

Caractérisation spectrale et décomposition des signaux

Fourcauquié, Prouvènço

6 de setembre 2006

Sébastien Lambert

Observatoire Royal de Belgique

s.lambert@oma.be

Un signal...

- Support temporel (longueur)
- Support fréquentiel (spectre, largeur de bande)
- Echantillonnage (taux, régularité)
- Incertitudes

Analyser, pour extraire...

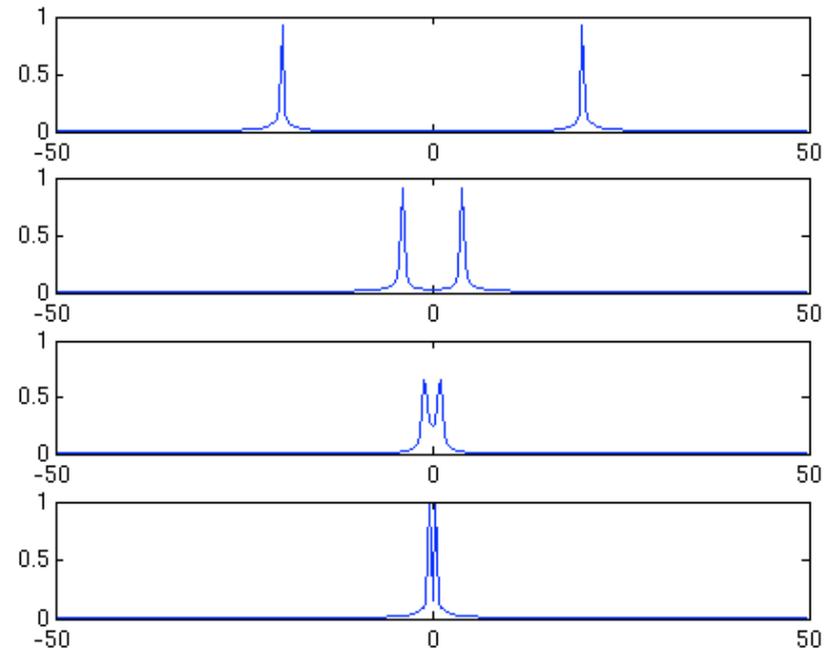
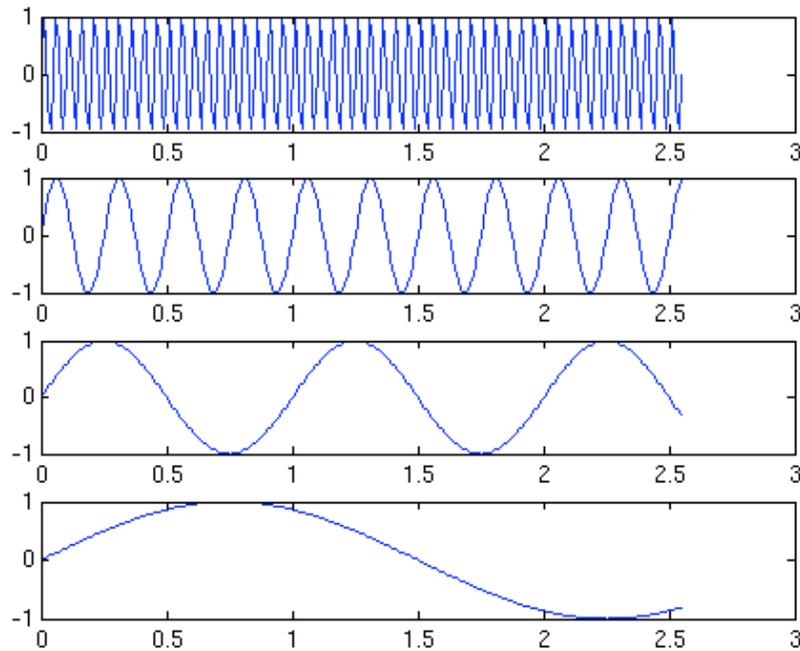
- Des infos statistiques
- Des infos pertinentes sur le système sous-jacent
- Par exemple :
 - calculer le coefficient de couplage électromagnétique à l'interface noyau-manteau en observant la nutation
 - quel est l'effet de Ernesto sur le mouvement du pôle ?
 - prévoir le prochain saut de seconde en regardant le LOD
 - dois-je prendre mon parapluie demain matin ?
 - etc.

Comment ?

- Caractériser le signal
 - temporellement : tendances, amplitudes
 - fréquentiellement : périodicités
 - quantité et qualité du bruit
- Filtrer pour extraire des composantes
- Poser des limites quant à la pertinence des résultats

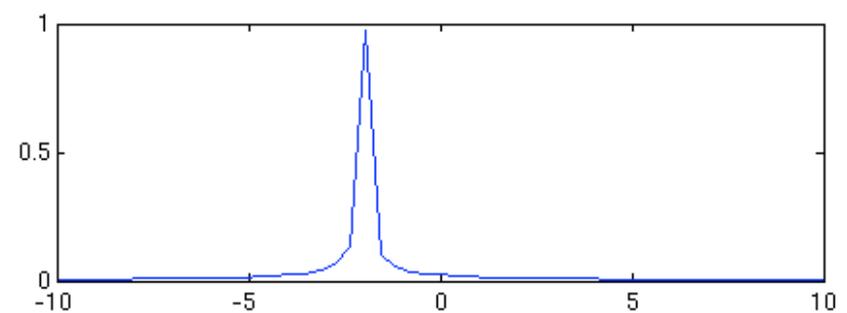
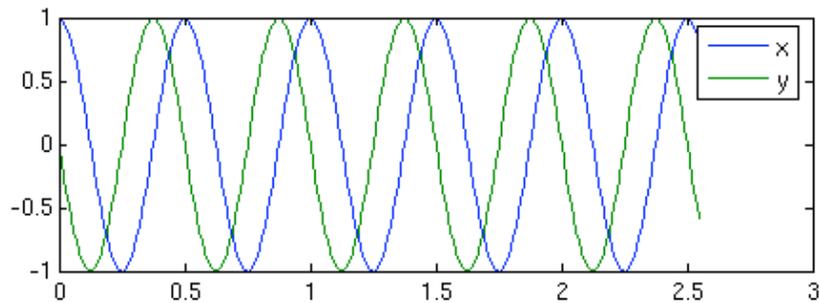
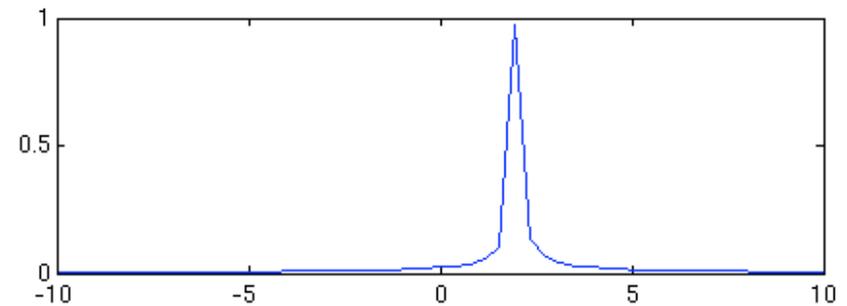
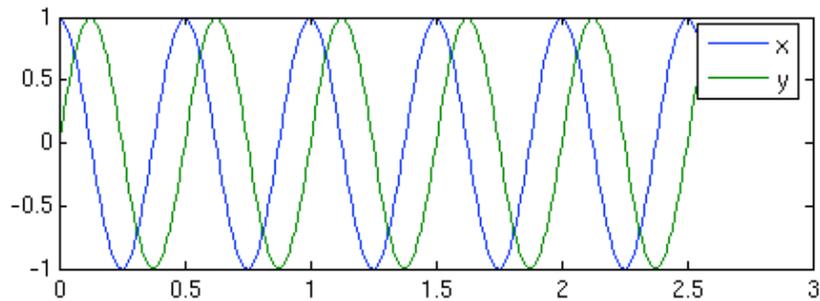
Basics (1)

- Relation période / échantillonnage : Nyquist (Shannon)



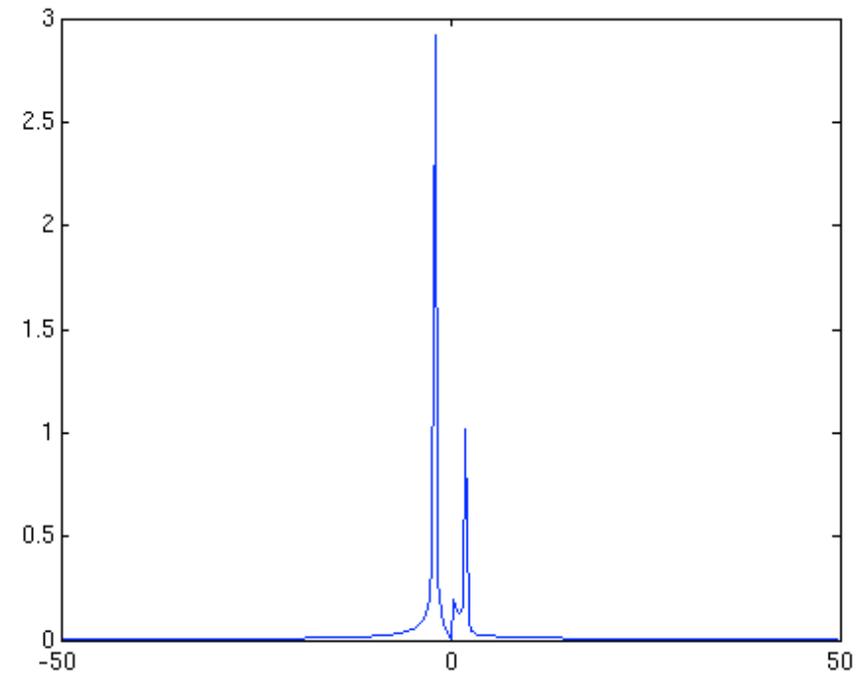
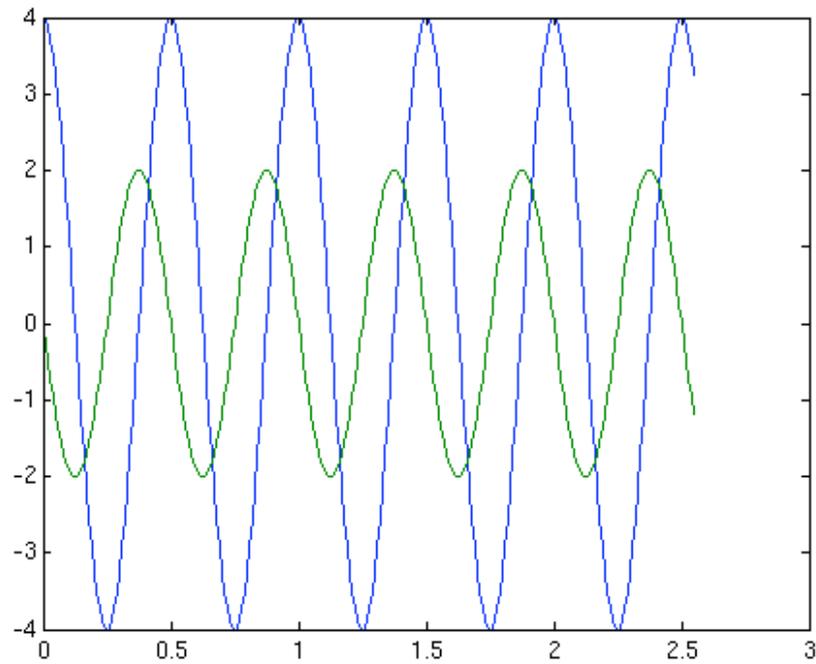
Basics (2)

