

# Mesures et modélisation orbitale

**Problèmes d'intégration numérique**

# Généralités

## ➤ Restitution d'orbite précise (millimétrique)

- Données précises



- Un excellent modèle de forces

- **Méthodes d'intégration numériques adaptées au problème**

## ➤ Quelques pistes :

- Stabilisation des équations dynamique

- Schéma d'intégration numérique

- Méthodes à pas d'intégration variable

# Régularisation

- **Régularisation** : méthode qui permet de décrire la dynamique en utilisant un ensemble d'équations sans singularités (par l'intermédiaire d'un changement de variables).
  - ➔ - Intégration numérique plus facile avec le nouveau jeu de variables
  - Effets négatifs du caractère d'instabilité de Lyapunov des orbites képlériennes sont atténués
- **Méthode de Cowell** : intégration en coordonnées cartésiennes dans un repère inertiel

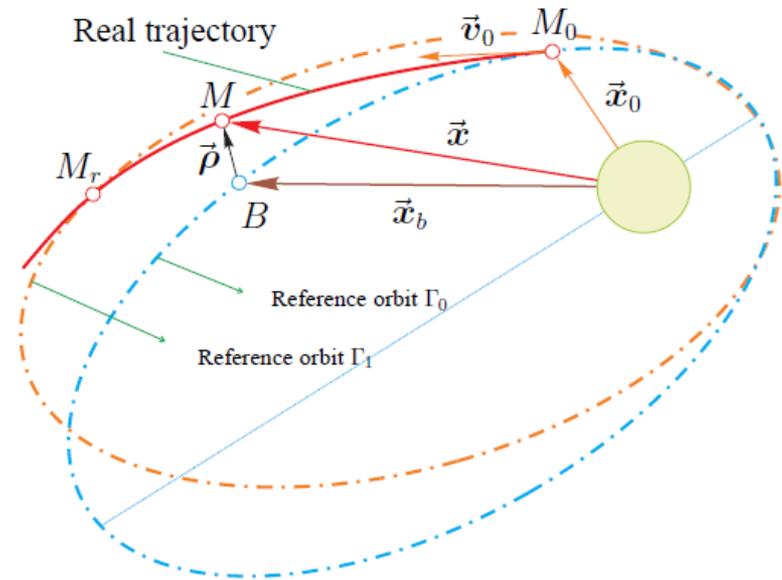
**Avantages** : Facile à implémenter, utilise directement des coordonnées inertielles, nombre de fonctions d'appel minimisé

**Désavantages** :

- Si une perturbation est très faible comparée au terme principal, le pas d'intégration est artificiellement réduit par la méthode (nécessite des schémas de haut ordre).
- Ne prend pas en compte la solution non perturbée qui est **CONNUE !**
- Propagation de l'erreur exponentielle

# Régularisation

- **Méthode de Encke** : intègre le mouvement d'un corps par rapport à une orbite de référence (dite moyenne)



## Avantages :

- Les grandeurs caractéristiques du mouvement différentiel conservent des amplitudes faibles
- On utilise la solution du problème non perturbée

**Désavantage** : Propagation de l'erreur exponentielle

# Régularisation

- **Linéarisation**: méthode qui permet de convertir **exactement** des équations dynamiques non linéaires, en équations linéaires **exactes**.  
(A. Deprit et al., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1982)
- **Exemples de schémas de régularisation** (T. Fukushima, *The Astronomical Journal*, 2007)
  - Sperling-Burdet, Kustaanheimo-Stiefel (méthode KS), Fukushima, etc.
  - Formulation de Deprit basée sur des repères idéaux
  - **DROMO**
- Note : Il y a des méthodes comme celle de Störmer-Cowell qui peuvent être utilisées dans des schémas d'intégration numérique de haut ordre sans que les équations soient régularisées, mais la précision est moins bonne...

# DROMO

(J. Peláez, et al., *A Special Perturbation Method in Orbital Dynamics*, CEMDA, Vol. 97, 2007)

- Méthode de perturbation développée en 2000 par le Space Dynamics Group (SDG) à Madrid

- Eléments non classiques :  $(\sigma; \tau, q_1, q_2, q_3, \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0, \eta^0)$

$\sigma$  : un temps fictif  
 $\tau$  : un paramètre qui doit être déterminé par la méthode en elle-même au cours de l'intégration.

