_{16,9}(\sin \varphi \cos \vartheta)$$



Fonctions tessérales quelconques : $l \neq m$

$$P_{9,9}(\sin \varphi \cos \vartheta)$$



Fonctions sectorielles : $l=m$
(tessérales particulières)

- $P_{lm}(\sin \varphi) : l-m \text{ zéros sur } [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

$$\left. \begin{array}{l} \cos m \vartheta \\ \sin m \vartheta \end{array} \right\} : 2m \text{ zéros sur } [0, 2\pi[$$

- Parité : suivant $l-m$

- $$\sum_{l=0}^L f_l(r) \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm} Y_{lm}(\varphi, \vartheta)$$

$$\text{card } \{c_{lm}\}_L = \text{card } \{Y_{lm}\}_L = (L+1)^2$$

↑
espace vectoriel de dim. $(L+1)^2$

Formule de Rodrigue :

$$P_{lm}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} [(x^2-1)^l]$$

$$m > 0, m = 0, \text{ ou } m < 0$$

Formules de Ferrer :

$$P_{lm}(x) = \frac{1}{2^l l!} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} [(x^2-1)^l]$$

$$m > 0, m = 0, m < 0$$

Conséquence :

$$P_{l,-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x), \text{ pour } m \geq 0$$

Formules de Legendre :

$$P_{lm}(\cos \theta) = (-1)^{l-m} \frac{(l+m)!}{l!} \sum_{j=\sup(0,-m)}^{\inf(l,l-m)} (-1)^j C_l^j C_l^{m+j} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2l-2j-m} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2j+m}$$

($\forall m$)

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{r! (l-r)! (l-m-2r)!} x^{l-m-2r}$$

($m \geq 0$)

Relations d'orthogonalité :

9.

$$\bullet \int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$\bullet Y_{lm}^c = P_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda$$

$$Y_{lm}^s = P_{lm}(\sin \varphi) \sin m\lambda$$

$$\iint_{\sigma_i} Y_{lm}^c Y_{l'm'}^s d\sigma = \frac{4\pi}{(2-\delta_{0m})(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{cs}$$

($d\sigma = \cos \varphi d\varphi d\lambda$)

Harmoniques normalisées :

$$\bar{Y}_{lm} = \underbrace{\left[(2-\delta_{0m})(2l+1)(l-m)!/(l+m)! \right]^{1/2}}_{\nu_{lm}} Y_{lm}$$

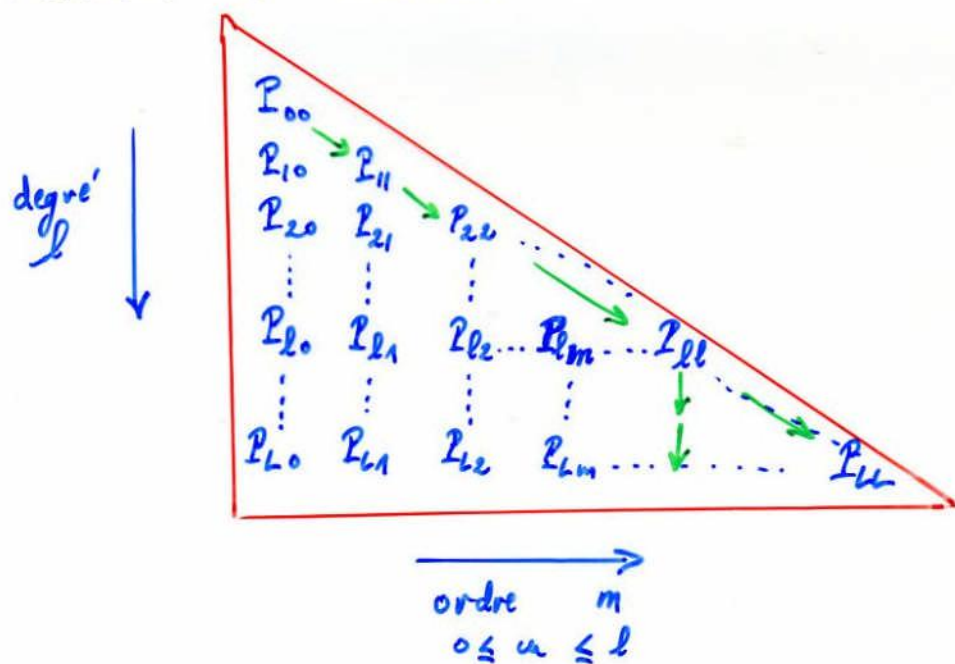
Donc, si

$$\begin{aligned} F(r, \varphi, \lambda) &= \sum_l f_l(r) \sum_{m=0}^l (a_{lm} \cos m\lambda + b_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \\ &= \sum_l f_l(r) \sum_{m=0}^l (\bar{a}_{lm} \cos m\lambda + \bar{b}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \end{aligned}$$

On a : $\bar{P}_{lm} = \nu_{lm} P_{lm}$

$$\begin{Bmatrix} \bar{a}_{lm} \\ \bar{b}_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\nu_{lm}} \begin{Bmatrix} a_{lm} \\ b_{lm} \end{Bmatrix}$$

Remarque: $\bar{P}_{l,-m}(x) = (-1)^m \bar{P}_{l,m}(x) \dots$



• $l = 0 \text{ à } L$; puis $m = 0 \text{ à } l$: instables

• formules stables :

P_{ll} : $l = 0 \text{ à } L$, ou $l = L \text{ à } 0$

puis : P_{lm} $m = l \text{ à } 0$

ou $l = m \text{ à } L$ (... la meilleure)

• si L très grand (par ex. 100, 1000, ...) : P_{lm} obligatoire

Exemple de jeu de formules très stables

• $r_l = [(2l-1)(2l+1)]^{1/2}$: $l = 1 \rightarrow L$; $w_1^1 = \sqrt{3}$ $w_m^m = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{1/2}$ ($1 \leq m \leq L$)
 $w_l^m = r_l / [(l-m)(l+m)]^{1/2}$, $1 \leq m < l \leq L$

• $\bar{P}_{l,0} = \sqrt{3} x$; $\bar{P}_{L,0} = \sqrt{5} (3x^2 - 1)/2$
 $\bar{P}_{l+1,0} = r_{l+1} (x \bar{P}_{l,0} - l \bar{P}_{l-1,0} / r_l) / (l+1)$: $2 \leq l \leq L$

• $y = \sqrt{1-x^2}$; $\bar{P}_{l,1} = \sqrt{3} y$
 $\bar{P}_{m,m} = y w_m^m \bar{P}_{m-1,m-1}$: $2 \leq m \leq L$
 $\bar{P}_{m+1,m} = x w_{m+1}^m \bar{P}_{m,m}$: $1 \leq m \leq L$
 $\bar{P}_{l,m} = w_l^m (x \bar{P}_{l-1,m} - \bar{P}_{l-2,m} / w_{l-1}^m)$: $m+2 \leq l \leq L$

Opérateur de Maxwell et fonctions de Legendre

11.

opérateur: $\Omega_{lm} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(l-m)}$

avec: $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l$

But (!) : généraliser la formule d'Hobson: $\frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right)$

On pose : $\begin{cases} \xi = x + iy = r \cos \varphi e^{i\eta} \\ \eta = x - iy = r \cos \varphi e^{-i\eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta}$

$$\Rightarrow \Omega_{lm} \left(\frac{1}{r} \right) = 2^m \frac{\partial^m}{\partial \eta^m} \frac{\partial^{l-m}}{\partial z^{l-m}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

NB: si $m < 0$: $\frac{\partial^m}{\partial \eta^m} \Delta = \underbrace{\int_{-\infty}^{\eta} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_{-\infty}^{\eta_{m-1}} \Delta d\eta_m}_{m \text{ fois}}$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\eta} \Delta(t) (x-t)^{m-1} dt$$

$$\Omega_{lm} \left(\frac{1}{r} \right) = (-1)^l (l-m)! \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \varphi) e^{im\eta}$$

$\Rightarrow$ Applications

Rotation d'harmoniques sphériques

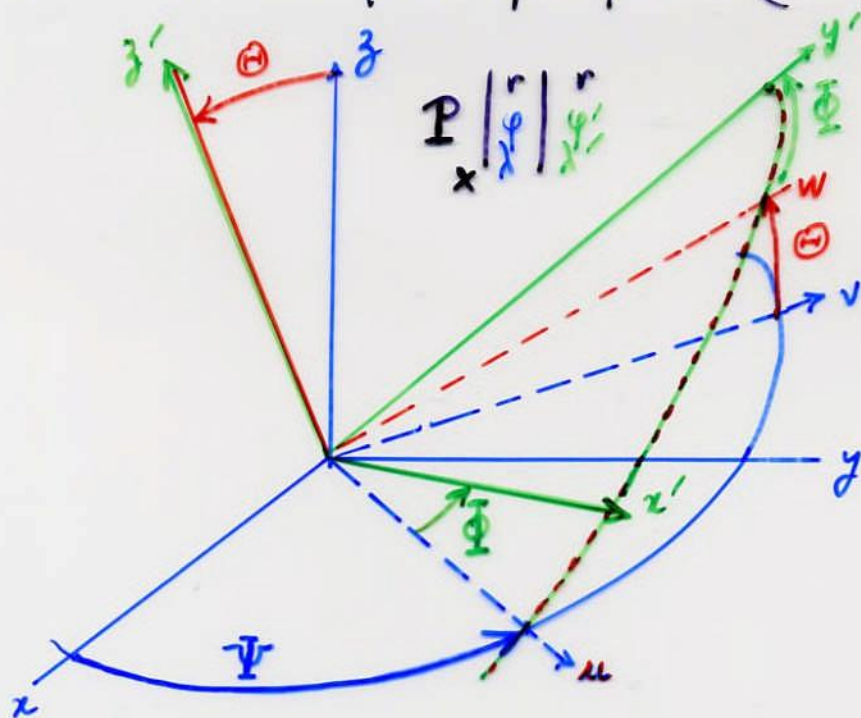
Translation d'harmoniques sphériques

Ex: Pb. de mécanique céleste

de mécanique spatiale (altitude...)

Rotation d'Harmoniques sphériques (r: invariant)

12.



$$Y_{lm}(\varphi, \lambda) = P_{lm}(\sin \varphi) e^{im\lambda}$$

$$\{x, y, z\} \xrightarrow{R_3(\Psi)} \{u, v, z\} \xrightarrow{R_1(\Theta)} \{u, w, z'\} \xrightarrow{R_3(\Phi)} \{x', y', z'\}$$

Angles d'Euler

$$(l-m)! Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \sum_{m'=-l}^{+l} (l-m')! Y_{lm'}(\varphi', \lambda') \underbrace{E_{lm}^{m'}(\Psi, \Theta, \Phi)}_{\text{fonctions d'Euler}} \Rightarrow d \doteq l \text{ conservé}$$

$$E_{lm}^{m'}(\Psi, \Theta, \Phi) = (-1)^{l-m} e^{i(m'-m)\pi/2} e^{i(m\Psi + m'\Phi)} \underbrace{\mathcal{C}_{lm}^{m'}\left(\frac{\Theta}{2}\right)}_{\text{polynômes de Clifford}}$$

avec $\mathcal{C}_{lm}^{m'}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sum_{j=\sup(0, -m-m')}^{\inf(l-m, l-m')} (-1)^j \mathcal{C}_{l-m}^j \mathcal{C}_{l+m}^{m+m'+j} (\cos \frac{\Theta}{2})^{2j+m+m'} (\sin \frac{\Theta}{2})^{2l-(2j+m+m')}$

NB: $\mathcal{C}_{lm}^0\left(\frac{\Theta}{2}\right) = (-1)^{l-m} \frac{(l-m)!}{l!} P_{lm}(\cos \Theta)$

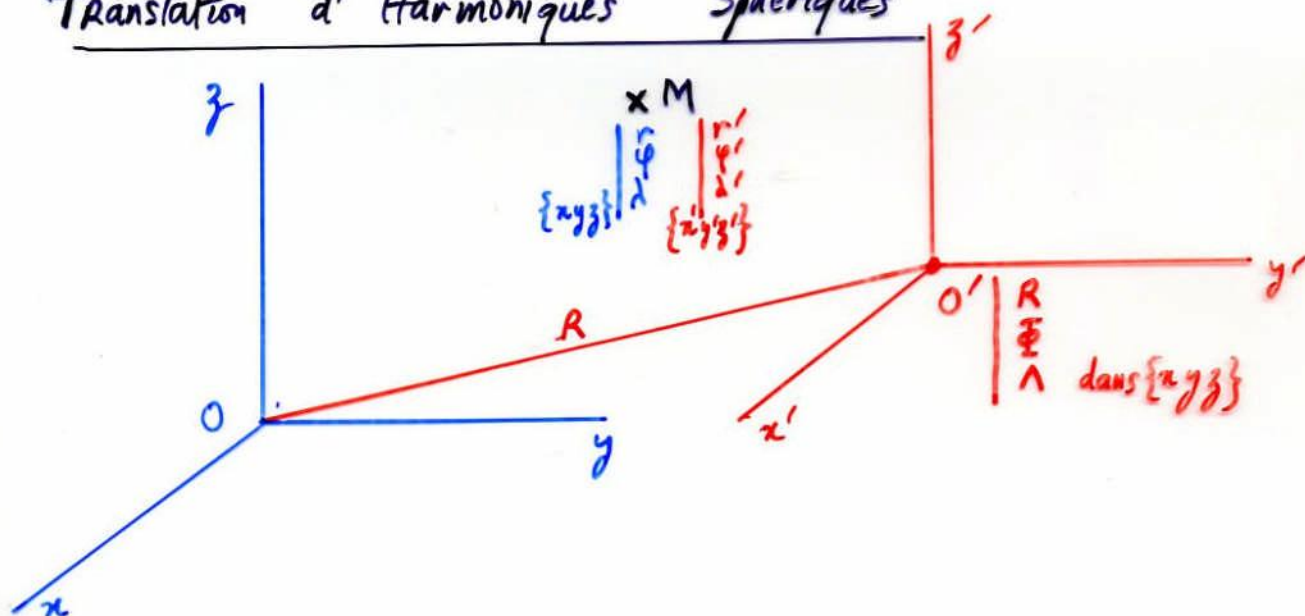
$$\mathcal{C}_{l0}^{m'}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = (-1)^{l-m'} \frac{l!}{(l+m')!} P_{lm'}(\cos \Theta)$$

Les polynômes $\mathcal{C}_{lm}^{m'}$ généralisent les P_{lm} (polynômes ultrasphériques)

Il y a une expression simple $E_{lm}^{m'} = \sum_j E_{lm}^{m'j} k_0^{m+m'+j} k_1^{l-m'-j} k_2^{l-m-j} k_3^j$

avec k_i : Paramètres de Cayley-Klein-Morton associés aux quaternions de (Ψ, Θ, Φ) - Balmucio, 1978

APPLICATION: Fonctions de Kaula en Mécanique Céleste (forme + simple que celle de l'auteur)



On transforme : $\frac{1}{r^{\ell+1}} P_{\ell m}(\sin \varphi) e^{im\lambda} = Z_{\ell m}(r, \varphi, \lambda)$

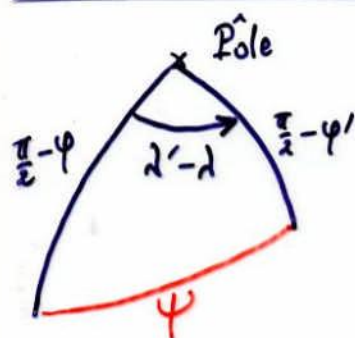
= harmoniques solides du problème extérieur en théorie du potentiel

$$(-m)! Z_{\ell m}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{r'^{\ell+1}}{r^{\ell+1}} (-1)^p \sum_{k=-p}^{+p} \frac{(-1)^k}{(p-k)!} (\ell+p-m-k)! Z_{\ell+p, m+k}(R, \Phi, \Lambda) Z_{p, -k}(r', \varphi', \lambda')$$

$$= \frac{1}{r^{\ell+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{r'}{r}\right)^p \sum_{k=-p}^{+p} \frac{(-1)^k (\ell+p-m-k)!}{(p-k)!} P_{\ell+p, m+k}(\sin \Phi) e^{i(m+k)\Lambda} \cdot P_{p, -k}(\sin \varphi') e^{-ik\lambda'}$$

⇒ un terme de $d \doteq \ell$ (et d'ordre m) donne une infinité de termes de degrés (et ordres) de 0 à l'infini.

