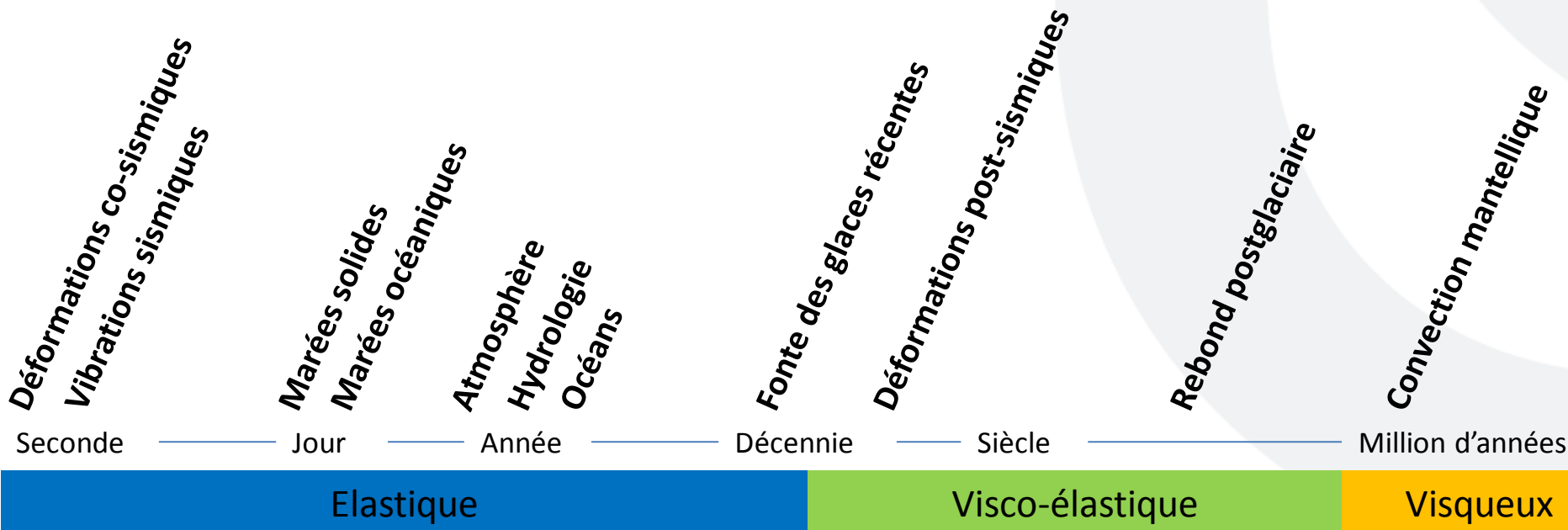


LA MODÉLISATION DES DÉFORMATIONS D'UNE TERRE HÉTÉROGÈNE DE FORME QUELCONQUE

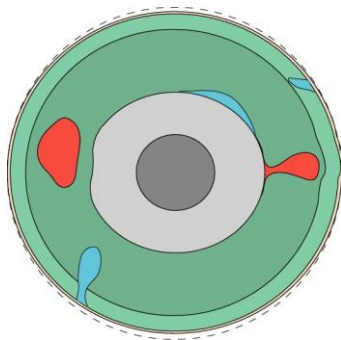
Laurent Métivier



PRINCIPE DE LA MODÉLISATION

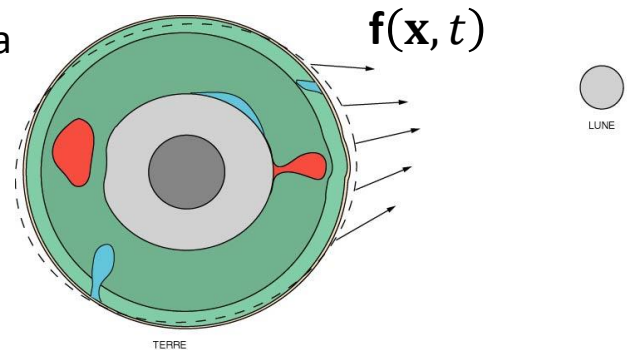
■ Déformations de la Terre petites : $qq\text{ cm} \ll R_T \sim 6371\text{ km}$