$q_1$  : rayon orbital

$q_2$  : sa dérivée temporelle

$q_3$  : vitesse angulaire du repère orbital

Composantes d'un quaternion relié à l'attitude du repère orbital

- **Avantages** : propagateur d'orbite **régularisé, robuste, performant**
- Pas de singularités à faible inclinaison, ni faible excentricité
- L'attitude du plan orbital est déterminé par les paramètres d'Euler-Rodriguez
- Le temps  $\tau$  est un paramètre déterminé par la méthode elle-même (pas besoin de l'équation de Kepler)

# DROMO

➤ 8 équations différentielles à intégrer :

$$\frac{dq_1}{d\sigma} = +\frac{\sin \sigma}{s^2 q_3} f_{px} + \cos \sigma \frac{s + q_3}{s^3 q_3} f_{pz}$$

$$\frac{dq_2}{d\sigma} = -\frac{\cos \sigma}{s^2 q_3} f_{px} + \sin \sigma \frac{s + q_3}{s^3 q_3} f_{pz}$$

$$\frac{dq_3}{d\sigma} = -\frac{1}{s^3} f_{pz}$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{s^3 q_3}$$

$$\frac{d\varepsilon_1^0}{d\sigma} = -\frac{\lambda(\sigma)}{2} (\sin(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_2^0 + \cos(\sigma - \sigma_0) \eta^0)$$

$$\frac{d\varepsilon_2^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} (\sin(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_1^0 - \cos(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_3^0)$$

$$\frac{d\varepsilon_3^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} (\cos(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_2^0 - \sin(\sigma - \sigma_0) \eta^0)$$

$$\frac{d\eta^0}{d\sigma} = +\frac{\lambda(\sigma)}{2} (\cos(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_1^0 + \sin(\sigma - \sigma_0) \varepsilon_3^0)$$

avec

$$s = q_3 + q_1 \cos \sigma + q_2 \sin \sigma$$

$$\frac{dr}{d\tau} = q_1 \sin \sigma - q_2 \cos \sigma$$

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{s^3 q_3} f_{py}$$

$$z = \frac{1}{r} = s q_3$$

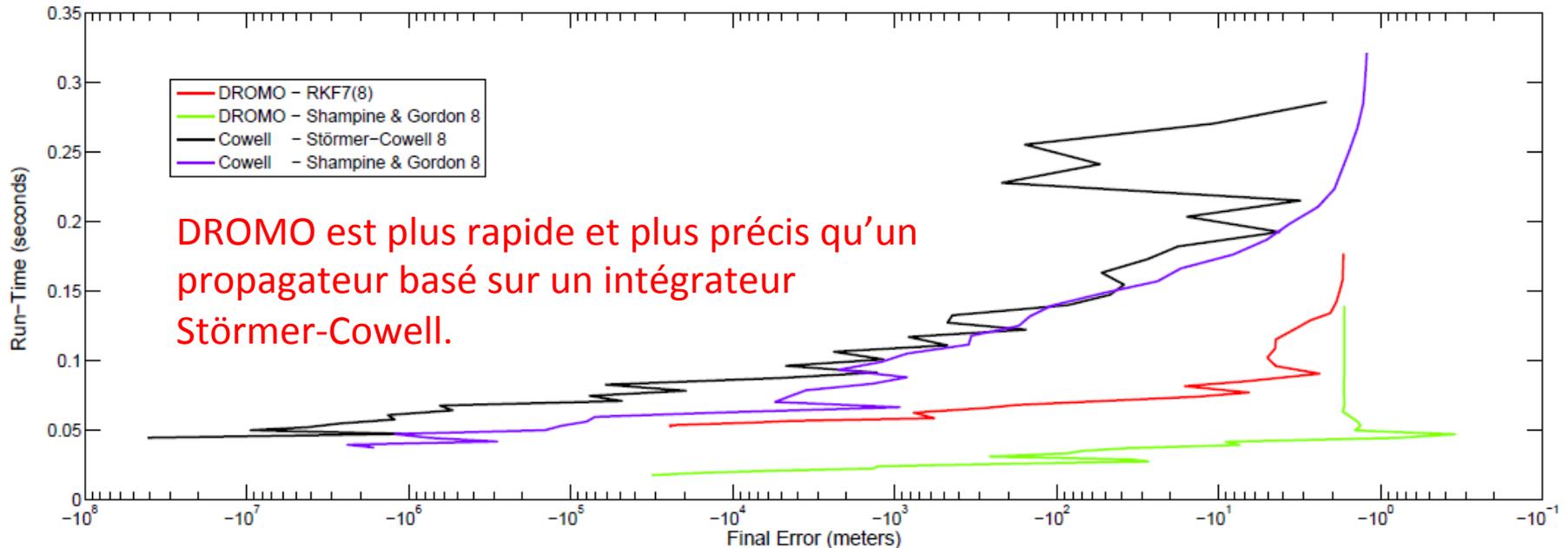
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & \sin\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & \cos\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) & \cos\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_3^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \eta^0 \end{Bmatrix}$$

où  $f_p$  désigne les composantes des forces perturbatives.