Formule d'addition : Corollaire du théorème de rotation



$$\cos \Psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda')$$

$$P_{\ell}(\cos \Psi) = \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (-1)^m P_{\ell m}(\sin \varphi) P_{\ell, -m}(\sin \varphi') e^{im(\lambda - \lambda')}$$

ou : $Y_{\ell 0}(\cos \Psi) = \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (-1)^m Y_{\ell m}(\varphi, \lambda) Y_{\ell, -m}(\varphi', \lambda')$

→ APPLICATION : CHAMPS DE GRAVITATION

Développement de x^m sur $\{P_l(x)\}$

14.

$$x^m = \sum_{l=0}^{[m/2]} a_{m-2l} P_{m-2l}(x)$$

$$\text{avec } a_{m-2l} = 2^{m-2l} \frac{(2m-4l+1)}{l!} \frac{m! (m-l)!}{(2m-2l+1)!}$$

APPLICATION : rayon vecteur d'une planète approximée par un ellipsoïde de révolution

Développement de $\cos n\theta$ sur $\{P_k(\cos \theta)\}$

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} b_{n-2k} P_{n-2k}(\cos \theta)$$

$$\text{avec } b_{n-2k} = -n \frac{(2n-4k+1)}{2^{2k}} \frac{2^{n-1}}{k!} \frac{(2k-3)!! (n-k-1)!}{(2n-2k+1)!!}$$

$$(2p+1)!! = 1.3.5 \dots (2p+1)$$

$$(2p)!! = 2.4.6 \dots (2p)$$

$$(-1)!! = 0!! = 1$$

$$(-3)!! = -1$$

APPLICATIONS : • transformations de séries de Fourier particulières
• en géométrie
• potentiel d'un ellipsoïde
• coefficients de Laplace
...

• Polynômes :

$$P_l(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{[l/2]} (2 - \delta_{l,2j}) \frac{(2l-2j-1)!!}{(2l-2j)!!} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \cos(l-2j)\theta$$

• Fonctions (Balmino, 1990)

$$P_{lm}(\sin \varphi) = \frac{1}{2^{l+m} l!} \sum_{\substack{q=\alpha \\ (\text{par } 2)}}^l \left\{ (2 - \delta_{0q}) \sum_{\substack{p=\sup(m-l, q-m) \\ (\text{par } 2)}}^{\inf(l-m, q+m)} \binom{m}{\frac{p-q+m}{2}} \right. \\ \left. \sum_{\substack{k=|p| \\ (\text{par } 2)}}^{l-m} \frac{(-1)^{[(3k+l-m-p+1)/2]}}{2^k k!} \frac{(l+m+k)!}{(l+m-k)!} \binom{k}{\frac{k-p}{2}} \binom{l}{\frac{l+m+k}{2}} \right\} \begin{cases} \cos q\varphi & l-m: \text{pair} \\ \sin q\varphi & l-m: \text{impair} \end{cases}$$

avec $\alpha = l + 2\mu - 2d\mu$, $d = l - 2[\frac{l}{2}]$, $\mu = m - 2[\frac{m}{2}]$; $\binom{n}{p} = C_n^p$

• Autres formes :

- A l'aide des fonctions de Kaula pour $I = \frac{\pi}{2}$:

$$P_{lm}(\sin \varphi) = \sum_{p=0}^l F_{lmp} \left(\frac{\pi}{2} \right) \begin{cases} \cos(l-2p)\varphi & l-m: \text{pair} \\ \sin(l-2p)\varphi & l-m: \text{impair} \end{cases}$$

avec $F_{lmp} \left(\frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{[\frac{l-m}{2}]} \frac{(l+m)!}{2^{2l} l!} C_l^p \sum_{j=\sup(0, 2p-l-m)}^{\inf(l-m, 2p)} (-1)^j C_{2p}^j C_{2l-2p}^{l-m-j}$

- sous forme complexe, et normalisée

$$\bar{P}_{lm}(\cos \theta) = \sum_{j=0}^l \bar{\gamma}_{lm}^j e^{i(l-2j)\theta}$$

→ relations de récurrence stables entre les $\bar{\gamma}_{lm}^j$ (Balmino, ibid.)

$$\text{Si } f(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} \bar{c}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\text{avec } \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} \bar{Y}_{lm}^2 d\sigma = 1$$

$$\text{alors } \|f\|^2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} f^2 d\sigma = \sum_l \sum_{m=-l}^{+l} |\bar{c}_{lm}|^2$$

(Parseval)

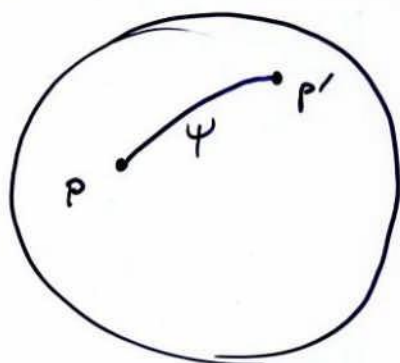
Déf. du spectre de puissance :

$$\text{Spectre} = \{ S_l(f, f) \}, \quad S_l(f, f) = \sum_{m=-l}^{+l} |\bar{c}_{lm}|^2$$

$$= \sum_{m=0}^l (\bar{a}_{lm}^2 + \bar{b}_{lm}^2), \text{ sur } \mathbb{R}$$

Les S_l sont invariants par rotation (cf. formule ...)

Fonction de covariance d'une fonction définie sur une sphère ...



$$F(\psi) = \langle f(P) f(P') \rangle_{\widehat{PP'} = \psi}$$

si isotropie

on trouve :

$$F(\psi) = \sum_{l=0}^{\infty} S_l(f, f) P_l(\cos \psi)$$

→ indépendante du système de référence

$$\text{Si } f(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} \bar{c}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$g(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} \bar{d}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

on définit : $FG(\psi) = \langle f(p) g(p') \rangle_{pp'=\psi}$

$$\Rightarrow FG(\psi) = \sum_l S_l(f, g) P_l(\cos \psi)$$

$$\text{avec : } S_l(f, g) = \sum_{m=-l}^{+l} \bar{c}_{lm} \bar{d}_{lm}^* \quad : \text{ Spectre croisé}$$

$$= \sum_{m=0}^l (\bar{a}_{lm} \bar{a}'_{lm} + \bar{b}_{lm} \bar{b}'_{lm}), \text{ sur } \mathbb{R}$$

Fonction de transfert

Si l'on suppose une relation de la forme

$$f = h * g$$

$$\text{avec } h = \sum_{l,m} \bar{h}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\text{alors : } \bar{h}_{lm} = \tilde{h}_l \quad \forall m$$

$$\text{i.e. } (f)_l = \tilde{h}_l (g)_l \Leftrightarrow \bar{c}_{lm} = \tilde{h}_l \bar{d}_{lm}$$

h est la fonction de transfert entre f et g ,

$$\text{et : } \tilde{h}_l = \frac{S_l(f, g)}{S_l(g, g)} \quad : \text{ En pratique } \underline{\|f - \tilde{h}g\|^2 \text{ min.}}$$

APPLICATION : Corrélations diverses en géophysique, planétologie

Produits de fonctions de Legendre (Balmino, 1977)

$$\begin{aligned}
 P_{lm}(x) P_{jq}(x) &= \sum_{\substack{k = \sup(|m \pm q|, |l-j|) \\ l+k+j: \text{pair}}}^{l+j} Q_{lmjq}^{\pm k} P_{k, |m \pm q|}(x) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\inf(l, j, \{l+j-|m \pm q|\}/2)} B_{ljqm}^{\pm \nu} P_{l+j-2\nu, |m \pm q|}(x)
 \end{aligned}$$

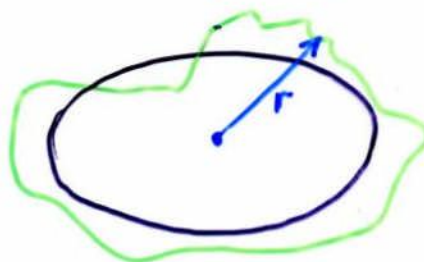
- APPLICATIONS :
- Potentiel gravitationnel de marées océaniques, atmosphériques, terrestres (avec déphasage fonction du lieu)
 - Perturbations de pression solaire réfléchi (albedo)

Il faut dans ce cas généraliser le résultat ci-dessus et effectuer des quadratures du type :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \bar{Y}_{l_1 m_1} \bar{Y}_{l_2 m_2} \bar{Y}_{l_3 m_3} \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \\
 = \alpha_{l_1 l_2 l_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

où $\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} = \text{Symboles de Wigner}$

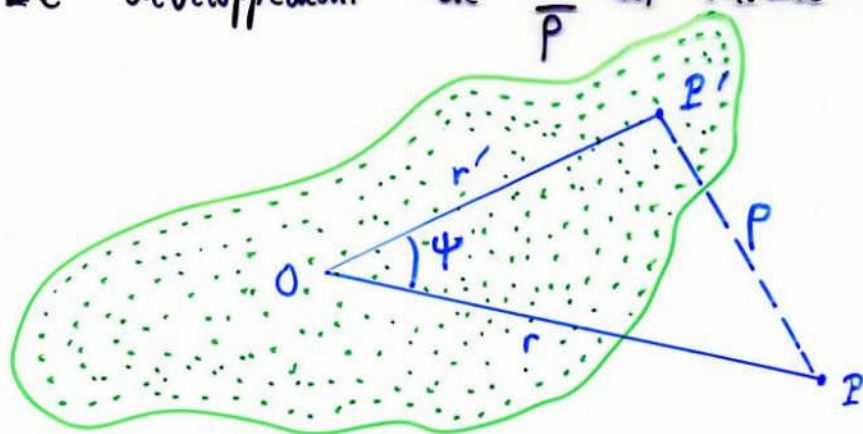
- Potentiel gravitationnel d'une planète formée d'un ellipsoïde homogène "surmonté" d'une topographie développée en harmoniques sphériques



$$r(\varphi, \lambda) = \bar{R}_0 \sum_{l,m} \bar{T}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

II DEVELOPPEMENTS EN SERIE

Le développement de $\frac{1}{p}$ en théorie du potentiel



$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad \text{si } r' < r$$

$$= \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \psi + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} \quad \text{si } r' > r$$

Or, on démontre aisément que :

$$(1 - 2\alpha t + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l P_l(t)$$

Abs. CV si $|\alpha| < 1$
 $|t| \leq 1$

Application au potentiel gravitationnel

$P' \in \text{corps}$, P fixe, $r' < r$
 (r', φ', λ') , (r, φ, λ)

$P_l(\cos \psi)$: formule d'addition

$$U_P = G \iiint_{\text{corps}} \frac{\mu(P')}{p} d\tau$$

M : masse du corps
 $\mu(P')$: masse volumique
 G : constante de la gravitation
 a_e : longueur de référence

$$= \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi)$$

$$M a_e^l \begin{Bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{0m})(l-m)!}{(l+m)!} \iiint_{\text{corps}} r'^l P_{lm}(\sin \varphi') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \mu(P') d\tau$$

Forme complexe (compacte) :

$$m \geq 0 : K_{lm} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (C_{lm} - i S_{lm})$$

$$K_{l,-m} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (C_{lm} + i S_{lm}) (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

$$\Rightarrow U = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^{+l} K_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\text{avec } K_{lm} = \frac{(-1)^m}{M a_e^2} \iiint_{\text{Corps}} r'^l Y_{l,-m}(\varphi', \lambda') \mu(r') dr'$$

Série abs. cv si $r > \sup_{\text{Corps}}(r')$

si $= a_e$, cv à l'intérieur de la sphère $(0, a_e)$
- sphère de Brillouin -

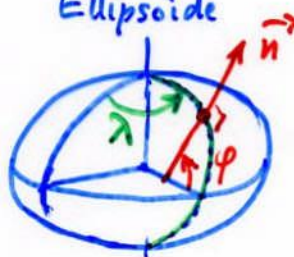
Développements en séries d'harmoniques de surface

f définie sur une sphère

ou sur (Σ) paramétrable par (φ, λ)

Ex.

Ellipsoïde



Si l'on peut écrire

$$f(\varphi, \lambda) =: \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \bar{f}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda) = \Sigma_f$$

alors :

$$\bar{f}_{lm} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\varphi, \lambda) \bar{Y}_{l,-m}(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

$\Rightarrow$ cv ?

