

Analyse des perturbations dues à la gravité.

Gilles Métris

Observatoire de la Côte d'Azur/CERGA

Ecole d'été GRGS :

Détermination du Champ de Gravité Terrestre

par les Nouvelles Missions Spatiales

Table des matières

1 Développement de Kaula- Application au calcul des variations des éléments orbitaux dues au potentiel de gravité terrestre.	2
1.1 Le développement de Kaula	2
1.2 Variations des éléments orbitaux dues au potentiel de gravité terrestre	6
1.3 Orbites particulières	10
1.3.1 Orbite polaire	10
1.3.2 Orbite héliosynchrone	10
1.3.3 Orbite géostationnaire	10
1.3.4 L'inclinaison critique	12
1.4 Conclusion	12
2 Les équations de Hill- Formulation- Intégration.	16
2.1 Les équations de Hill	16
2.1.1 Principe	16
2.1.2 Equations du mouvement en repère inertiel et en repère tournant	16
2.1.3 Mouvement par rapport à une orbite de référence	17
2.2 Intégration des équations de Hill	19
2.2.1 Solution du système homogène	19
2.2.2 Réponse à une perturbation périodique	20
2.2.3 Forme complexe	23
3 Application des équations de Hill au calcul des effets du potentiel de gravité.	25
3.1 Perturbation due au potentiel terrestre	25
3.1.1 Expression du potentiel en repère terrestre	25
3.1.2 Dérivées du potentiel	26
3.1.3 Expression du potentiel en repère orbital	27
3.1.4 Accélération perturbatrice en repère orbital	29
3.1.5 Déplacements dus au potentiel en fonction des éléments orbitaux	31
3.1.6 Déplacements dus au potentiel en fonctions des coordonnées géographiques	32
3.1.7 Relation entre développement de Rosborough et développement de Kaula	35

Chapitre 1

Développement de Kaula- Application au calcul des variations des éléments orbitaux dues au potentiel de gravité terrestre.

Il est souvent utile de pouvoir analyser les effets d'une perturbation sur un type d'orbite donnée : soit pour décider si il faut prendre en compte la perturbation dans le calcul de la trajectoire, soit pour savoir si l'observation de tel ou tel satellite peut apporter une information sur un phénomène physique. Il ne s'agit pas d'obtenir une précision maximum (celle ci ne pourra en générale n'être obtenue que par intégration numérique) mais d'évaluer les effets de la perturbation au niveau de quelques pourcents. La mécanique céleste fourni des outils qui permettent assez souvent de faire beaucoup mieux. On peut citer les méthode de normalisation (élimination des angles de l'hamiltonien par changement de variables). Ces méthodes sont cependant relativement lourdes dès que la perturbation devient un peu complexe. Un potentiel tronqué aux degrés et ordre 20, représente de l'ordre de 200 coefficients, chacun étant en facteur d'une fonction de Legendre ! On préférera donc souvent une méthode plus globale et systématique. On utilise en général les éléments orbitaux plutôt que les coordonnées rectangulaires pour paramétrer le mouvement. Les variations des éléments orbitaux sont décrites par les équations de Lagrange lorsque la force dérive d'un potentiel ou par les équations de Gauss dans le cas contraire. La perturbation principale est la gravité. Pour utiliser le potentiel de gravité dans les équations de Lagrange, il faut calculer ses dérivées partielles par rapport aux éléments orbitaux. Cela est fait de manière systématique par le développement de Kaula.