# DROMO

Test de propagation sur 50 orbites

Method	Stiefel Scheifele [2]	Sperling Burdet [3]	Kustaanheimo Stiefel [4]	Cowell [5]	DROMO
x(Km)	-24219.050	-24218.818	-24219.002	-24182.152	-24219.279
y(Km)	227962.106	227961.915	227962.429	227943.989	227962.207
z(Km)	129753.442	129753.343	129753.822	129744.270	129753.492
Steps/rev	500	62	62	240	62
Error		0.318	0.501	42.5	0.250



# Intégrateurs géométriques

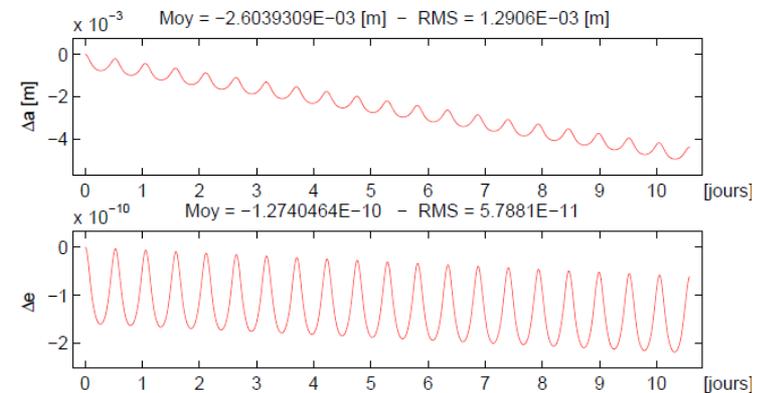
## ➤ Limitation des intégrateurs classiques (Runge-Kutta, DOP853, DOPRI, Cowell, etc.)

- Non symplectiques
- Invariants varient et symétries se brisent
- Peuvent être très lourds en temps de calcul

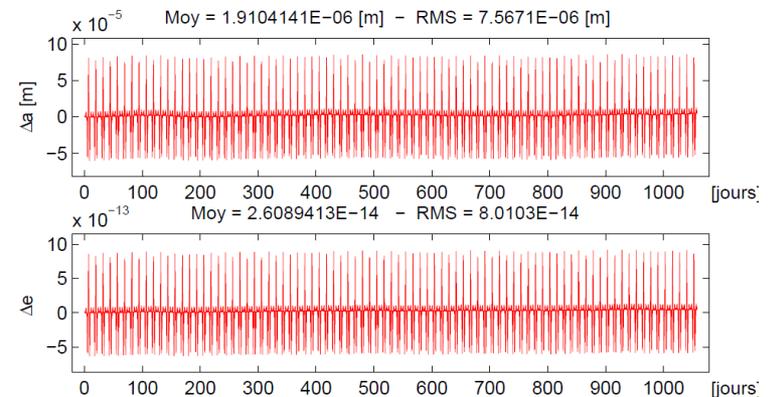
## ➤ Intégrateurs géométriques ?

- Construits sur la base de la Mécanique Géométrique Discrète
- Préserve la structure géométrique du système
- Grande stabilité, excellente précision, moins gourmands en temps CPU
- 2 familles : **symplectique** (système hamiltonien + algèbre de Lie) et **variationnel** (système lagrangien + principe variationnel de moindre action)

*G. LION (2013), Dynamique des orbites fortement elliptiques, thèse doctorale.*



RK6if :  $e=0.075$ ,  $h=60s$



IV8if :  $e=0.75$ ,  $h=120s$

# Résumé des pistes à explorer

## ➤ Stabilisation des équations dynamique

- ➔ - Régularisation DROMO
- Formulation pour un corps en rotation dynamique ?

## ➤ Schéma d'intégration numérique

- Regarder la piste des intégrateurs géométriques **SANS** régularisation du système
- ➔ - Plus efficaces et performants que des intégrateurs classiques
- Mais effets dissipatifs plus difficiles à prendre en compte...

## ➤ Méthodes à pas variable

- Dépend du schéma numérique et de son ordre
- ➔ - Pas forcément utile si les variations de positions/vitesses restent faibles le long de la trajectoire mais on cumule moins d'erreurs numériques
- Intégrateurs géométriques moins sensibles au pas d'intégration