Application du th. de Stone-Weierstrass

S : compact

H : sous-espace vectoriel
de $\mathcal{C}(S, \mathbb{R})$

avec • $H \ni f$ constantes (1)

• séparabilité (2)

$\forall P \in S \quad P \neq Q \quad \exists h \in H : h(P) \neq h(Q)$

• $\left. \begin{matrix} h \in H \\ g \in H \end{matrix} \right\} \Rightarrow hg \in H$ (3)

$$S = \sigma_2$$

$$H = \left\{ h_N \mid h_N(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) e^{im\lambda} \right\}$$

(A_{nm} tels que $h_N \in \mathbb{R}$)

(1) : trivial

(2) : facile

(3) : o.k. par usage de la formule du produit $P_{lm} P_{l'm'} \dots$

Conclusion :

$\forall f \in \mathcal{C}(S, \mathbb{R}) \quad \exists$ suite $\{h_N\}_N \in H : \lim_{N \rightarrow \infty} h_N = f$

Donc cv assurée pour les fonctions continues de (φ, λ)

Théorème de Darboux (plus général)

Si : $f(\varphi_0, \lambda)$ a un nombre fini de discontinuités sur $[0, 2\pi]$ ($\forall \varphi_0$)
 $f(\varphi, \lambda_0)$ a un nombre fini de discontinuités sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ ($\forall \lambda_0$)

alors $\sum f$ est cv et égale $\bar{a} f$ en dehors des discontinuités. De plus :

$$\bullet \sum f(\varphi_0, \lambda) = \frac{1}{2} [f(\varphi_0, \lambda+) + f(\varphi_0, \lambda-)]$$

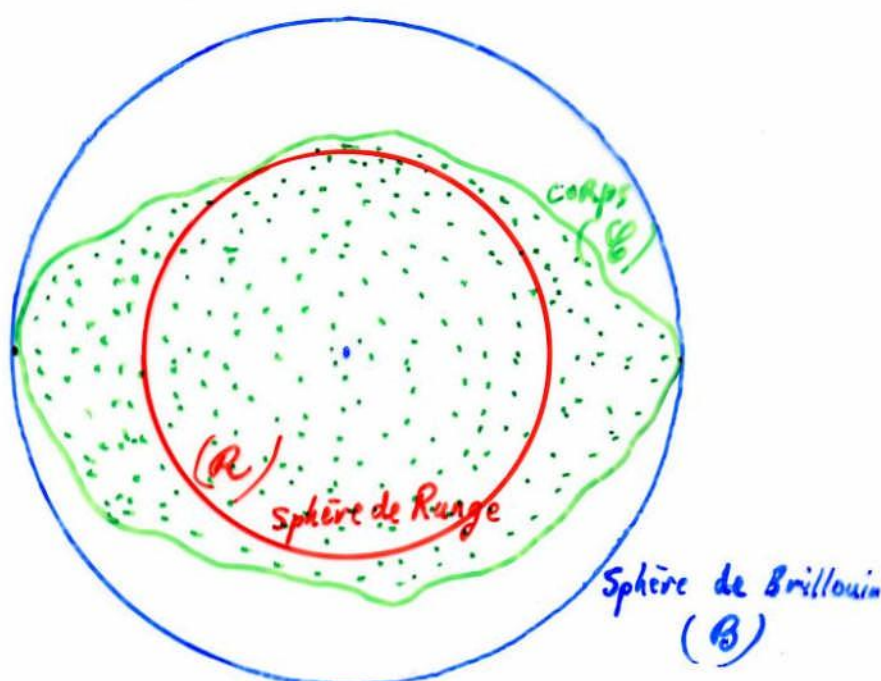
s'il n'y a pas de discontinuité en φ_0

$$\bullet \sum f(\varphi, \lambda_0) = \frac{1}{\alpha + \beta} [\alpha f(\varphi+, \lambda_0) + \beta f(\varphi-, \lambda_0)]$$

s'il n'y a pas de discontinuité en λ_0

Le théorème de Runge en théorie du potentiel de gravitation (1965)

$$U_{\text{ext}} = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} K_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$



Soit R : la plus grande sphère contenue dans le corps C

Alors il existe une série harmonique

$$U^* = \frac{GM}{r} \sum_l \frac{1}{r^l} \sum_m K_{lm}^* Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

qui converge asymptotiquement vers U à l'extérieur de C (et qui reste convergente à l'extérieur de R et à l'intérieur de C).

$\Rightarrow$. du fait de l'unicité de U :

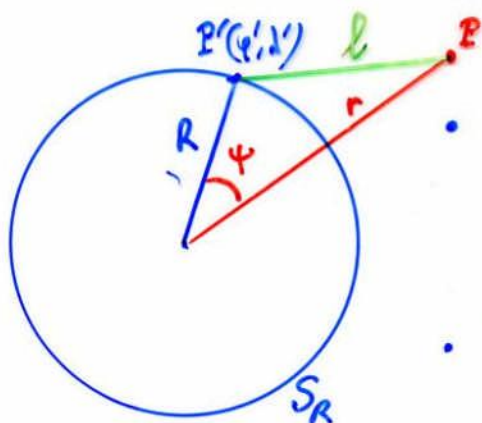
$$U^* \equiv U_{\text{ext}} \quad \text{à l'extérieur de } B$$

. entre B et C : $U^* \stackrel{?}{=} U_{\text{ext}}$

Pas de théorème

... mais nombreuses expériences numériques qui montrent la convergence de U_{ext} et l'identité (en calculant U par intégration numérique)

Problème de Dirichlet sur la sphère



• On donne $f(\varphi, \lambda)$ sur S_R
avec $f(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$

• Trouver $V(r, \varphi, \lambda)$ t.q.

$$V(R, \varphi, \lambda) = f(\varphi, \lambda)$$

$\Delta V = 0$ à l'intérieur de S
ou à l'extérieur de S

Solution :

$$r < R : V_{\text{int}}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$r > R : V_{\text{ext}}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

Remarques:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f_l(\varphi, \lambda) &= \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda) \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\varphi', \lambda') P_l(\cos \psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' \\ &\quad \text{avec } \cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda') \end{aligned}$$

② Formule de Poisson :

$$V_{\text{ext}}(r, \varphi, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \iint_{\sigma_2} \frac{f(\varphi', \lambda')}{l^3} d\sigma'$$

$$\text{car } \frac{R(r^2 - R^2)}{l^3} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \psi)$$

Problème de Neumann :

- On donne $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} = f(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} Y_{lm}(\varphi, \lambda) f_{lm}$
- On cherche $V(r, \varphi, \lambda)$ harmonique

Solution :

$$V_{\text{ext}}(r, \varphi, \lambda) = -R \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \frac{1}{l+1} \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

EX : Perturbations de gravité $\delta g = -\frac{\partial(U-U_E)}{\partial r}$ données
à la surface de la Terre.
(U_E : potentiel d'un ellipsoïde de référence)

Problème aux limites de 3^{ème} type :

- On donne (h, k : constantes)
 $\left(hV + k \frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} = \sum_{l,m} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$
- On cherche $V(r, \varphi, \lambda)$ harmonique

Solution :

$$V_{\text{ext}}(r, \varphi, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \frac{1}{h - \frac{k}{R}(l+1)} \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

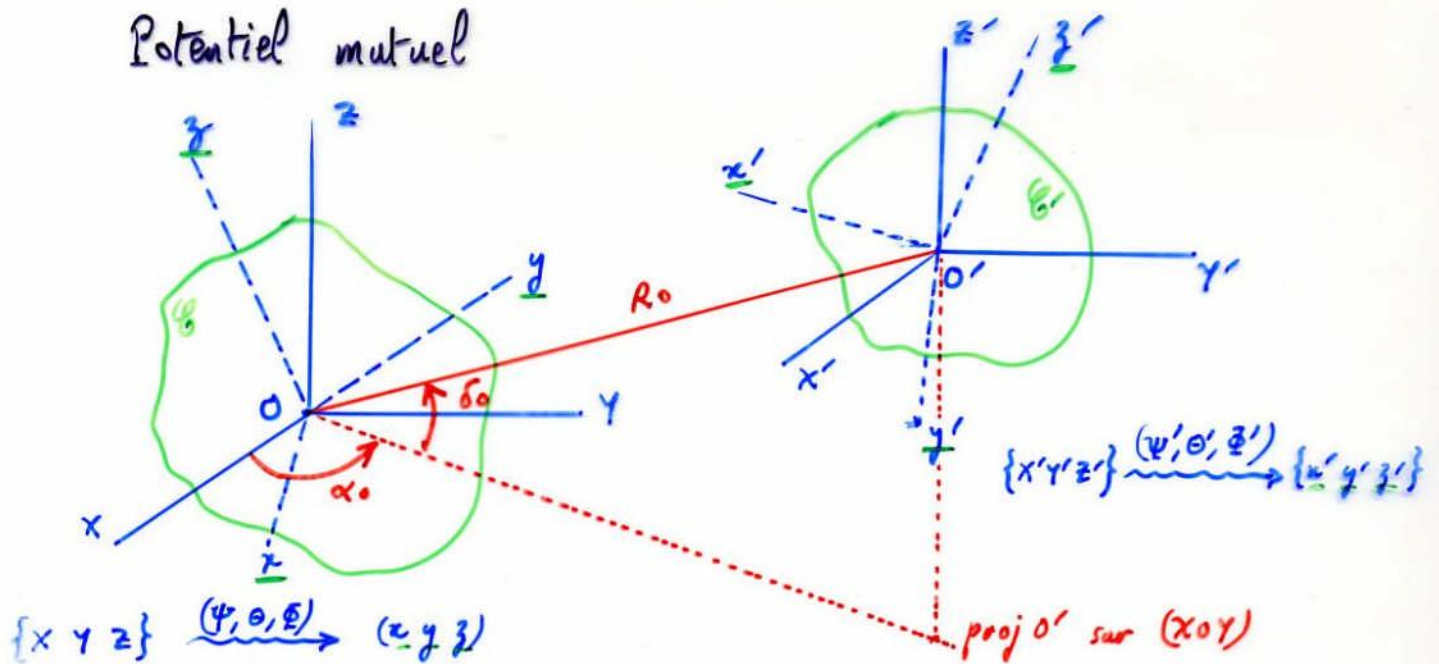
EX : Anomalies de gravité Δg
 $\Delta g = -\frac{\partial(U-U_E)}{\partial r} - \frac{2}{r}(U-U_E) \dots$
($\approx$ perturbations de gravité réduites au géoïde
et à la surface de l'ellipsoïde de référence)

Dans tous les cas, on a besoin du développement
de $f(\varphi, \lambda)$ en série d'harmoniques de surface, à partir
de valeurs ... mesurées, et bien distribuées
 $\Rightarrow$ Analyse harmonique

III- QUELQUES APPLICATIONS

1. Potentiels gravitationnels

Potentiel mutuel



$$U = G \int_G \int_{G'} \frac{d\mu d\mu'}{PP'} \quad \begin{array}{l} P \in G \\ P' \in G' \end{array}$$

$$= \frac{GMM'}{R_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^l \sum_{m=-l}^{+l} \frac{K_{lm}^0}{(l-m)!} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{a'_e}{R_0}\right)^p \sum_{k=-p}^{+p} \frac{K'_{pk}}{(p-k)!} (l-m+p-k)! P_{l+p, m+k}(\sin \delta_0) e^{i(m+k)\alpha_0}$$

avec $K_{lm}^0 = \frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)!} \sum_{m'=-l}^{+l} K_{lm, m'} (l+m')! i^{m-m'} \mathcal{C}_{lm}^{m'}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(m\psi + m'\phi)}$

$$K'_{pk} = \frac{(-1)^{p+k}}{(p+k)!} \sum_{k'=-p}^{+p} K'_{pk, k'} (p+k')! i^{k-k'} \mathcal{C}_{pk}^{k'}\left(\frac{\theta'}{2}\right) e^{i(k\psi' + k'\phi')}$$

K_{lm}^0 : harmoniques de G dans repère (x, y, z) lié à G

K'_{pk} : harmoniques de G' dans repère (x', y', z') lié à G'

EX: SYSTEME TERRE-LUNE

Pour $N > 2$ corps :

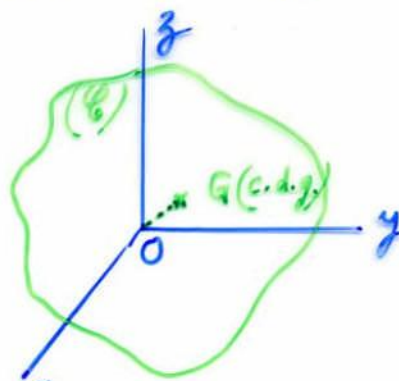
$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij}$$

$$\mu_{ij} = G \int_{G_i} \int_{G_j} \frac{d\mu_i d\mu_j}{P_i P_j}$$

Potentiel d'un corps isolé

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos md + S_{lm} \sin md) P_{lm}(\sin \varphi)$$

- $C_{00} = 1$
- $C_{10} = zG/R$
- $C_{11} = xG/R$
- $S_{11} = yG/R$



$$\Rightarrow C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0 \quad \text{si} \quad \vec{OG} = \vec{0}$$

- $S_{l0} = 0 \quad (\forall l)$
- $C_{20} = -\frac{1}{MR^2} \left(C - \frac{A+B}{2} \right)$
- $C_{22} = \frac{1}{MR^2} \frac{B-A}{4}$
- $S_{22} = \frac{1}{MR^2} \frac{F}{2}$
- $C_{21} = \frac{1}{MR^2} D$
- $S_{21} = \frac{1}{MR^2} E$

$$I_0 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = S_{21} = 0 \quad \text{si} \quad Oz : \text{principal d'inertie}$$

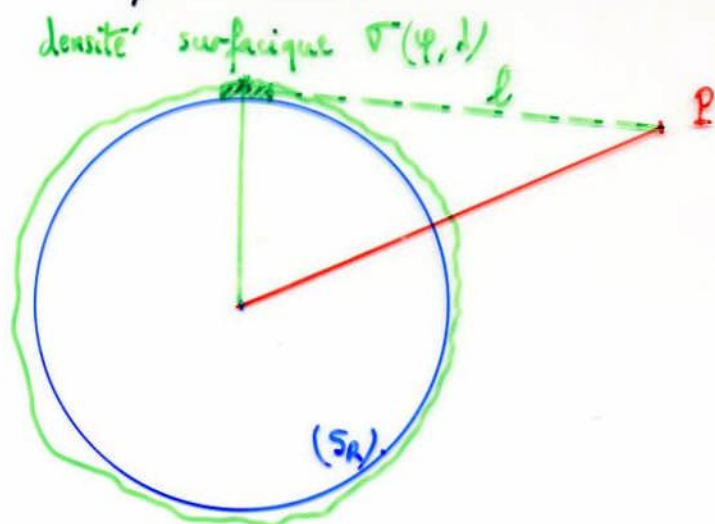
Remarque

$(C_{20}, C_{22}, S_{22}, C_{21}, S_{21})$ ne permettent pas d'obtenir le tenseur complet.