Utilisation de la théorie des perturbations :



Etat de Référence connu
(en terme de forme, structure,
rhéologie, état de contraintes)

Système d'équations de la
gravito-visco-élasticité



Ex : déformations instantanées
induites par la marée solide lunaire

■ Système d'équations linéaires aux dérivées partielles :

$$\partial_{tt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

$\mathbf{u}$: déplacement en tout point $\mathbf{x}$ de la Terre à l'instant t

$\mathbf{A}$: op. diff. linéaire Gravito-élasticité

$\mathbf{B}$: op. diff. linéaire Rotation et Viscosité

Équations :

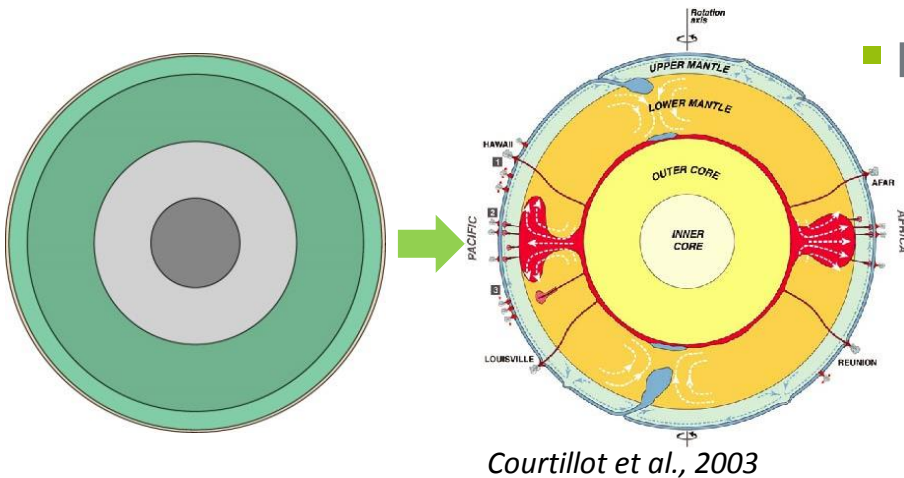
Conservation masse

Conservation quantité de mvt

Poisson

Rhéologie

DIFFICULTÉS GÉNÉRALES



■ Etat de référence de la Terre

- **Cas sphérique** à symétrie radiale (**voire ellipsoïdale**) connu
Ex : PREM (Dziewonski & Anderson, 1981)
Bémol : profil de viscosité
- **Cas Terre 3D de structure hétérogène**
Variations latérales de densité, paramètres élastiques, viscosité ? Topographies ?
Contraintes non hydrostatiques ?

■ Méthodes de résolution

- **Harmoniques sphériques** :
 - Bien adaptées à une Terre sphérique, à symétrie radiale
 - Couplages lourds dès qu'on s'écarte de la symétrie sphérique
- **Méthodes numériques (FEM, SEM, EF,...)** :
 - Maillage : aussi bien adaptées à une Terre sphérique qu'à une Terre à 3D
 - Formulation mathématique lourde (formulations variationnelles, etc).
 - Problème du traitement du potentiel de gravité à l'extérieur de la Terre
 - Question du traitement des modes de déformations et de rotations rigides.
 - Temps de calcul long. Problèmes de conditionnement et d'optimisation.
- **Cas viscoélastique**
 - Système d'équations équivalent au cas élastique en fréquence.
Comment revenir en temps ?
 - Difficile de sortir du cas à symétrie radiale

MODÈLES ACTUELS DE RÉFÉRENCE ET AU DELÀ

■ Marées solides : (IERS2010)

- **Référence actuelle** : Dehant, Defraigne & Wahr (1999), cad :

Terre ellipsoïdale en rotation uniforme, composée de couches latéralement homogènes (PREM), élastique et à l'équilibre hydrostatique (Wahr, 1981b)
+ prend en considération :

- une perturbation **d'anélasticité** (Wahr & Bergen,)
- une **variation d'ellipticité à la CMB** et aux interfaces mantelliques due à la dynamique du manteau