1.1 Le développement de Kaula

Reprenons le développement du potentiel perturbateur sous sa forme non normalisée :

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_e}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \phi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \quad (1.1)$$

On veut substituer cette perturbation dans les équations de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} \\ \dot{I} = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} + \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \dot{M} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

L'objet du développement introduit par Kaula [12], est de substituer les éléments orbitaux $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ utilisés dans les équations de Lagrange, aux coordonnées sphériques (r, ϕ, λ) paramétrants le développement du potentiel. Pour cela on utilise l'expression des fonctions de Legendre :

$$P_{lm}(\sin \phi) = \cos^m \phi \sum_{s=0}^{E(\frac{l-m}{2})} T_{lms} \sin^{l-m-2s} \phi \quad (1.3)$$

où T_{lms} est un nombre donné par

$$T_{lms} = \frac{(-1)^s (2l-2s)!}{2^l s! (l-s)! (l-m-2s)!} \quad (1.4)$$

On a (Fig 1.1) :

$$\lambda = \alpha - \theta = (\alpha - \Omega) + (\Omega - \theta) \quad (1.5)$$

D'autre part les relations de trigonométrie sphérique donnent

$$\sin \phi = \sin I \sin(\omega + v) \quad (1.6)$$

$$\cos(\alpha - \Omega) = \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \phi} \quad (1.7)$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = \frac{\sin(\omega + v) \cos I}{\cos \phi} \quad (1.8)$$

où α est l'ascension droite du satellite et θ le temps sidéral du méridien de Greenwich.

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(i\lambda) &= \exp(i(\alpha - \Omega) + i(\Omega - \theta)) \\ &= \exp(i(\Omega - \theta)) \frac{\cos(\omega + v) + i \sin(\omega + v) \cos I}{\cos \phi} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\exp(im\lambda) = \frac{\exp(im(\Omega - \theta))}{\cos^m \phi} \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} i^{(m-t)} \cos^t(\omega + v) \sin^{l-t}(\omega + v) \cos^{m-s} I$$

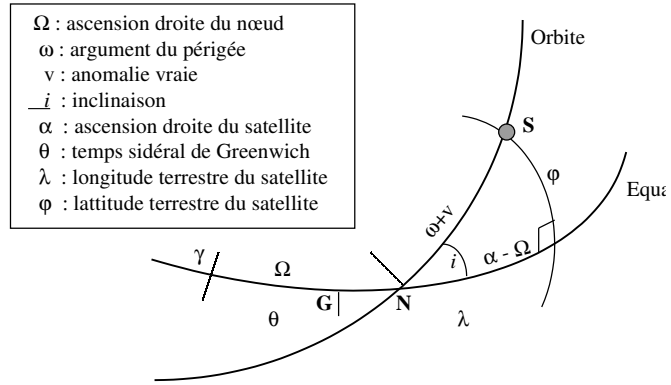


FIG. 1.1 – Coordonnées sphériques et éléments orbitaux

On déduit de (1.3) et (1.9)

$$P_{lm}(\sin \phi) \exp im\lambda = \exp(im(\Omega - \theta)) \sum_{s=0}^{E(\frac{l-m}{2})} T_{lms} \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} i^{(m-t)} \cos^t(\omega + v) \sin^{l-t-2s}(\omega + v) \cos^{m-s} I \sin^{l-m-2s} I \quad (1.10)$$

A partir de là, la transformation des puissances des fonctions circulaires en fonctions des multiples des angles permet d'obtenir

$$P_{lm}(\sin \phi) \exp(im\lambda) = \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) \exp i \left[(l - 2p)(\omega + v) + m(\Omega - \theta) + \epsilon_{lm} \frac{\pi}{2} \right] \quad (1.11)$$

avec

$$\epsilon_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{si } l - m \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } l - m \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.12)$$

$F_{lmp}(I)$ sont les fonctions d'inclinaison de Kaula. Ce sont plus exactement des polynômes en $\sin I$ et $\cos I$. Une des formes explicites possibles est :

$$F_{lmp}(I) = \frac{(-1)^{\lfloor l-m/2 \rfloor} (l+m)!}{2^l l!} \binom{l}{p} \sum_{j=\sup\{0, 2p-l-m\}}^{\inf\{l-m, 2p\}} (-1)^j \binom{2p}{j} \binom{2l-2p}{l-m-j} (\cos(I/2))^{l+m-2p+2j} (\sin(I/2))^{l-m+2p-2j}$$