Il faut, en outre, $\mathcal{H} = \frac{C-A}{C}$ par ex. (provient de l'étude de la précession)

... ou $\alpha = \frac{B-A}{C}$, ou $\beta = \frac{C-B}{A}$ ou $\gamma = \frac{A-C}{B}$.
(proviennent de l'étude des libérations - cf. LUNE).

Potentiel de simple couche :



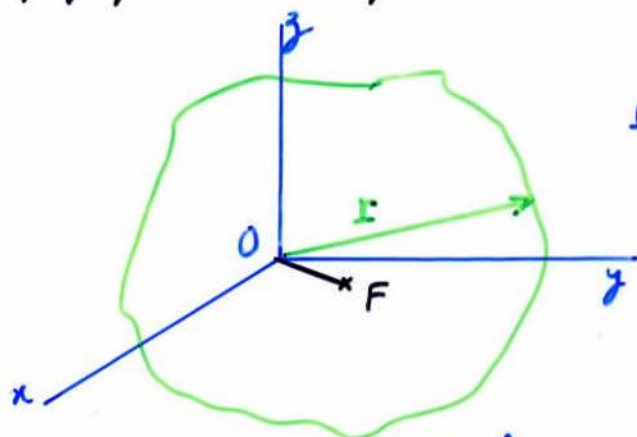
$$U_P = G \iint_{S_R} \frac{\sigma(\varphi, \lambda)}{l} ds$$

On suppose $\sigma(\varphi, \lambda) = \sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$

$$\Rightarrow U_P = 4\pi R^2 \frac{G}{r} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^l \sigma_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

APPLICATION : Potentiel de marées océaniques, atmosphériques...

Topographie d'une planète et son potentiel



$$r(\varphi, \lambda) = R \left[1 + \sum_{l,m} T_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda) \right]$$

$$T_{lm} \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (A_{lm}, B_{lm}) : \text{réels}$$

N.B. Centre de figure : $\vec{OF} = \frac{1}{\text{Vol.}} \iiint \vec{r} dv$

$$\Rightarrow x_F = R \cdot A_{11} ; y_F = R \cdot B_{11} ; z_F = R \cdot A_{10}$$

Potentiel dû à la topographie :

Approximation : simple couche $\sigma_{lm} = \underbrace{\mu_0}_{\text{densité}} R T_{lm} \dots$

2. Autres exemples

Fonction océan :

$$f(\varphi, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in \text{Océan} \\ 0 & \text{si } P \in \text{Terre} \end{cases}$$

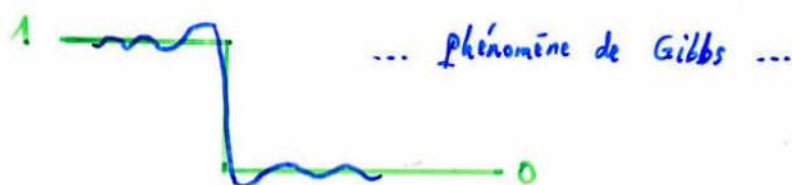


... ou toute fonction de distribution sur une sphère !

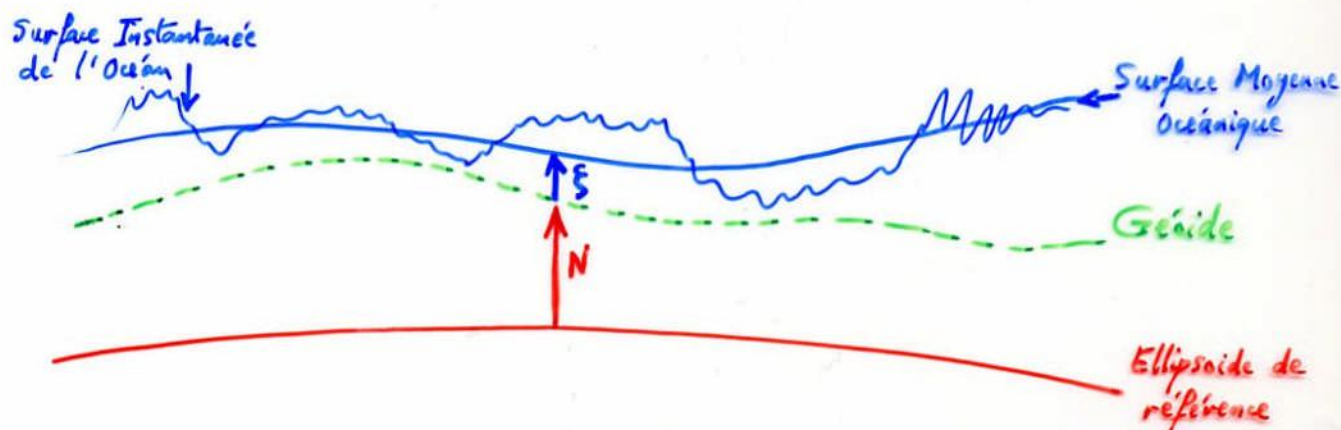
$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{l, m} \bar{\Omega}_{lm} \bar{Y}_{lm}(\varphi, \lambda)$$

≡ développement jusqu'à (080, 1080)
- Balmino, 1991 -

Attention au voisinage de la discontinuité océan-continent !



Topographie océanique et circulation moyenne :



$$SIO \approx SMO + \text{Marées océaniques} + \text{vagues (vents, ...)} + \text{tourbillons} + \text{variations saisonnières des courants}$$

$$SMO \approx \text{Géοide} + \text{circulation moyenne}$$

N : équipotentielle de "U + pot. centrifuge"

$N + \xi$: à partir de "altimétrie + restitution d'orbite"

On écrit $\xi = \sum_{l, m} \xi_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$ en imposant 0 sur les terres

EX: Modèle physique de Lévitov - Détermination directe future: ERS1, TOPEX/POSEIDON

IV - L'ANALYSE HARMONIQUE SPHERIQUE

Principe

Soit $f(\varphi, \lambda)$ définie sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

que l'on écrit a priori (forme réelle et normalisée)

$$f \approx f_0 \sum_{l=0}^L g_l(\varphi) \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$$

développement $\Sigma_f(L)$

Sous certaines conditions (f. th. de Darboux), on sait que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \Sigma_f(L) \text{ existe et } = f.$$

L est choisi en général en fonction de la résolution moyenne
des données $\Delta\rho$ (en degrés) : $L = \frac{180^\circ}{\Delta\rho}$

But : calculer les $\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$, à partir

- soit de valeurs $f(P_i)$, les P_i étant quelconques
- soit de valeurs moyennes $\langle f(P_i) \rangle_{\Delta\varphi \times \Delta\lambda}$, les P_i étant aussi quelconques
- soit de valeurs $f(\varphi_i, \lambda_j)$ aux nœuds d'une grille régulière sur la sphère
- soit de valeurs moyennes $\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\Delta\sigma_{ij}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} f(\varphi, \lambda) d\sigma$
constituant une grille régulière



Suivant le cas (et suivant les $g_l \dots$) :

- formulation intégrale (la plus rapide)
- résolution par moindres carrés

- Quelques points communs aux deux approches

- Prise en compte d'un modèle de référence

$$\begin{array}{c|c} l=0 \text{ à } L_{\text{ref}} & \{\bar{C}_{lm,\text{ref}} ; \bar{S}_{lm,\text{ref}}\} \\ m=0 \text{ à } l & \end{array}$$

$$\Rightarrow \langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle \approx f_0 \left\langle \sum_{l=0}^L g_l(\varphi) \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{lm}^* \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \right\rangle$$

$$\text{avec: } \langle f^* \rangle = \langle f_{\text{mesurée}} \rangle - f_0 \left\langle \sum_{l=0}^{L_{\text{ref}}} \sum_{m=0}^l g_l(\varphi) (\bar{C}_{lm,\text{ref}} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm,\text{ref}} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \right\rangle$$

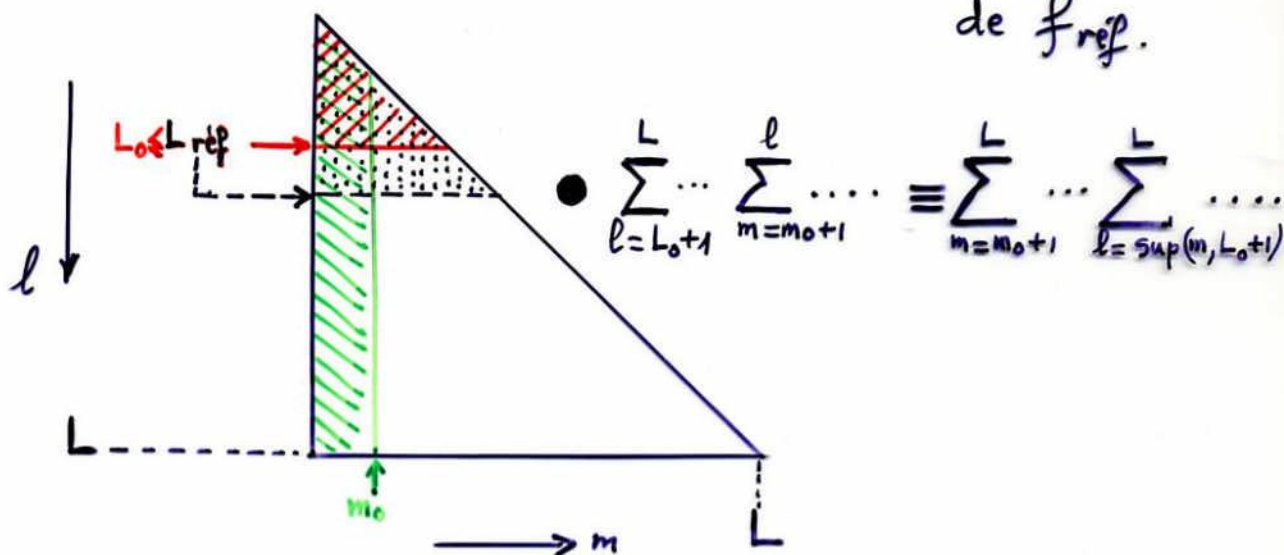
$$: \{\bar{C}_{lm}^* = \{\bar{C}_{lm} - \bar{C}_{lm,\text{ref}}\}$$

- Limitation inférieure en l, m imposée par analyse préalable (Pb. couverture des données)

Ex.: mauvaise couverture en latitude

$$\Rightarrow \bar{C}_{l,0} \text{ mal déterminables ...}$$

Coefficients $\{\bar{C}_{l,m} ; \bar{S}_{l,m}\} \begin{cases} m \leq m_0 \\ l \leq L_0 \leq L_{\text{ref}} \\ m \leq l \end{cases} : \text{non calculés ou fixés aux valeurs de } f_{\text{ref}}.$



Formules de calcul dans le cas d'une grille régulière

- Formulation intégrale

Elle suppose que les $\bar{C}_{lm}$, $\bar{S}_{lm}$ sont les projections de f sur la base de fonctions

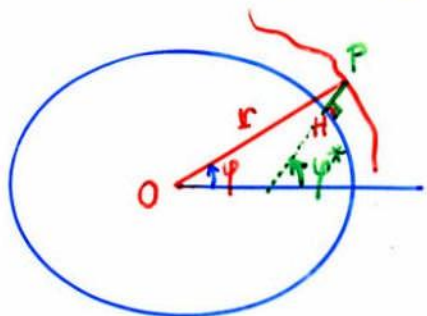
$$g_l(\varphi) P_{lm}(\sin\varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix}$$

En général on n'a pas :

$$\iint_{\sigma_1} g_l(\varphi) P_{lm}(\sin\varphi) e^{im\lambda} g_{l'}(\varphi) P_{l'm'}(\sin\varphi) e^{im'\lambda} d\sigma_1 \\ = A_{ll'mm'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

sauf si $g_l(\varphi)$ indépendant de φ

Ex : ① Topographie



$$\bullet r(\varphi, \lambda) = R \left[1 + \sum_{l,m} T_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda) \right]$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = 1$$

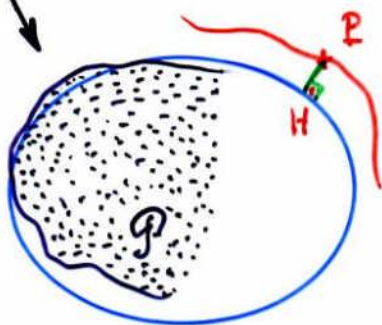
$$\bullet \bar{HP}(\varphi, \lambda) = R \sum_{l,m} \tilde{T}_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$= R \sum_{l,m} \tilde{T}_{lm}^* Y_{lm}(\varphi^*, \lambda)$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = 1$$

② Géoïde, correspondant à $\{\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}\}$ gravitationnels de $\mathcal{P}$

$\gamma(\varphi)$ pesanteur



$$\bar{HP} = \frac{GM}{R \gamma(\varphi)} \sum_l \left[\frac{R}{r(\varphi)} \right]^{l+1} \sum_m \delta_{(c,s)_{lm}} Y_{lm}(\varphi, \lambda)$$

$$\Rightarrow g_l(\varphi) = \frac{R^{l+1}}{\gamma(\varphi) \cdot r(\varphi)^{l+1}} !$$

$$\approx 1 / \langle \gamma \rangle \dots$$

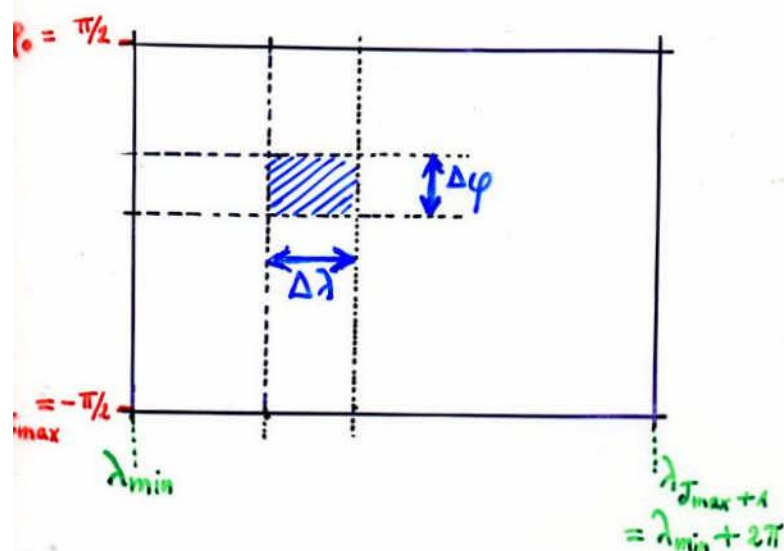
Donc : si on ne peut pas faire l'hypothèse que
 $g_l(\varphi) = g_l$: formulation intégrale impossible
 → moindres carrés ...