■ Marées océaniques, marées atmosphériques, marées polaires, surcharges saisonnières, rebond post-glaciaire :

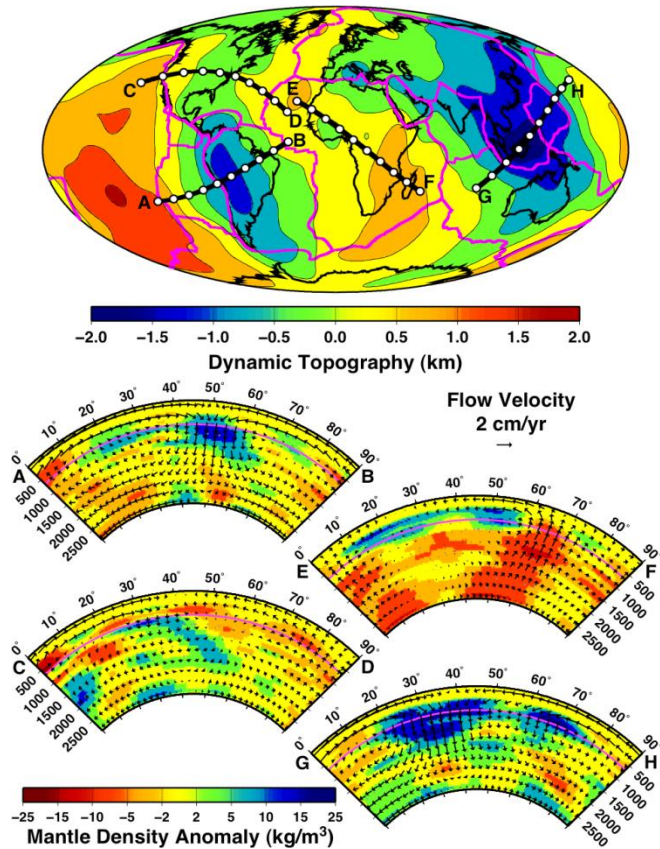
- **Référence actuelle** : Terre supposée **sphérique et à symétrie radiale** (PREM).

■ Au-delà :

- Marées solides : quelques travaux pour incorporer les variations latérales internes (Wang, 1991; Métivier et al., 2005, 2006, 2007 ; Métivier & Conrad, 2008 ; Latychev et al., 2009 ; Lau et al., 2015)
- Surcharges : Quasi aucune étude qui sort du schéma classique (Métivier et al., 2008)
- Rebond postglaciaire : impact des variations latérales de viscosité (Geruo A et al., 2013 ; van der Wal, 2015)