- Fréquences positives et négatives : signaux complexes pro et rétrogrades



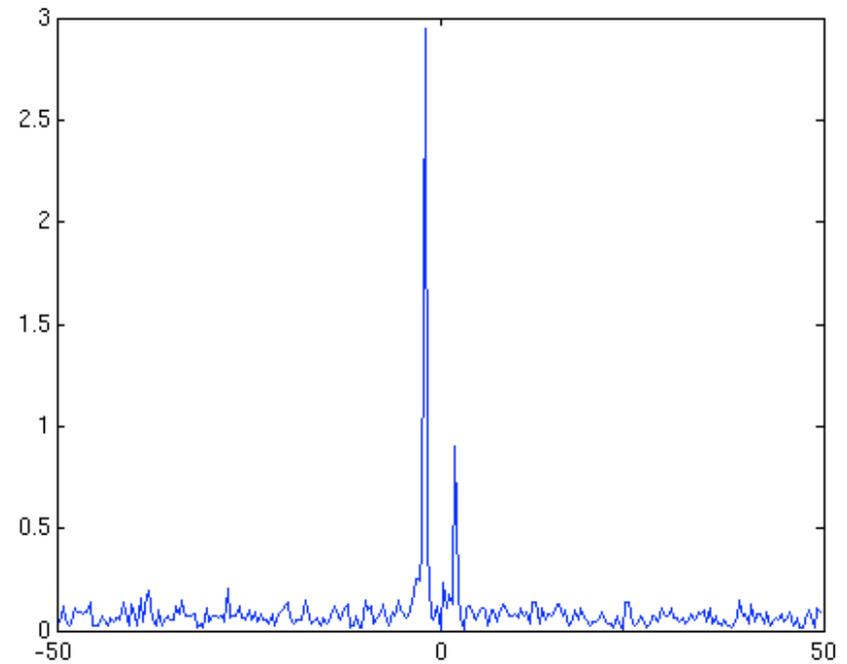
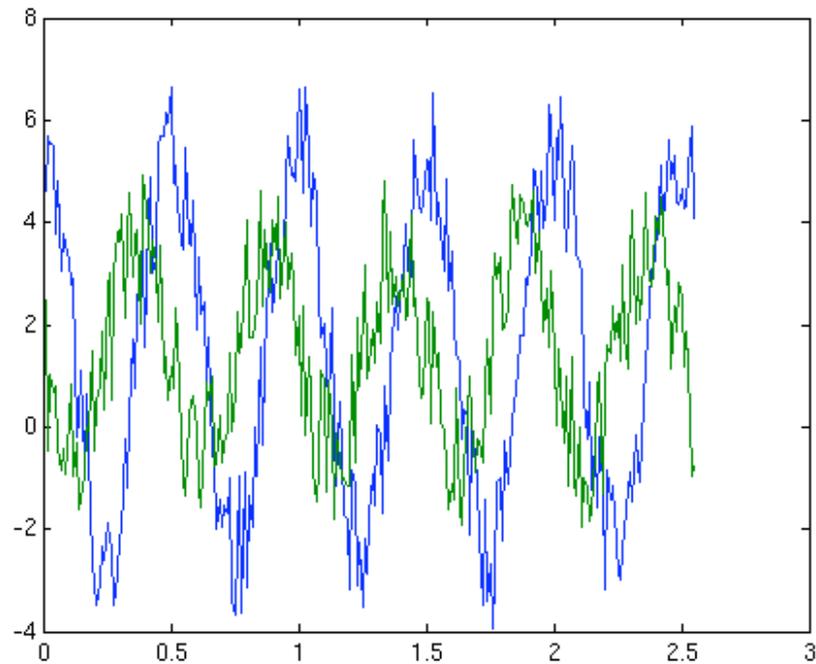
Basics (3)

- Signaux quelconques



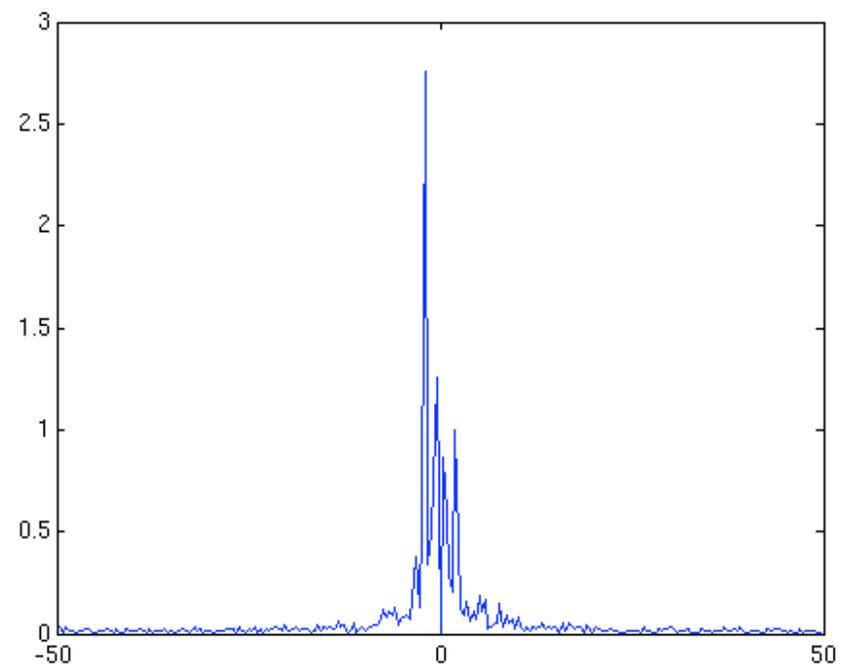
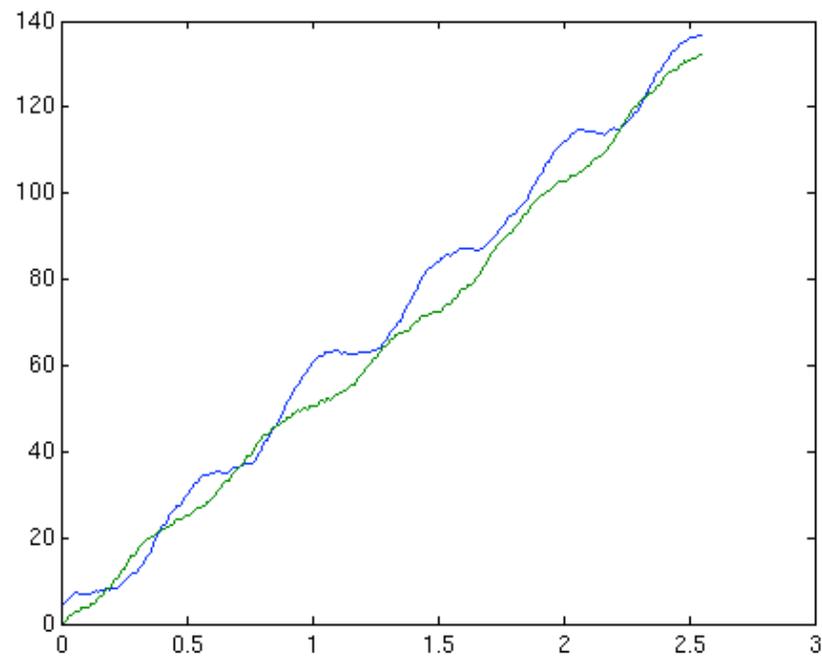
Basics (4)

- Signaux quelconques avec bruit blanc



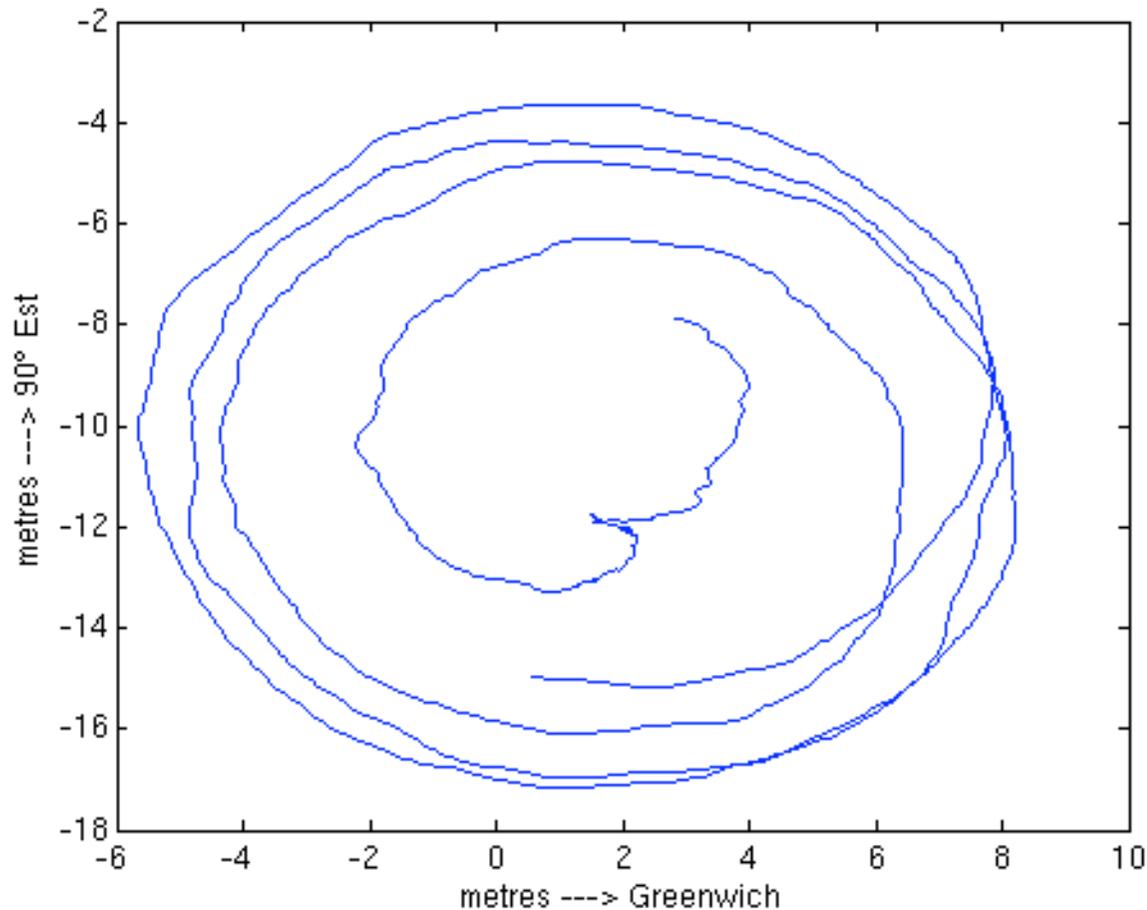
Basics (5)

- Signaux quelconques avec bruit rouge



Un exemple concret : le mouvement du pôle terrestre

- Position de l'axe de rotation dans la Terre



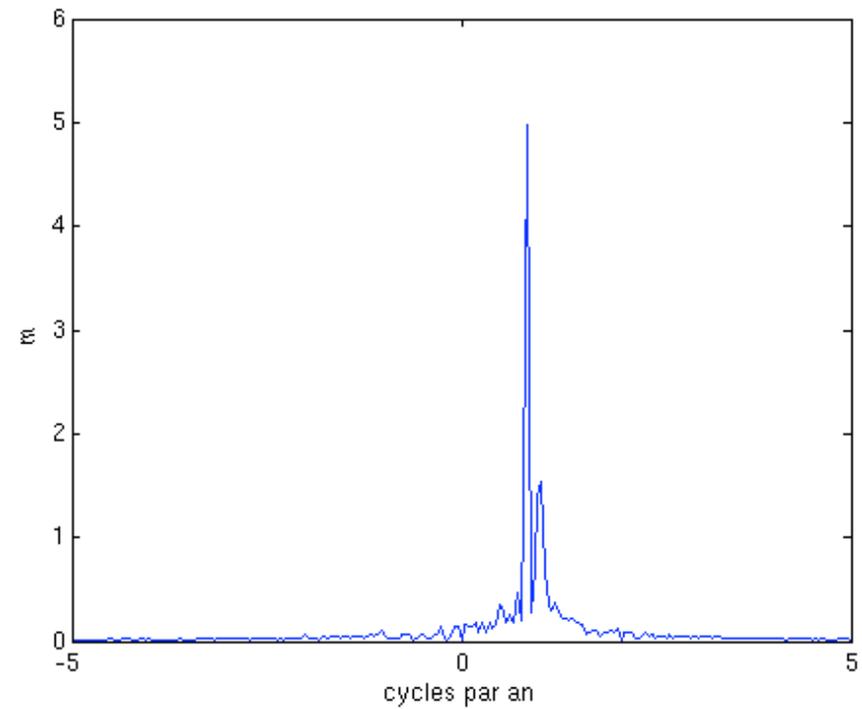
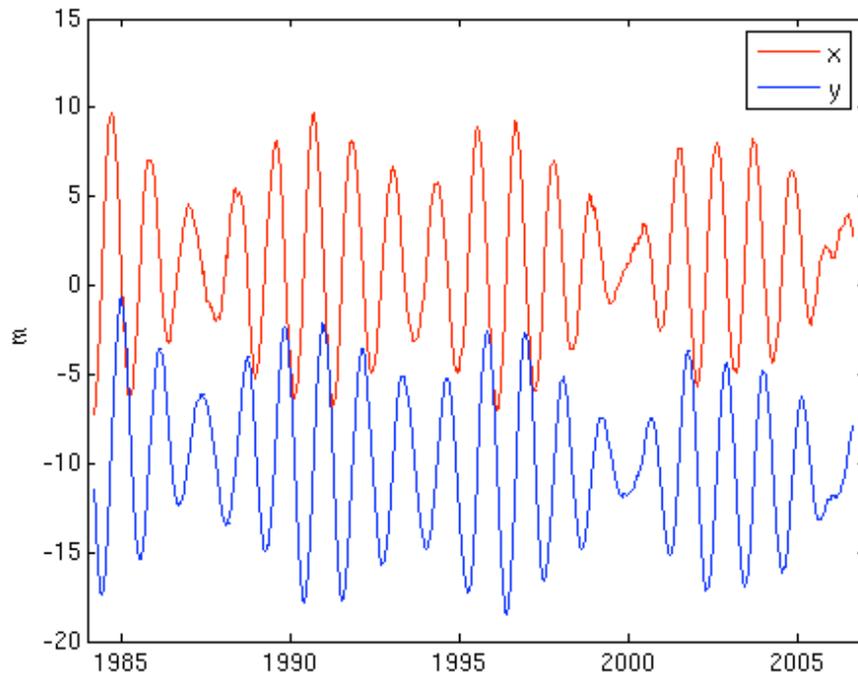
Mesuré essentiellement par
GNSS (80%), VLBI et SLR
(20%)