EXPRESSION INTEGRALE DES COEFFICIENTS

$$f_0 g_l \left(\begin{array}{c} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{array} \right) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1} f(\varphi, \lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\sigma$$

$\Leftrightarrow$ (formule page 20)

CALCUL PRATIQUE



Grille : $\Delta\varphi \times \Delta\lambda$

$$I_{\max} = \pi / \Delta\varphi$$

$$J_{\max} = 2\pi / \Delta\lambda$$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2} - i \Delta\varphi, (0 \leq i \leq I_{\max})$$

$$\lambda_j = \lambda_{\min} + (j-1) \Delta\lambda$$

$(1 \leq j \leq J_{\max})$

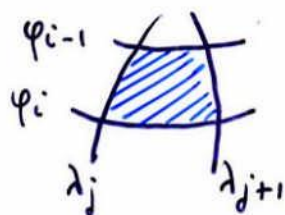
Données

$$f_{ij}^* = f(\varphi_i, \lambda_j) \quad \text{grille ponctuelle}$$

ou :

$$\bar{f}_{ij}^* = \frac{1}{\Delta\sigma_{ij}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i-1}} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} f(\varphi, \lambda) d\sigma$$

avec $\Delta\sigma_{ij} = \Delta\lambda (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$



ON SUPPOSE QUE L'ON A TOUJOURS $\bar{f}_{ij}^*$

(on peut transformer

$$f_{ij}^* \rightarrow \bar{f}_{ij}^*$$

• collocation (Wien)
 approximation locale par une surface
 ...

APPROXIMATION DE L'INTEGRALE PAR UNE FONCTION LINEAIRE / $\bar{f}_{ij}$

$$f \circ g_l \left(\begin{matrix} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{matrix} \right) \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{I_{\max}} \sum_{j=1}^{J_{\max}} \bar{f}_{ij}^* \begin{matrix} \langle \bar{P}_{lm}^{(\sin \varphi)} \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]} \\ \langle \cos m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} \\ \langle \sin m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} \end{matrix} \Delta \sigma_{ij}$$

avec :

$$\bullet \langle \bar{P}_{lm}^{(\sin \varphi)} \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]} = \frac{1}{\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i} \int_{\sin \varphi_i}^{\sin \varphi_{i-1}} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) d(\sin \varphi) \equiv \bar{P}_{lm}^{(\sin \varphi)}(\sin \varphi_{i-1})$$

$$\bullet \langle \cos m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} = \theta_m(\Delta \lambda) \cos m \bar{\lambda}_j$$

$$\langle \sin m \lambda \rangle_{[\lambda_j, \lambda_{j+1}]} = \theta_m(\Delta \lambda) \sin m \bar{\lambda}_j$$

$$\theta_m(\Delta \lambda) = \frac{\sin(m \Delta \lambda / 2)}{m \Delta \lambda / 2} \quad \text{si } m > 0$$

$$= 1 \quad \dots \quad \text{si } m = 0$$

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_{\min} + (j - \frac{1}{2}) \Delta \lambda$$

$$\bullet \Delta \sigma_{ij} = \Delta \lambda (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$

$$\bullet \bar{C}_{lm}^*, \bar{S}_{lm}^* : \text{harmoniques modifiées ...}$$

... en effet :

$$f^* \text{ est connu par } \bar{f}^*(\varphi, \lambda) = \langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle_{\Delta \varphi \times \Delta \lambda}$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_{\varphi_0}} \iint_{A_{\varphi_0}} f^*(\varphi, \lambda) d\sigma$$

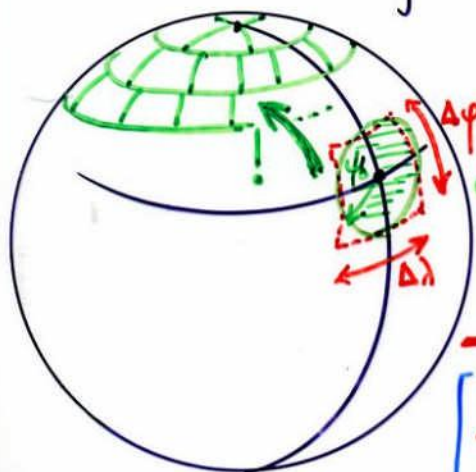
$$\sigma_{\varphi_0} = 2\pi(1 - \cos \varphi_0) \approx \Delta \varphi \Delta \lambda$$

O.K. seulement à l'équateur

pavage en aires $\approx$ égales : plus satisfaisant

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{bmatrix} = \beta_l \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{bmatrix}$$

$$\beta_l = \text{coefficients de Meissl-Pellinen} \\ = \frac{P_{l-1}(\cos \varphi_0) - P_{l+1}(\cos \varphi_0)}{(2l+1)(1 - \cos \varphi_0)}$$



Finalement :

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{lm}^* \\ \bar{S}_{lm}^* \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4\pi f_0} \frac{\theta_m(\Delta\lambda)}{g_l \beta_l} \Delta\lambda \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(I_{max}, J_{max})} \bar{f}_{ij}^* \bar{J}_{lm}^i \begin{pmatrix} \cos m \bar{\lambda}_j \\ \sin m \bar{\lambda}_j \end{pmatrix}$$

CALCUL DES INTEGRALES DES POLYNOMES ET FONCTIONS DE LEGENDRE

$$\bar{J}_{lm} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \quad ; \quad (0 \leq m \leq l \leq L)$$

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi, \quad y = \cos \varphi, \quad \bar{\varphi} = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 \\ x_i &= \sin \varphi_i, \quad y_i = \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$$\tau_l = [(2l-1)(2l+1)]^{1/2}$$

$$W_1^1 = \sqrt{3}, \quad W_m^m = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{1/2}, \quad 1 \leq m \leq L$$

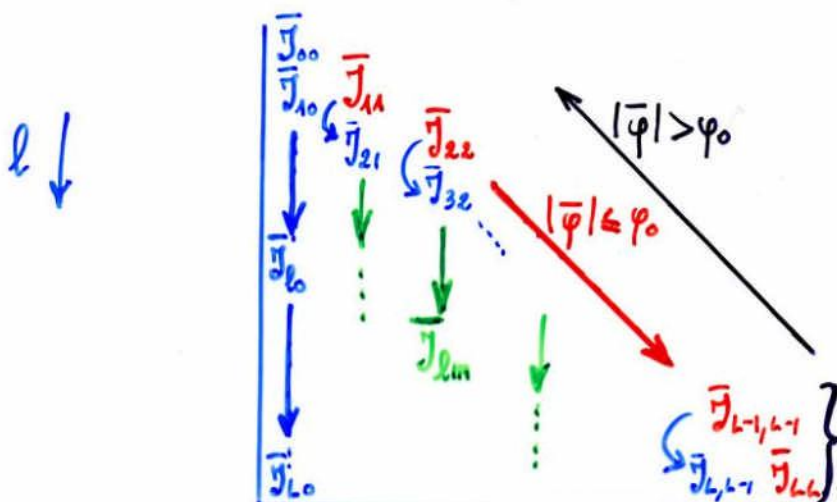
$$W_l^m = \tau_l / [(l-m)(l+m)]^{1/2}, \quad 1 \leq m < l \leq L$$

$$\bar{J}_{00} = x_2 - x_1$$

$$\bar{J}_{10} = \sqrt{3} \bar{I}_{00} \bar{\varphi}$$

$$\bar{J}_{l0} = \left\{ \bar{P}_{l+1,0} / \tau_{l+1} - \bar{P}_{l-1,0} / \tau_l \right\}_1^2, \quad 2 \leq l \leq L^*$$

(Les $\bar{P}_{l,0}$ sont calculés par les formules page 10)



$$\begin{aligned} &^* \{A(x, y, \varphi)\}_1^2 \\ &= A(x_2, y_2, \varphi_2) - A(x_1, y_1, \varphi_1) \end{aligned}$$

• calcul des $\bar{J}_{mm}$: soit $\varphi_0 \approx \frac{\pi}{12}$

- si $|\bar{\varphi}| \leq \varphi_0$: $\bar{J}_{11} = \{\varphi + xy\}_1^2 \sqrt{3/2}$

$$\bar{J}_{mm} = W_m^m \left[m W_{m-1}^{m-1} \bar{J}_{m-2, m-2} + \{x \bar{P}_{mm}\}_1^2 / W_m^m \right] / (m+1)$$

$$2 \leq m \leq L$$

- si $|\bar{\varphi}| > \varphi_0$:

$$\bar{J}_{mm} = -\operatorname{sgn}(\bar{\varphi}) \cdot \left\{ \bar{P}_{mm} y^2 \left[\frac{1}{m+2} + \frac{1}{2} y^2 \left[\frac{1}{m+4} + \frac{3}{4} y^2 \left(\frac{1}{m+6} \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left. + \frac{5}{6} y^2 \left(\frac{1}{m+8} + \frac{7}{8} y^2 + \dots + \frac{2M-1}{2M} y^2 \left(\frac{1}{m+2M+2} \right) \dots \right) \right] \right] \right] \right\}_1^2$$

$$(m = L \text{ et } L-1)$$

φ_0 et $M = \operatorname{int} \{100(100 - \bar{\varphi})\}$ sont fonctions de L et de la précision de la machine !...

$$\bar{J}_{m-2, m-2} = [(m+1) \bar{J}_{mm} - \{x \bar{P}_{mm}\}_1^2] / (m W_m^m W_{m-1}^{m-1})$$

$$(m = L, L-1, L-2, \dots, 4)$$

$$\bar{J}_{11} = \{\varphi + xy\}_1^2 \sqrt{3/2}$$

• calcul des $\bar{J}_{m+1, m}$:

$$\bar{J}_{m+1, m} = -W_{m+1}^m / (m+2) \{y^2 \bar{P}_{mm}\}_1^2$$

$$1 \leq m \leq L-1$$

• calcul des $\bar{J}_{lm}$ ($l \geq m+2$) :

$$\bar{J}_{lm} = W_l^m \left[(l-2) \bar{J}_{l-2, m} / W_{l-1}^m - \{y^2 \bar{P}_{l-1, m}\}_1^2 \right] / (l+1)$$

$$(m+2 \leq l \leq L)$$

N.B. Les $\bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i)$ sont calculés par récurrence (formules page 10)

Tests

$$L = 1 \rightarrow 1200$$

$$\bar{\varphi} = -90^\circ \text{ à } +90^\circ, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 0.1^\circ \text{ à } 5^\circ$$

CDC Cyber 332

Comparaisons avec quadrature par Gauss à 16, 32, 64 points (en D.P.)

$$|\operatorname{err.}| \leq 5 \cdot 10^{-11}$$

Temps : ≈ 900 sec. CPU pour $375 \cdot 10^6$ intégrales.
(Topographie de Vénus)

- Equations d'observation et solution par moindres carrés

$$\langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle = f_0 \sum_{l=l_0+1}^L \langle g_l(\varphi) \sum_{m=m_0+1}^l (\bar{C}_{lm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{lm}^* \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin\varphi) \rangle$$

On pose :

$$\bullet X = \begin{bmatrix} \{\bar{C}_{lm}^*\} \\ \{\bar{S}_{lm}^*\} \end{bmatrix}$$

$$\bullet A = \left[f_0 g_l(\varphi) H_{lm} \{ \cos m\tilde{\lambda}, \sin m\tilde{\lambda} \} \right]$$

avec $H_{lm} = \begin{cases} \bar{P}_{lm}(\sin\varphi) \\ \bar{P}_{lm}(\theta_m, \Delta\lambda) \end{cases}$ $\mu_i \langle \dots \rangle$

$\tilde{\lambda} = \lambda$, ou $\tilde{\lambda} \dots \dots \dots$

$$\bullet B = \langle f^*(\varphi, \lambda) \rangle$$

On donne également σ = erreur estimée sur $\langle f^* \rangle$



$$A X = B \quad \text{avec } \Pi = \text{Diag} \{ 1/\sigma^2 \}$$

SOLUTION :

$$\bullet \hat{X} = (A^T \Pi A)^{-1} A^T \Pi B$$

$$\text{COV}_{\hat{X}} = \Sigma_0 (A^T \Pi A)^{-1}$$

$$\text{avec } \Sigma_0 = \left\{ \frac{B^T \Pi B - \hat{X}^T A^T \Pi B}{\text{Nég.} - n_{\text{inconnues}}} \right\}^{1/2}$$

La formulation est générale ... (Couverture quelconque)
 → CONTRAINTES POSSIBLES
 SOLUTIONS DANS L'ESPACE PROPRE, etc...