Ces fonctions peuvent être calculées soit directement soit par des formules de récurrence [9]. Cette première étape permet d'écrire le potentiel sous la forme

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_e}{r} \right)^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) \Re \left(\exp I \left[(l-2p)(\omega + v) + m(\Omega - \theta) + \epsilon_{lm} \frac{\pi}{2} \right] (C_{lm} - IS_{lm}) \right)$$

Pour obtenir un développement uniquement en fonction des éléments orbitaux, il reste à remplacer $1/r = 1/a(a/r)$ et v . a/r et v sont des fonctions de l'excentricité e et de l'anomalie moyenne M ; on peut introduire la série de Fourier :

$$\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \exp I(l-2p)v = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{lpq}(e) \exp I(l-2p+q)M \quad (1.13)$$

Les fonctions G_{lpq} sont les fonctions d'excentricité de Kaula. Elles sont reliées aux fonctions de Hansen $X_k^{lm}(e)$ couramment utilisées en mécanique céleste :

$$G_{lpq}(e) = X_{l-2p+q}^{-(l+1), l-2p}(e) \quad (1.14)$$

On notera les points suivants :

- Les fonctions d'excentricité héritent des propriétés des fonctions de Hansen :
 - $G_{l, l-p, -q} = G_{lpq}$
 - si $l-2p+q = 0$, G_{lpq} est un polynôme de degré $\|q\|$ par rapport à e ; sinon c'est une série qui ne converge que si $e < e^*$ où $e^* \simeq 0.66$ est l'excentricité de Laplace.
 - $G_{lpq}(e)$ est d'ordre $\|q\|$ par rapport à e
- La série de Fourier (1.13) existe toujours (même pour $e > e^*$) et donc les fonctions G aussi : c'est le développement des coefficients de Fourier G_{lpq} en série de e qui peut ne pas exister.
- Contrairement au développement (1.11), le développement (1.13) est infini. En pratique il faut donc le tronquer. D'après la remarque ci-dessus la troncature sur l'indice q équivaut à une troncature par rapport aux puissances de l'excentricité.

De même que les fonctions de Hansen, les fonctions $G_{lpq}(e)$ peuvent être calculées soit directement, soit par des formules de récurrence [10].

Ainsi on peut écrire le potentiel perturbateur uniquement en fonction des éléments orbitaux du satellite. C'est le développement de Kaula :

$$U = \frac{\mu}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{lpq}(e) \mathcal{S}_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \quad (1.15)$$

$$= \sum_{lmpq} U_{lmpq} \quad (1.16)$$

avec

$$\mathcal{S}_{lmpq} = C_{lm} \cos \psi_{lmpq} + S_{nm} \sin \psi_{lmpq} \quad (1.17)$$

$$\psi_{lmpq} = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) + \epsilon_{lm} \frac{\pi}{2} \quad (1.18)$$

1.2 Variations des éléments orbitaux dues au potentiel de gravité terrestre

La développement (1.15) est bien adapté pour les équations de Lagrange. Si on note :

$$G'_{lpq}(e) = \frac{dG_{lpq}}{de} \quad (1.19)$$

$$F'_{lmp}(I) = \frac{dF_{lmp}}{dI} \quad (1.20)$$

$$\mathcal{S}'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) = \frac{d\mathcal{S}_{lmpq}}{d\psi_{lmpq}} \quad (1.21)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial a} &= \frac{l+1}{a} U_{lmpq} \\ \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial e} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l G'_{lpq}(e) F_{lmp}(I) \mathcal{S}_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\ \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial I} &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F'_{lmp}(I) \mathcal{S}_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\ \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial \Omega} &= m \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(I) \mathcal{S}'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\ \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial \omega} &= (l - 2p) \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(I) \mathcal{S}'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \\ \frac{\partial U_{lmpq}}{\partial M} &= (l - 2p + q) \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l G_{lpq}(e) F_{lmp}(I) \mathcal{S}'_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ces dérivées partielles peuvent être insérées dans les équations de Lagrange. Pour une théorie du premier ordre telle que celle que nous voulons établir, les équations de Lagrange peuvent être intégrées isolément pour chaque jeu d'indices l, m, p, q et les résultats sommés.