Combinaison multitechnique
de l'IERS EOP Center (Obs.
de Paris, D. Gambis, C.
Bizouard)

Précision (répétabilité) 1 cm

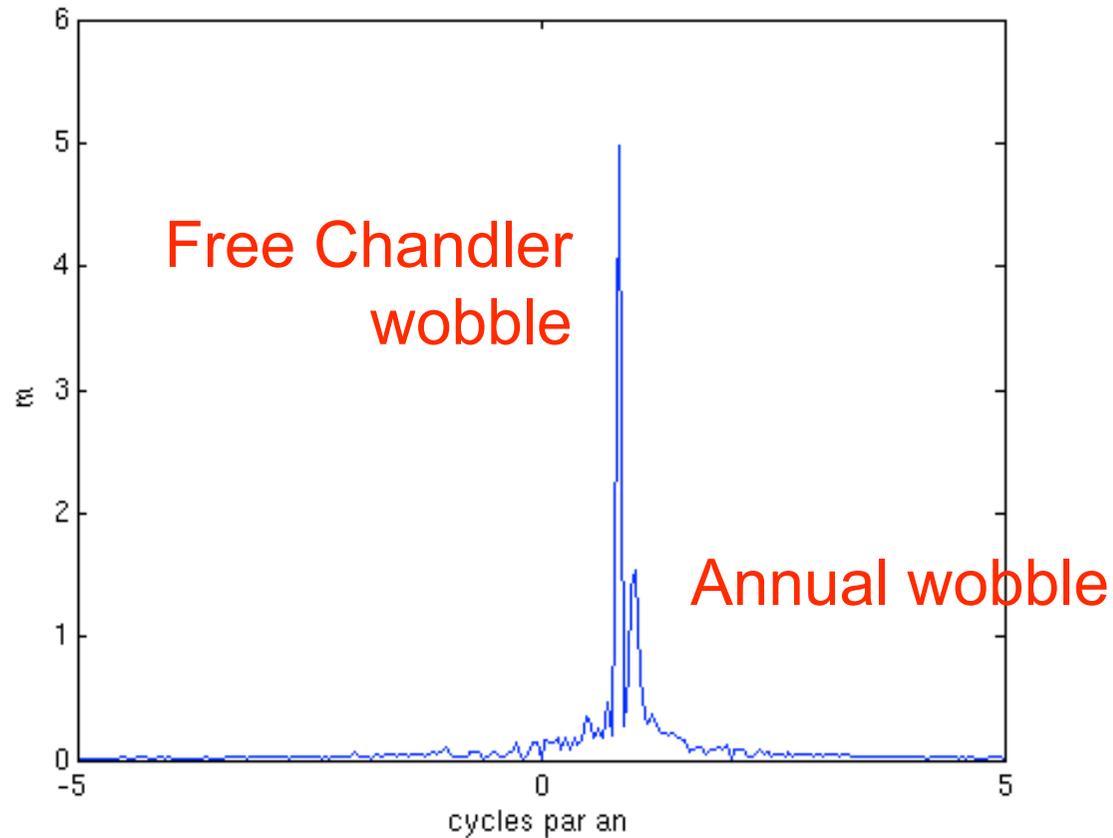
Mouvement du pôle (1)

- Position de l'axe de rotation dans la Terre



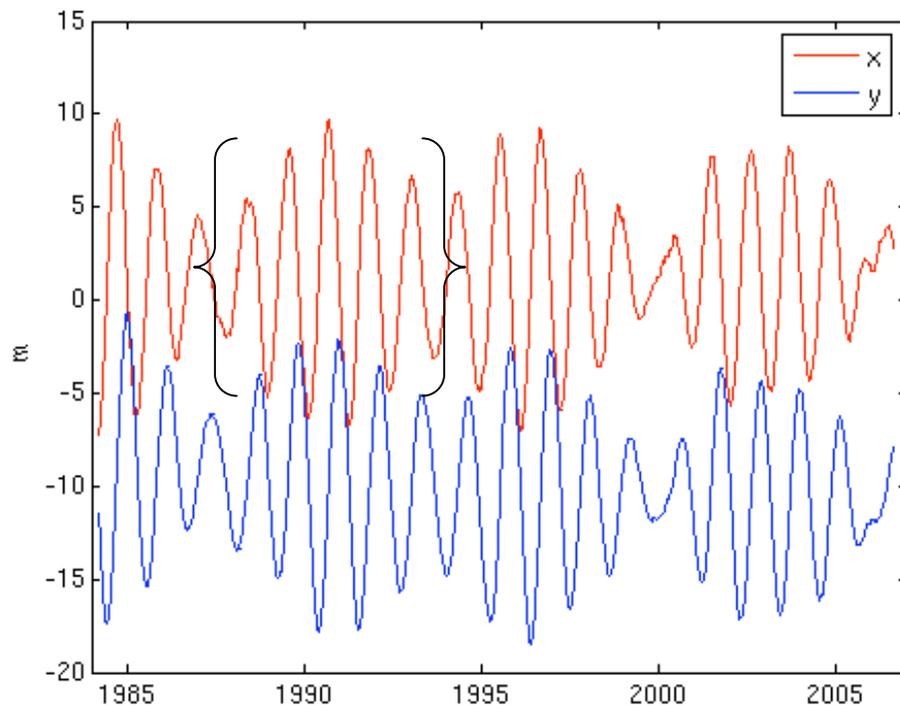
Mouvement du pôle (2)

- Deux termes principaux issus du forçage par les fluides de surface



Mouvement du pôle (3)

- Période de décorrélation (battement)



$$\sigma_{CW} + \sigma_{AW} \rightarrow 6.4 \text{ ans}$$

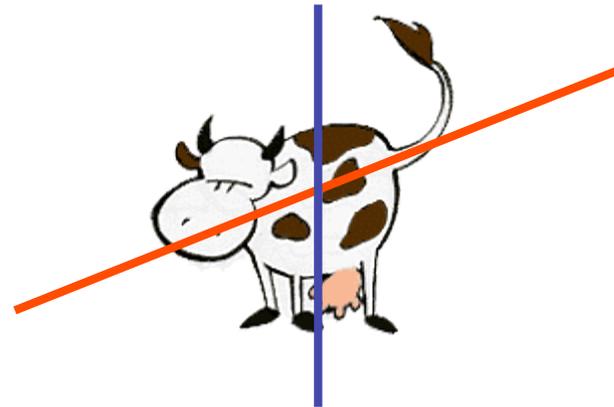
L'étude du signal sur une période de temps inférieure ne permet pas de séparer le CW et l'AW

Idées...

- Décomposition
 - isoler le Chandler wobble
 - supprimer le Chandler wobble
 - étudier la **variabilité temporelle** du Chandler wobble
 - qu'en est-il des autres composantes (e.g., peut-on extraire le terme semi-annuel forcé par la pression atmosphérique) ?
 - etc.
- Attention !!!
 - **pertinence** des composantes extraites ????????????

Méthode SSA : principe

- Analyse en composantes principales
 - trouver les directions privilégiées dans un nuage de points
 - description pertinente du système



- Singular Spectrum Analysis
 - trouver des “directions” privilégiées dans un espace de fonctions orthogonales
 - décrire le système en projetant sur la base des fonctions propres
 - pertinence des composantes suivant la valeur propre associée

Méthode SSA : théorie (1)

- Soit une série temporelle de longueur N

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

- Espace dans lequel on va décrire le système
 - dimension M (covariance-lag, ou dimension de “plongement”)
- Plongement de la série temporelle dans cet espace
 - par “empilement” de morceaux de longueur M

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{M+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-M+1} & x_{N-M+2} & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

- on a ainsi M réalisations du système qu'on peut analyser en composantes principales et dont l'autocovariance est

$$C = D^t D$$

Méthode SSA : théorie (2)

- Obtention de M vecteurs propres de longueur M

$$C v_k = \lambda_k v_k$$

$$k = 1..M$$

λ_k : variance partielle dans la direction de v_k

somme des $\lambda_k =$ variance du signal

- Projection du signal sur les vecteurs propres
 - composantes principales de longueur $N - M + 1$

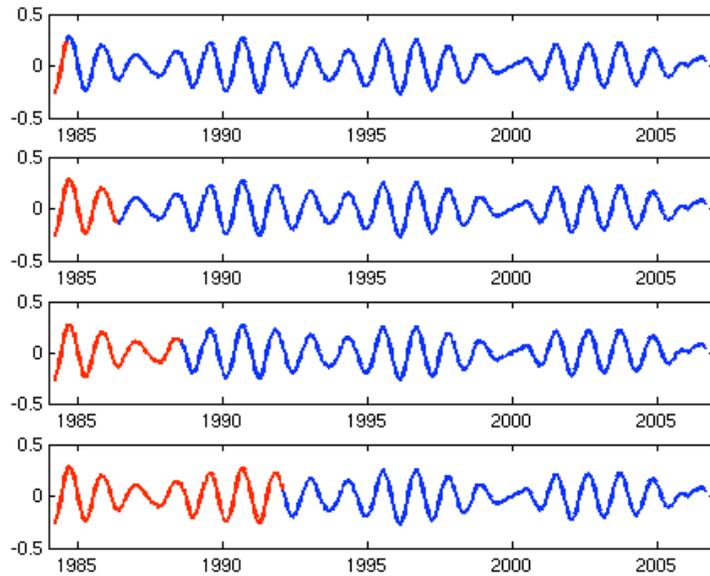
$$A_k(t) = \sum_{j=1, M} X(t+j-1) v_k(j)$$

- composantes reconstruites de longueur N

Méthode SSA : théorie (3)

- Temps de calcul
 - complexité polynomiale de la SVD : méthode de Jacobi en $O(N^3)$
 - pour un ordinateur classique, sous MATLAB, faire $M = 100$ pour $N = 10000$ prend environ 20 secondes
 - rééchantillonner si besoin pour se ramener à ces valeurs typiques
 - sinon prendre un sandwich

SSA sur le mouvement du pôle (1)