OPTIMISATIONS

ET CAS PARTICULIERS

FORMULATION INTEGRALE

Problème :

$$m = m_0 + 1 \rightarrow L$$

$$l = \sup(m, l_0 + 1) \rightarrow L$$

$$i = 1, I_{\max} \dots \textcircled{\varphi}$$

$$j = 1, J_{\max} \dots \textcircled{\lambda}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{array} \right\} + \bar{f}_{ij} \mathcal{J}_{lm}(\varphi_i) \left\{ \begin{array}{l} \cos \cdot m \lambda_j \\ \sin \cdot m \lambda_j \end{array} \right\}$$



INTERVERSION DE BOUCLES
VECTEURS INTERMEDIAIRES

RELATIONS DE RECURRENCE ...

$$\left\{ \begin{array}{l} A_m \\ B_m \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{I_{\max}} \bar{f}_{ij} \left\{ \begin{array}{l} \cos \cdot m \lambda_j \\ \sin \cdot m \lambda_j \end{array} \right\}$$

$$m = m_0 + 1, L$$

$$\left\{ \mathcal{J}_{lm}(\varphi_i) \right\}_l$$

$$l = \sup(m, l_0 + 1), L$$

$$\begin{array}{l} \bar{C}_{lm} = \bar{C}_{lm} + \bar{\mathcal{J}}_{lm} A_m \\ \bar{S}_{lm} = \bar{S}_{lm} + \bar{\mathcal{J}}_{lm} B_m \end{array}$$

D'où la technique* :

$$\begin{aligned} \alpha_{(ij)}^m &= \bar{f}_{(ij)} \cos m \bar{\lambda}_j \\ \beta_{(ij)}^m &= \bar{f}_{(ij)} \sin m \bar{\lambda}_j \end{aligned}$$

... se calculent par récurrence :

$$\begin{aligned} \alpha_{(ij)}^0 &= \bar{f}_{(ij)} & \alpha_{(ij)}^1 &= \bar{f}_{(ij)} \cos \bar{\lambda}_j \\ \beta_{(ij)}^0 &= 0 & \beta_{(ij)}^1 &= \bar{f}_{(ij)} \sin \bar{\lambda}_j \end{aligned}$$

$$\alpha_{(ij)}^m = 2 \cos \bar{\lambda}_j \alpha_{(ij)}^{m-1} - \alpha_{(ij)}^{m-2}$$

$$\beta_{(ij)}^m = 2 \cos \bar{\lambda}_j \beta_{(ij)}^{m-1} - \beta_{(ij)}^{m-2}$$

$$\begin{aligned} A_{(i)}^m &= \sum_{j=1}^{J_{\max}} \alpha_{(ij)}^m \\ B_{(i)}^m &= \sum_{j=1}^{J_{\max}} \beta_{(ij)}^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{lm} &= \sum_{i=1}^{I_{\max}} \bar{J}_{l(m)} A_{(i)}^m \\ \sigma_{lm} &= \sum_{i=1}^{I_{\max}} \bar{J}_{l(m)} B_{(i)}^m \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi f_0} \frac{\theta_m(\Delta\lambda)}{g_l \beta_l} \Delta\lambda \begin{Bmatrix} \gamma_{lm} \\ \sigma_{lm} \end{Bmatrix}$$

mêmes tableaux ...

*

(xx) : indigestion inutile dans la pratique

SOLUTION PAR MOINDRES CARRES

- GRILLE REGULIERE -

Etapes coûteuses :

Formation des équations d'observation, individuellement

Formation des équations normales, ensuite ...



Idee : Formation directe des équations normales

$$\underbrace{(A^T \Pi A)}_N X = \underbrace{A^T \Pi B}_R$$

Technique :

• ORDRE DES INCONNUES :

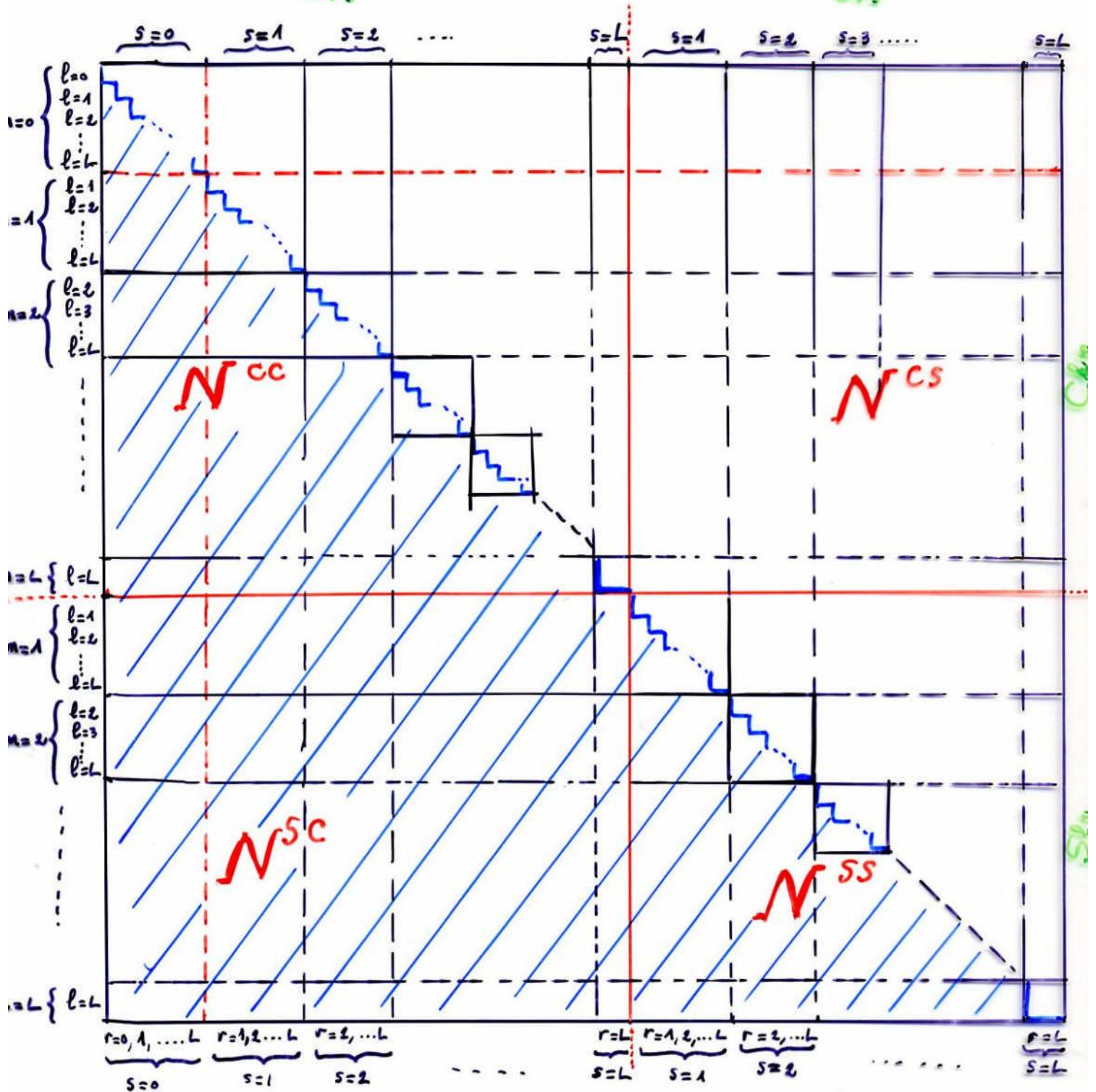
$$X \rightarrow \underbrace{C_{10} \ C_{20} \ \dots \ C_{L0}}_{\substack{m=0 \\ (\text{ou } m_0+1)}} \mid \underbrace{C_{11} \ C_{21} \ \dots \ C_{L1}}_{\substack{m=1 \\ (\text{ou } m_0+2)}} \mid \underbrace{C_{22} \ C_{32} \ \dots \ C_{L2}}_{\substack{m=2 \ \dots \dots \dots m=L \\ (\text{ou } m_0+3)}} \mid \underbrace{C_{LL}}_{\substack{m=L \\ (\text{ou } m_0+3)}} \mid \underbrace{S_{11} \ S_{21} \ \dots \ S_{L1}}_{\substack{m=1 \\ (\text{ou } m_0^*+2)}} \mid \underbrace{S_{22} \ \dots \ S_{L2}}_{\substack{m=2 \ \dots \dots \dots m=L \\ (\text{ou } m_0^*+3)}} \mid \underbrace{S_{LL}}_{\substack{m=L \\ (\text{ou } m_0^*+3)}}$$

($m_0^* = m_0$ si $m_0 > 0$; $m_0^* = m_0 + 1$ si $m_0 = 0$)

• ECRITURE DE N et R sous la forme :

$$N = \begin{bmatrix} N^{cc} & N^{cs} \\ N^{sc} & N^{ss} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R^c \\ R^s \end{bmatrix}$$

Structure de N : Crs Srs 

$$N^{cs} = (N^{sc})^T$$

$$m = m_0 + 1 \rightarrow L$$

$$l = \sup(m, L_0 + 1) \rightarrow L$$

$s = m \rightarrow L$	$s = m_0 + 1 \rightarrow L$	$s = m \rightarrow L$
$r = l \rightarrow L$	$r = \sup(s, l_0 + 1) \rightarrow L$	$r = l \rightarrow L$
N^{cc}	N^{cs}	N^{ss}

Avec ces limites sur (l, m, r, s) on a :

- $N_{lmrs}^{cc} = f_0 \sum_i^2 \sum_j \bar{w}_{ij} \cos m \lambda_j \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i) \cos s \lambda_j \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_i) g_l g_r$
- $N_{lmrs}^{cs} = f_0 \sum_i^2 \sum_j \bar{w}_{ij} \cos m \lambda_j \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i) \sin s \lambda_j \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_i) g_l g_r$
- $N_{lmrs}^{ss} = f_0 \sum_i^2 \sum_j \bar{w}_{ij} \sin m \lambda_j \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i) \sin s \lambda_j \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_i) g_l g_r$
- $R_{lm}^c = f_0 \sum_i \sum_j \bar{w}_{ij} f_{ij} \cos m \lambda_j \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i) g_l(\varphi_i)$
- $R_{lm}^s = f_0 \sum_i \sum_j \bar{w}_{ij} f_{ij} \sin m \lambda_j \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i) g_l(\varphi_i)$

... pour une grille "ponctuelle", i.e. avec $1 \leq i \leq I_{max}$,
 $1 \leq j \leq J_{max}$

($\bar{w}_{ij}$ = poids)

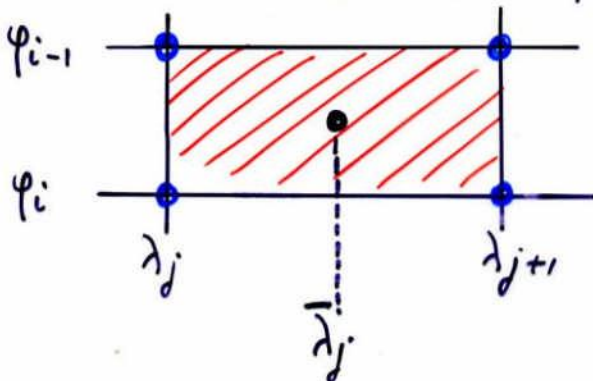
$$I_{max} = \frac{\pi}{\Delta\varphi} + 1 ; J_{max} = \frac{2\pi}{\Delta\lambda}$$

POUR UNE GRILLE MOYENNE :

Remplacer :

- f_{ij} par
- $\bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i)$ par
- λ_j par
- I_{max} par

- $\bar{f}_{ij}$
- $\bar{P}_{lm}^i$
- $\bar{\lambda}_j$
- $\frac{\pi}{\Delta\varphi}$



• Formules compactes :

- on calcule : $c_j = \cos \lambda_j$
 $s_j = \sin \lambda_j$

- pour i donné :

• lecture des $f_{(i)j}$, $\bar{w}_{(i)j}$ (= mesures et poids)

• calcul des $\bar{I}_{lm}(\sin \varphi_{(i)})$

• calcul des $\left\{ \begin{matrix} \alpha_{(i)j}^q \\ \beta_{(i)j}^q \end{matrix} \right\} = \bar{w}_{(i)j} \left\{ \begin{matrix} \cos q \lambda_j \\ \sin q \lambda_j \end{matrix} \right\}$

par récurrence, pour $q = 0 \text{ à } 2L$:

$$\alpha_{(i)j}^0 = \bar{w}_{(i)j} \quad \alpha_{(i)j}^1 = \bar{w}_{(i)j} c_j$$

$$\beta_{(i)j}^0 = 0 \quad \beta_{(i)j}^1 = \bar{w}_{(i)j} s_j$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}_{(i)j}^q = 2c_j \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}_{(i)j}^{q-1} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}_{(i)j}^{q-2}$$

• Calcul des : $\gamma_{(i)j}^{q'} = \alpha_{(i)j}^{q'} f_{(i)j}$
 $\sigma_{(i)j}^{q'} = \beta_{(i)j}^{q'} f_{(i)j}$

pour $q' = 0 \text{ à } L$.

• Calcul des vecteurs (cf. formulation intégrale) :

$$A_q = A_{(i)}^q = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \alpha_{(i)j}^q \quad \left| \quad q = 0 \rightarrow 2L \right.$$

$$B_q = B_{(i)}^q = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \beta_{(i)j}^q$$

$$a_{q'} = a_{(i)}^{q'} = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \gamma_{(i)j}^{q'} \quad \left| \quad q' = 0 \rightarrow L \right.$$

$$b_{q'} = b_{(i)}^{q'} = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \sigma_{(i)j}^{q'}$$

• Termes de la matrice N :

$$N_{lmrs}^{cc}(i) = \frac{\rho_0^2}{2} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{(i)}) \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_{(i)}) (A_{m+s} + A_{|m-s|}) g_l(\varphi_{(i)}) g_r(\varphi_{(i)})$$

$$N_{lmrs}^{cs}(i) = \frac{\rho_0^2}{2} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{(i)}) \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_{(i)}) (B_{m+s} - B_{|m-s|} \varepsilon_{ms}) g_l(\varphi_{(i)}) g_r(\varphi_{(i)})$$

$$\varepsilon_{ms} = 1 \quad \text{si } m \geq s$$

$$= -1 \quad \text{si } m < s$$

$$N_{lmrs}^{ss}(i) = \frac{\rho_0^2}{2} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{(i)}) \bar{P}_{rs}(\sin \varphi_{(i)}) (A_{|m-s|} - A_{m+s}) g_l(\varphi_{(i)}) g_r(\varphi_{(i)})$$

• Termes du second membre R :

$$R_{lm}^c(i) = \int_0 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{(i)}) a_m g_l(\varphi_{(i)})$$

$$R_{lm}^s(i) = \int_0 \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_{(i)}) b_m g_l(\varphi_{(i)})$$

Remarques :

= Passage aux formules pour une grille de valeurs moyennes : immédiat (cf. page 41)

= Si grille moyenne sur des carrés curvilignes $\approx$ équivalents : mêmes formules si ce n'est que c_j, s_j dépendent de $\underline{i}$

CAS (TRES) PARTICULIER où $\overline{w}_{(i)j} = \overline{w}_{(i)}$

- Poids indépendant de la longitude -

$$J_{\max}(i) = \frac{2\pi}{\Delta\lambda_i}$$

Si découpage en aires $\approx$ équivalentes

Si $m+s$: non multiple de $J_{\max}$
et $|m-s|$: non multiple de $J_{\max}$

alors :

$$N_{lmrs}^{cs} = 0 \quad \forall l, m, r, s$$

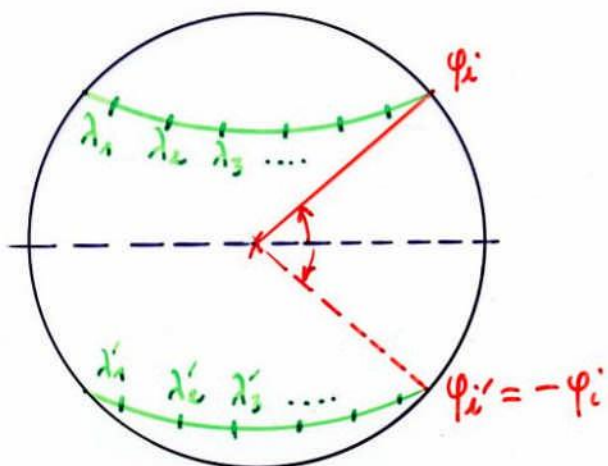
$$N_{lmrs}^{cc} = 0$$

$$N_{lmrs}^{ss} = 0$$

Si $L \leq \frac{J_{\max}}{2} \Rightarrow$ pas de corrélations entre les coefficients C et S , ni entre les C de différents ordres, ni entre les S de différents ordres

	C_{l0}	C_{lm}	S_{lm}
$C_{l0} \left\{ \begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=2 \end{array} \right.$		0 0 ... 0	
$C_{lm} \left\{ \begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array} \right.$	0 	0 ... 0	
	0 0 	...	
	...	...	
$S_{lm} \left\{ \begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array} \right.$		...	
		0 0 	...
		0 0 	...
		...	