MARÉES SOLIDES ET LA CONVECTION DU MANTEAU

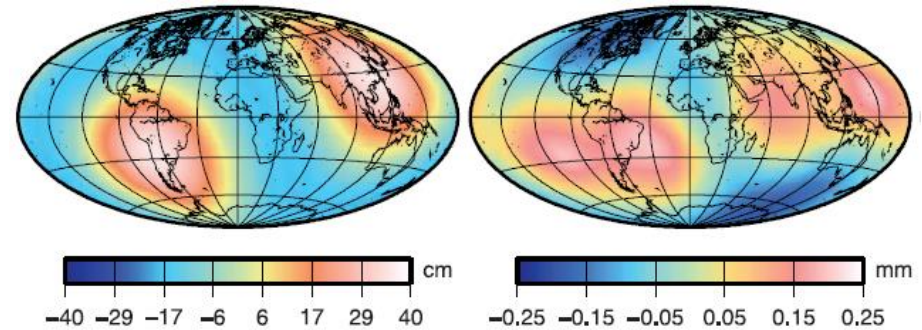
■ Dynamique du manteau



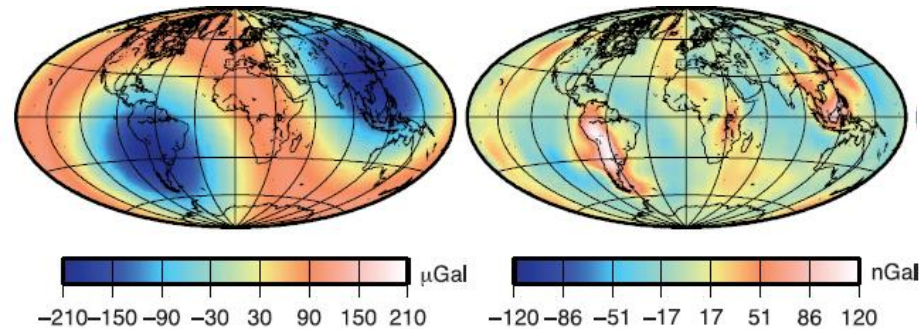
Métivier & Conrad (2008)

■ Perturbation de marée solide

- Déplacement vertical de la surface



- Perturbation de gravité sur la surface déformée

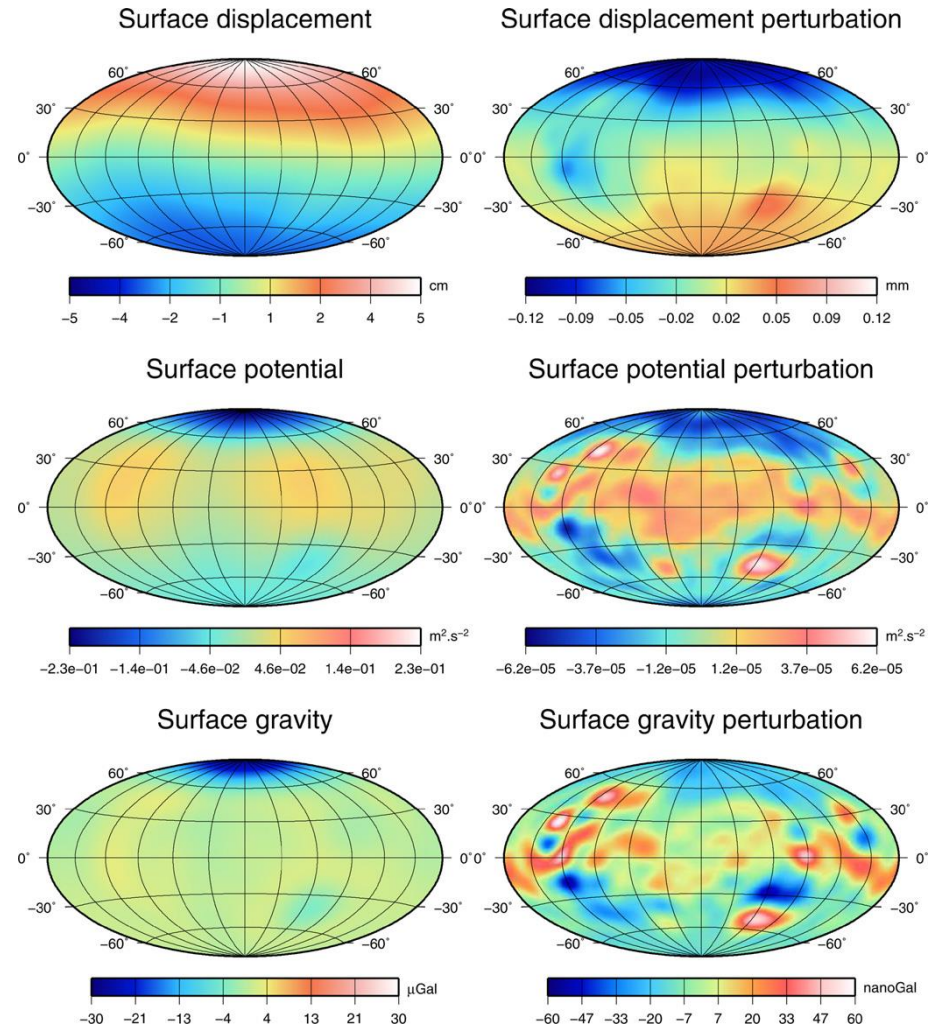
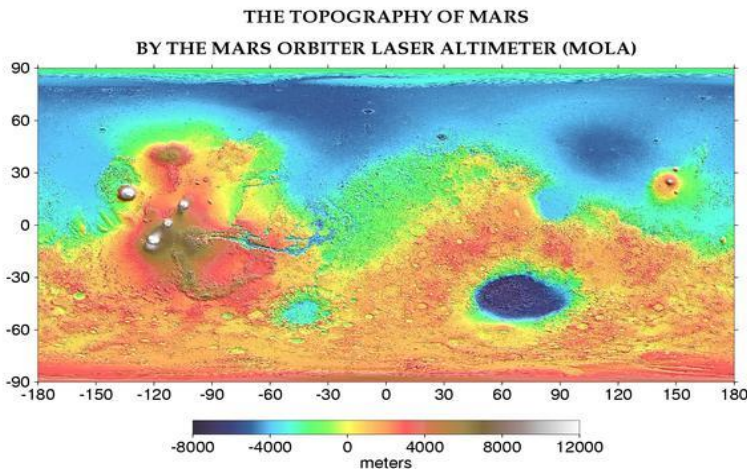