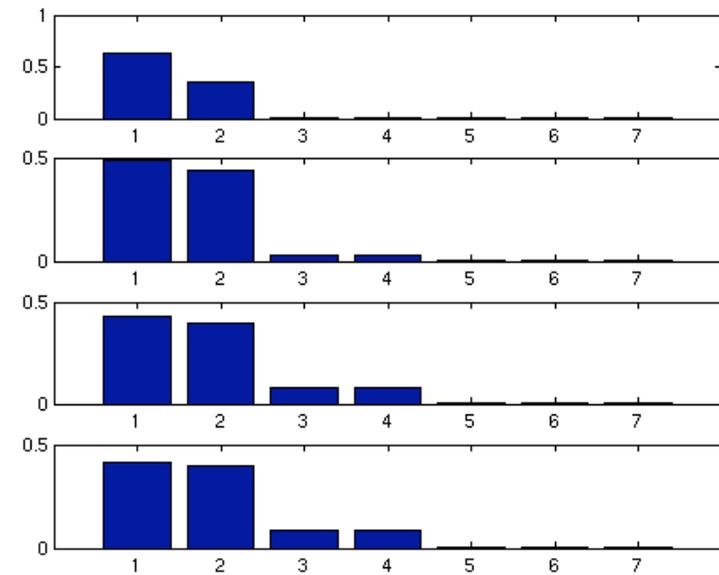


$M=10$

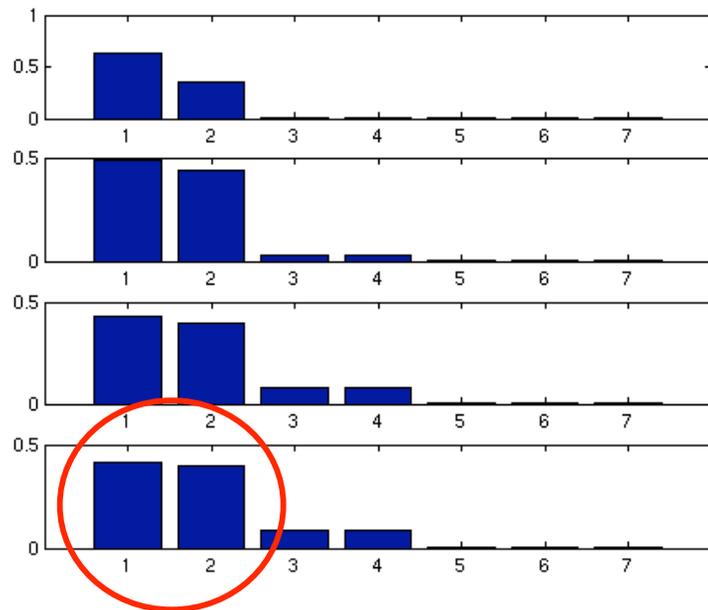
$M=50$

$M=100$

$M=180$



SSA sur le mouvement du pôle (2)

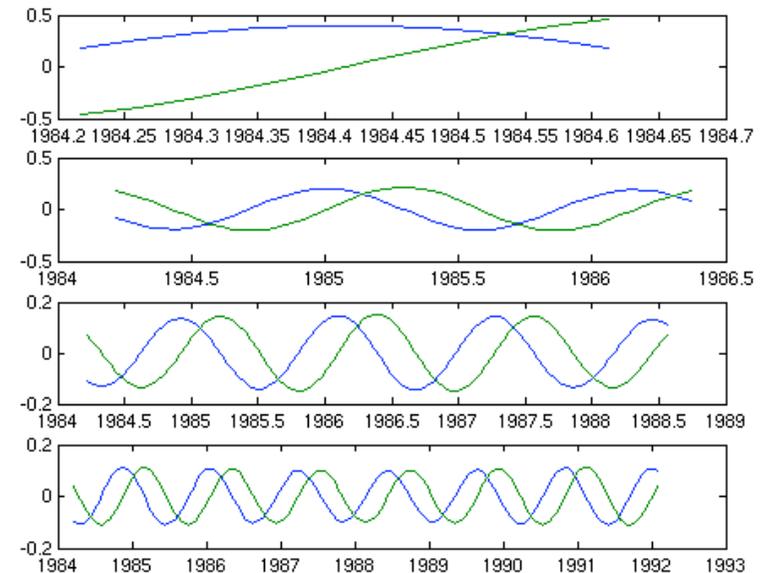


M=10

M=50

M=100

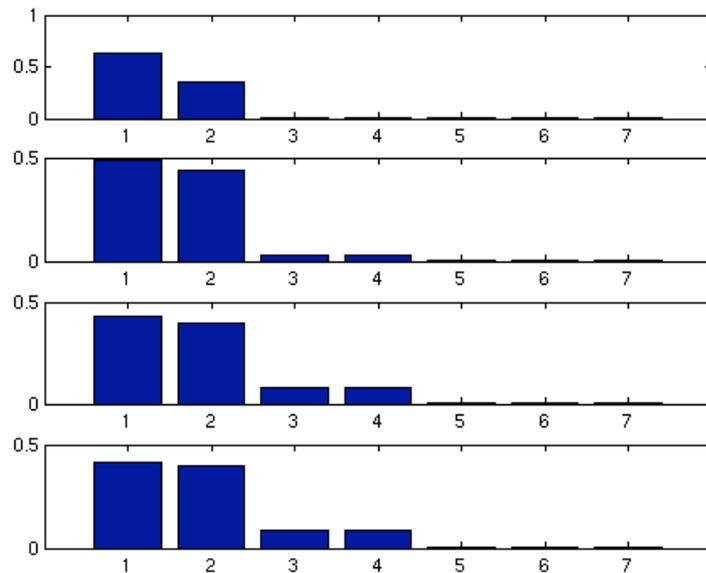
M=180



2 valeurs propres de même hauteur = 2
vecteurs propres de même période et en
quadrature = signal du type $a \sin + b \cos$

vecteurs propres 1 et 2

SSA sur le mouvement du pôle (3)

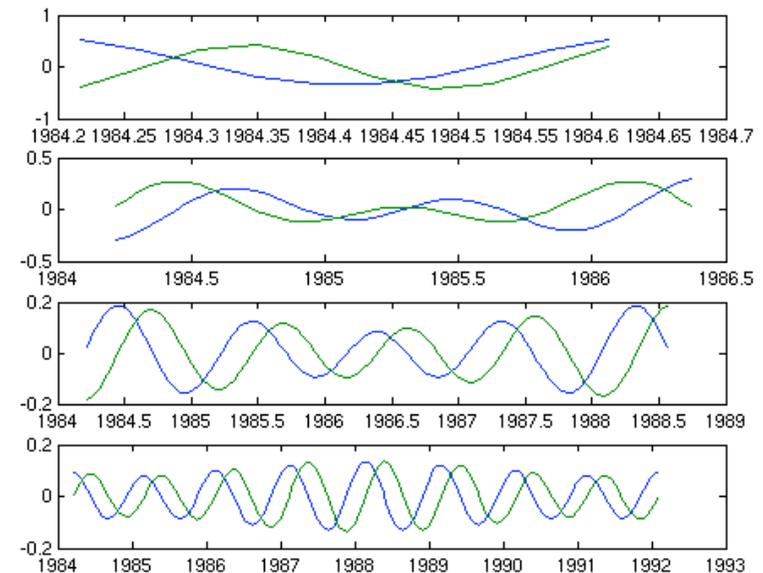


$M=10$

$M=50$

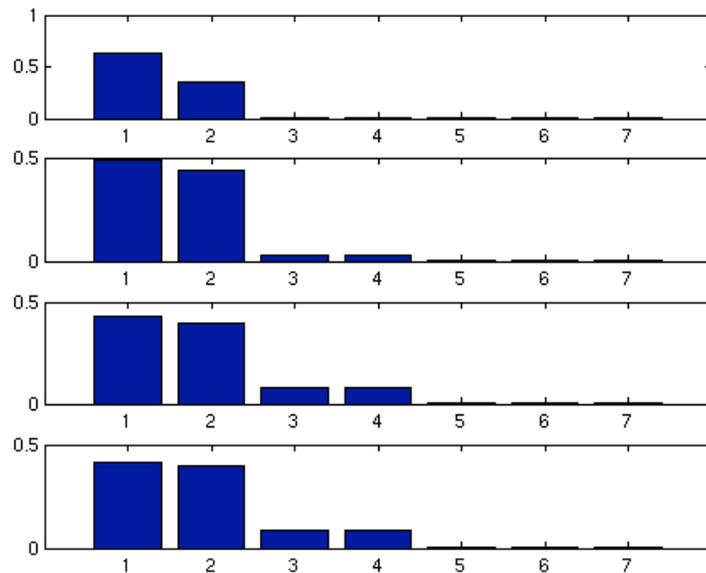
$M=100$

$M=180$



vecteurs propres 3 et 4

SSA sur le mouvement du pôle (4)

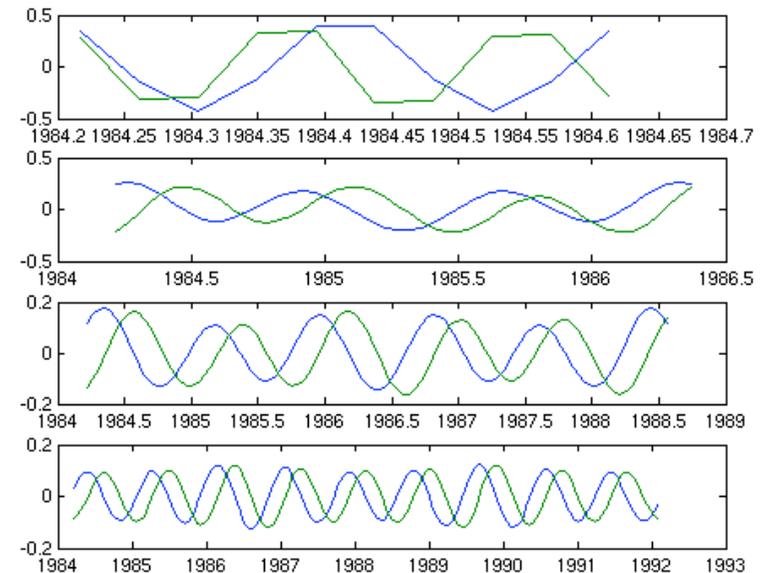


M=10

M=50

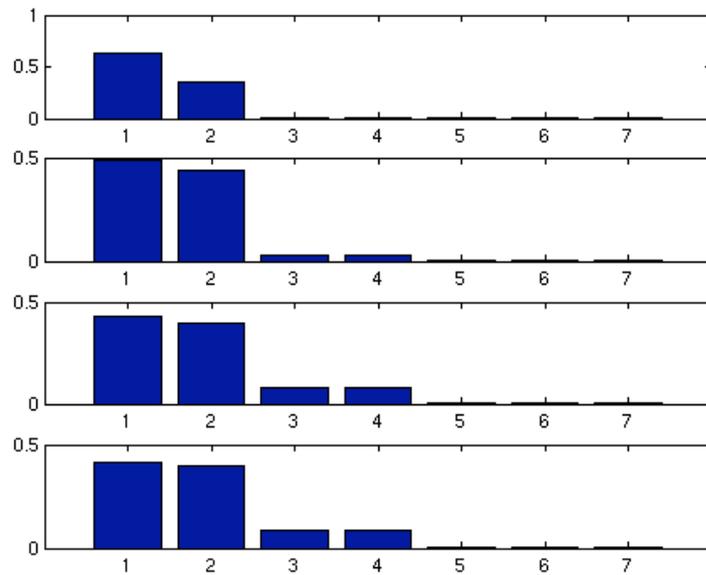
M=100

M=180



vecteurs propres 5 et 6

SSA sur le mouvement du pôle (5)