Remarquons que la variable M est perturbée à la fois directement comme les autres variables, mais aussi indirectement par l'intermédiaire du moyen mouvement $n = \sqrt{a^3/\mu}$ qui varie en même temps que le demi-grand axe. Pour obtenir la variation totale de M il faut donc en principe commencer par calculer les variations de a et donc de n et reporter dans l'équation pour M . Sauf mention explicite nous ne considérerons que les perturbations directes.

Pour intégrer les équations, il faut connaître la forme des variations du membre de droite. On fait l'hypothèse suivante, basée sur les résultats d'autres méthodes analytiques : les éléments métriques a, e, I sont constants et les angles $M, \omega, \Omega - \theta$ sont linéaires par rapport au temps. Dans ces conditions, seule ψ_{lmpq} varie dans le second membre avec une fréquence constante $\dot{\psi}_{lmpq} = (l - 2p + q)\dot{M} + (l - 2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Theta})$.

Il faut traiter à part le cas $\dot{\psi}_{lmpq} = 0$. Si on suppose pour le moment que les fréquences ne sont pas comensurables, $\dot{\psi}_{lmpq}$ ne s'annule que pour les jeux d'indices qui vérifient :

$$\begin{cases} m = 0 & \implies \text{harmoniques zonaux} \\ l - 2p = 0 & \implies l \text{ est pair} \\ q = 0 & \implies \text{effets d'ordre 0 en } e \end{cases} \quad (1.23)$$

On a dans ce cas $\mathcal{S}_{lmpq} = C_{2p,0} = Cte$ et des équations de Lagrange de la forme :

$$\begin{cases} \dot{a}_s = 0 \\ \dot{e}_s = 0 \\ \dot{I}_s = 0 \\ \dot{\Omega}_s = \mathcal{A}_1(a, e, I)C_{2p,0} \\ \dot{\omega}_s = \mathcal{A}_2(a, e, I)C_{2p,0} \\ \dot{M}_s = \mathcal{A}_3(a, e, I)C_{2p,0} \end{cases} \quad (1.24)$$

Il en résulte

$$\begin{cases} \Delta a_s = 0 \\ \Delta e_s = 0 \\ \Delta I_s = 0 \\ \Delta \Omega_s = \mathcal{A}_1(a, e, I)C_{2p,0}\Delta t \\ \Delta \omega_s = \mathcal{A}_2(a, e, I)C_{2p,0}\Delta t \\ \Delta M_s = \mathcal{A}_3(a, e, I)C_{2p,0}\Delta t \end{cases} \quad (1.25)$$

On obtient le résultat important que les harmoniques zonaux de degré pair ($m = 0, l = 2p$) produisent des variations séculaires des angles. En particulier pour le degré 2 ($J_2 = -C_{20}$) :

$$\begin{cases} \Delta \Omega_s = -\frac{3}{2} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 n J_2 \frac{\cos I}{(1 - e^2)^2} \Delta t \\ \Delta \omega_s = -\frac{3}{4} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 n J_2 \frac{1 - 5 \cos^2 I}{(1 - e^2)^2} \Delta t \\ \Delta M_s = -\frac{3}{4} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 n J_2 \frac{1 - 3 \cos^2 I}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta t \end{cases} \quad (1.26)$$

Ces effets séculaires sur les angles sont de loin les plus grands écarts au mouvement képlérien. La fréquence orbitale est légèrement modifiée (de l'ordre de une partie par millier) tandis que le comportement de ω et Ω est complètement modifié par la perturbation :

- $\dot{M} \simeq n$ correspond à une période généralement comprise entre 1h30 (satellite rasant) et 24h (satellite géostationnaire).
- $\dot{\Omega} - \Theta \simeq \Theta$ correspond à une période d'environ 24h.
- $\dot{\omega} < 3(R_e/a)^2 n J_2 < 3.7 \cdot 10^{-6}$ rad/s (satellite rasant) correspond à une période supérieure à 20 jours.