- Si, de plus, la grille a une symétrie équatoriale (du point de vue de la distribution des parallèles), et si $g(\varphi)$ est une fonction paire de φ , alors on a séparation des termes suivant la parité de $l-r$.



Hypotheses :

$$\begin{cases} \lambda'_j = \lambda_j \\ \varphi'_i = -\varphi_i \\ w_{ij'} = w_{ij} \end{cases}$$

Conclusion :

	C_{mm} $C_{m+2,m}$...	$C_{m+1,m}$ $C_{m+3,m}$...
C_{mm} $C_{m+2,m}$...	/	0
$C_{m+1,m}$ $C_{m+3,m}$	0	/

+ idem bloc S ...

⇒ MATRICE BLOC-DIAGONALE, ENCORE PLUS SIMPLE À INVERSER !

EXAMPLES

♦ Topographie des planètes

TERRE

(36,36)

Balmino, Kaula, Lambeck (1973)

Ancien Algorithme

(1080,1080)

Balmino (1991)

Fichier ETOPO 5'x5'

MARS

(720,720)

Balmino (1991)

A partir de données 15'x15' (Mariner 9 et

Viking 1 & 2)

VENUS

(720,720)

Balmino (1991)

A partir des données altimétriques de

P.V.O., moyennées

sur 7,7'x7,5'



SPECTRES

Loi de Vening-Meinse

CORRELATIONS Topographie - Champ de Gravité

etc.....

♦ Champ de gravité terrestre (modèles GRIM4 ...)

(50,50)

Mélange de données de surface (gravité, altimétrie)

V. LA SYNTHÈSE

HARMONIQUE SPHERIQUE

PROBLEMES :

- Calcul de grilles régulières de valeurs
 - ponctuelles
 - moyennes

Algorithme dual de celui d'analyse ...

- Calcul, en un point quelconque, du potentiel de gravitation d'un corps et de ses dérivées - en MECANIQUE SPATIALE

Développements de hauts degrés et ordre
($\approx (1000, 1000)$) typiquement

$\Rightarrow$ STABILITE DES FORMULES
RAPIDITE

1. SYNTHÈSE DE GRILLES :

Synthèse ponctuelle / moyenne

$$f(\varphi, \lambda) \text{ définie sur } \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

$$f \approx f_0 \sum_{l=0}^L g_l(\varphi) \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$$

On cherche à calculer :

- $f_{ij} = f(\varphi_i, \lambda_j)$
 $\varphi_i = \varphi_{\max} - (i-1) \Delta\varphi ; i = 1, 2, \dots, I_{\max}$
 $\lambda_j = \lambda_{\min} + (j-1) \Delta\lambda ; j = 1, 2, \dots, J_{\max}$

= GRILLE PONCTUELLE

Complète si $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} , I_{\max} = \frac{\pi}{\Delta\varphi} + 1$

$$\lambda_{J_{\max}} = \lambda_{\min} + 2\pi$$

$$J_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta\lambda} + 1$$

- $\bar{f}_{ij} = \langle f(\varphi, \lambda) \rangle_{\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i-1}], \lambda \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]}$

= GRILLE MOYENNE

$$f_{ij} = f_0 \sum_{m=0}^L \sum_{l=m}^L g_l(\varphi_i) (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda_j + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda_j) \bar{P}_{lm}(\sin \varphi_i)$$

$$\bar{f}_{ij} = f_0 \sum_{m=0}^L \theta_m(\Delta\lambda) \sum_{l=m}^L \langle g_l(\varphi_i) \rangle (\bar{C}_{lm} \cos m\bar{\lambda}_j + \bar{S}_{lm} \sin m\bar{\lambda}_j) \times \bar{P}_{lm}^i$$

avec $\theta_m(\Delta\lambda) : f. \text{ page 33}$

$$\bar{P}_{lm}^i = \bar{P}_{lm}(\varphi_i, \varphi_{i-1}) / (\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i)$$

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_{\min} + (j - 1/2) \Delta\lambda$$

Dans tous les cas nous écrivons :

$$F_{ij} = \sum_{m=0}^L \sum_{l=m}^L G_l(\varphi_i) (\bar{C}_{lm} \cos m \Lambda_j + \bar{S}_{lm} \sin m \Lambda_j) \bar{H}_{lm}^i$$

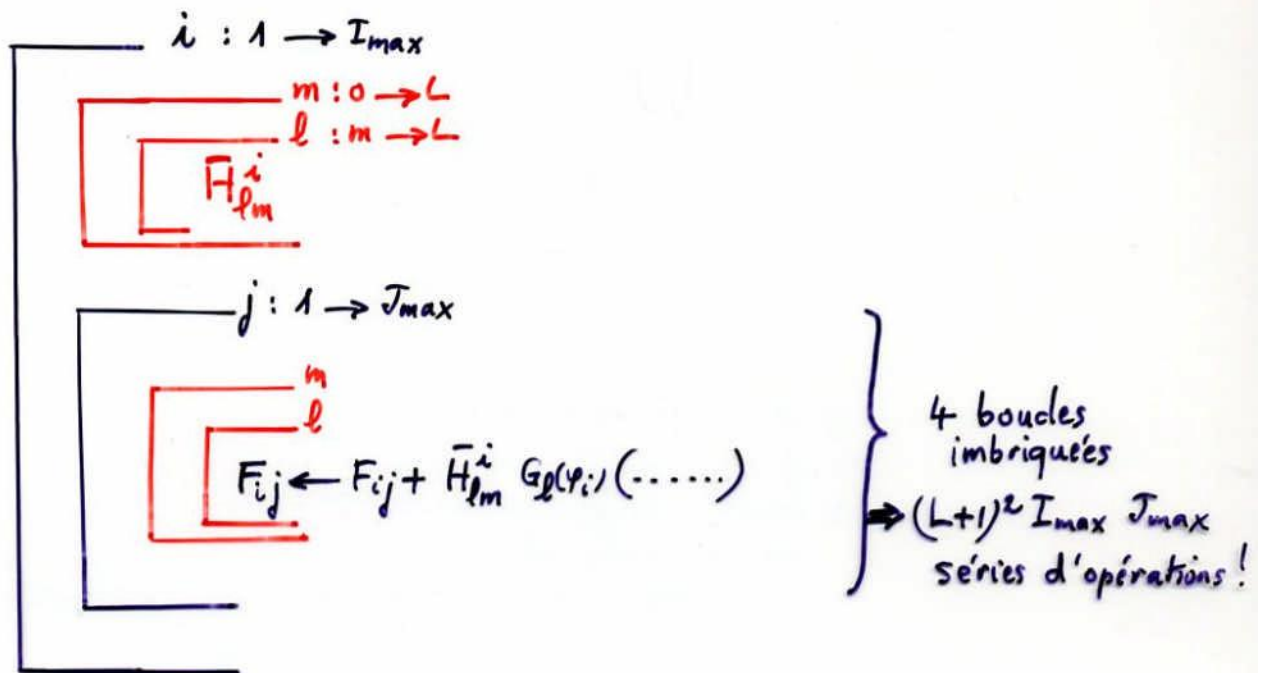
Grille ponctuelle

$$\begin{aligned} F_{ij} &: f_{ij} \\ G_l(\varphi_i) &: f_0 g_l(\varphi_i) \\ \Lambda_j &: \lambda_j \\ \bar{H}_{lm}^i &: \frac{\lambda_j}{P_{lm}(\sin \varphi_i)} \end{aligned}$$

Grille moyenne

$$\begin{aligned} F_{ij} &: \bar{f}_{ij} \\ G_l(\varphi_i) &: f_0 \langle g_l(\varphi) \rangle_{[\varphi_i, \varphi_{i-1}]} \\ \Lambda_j &: \bar{\lambda}_j \\ \bar{H}_{lm}^i &: \frac{\theta_m(\Delta \lambda)}{\sin \varphi_{i-1} - \sin \varphi_i} \bar{J}_{lm}(\varphi_i, \varphi_{i-1}) \end{aligned}$$

OPTIMISATIONS :



→ Solution : ECRIRE :

$$F = \sum_{m=0}^L F_m, \text{ avec } F_m = A_m \cos m \Lambda + B_m \sin m \Lambda$$

Technique :

- Pour φ_i (φ_{i-1}) donné(s), on calcule :

$$\begin{bmatrix} A_m \\ B_m \end{bmatrix} = \sum_{l=m}^L G_l(\varphi_i) \bar{H}_{lm}^i \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{bmatrix} ; m=0 \text{ à } L$$

- On note : $\mathcal{F}_{m,j} = A_m \cos m \Lambda_j + B_m \sin m \Lambda_j$

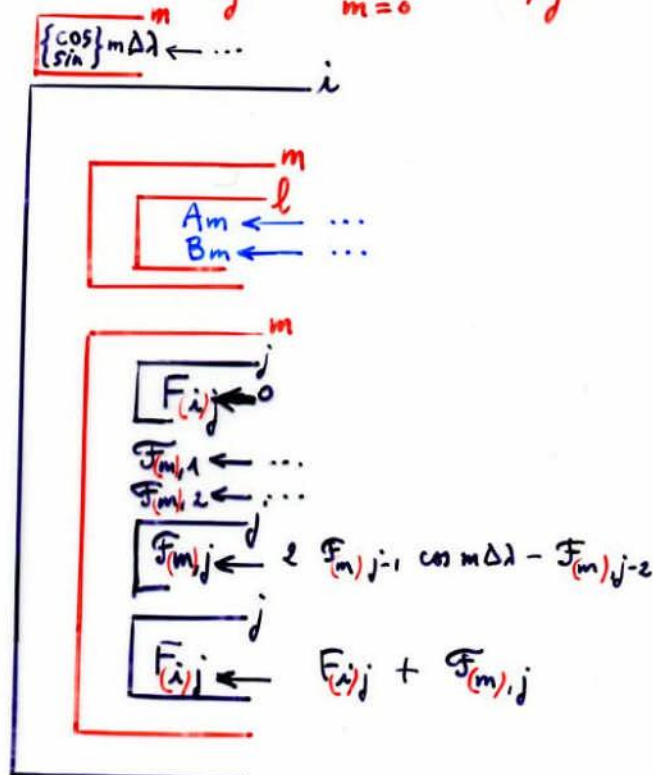
On calcule $\mathcal{F}_{m,1} = A_m \cos m \Lambda_1 + B_m \sin m \Lambda_1$

$$\mathcal{F}_{m,2} = \mathcal{F}_{m,1} \cos m \Delta\lambda + \sin m \Delta\lambda (B_m \cos m \Lambda_1 - A_m \sin m \Lambda_1)$$

puis : $\mathcal{F}_{m,j} = 2 \mathcal{F}_{m,j-1} \cos m \Delta\lambda - \mathcal{F}_{m,j-2}$
($j \geq 3$)

- On a donc :

$$F_{ij} = \sum_{m=0}^L \mathcal{F}_{m,j}$$



EXEMPLES :

• Valeurs moyennes de la topographie de Vénus

GRILLE COMPLETE $1^\circ \times 1^\circ$: 64 800 valeurs
 MODELE $(720, 720) \rightarrow$ 519841 coefficients

$\downarrow$
 93 571 380 intégrales $\bar{J}_{lm}^i$
 259 200 $\cos m\bar{\lambda}_j$
 $\sin m\bar{\lambda}_j$

Calcul équivalent $\bar{a} \simeq 3.5 \cdot 10^{10}$ opérations ($\pm$ $\neq$ /)

TEMPS C.P.U. (CDC-CYBER 992)
 = 220 secondes !