Exemple au 23 Novembre 2007 18h UTC

LES SURCHARGES SAISONNIÈRES SUR MARS

■ Impact de la Dichotomie crustale sur les déformations de surcharge

- Prise en compte de la topographie
- Croute martienne supposée à l'équilibre isostatique
- Surcharges saisonnières essentiellement Nord-Sud (entre les calottes polaires)



CONCLUSIONS

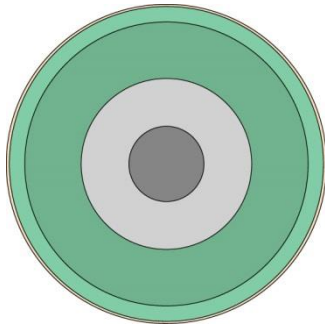
- **Impact des variations latérales de l'ordre du 1/1000 à grande longueurs d'onde :**
 - A la limite de la précision de mesure en géodésie.
 - Pb lourdeur de la modélisation.
- **Marée solide :**
 - Perturbation supérieure à la précision instrumentale des gravimètres supraconducteurs d'observatoire. Problème du « bruit » de marée océanique.
 - Utilisation d'observations GPS vers une tomographie de marée. Yuan & Chao, 2012 : Précision de 0.1 mm Horizontal et 0.3 mm Vertical ?
- **Surcharges de surface : impact des variations latérales**
 - Non résolu :
 - Pour la Terre ?
 - Réponse à courtes longueurs d'onde ?
 - Impact des précontraintes non-hydrostatiques (ex : tectoniques) ?
 - Facteur limitant : connaissance imprécise des charges de surface
- **Rebond postglaciaire**
 - Nécessité de considérer les variations latérales de viscosité
 - Voir présentation suivante

DIFFICULTÉS GÉNÉRALES

■ Etat de référence de la Terre

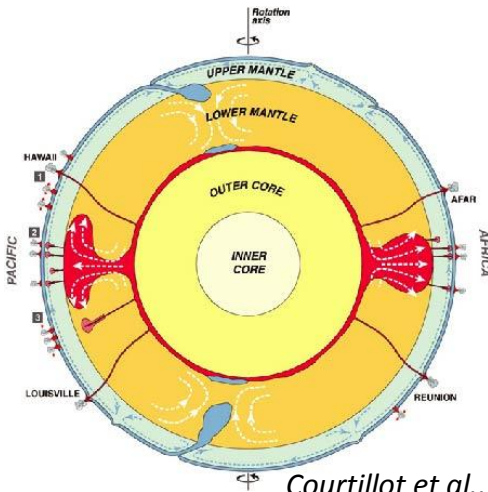
■ Cas sphérique/ellipsoïdale → ~connu

Ex : Modèle de Terre de référence PREM (Dziewonski & Anderson, 1981)



Symétrie radiale
Paramètres élastiques et densité relativement bien connus
Equilibre hydrostatique
Bémol : profil de viscosité

■ Cas Terre 3D de structure hétérogène



Variations latérales de densité, paramètres élastiques, viscosité ?
(Utilisation de la tomographie sismique ? Modèles de croûte ?)
Topographies aux interfaces ?