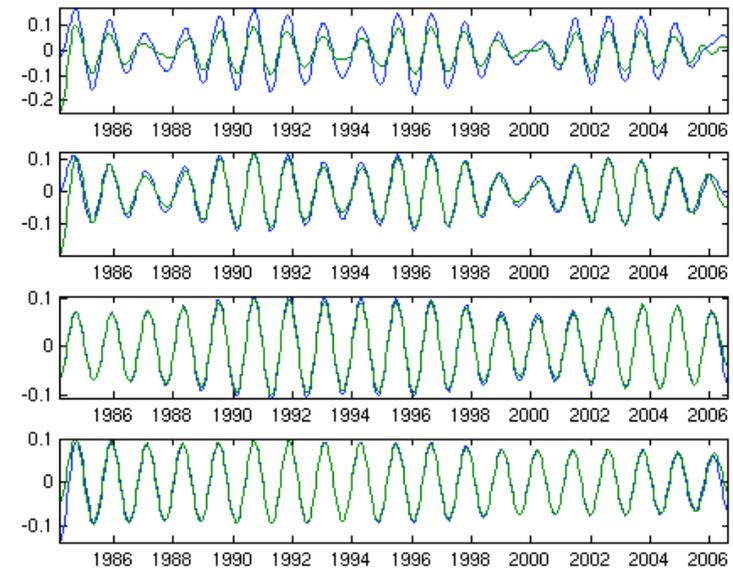


M=10

M=50

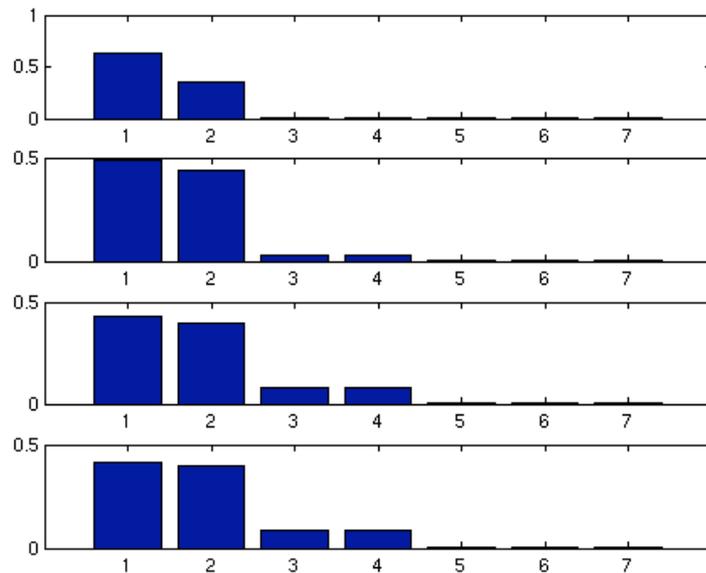
M=100

M=180



composantes reconstruites 1 et 2

SSA sur le mouvement du pôle (6)

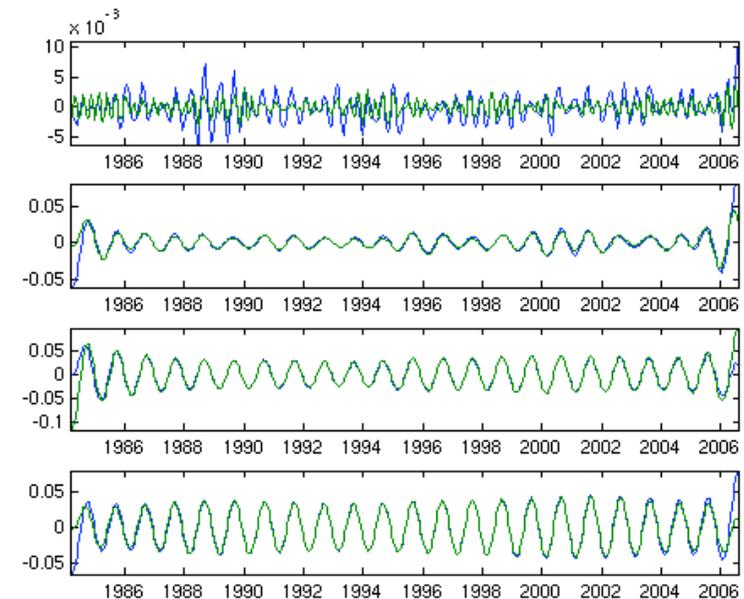


M=10

M=50

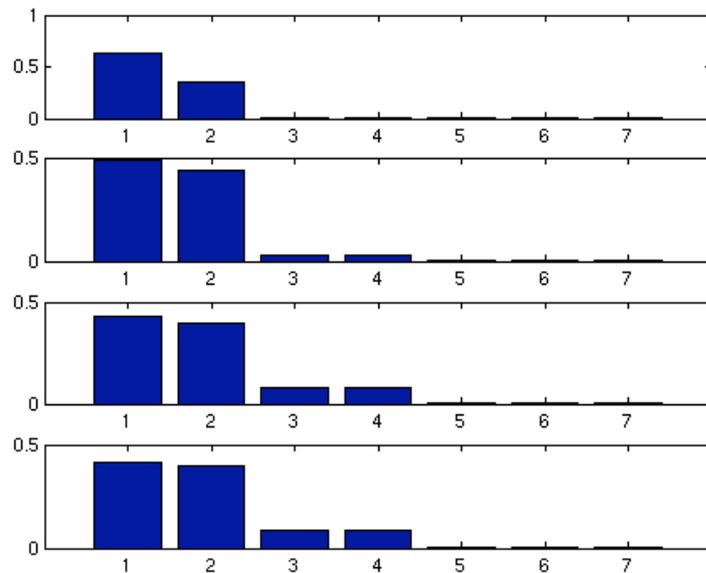
M=100

M=180



composantes reconstruites 3 et 4

SSA sur le mouvement du pôle (7)

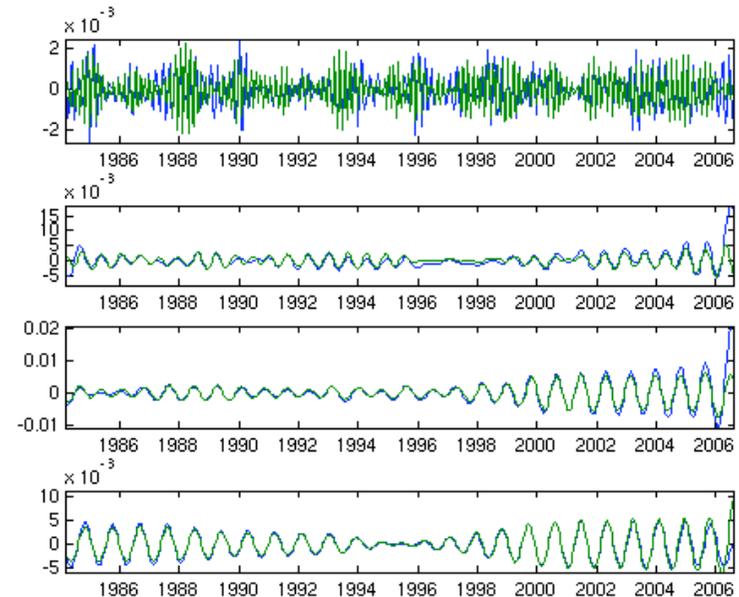


M=10

M=50

M=100

M=180



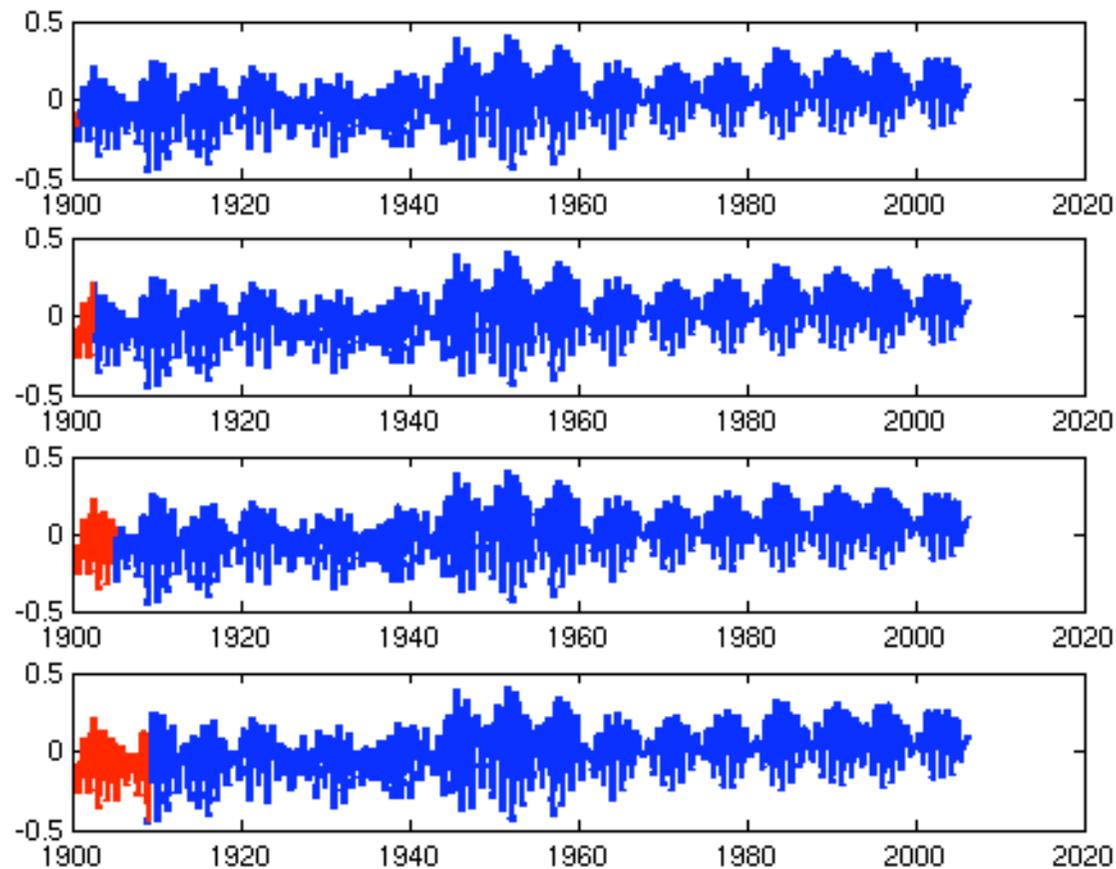
composantes reconstruites 5 et 6

ça commence à devenir petit... est-ce significatif ?

on verra cela plus loin...

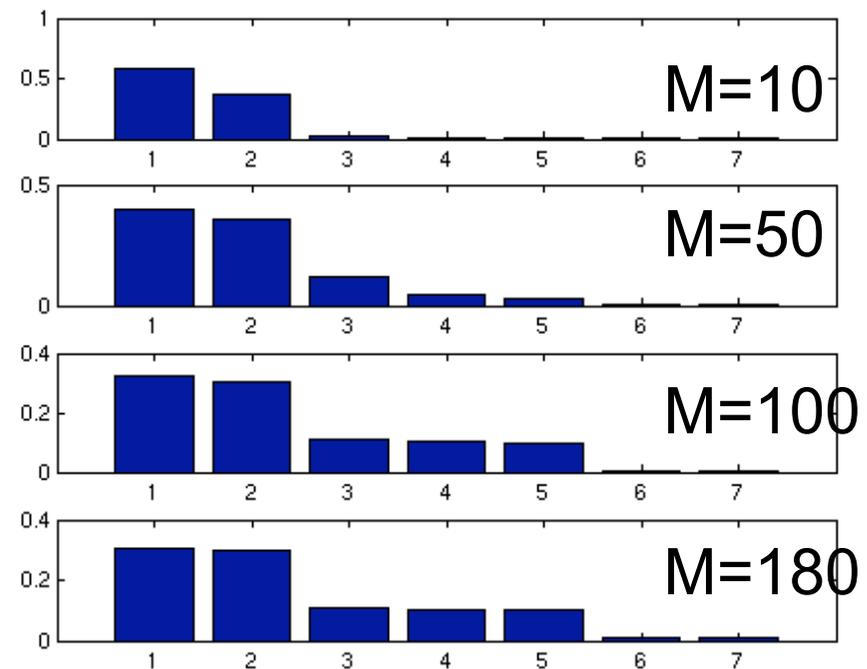
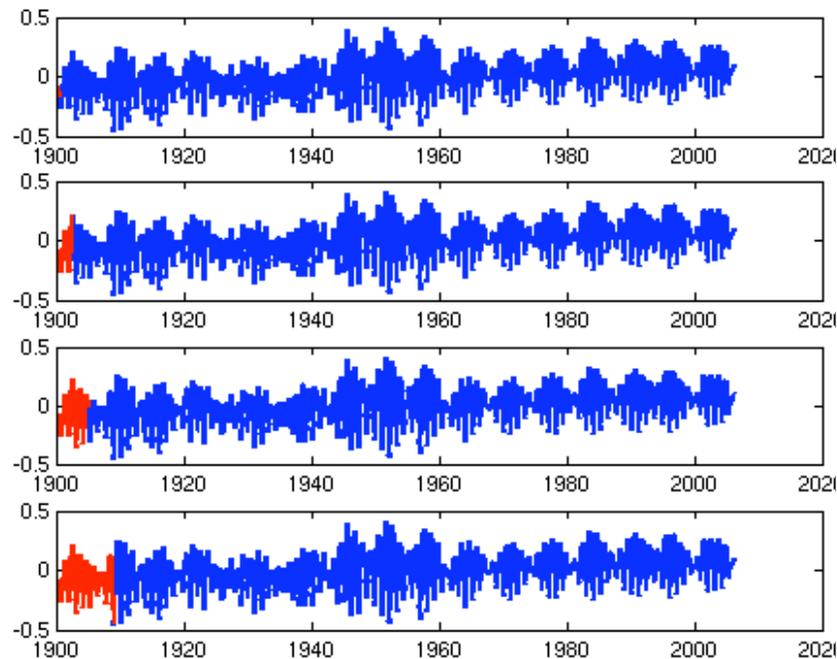
Mouvement du pôle sur 1 siècle (1)