• Grille ponctuelle de l'erreur estimée sur $f(\varphi, \lambda)$ connaissant la matrice des covariances des $(\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm})$

$\Gamma = \text{cov}_X = \text{cov}_{(C,S)_{lm}} = \text{matrice: } (L+1)^2 \times (L+1)^2$
 (sur disque, en séquentiel)

$Y = \text{vecteur} \left[f_0, g_2(\varphi), \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} m\lambda \right]_{lm}$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 = Y^T \Gamma Y$$

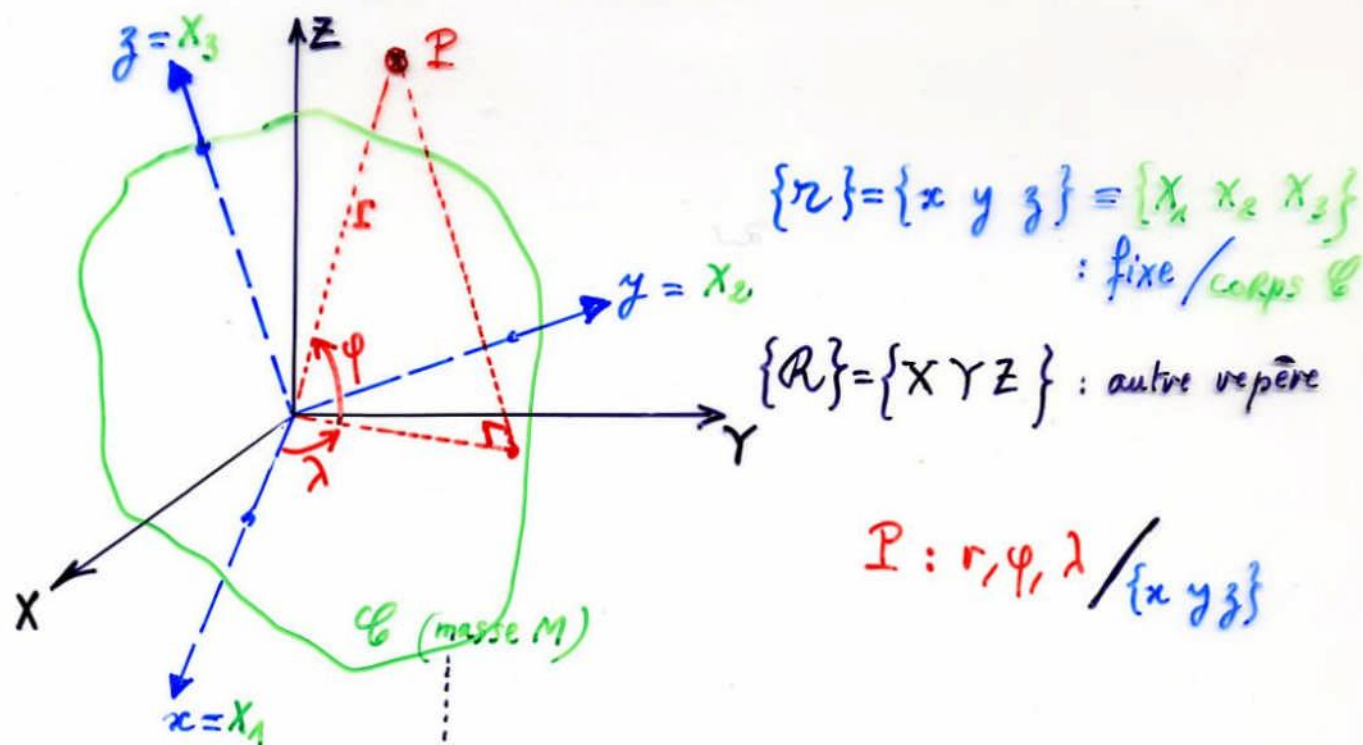
ON APPLIQUE 2 FOIS LA TECHNIQUE
 D'OPTIMISATION PRECEDENTE

EX: modèle $(50, 50)$, $\Gamma_{2601 \times 2601}$

grille ponctuelle $2^\circ \times 2^\circ$

Temps C.P.U. (CDC-CYBER 992) = 235 sec.

2. SYNTHÈSE PONCTUELLE DU POTENTIEL DE GRAVITATION ET DE SES DÉRIVÉES EN MÉCANIQUE SPATIALE



$$U(P) = \frac{GM}{r} \left[\varepsilon + \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{l \geq m \\ (l+m \neq 0)}}^L \left(\frac{a}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}^{(\sin \varphi)} \right]$$

Constante de la gravitation

1 si terme "central" inclus
0 sinon

- Calcul de $U(P)$: élémentaire ... $\left(\frac{a}{r}\right)^l = g_l$
- Problème :

$$\text{calculer} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} U \\ \bar{\nabla}(\bar{\nabla} U) \end{array} \right\} \text{ dans } \{R\}$$

$\bar{\nabla} U$: vecteur champ

$\bar{\nabla}(\bar{\nabla} U)$: tenseur gradient de gravité'
(symétrique, trace nulle)

Principe :

Formulaire valable $\forall \varphi$
 les algorithmes usuels sont singuliers aux pôles

Stabilité (précision) $\forall \varphi$, $\forall (l, m)$

Rapidité : utilisation en intégration numérique de la trajectoire de $\mathbb{R}^3$...

Développement de l'algorithme

- Dans le repère $\{r\}$

$$\text{Si: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{on a: } (\nabla U)_R = M (\nabla U)_r$$

$$(\nabla^2 U)_R = M (\nabla^2 U)_r M^T$$

- Terme central $U_0 = GM \epsilon / r$ traité à part :

$$(\nabla U_0)_R = -\epsilon \frac{GM}{r^2} [x \ y \ z]^T$$

$$(\nabla^2 U_0)_R = \epsilon \frac{GM}{r^3} \begin{bmatrix} -1 + \frac{3x^2}{r^2} & 3xy/r^2 & 3xz/r^2 \\ 3xy/r^2 & -1 + \frac{3y^2}{r^2} & 3yz/r^2 \\ 3xz/r^2 & 3yz/r^2 & -1 + \frac{3z^2}{r^2} \end{bmatrix}$$

Formulation non singulière (dans $\{r\}$)

$$\text{On définit } \left. \begin{aligned} \theta_1 &= \xi = x/r \\ \theta_2 &= \eta = y/r \\ \theta_3 &= \zeta = z/r \end{aligned} \right\} \bar{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bullet}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bullet}{\partial \theta_i} + \left(\frac{\partial \bullet}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} (\bar{\theta} \cdot \frac{\partial \bullet}{\partial \bar{\theta}}) \right) \theta_i$$

⇒ GRADIENT

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{GM}{r^3} [\mathcal{D}_i + (\mathcal{D}_r - \Pi) \theta_i]$$

$$\text{avec } \mathcal{D}_i \frac{GM}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta_i}$$

$$\mathcal{D}_r \frac{GM}{r^2} = \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Pi = \sum_{k=1}^3 \theta_k \mathcal{D}_k$$

⇒ GRADIENT DE GRAVITE

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{GM}{r^3} \bigg\{ & \Phi \delta_{ij} + S_{ij} + \theta_i (S_{rj} - \mathcal{D}_j - \Sigma_j) \\ & + \theta_j (S_{ri} - \mathcal{D}_i - \Sigma_i) \\ & + \theta_i \theta_j [S_{rr} + 2(\Pi - \Sigma_r) - \Phi + \Sigma^*] \bigg\} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{GM}{r^3} S_{rr}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta_i} = \frac{GM}{r^3} S_{ri}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{GM}{r^3} S_{ij}$$

$$\text{et : } \Phi = \mathcal{D}_r - \Pi$$

$$\Sigma_r = \sum_{k=1}^3 \theta_k S_{rk}$$

$$\Sigma_i = \sum_{k=1}^3 \theta_k S_{ki}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^* = & 2(\theta_1 \theta_2 S_{12} + \theta_2 \theta_3 S_{23} + \theta_1 \theta_3 S_{13}) \\ & + \sum_{k=1}^3 \theta_k^2 S_{kk} \end{aligned}$$

CALCUL DES TERMES $\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_i, S_{rr}, S_{ri}, S_{ij}$

- On écrit : $\bar{P}_{lm}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi H_{lm}(\xi)$

↑ Polynôme d'Helmholtz
de degré $l-m$
normalisé

$$\begin{cases} \xi = \cos\varphi \cos\lambda \\ \eta = \cos\varphi \sin\lambda \\ \xi = \sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^m\varphi (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) = (\xi + i\eta)^m = \gamma_m + i\sigma_m$$

$$\gamma_m + i\sigma_m = (\gamma_{m-1} + i\sigma_{m-1})(\xi + i\eta)$$

$$\text{donc : } \begin{cases} \gamma_m = \xi \gamma_{m-1} - \eta \sigma_{m-1} \\ \sigma_m = \xi \sigma_{m-1} + \eta \gamma_{m-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } \gamma_{-1} = \sigma_{-1} = \sigma_0 = 0 \text{ et } \gamma_0 = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \gamma_m \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{m-1} \\ \sigma_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \gamma_m \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{m-1} \\ \sigma_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial \xi^2} = m(m-1) \gamma_{m-2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial \xi \partial \eta} = -m(m-1) \sigma_{m-2} \quad ; \text{ etc...}$$

- On définit :

$$A_{lm} = \left(\frac{a}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \gamma_m + \bar{S}_{lm} \sigma_m)$$

$$B_{lm} = m \left(\frac{a}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \gamma_{m-1} + \bar{S}_{lm} \sigma_{m-1})$$

$$E_{lm} = m \left(\frac{a}{r}\right)^l (-\bar{C}_{lm} \sigma_{m-1} + \bar{S}_{lm} \gamma_{m-1})$$

$$F_{lm} = m(m-1) \left(\frac{a}{r}\right)^l (\bar{C}_{lm} \gamma_{m-2} + \bar{S}_{lm} \sigma_{m-2})$$

$$G_{lm} = m(m-1) \left(\frac{a}{r}\right)^l (-\bar{C}_{lm} \sigma_{m-2} + \bar{S}_{lm} \gamma_{m-2})$$



Terme ($m > 0$)	Contribution de l'harmonique (l, m)
----------------------	---

$$D_r \quad - (l+1) A_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$D_1 = D_\xi \quad B_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$D_2 = D_\eta \quad E_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$D_3 = D_\xi \quad A_{lm} H_{lm}'(\xi)$$

$$S_{rr} \quad (l+1)(l+2) A_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{r1} = S_{r\xi} \quad - (l+1) B_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{r2} = S_{r\eta} \quad - (l+1) E_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{r3} = S_{r\xi} \quad - (l+1) A_{lm} H_{lm}'(\xi)$$

$$S_{11} = S_{\xi\xi} \quad F_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{12} = S_{\xi\eta} \quad G_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{13} = S_{\xi\xi} \quad B_{lm} H_{lm}'(\xi)$$

$$S_{22} = S_{\eta\eta} = -S_{11} \quad - F_{lm} H_{lm}(\xi)$$

$$S_{23} = S_{\eta\xi} \quad E_{lm} H_{lm}'(\xi)$$

$$S_{33} = S_{\xi\xi} \quad A_{lm} H_{lm}''(\xi)$$

Zonaux ($m=0$)

$$D_r = - \sum_l (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^l \bar{C}_l \bar{P}_l(\xi)$$

$$D_3 = \sum_l \left(\frac{a}{r}\right)^l \bar{C}_l \bar{P}'_l(\xi)$$

$$S_{rr} = \sum_l \left(\frac{a}{r}\right)^l (l+1)(l+2) \bar{C}_l \bar{P}_l(\xi)$$

$$S_{r3} = - \sum_l (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^l \bar{C}_l \bar{P}'_l(\xi)$$

$$S_{33} = \sum_l \left(\frac{a}{r}\right)^l \bar{C}_l \bar{P}''_l(\xi)$$

... Les autres termes sont nuls.

Formules de récurrence

- CALCUL de coefficients auxiliaires (cf. page 10)

$$\tau_l = [(2l-1)(2l+1)]^{1/2} \quad ; \quad \varepsilon_l = \tau_l / l$$

$$w_1^m = \sqrt{3} \quad ; \quad w_m^m = \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{1/2} \quad ; \quad (m \geq 2)$$

$$w_l^m = \tau_l / [(l-m)(l+m)]^{1/2} \quad \text{pour } 1 \leq m \leq l$$

- POLYNOMES DE LEGENDRE NORMALISES, ET DERIVEES

$$\bar{P}_1 = \xi \sqrt{3} \quad ; \quad \bar{P}'_1 = \sqrt{3} \quad ; \quad \bar{P}''_1 = 0$$

$$\bar{P}_2 = \sqrt{5} (3\xi^2 - 1)/2 \quad ; \quad \bar{P}'_2 = 3\sqrt{5}\xi \quad ; \quad \bar{P}''_2 = 3\sqrt{5}$$

$$\bar{P}_l = \varepsilon_l (\xi \bar{P}_{l-1} - \bar{P}_{l-2} / \varepsilon_{l-1})$$

$$\bar{P}'_l = \tau_l (\bar{P}_{l-1} + \bar{P}'_{l-2} / \tau_{l-1})$$

$$\bar{P}''_l = \tau_l (\bar{P}'_{l-1} + \bar{P}''_{l-2} / \tau_{l-1})$$

- POLYNOMES D'HELMHOLTZ ET DERIVEES

- Initialisations :

$$(1) \quad H_{00} = 1 \quad H_{11} = \sqrt{3}$$

$$H_{mm} = w_m^m H_{m-1, m-1} \quad m \geq 2$$

$$H'_{mm} = 0 \quad (\forall m)$$

$$(2) \quad H_{m+1, m} = (2m+3)^{1/2} \xi H_{mm}$$

$$H'_{m+1, m} = (2m+3)^{1/2} H_{mm}$$

$$(3) \quad H''_{mm} = 0 \quad (\forall m)$$

$$H''_{m+1, m} = 0$$

- Récurrences ($l \geq m+2$)

$$H_{lm} = w_l^m (\xi H_{l-1, m} - H_{l-2, m} / w_{l-1}^m)$$

$$H'_{lm} = w_l^m (\xi H'_{l-1, m} + H_{l-1, m} - H'_{l-2, m} / w_{l-1}^m)$$

$$H''_{lm} = w_l^m (\xi H''_{l-1, m} + 2 H'_{l-1, m} - H''_{l-2, m} / w_{l-1}^m)$$

EXEMPLES

- Algorithmes utilisés :

- en géodésie spatiale

Trajectoires logiciels GIN, JEEP
études CIGAR/ESA

- en géodésie terrestre et gravimétrie

- Calculs de hauteurs du géoïde

$$h = \frac{U - U(\text{Ellipsoïde})}{\gamma}$$

- Anomalies de gravité

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} - 2 \frac{T}{r}$$

$$T = U - U(\text{Ellipsoïde})$$

- Temps de calcul (cdc-cyber 992) *

(1)	$\bar{\nabla} U$	38.3	35.1
	$\bar{\nabla} U$ et $\bar{\nabla}^2 U$	95.4	108.0
		Compilateur "HIGH"	Compilateur vectoriel

* Temps C.P.U. en secondes

* Modèle (360, 360)

181 points d'évaluation $\Rightarrow$ 0.19 sec / point $\bar{\nabla} U$

(2) Calcul d'orbite (GIN) avec pas de 60 secondes
et modèle (50, 50) $\Rightarrow$ 5.3 sec. / jour.