Nécessité de modélisations lourdes et sujettes à débat juste pour caractériser l'état de référence

DIFFICULTÉS GÉNÉRALES

■ Difficultés mathématiques et techniques : méthodes de résolution

■ **Harmoniques sphériques :**

- **Bien adaptée à une Terre sphérique, à symétrie radiale**
 - Dégénérescence : permet une expression des solutions par nombres de Love
 - Formulation classique et bien connu du système différentiel des « yi ».
 - Rapide à grandes longueurs d'onde mais peu adapté à la haute résolution.
- **Couplages lourds dès qu'on s'écarte de la symétrie sphérique**
 - Acceptable en cas d'ellipticité (e.g. Wahr, 1981a)
 - Faisable mais infiniment complexe à mettre en œuvre (Wang, 1991)

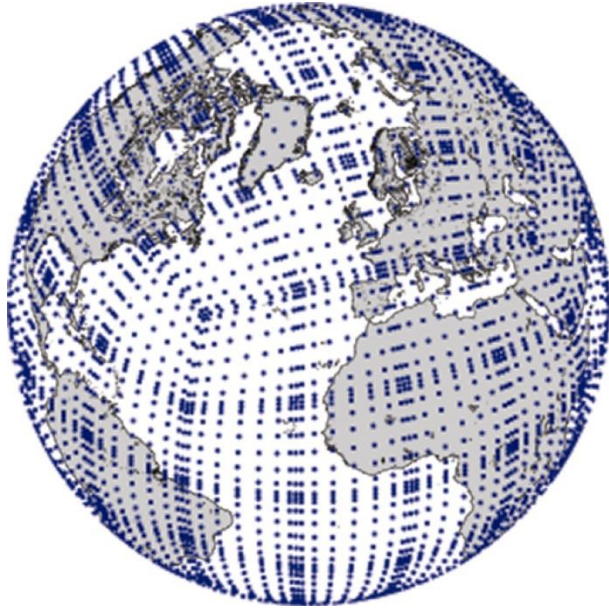
■ **Méthodes numériques (FEM, SEM, EF,...) :**

- Maillage : aussi bien adaptées à une Terre sphérique qu'à une Terre à 3D
- Formulation mathématique lourde (formulations variationnelles, etc).
- Problème du traitement du potentiel de gravité à l'extérieur de la Terre
- Question du traitement des modes de déformations et de rotations rigides.
- Temps de calcul long. Problèmes de conditionnement et d'optimisation.

■ **Cas viscoélastique**

- **Système d'équations équivalent au cas élastique en fréquence**
- **Comment revenir en temps ?**
 - Approche modale : recherche des modes de relaxation
Pb : en nombre infini si la Terre est compressible
 - Approche fréquentielle : utilisation de FFT inverses
Pb : le forçage est automatiquement « périodisé »
- **Difficile de sortir du cas à symétrie radiale**

MODÉLISATION EN ÉLÉMENTS SPECTRAUX



Exemple de maillage dit de la
« Sphère Cubique »
(Ronchi et al., 1996 ; Chaljub et al.,
2003; Métivier 2004)

- **Éléments spectraux :**
 - Éléments finis avec interpolation polynomiale à haut degré.
 - Discrétisation élémentaire sur les points de Gauss-Lobatto-Legendre.
- **Maillage : « Sphère Cubique »** raccordée à un cube centrale.
- **Prolongement du problème gravitationnel à l'extérieur via un opérateur DtN (Chaljub et al., 2004).**
- **Perturbation des équations au deuxième ordre. Calcul en 4 temps :**
 1. Etat de référence à symétrie radiale
 2. Perturbation de l'Etat de référence par une modélisation externe adaptée
➡ **Anomalie de densité/paramètres élastiques, topographie, précontraintes**
 3. Calcul en éléments spectraux des déformations pour l'état de référence
 4. Calcul en éléments spectraux de la perturbation des déformations connaissant les résultats des 3 étapes précédentes.