- Série IERS EOP C 01 (optique puis GNSS/VLBI/SLR)



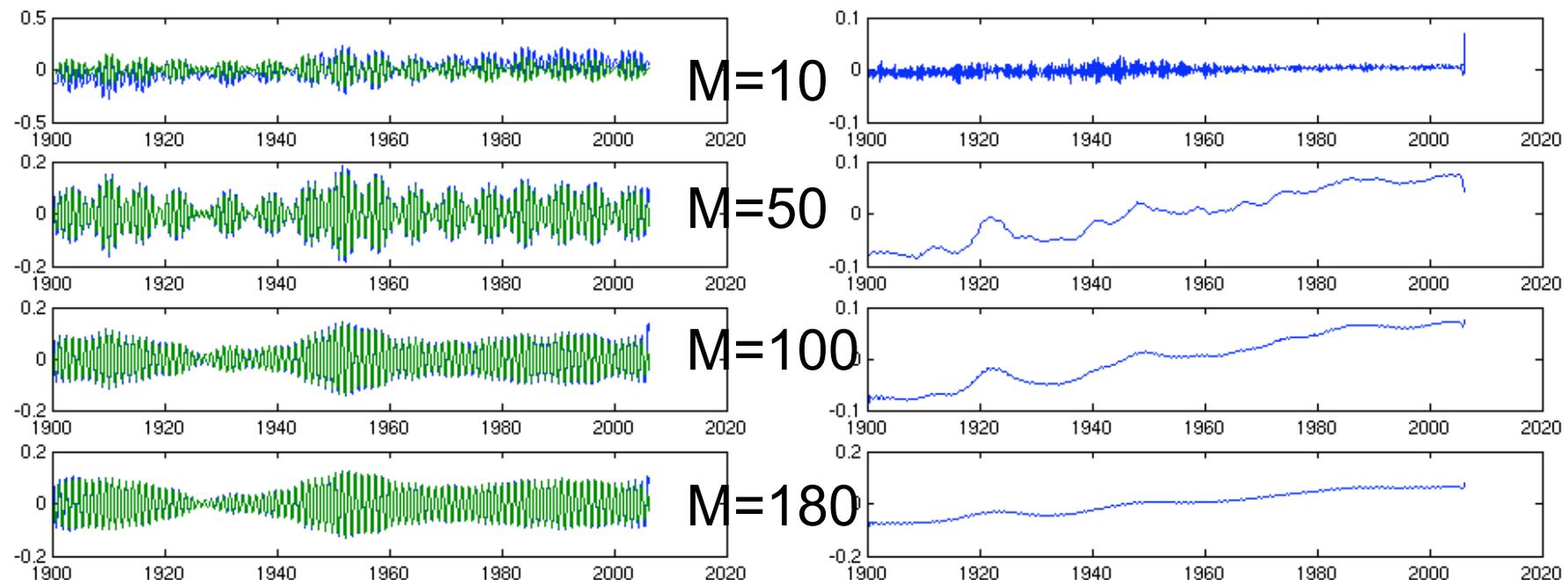
Mouvement du pôle sur 1 siècle (2)

- Série IERS EOP C 01 (optique puis GNSS/VLBI/SLR)
- Echantillonnage à 1 mois



Mouvement du pôle sur 1 siècle (3)

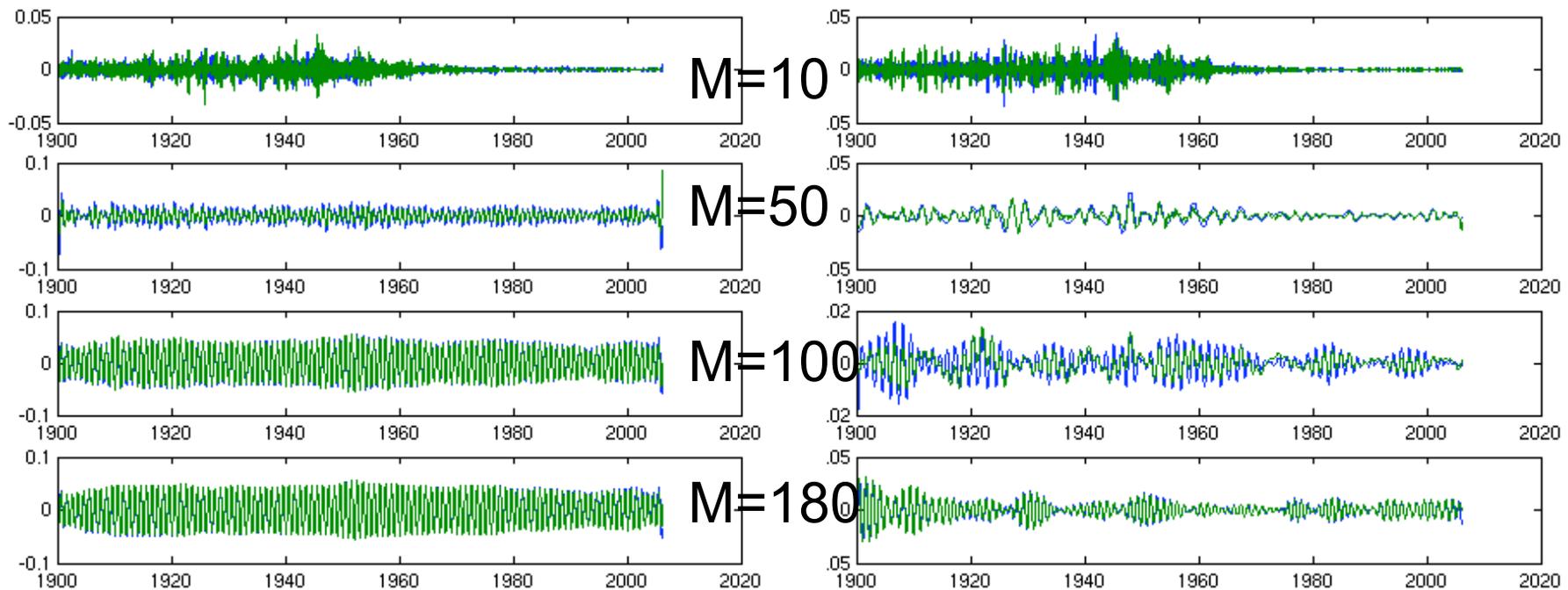
- Composantes 1 et 2 (g.) : Chandler wobble
- Composante isolée 3 (d.) : tendance, Markowitz wobble



Exercice pour demain : trouver la cause du Markowitz

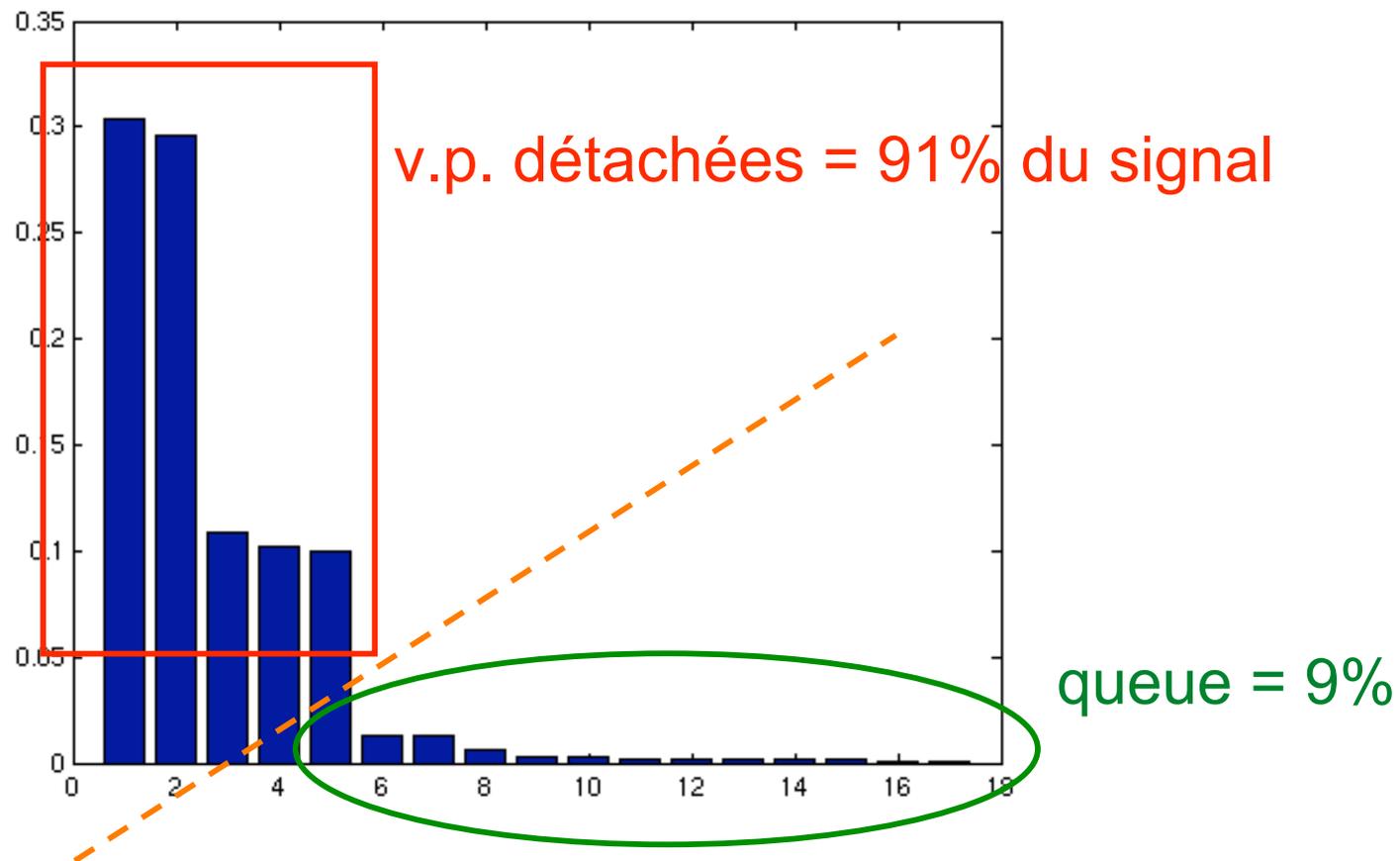
Mouvement du pôle sur 1 siècle (4)

- Composantes 4 et 5 (g.) : Annual wobble
- Composante 6 et 7 (d.) : ???