Ainsi, M correspond à la plus haute fréquence (courte période), $\Omega - \theta$ correspond à une fréquence moyenne (moyenne période) et ω correspond à la plus basse fréquence (longue période).

Les effets séculaires étant calculés on les utilise pour intégrer tous les autres termes selon :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{S}_{lmpq} dt &= \frac{1}{\dot{\psi}_{lmpq_s}} \int \mathcal{S}_{lmpq} d\psi_{lmpq} = -\frac{1}{\dot{\psi}_{lmpq_s}} \mathcal{S}'_{lmpq} \\ \int \mathcal{S}'_{lmpq} dt &= \frac{1}{\dot{\psi}_{lmpq_s}} \int \mathcal{S}'_{lmpq} d\psi_{lmpq} = +\frac{1}{\dot{\psi}_{lmpq_s}} \mathcal{S}_{lmpq} \\ \dot{\psi}_{lmpq_s} &= (l - 2p + q)\dot{M}_s + (l - 2p)\dot{\omega}_s + m(\dot{\Omega}_s - \Theta) \end{aligned}$$

En insérant (1.22) dans les équations de Lagrange et en intégrant à l'aide des relations précédentes, on constate que les éléments (a, e, I) varient comme \mathcal{S}_{lmpq} et les angles M, ω, Ω varient comme \mathcal{S}'_{lmpq} . Ces deux groupes d'éléments sont donc en opposition de phase.

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta a_{lmpq} &= \frac{2\mu}{na^2} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l (l - 2p + q) G_{lpq} F_{lmp} \frac{\mathcal{S}_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \\ \Delta e_{lmpq} &= \frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l \left[(l - 2p + q) \frac{1 - e^2}{e} - (l - 2p) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \right] G_{lpq} F_{lmp} \frac{\mathcal{S}_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \\ \Delta I_{lmpq} &= \frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l \frac{(l - 2p) \cos I - m}{\sqrt{1 - e^2} \sin I} G_{lpq} F_{lmp} \frac{\mathcal{S}_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \\ \Delta \Omega_{lmpq} &= -\frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l \frac{1}{\sqrt{1 - e^2} \sin I} G_{lpq} F'_{lmp} \frac{\mathcal{S}'_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \\ \Delta \omega_{lmpq} &= \frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l \left[\frac{\cos I}{\sqrt{1 - e^2} \sin I} G_{lpq} F'_{lmp} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} G'_{lpq} F_{lmp} \right] \frac{\mathcal{S}'_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \\ \Delta M_{lmpq}^{(1)} &= \frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l \left[\frac{1 - e^2}{e} G'_{lpq} - 2(l + 1) G_{lpq} \right] F_{lmp} \frac{\mathcal{S}'_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \end{aligned} \right.$$

Il faut encore ajouter les variations de M dues aux variations de n :

$$\Delta n = -\frac{3n}{2a} \Delta a = -\frac{3\mu}{a^3} \left(\frac{R_e}{a}\right)^l (l - 2p + q) G_{lpq} F_{lmp} \frac{\mathcal{S}_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}} \quad (1.27)$$

On obtient par intégration

$$\Delta M_{lmpq}^{(2)} = \frac{3\mu}{a^3} (l - 2p + q) G_{lpq} F_{lmp} \frac{\mathcal{S}'_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}^2} \quad (1.28)$$