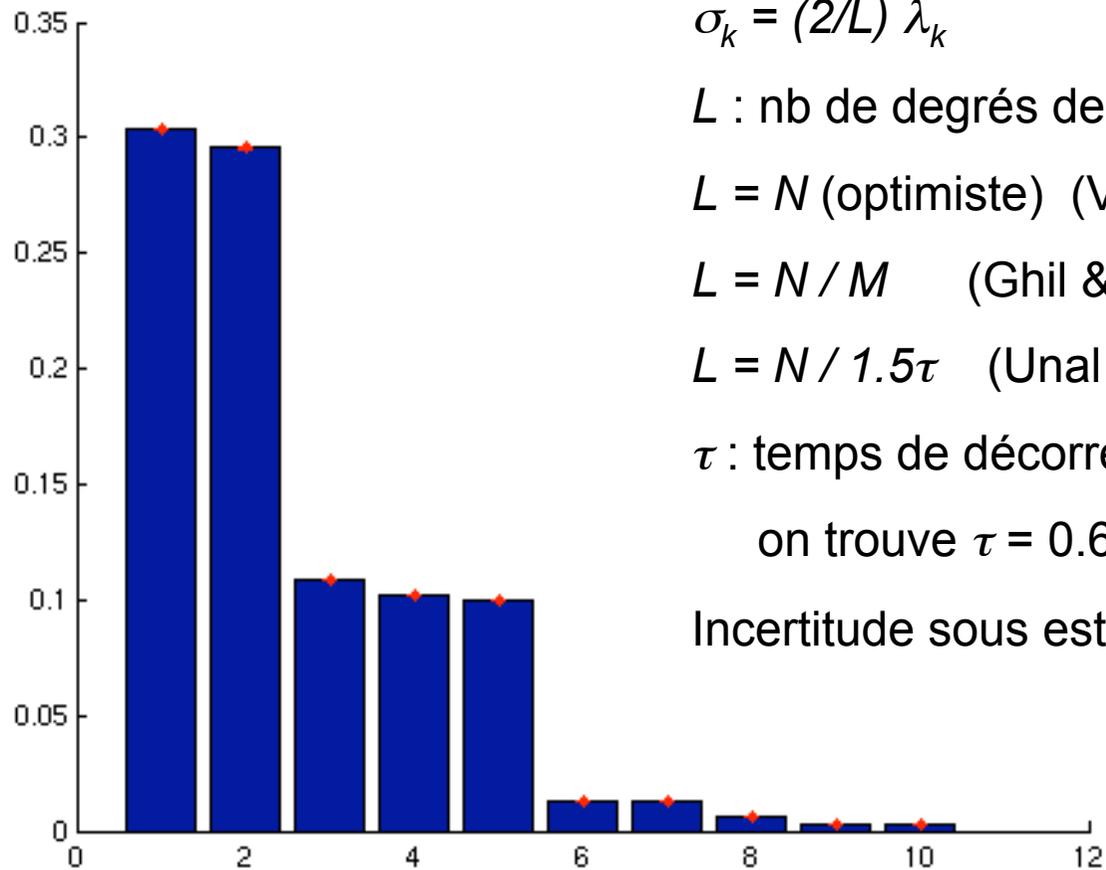
Tester la pertinence des composantes

- Niveau de bruit de la série ?



Tester la pertinence des composantes

- Incertitudes ad hoc sur les v.p.



$$\sigma_k = (2/L) \lambda_k$$

L : nb de degrés de liberté indépendants

$L = N$ (optimiste) (Vautard & Ghil 1989)

$L = N / M$ (Ghil & Mo 1991)

$L = N / 1.5\tau$ (Unal & Ghil 1995)

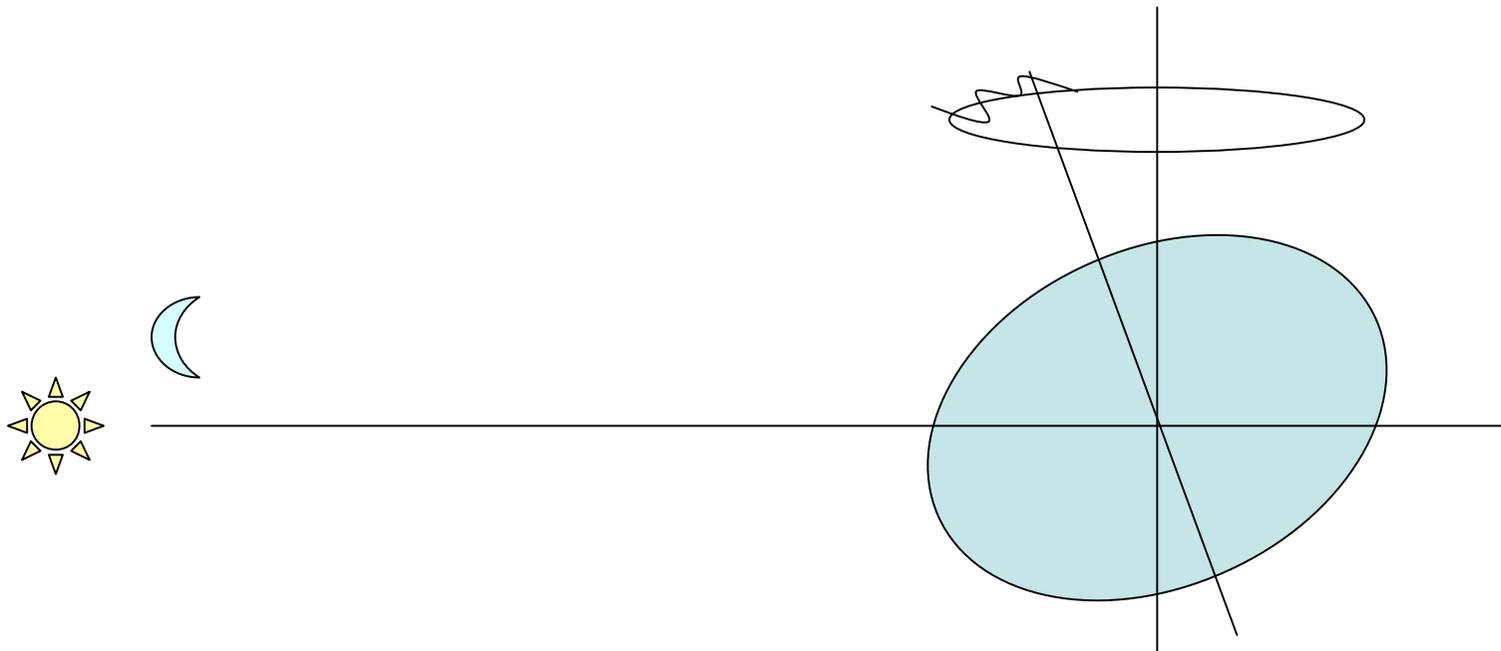
τ : temps de décorrélation = $t_{ech} / \log(\text{corr}(1))$

on trouve $\tau = 0.6$ an

Incertitude sous estimée

Un autre exemple plus bruité

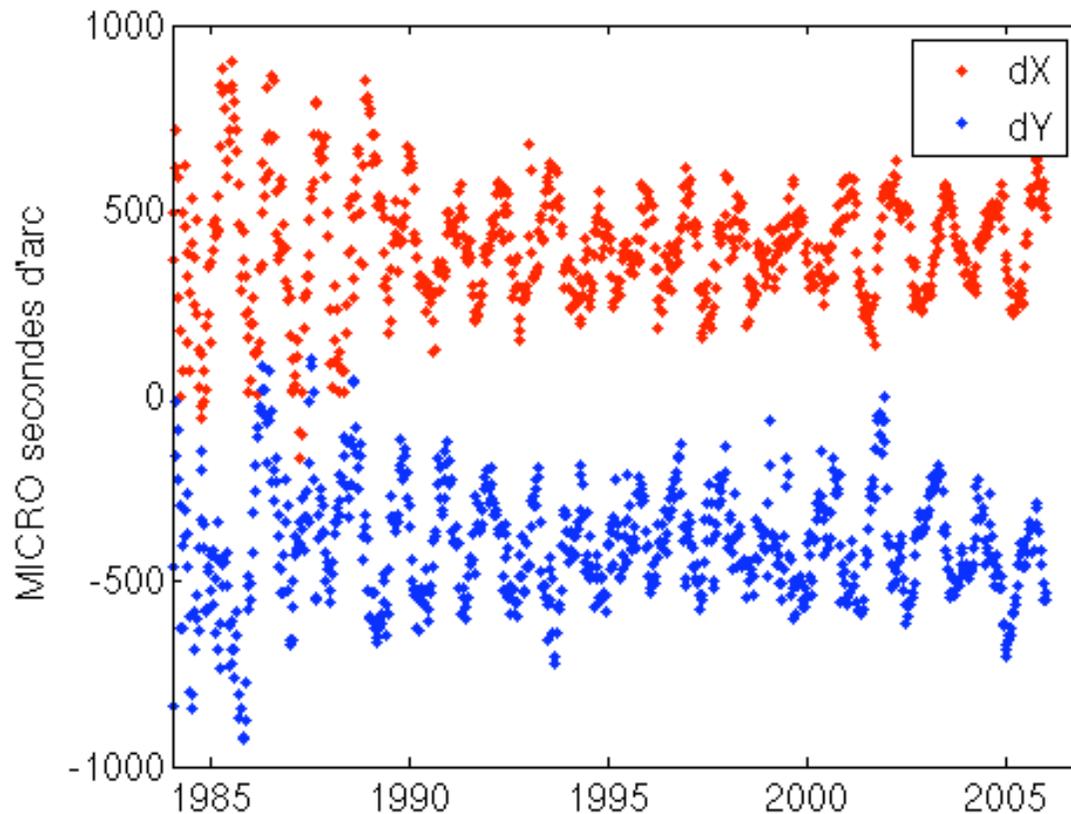
- Position de l'axe de rotation dans l'espace (précession-nutation)



La précession-nutation

- Position de l'axe de rotation dans l'espace (précession-nutation)
 - mesurée uniquement par VLBI
 - sessions VLBI espacées irrégulièrement (lundi et jeudi par exemple)
 - interpolation à 1 jour lors de la combinaison (IERS EOP Center, Obs. de Paris)
 - précision 300 μas
 - on détermine des écarts à un modèle théorique (IAU 2000A, Mathews et al. 2002)
 - dans le cas présenté ici, signal filtré et interpolé tous les 10 jours pour réduire le nombre de points

La précession-nutation



On voit une oscillation :

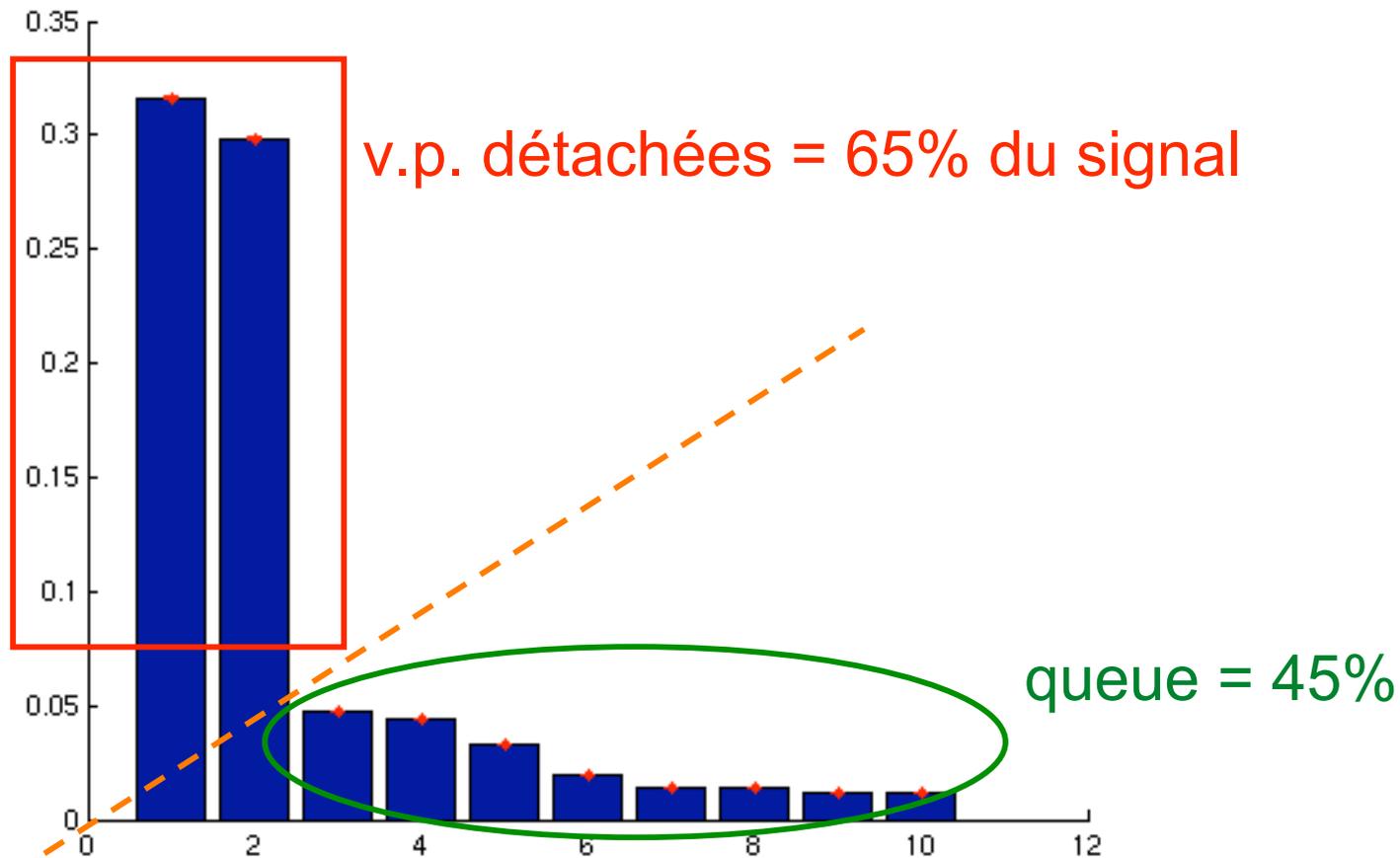
mode de rotation libre du
noyau liquide en 430 jours
(free core nutation)

période stable mais phase et
amplitude variables

Peut-on voir autre chose ?
(e.g., les signaux
saisonniers induits par les
couches fluides externes et
prédits autour de $80 \mu\text{as}$)