La variation totale de M vaut donc :

$$\begin{aligned}\Delta M_{lmpq} &= \Delta M_{lmpq}^{(1)} + \Delta M_{lmpq}^{(2)} \\ &= \frac{\mu}{na^3} \left(\frac{R_e}{a} \right)^l \left[\frac{1-e^2}{e} G'_{lpq} - 2(l+1)G_{lpq} + 3 \frac{S'_{lmpq}(l-2p+q)n}{\dot{\psi}_{lmpq}} \right] \\ &\quad \times F_{lmp} \frac{S'_{lmpq}}{\dot{\psi}_{lmpq}}\end{aligned}\quad (1.29)$$

L'amplitude des effets dépend :

- de l'amplitude des coefficients C_{lm} et S_{lm} qui décroît globalement lorsque le degré l augmente (règle de Kaula),
- de la valeur des fonctions $G_{lpq}(e)$ et $F_{lmp}(I)$ ($G_{lpq}(e)$ est d'ordre $|q|$ en e),
- du demi-grand axe : pour un satellite assez élevé ($R_e/a \ll 1$) et les amplitudes décroissent très vite lorsque le degré l augmente : l'altitude filtre les hauts degrés du potentiel.

Pour une amplitude fixée de la perturbation, les effets dépendent beaucoup de la fréquence $\dot{\psi}_{lmpq}$ qui intervient au dénominateur : les effets à longue période ont généralement la plus grande amplitude.

- les harmoniques zonaux ($m = 0$) produisent des effets à courtes périodes (multiples de la période orbitale) pour $l-2p+q \neq 0$, et des effets à longues périodes pour ($l-2p+q = 0$).
- les harmoniques tesséraux ($m \neq 0$) produisent des effets à courtes et moyennes périodes (multiples du jour) sauf en cas de résonance.

Il y a résonance lorsque une combinaison d'arguments à courtes et moyennes périodes produit une moyenne ou longue période :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ l - 2p + q \neq 0 \\ \nu = |(l - 2p + q)\dot{M} - m\Theta| < n \end{cases} \quad (1.30)$$

Si ν n'est pas trop petite devant le moyen mouvement n (période de quelques jours) c'est une résonance faible et les conclusions précédentes restent valables. Mais en cas de résonance profonde ($\nu \ll n$) on obtient des longues périodes. Il peut même arriver que le diviseur $\dot{\psi}_{lmpq}$ soit si petit que la méthode d'intégration ne soit même plus approximativement valide. Les résonances ont pour effet d'amplifier les effets des harmoniques tesséraux impliqués et donc de faciliter leur détermination. Les résonances sont obtenues pour

$$m \simeq (l - 2p + q) \frac{\Theta}{n} = K \frac{\Theta}{n}$$

Comme $\Theta = 1$ cycle/jour et $n \simeq 14$ cycles/jour (pour un satellite à 1000 km d'altitude) les résonances les plus courantes sont obtenues pour m multiple de 13, 14 ou 15. Mais il existe d'autres résonances très remarquables telles que celles des satellites de période 12h ou 24h, obtenues pour des valeurs beaucoup plus élevées de l'altitude.

Certains des résultats précédents ne sont pas valables lorsque l'excentricité est nulle ou presque nulle. Ceci est manifeste du point de vue algébrique puisqu'il existe des divisions par l'excentricité par exemple dans les équations de Lagrange. Pour éviter ces singularités il suffit de rempalcer le paramétrage de type polaire (e, ω) par un paramétrage de type rectangulaire ($C = e \cos \omega, S = e \sin \omega$) [13]. Mais en plus les hypothèses faites pour l'intégration (e constant et ω linéaire par rapport au temps) ne sont plus valables [6]. Une théorie précise du premier ordre est proposée dans [8] et [7] mais les calculs sont nettement plus compliqués que dans le cas classique.

1.3 Orbites particulières

Le potentiel terrestre étant la perturbation prépondérante, l'étude précédente permet de mettre en évidence quelques orbites aux propriétés remarquables. En pratique, ces propriétés sont légèrement altérées par l'existence d'autres perturbations mais pas de façon fondamentale.