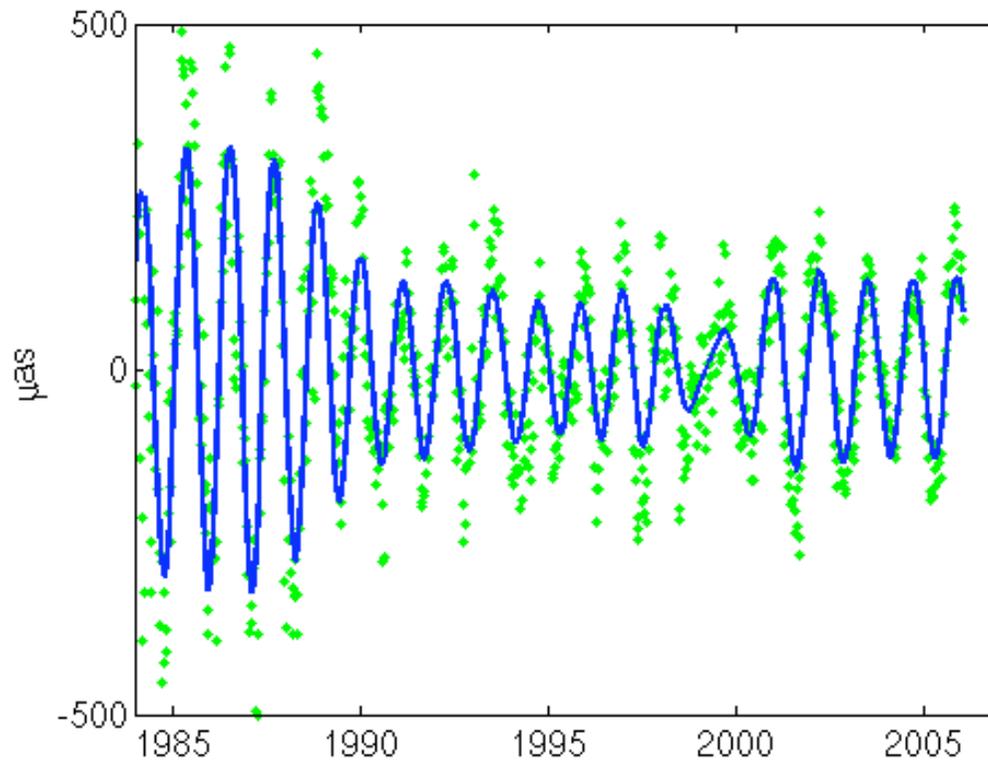
La moulinette SSA (1)

- Covariance-lag $M = 90$ (900 jours)



La moulinette SSA (2)

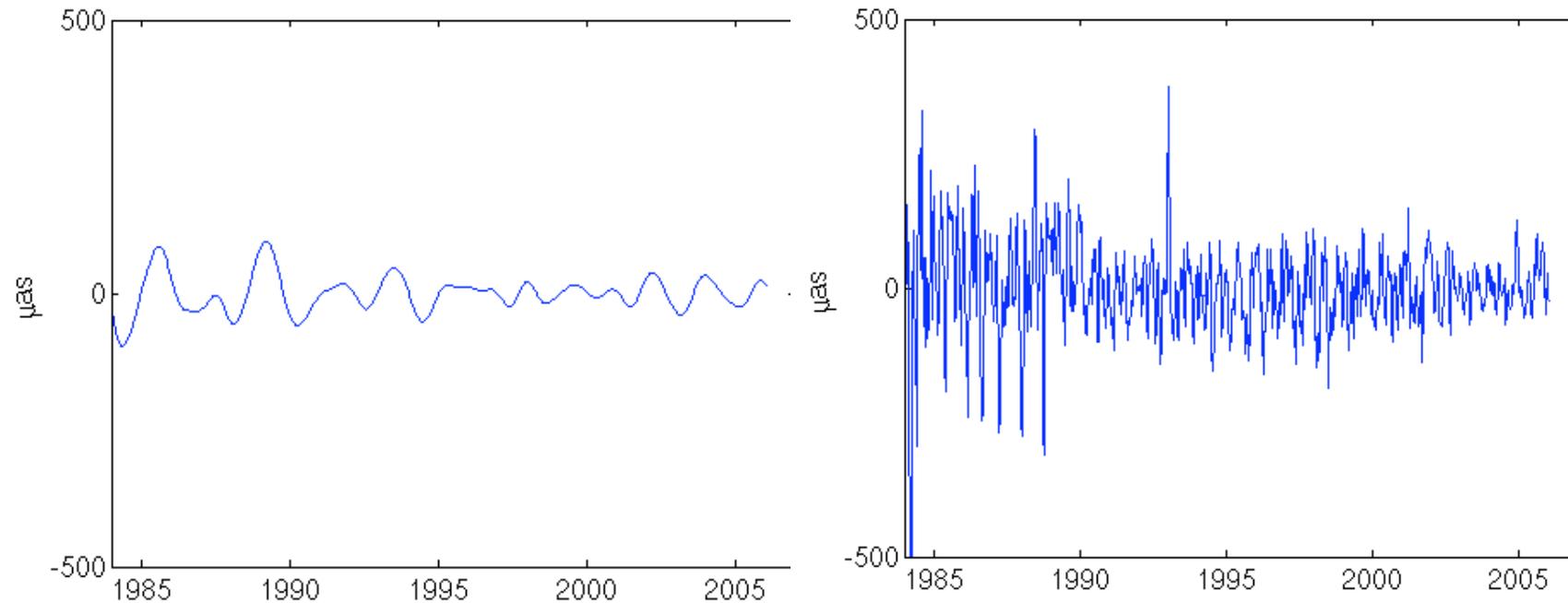
- Reconstruction des composantes 1 et 2
- On extrait la free core nutation



Noter la variation
d'amplitude, l'annulation
vers 1999 avec
changement de phase

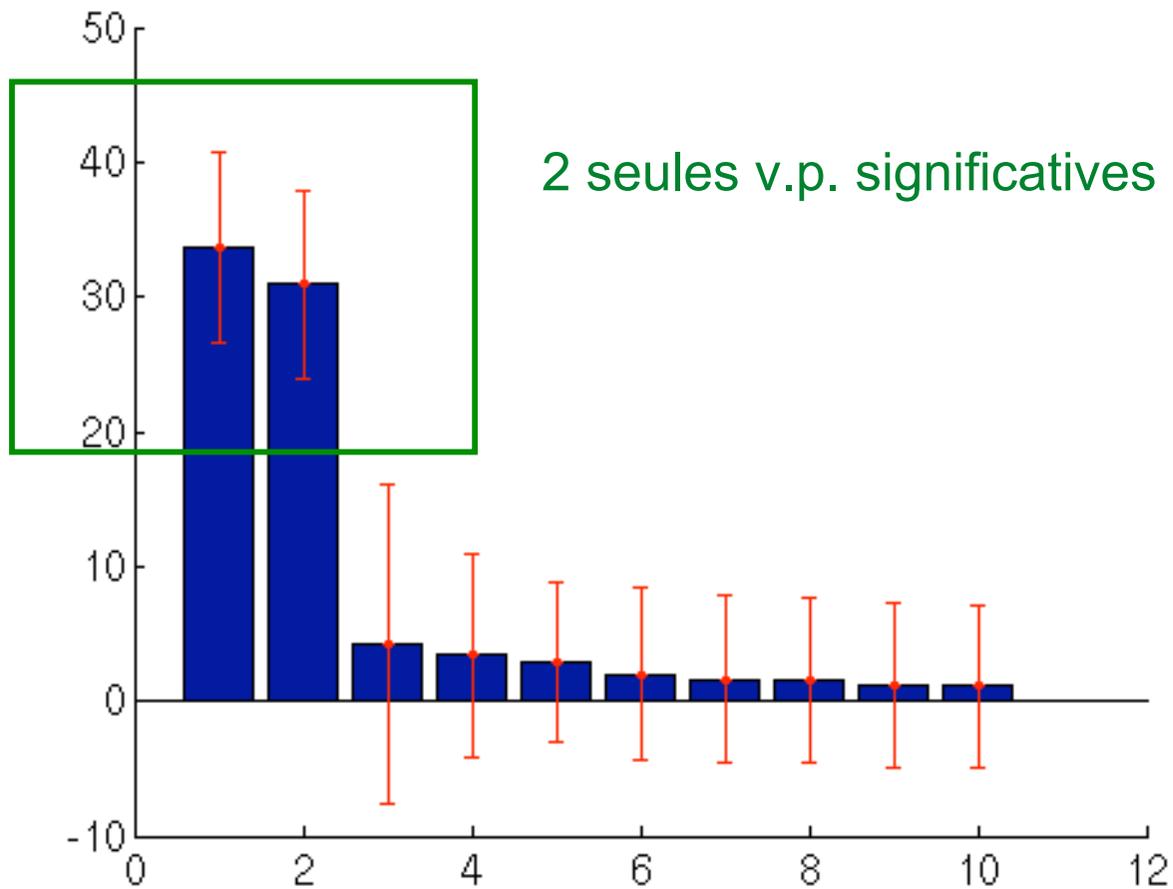
La moulinette SSA (3)

- Reconstruction des composantes 3 et 4 (g.)
- Visualisation du résidu (d.)
- Intéressant de tester la stabilité de ces composantes avant de rechercher des causes géophysiques éventuelles



La moulinette SSA (4)

- Test de stabilité par perturbation par un bruit de $300 \mu\text{as}$ (donc de l'ordre de l'incertitude sur les données)



Conclusions

- SSA :
 - méthode analogue aux EOFs
 - permet de décomposer, recombinaison, filtrer
 - rend compte de la variabilité temporelle des amplitudes/phases des oscillation (quasi-) périodiques
 - marche sur des signaux “peu ou pas trop” bruités
 - ne marche pas en automatique les yeux fermés
 - test de stabilité nécessaire lorsqu’on descend proche du niveau de bruit
 - de préférence avec “peu” d’échantillons
 - les concepts classiques de traitement du signal doivent être appliqués (e.g., Nyquist, période de décorrelation, etc.)

Conclusions

- Extensions :
 - multichannel SSA (MSSA)
 - rechercher les signaux communs a plusieurs signaux X_i
 - $X = [X_1, X_2, \dots, X_K]$
 - p.e. variations long-terme des hauteurs d'eau à Marseille et à Brest : voit-on des tendances communes ?
 - prédiction SSA-MEM
 - SSA pour extraire les modes
 - MEM pour les modéliser analytiquement et les prédire

Bibliographie

- Littérature

- Articles de Vautard, Ghil, Yiou, etc.

<http://www.atmos.ucla.edu/ghil/>

- Article de review et références

Ghil M., R. M. Allen, M. D. Dettinger, K. Ide, D. Kondrashov, M. E. Mann, A. Robertson, A. Saunders, Y. Tian, F. Varadi, and P. Yiou, « Advanced spectral methods for climatic time series, » *Rev. Geophys.*, 40 (1), pp. 3.1-3.41, 10.1029/2000GR000092.

- Logiciels

- SSA facile à programmer

- MATLAB

- signal processing toolbox
- routines en free : Eric Breitenberger (U. Alaska)

<http://pangea.stanford.edu/Oceans/GES290/Breitenberger-SSAMatlab/>

- Fortran ou C

- fouiller sur le web
- MIMOSA (routines + interface ligne de commande pour l'analyse spectrale, conçu au départ pour les séries temporelles complexes)