1.3.1 Orbite polaire

C'est une orbite d'inclinaison $i = 90^\circ$. Dans ce cas $\sin \phi = \sin(\omega + v)$: c'est le seul type d'orbite qui permette de survoler toutes les latitudes. D'après la formule (1.26), le nœud d'une telle orbite ne subit pas de variations séculaires dues à J_2 . Cela reste vrai pour les autres zonaux. Son plan bouge donc très lentement dans l'espace.

1.3.2 Orbite héliosynchrone

C'est une orbite dont le plan tourne en moyenne à la même vitesse que le Soleil :

$$\dot{\Omega} = 2\pi \text{ rd/an}$$

L'expression approchée (1.26) de $\dot{\Omega}$ permet de calculer l'inclinaison d'une telle orbite en fonction de son excentricité et de son demi-grand axe :

$$-\frac{3}{2} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 n J_2 \frac{\cos I}{(1 - e^2)^2} = 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rd/s}$$

1.3.3 Orbite géostationnaire

C'est une orbite à très faible inclinaison et excentricité (circulaire équatoriale) et de période 23h 56mn 04s. Ainsi le satellite reste constamment au-dessus de la même région terrestre.

La troisième loi de Kepler permet de déterminer un demi-grand axe correspondant de 42164 km. Il faut cependant tenir compte de la perturbation due à l'aplatissement terrestre :

$$\mathcal{R}' = -J_2 \mu \frac{R_e^2}{r^3} P_2(\sin \phi) = \frac{1}{2} \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^3}$$

Comme la fonction de force s'écrit alors :

$$\mathcal{R} + \mathcal{R}' \simeq \frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \right)$$

on peut assimiler cet effet à une modification de r , donc du demi-grand axe :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{J_2}{2} \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \simeq 1.14 \cdot 10^{-5}$$

Il faut donc rajouter environ 500 m à la valeur obtenue par la troisième loi de Kepler.

Comme l'orbite ne peut être exactement circulaire, le satellite n'a pas une vitesse constante. Comme l'inclinaison ne peut être parfaitement nulle, la latitude du satellite oscille autour de 0. Le satellite parcourt donc des ellipses autour d'un point parfaitement géostationnaire (satellite équatorial moyen).

En raison de l'altitude élevée le reste du potentiel aurait des effets négligeables sans la présence de la résonance $\dot{M} = \dot{\theta}$.

La longitude terrestre du satellite est proche de $\lambda = \Omega + \omega + M - \theta$. D'après les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} + \dot{\theta} &= n + \frac{\eta}{na^2 e} (1 - \eta) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{1}{\eta ma^2 \sin I} (1 - \cos I) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}\end{aligned}$$

En tenant compte de la petitesse de e et I on obtient :

$$\dot{\lambda} = n - \Theta - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \quad (1.31)$$

On peut alors vérifier que

$$J(a, \lambda) = \frac{\mu}{2a} + \Theta \sqrt{\mu a} + \mathcal{R}(a, \lambda)$$

est une intégrale première du mouvement du satellite équatorial moyen. (Il s'agit de l'hamiltonien dans un repère tournant à vitesse Θ). En effet :

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= -\frac{\mu}{2a^2} \frac{da}{dt} + \frac{\Theta \sqrt{\mu}}{2\sqrt{a}} \frac{da}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \\ &= -n \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \Theta \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \left(n - \Theta - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Le satellite va donc suivre les courbes de niveau $J(a, \lambda) = Cte$.

- Si \mathcal{R} est indépendant de λ (harmoniques zonaux), les courbes de niveau sont des cercles $a = Cte$: le satellite va donc circuler. Pour éviter cette circulation il faut modifier (très peu) le demi-grand axe. Ceci généralise à tous les zonaux l'effet trouvé pour J_2 . Cependant comme $\sin \phi \simeq 0$, $P_l(\sin \phi)$ est nul lorsque l est impair : les zonaux de degré impair n'ont aucun effet.
- C'est la présence des harmoniques tesséraux qui va induire une trajectoire plus compliquée.

Les effets principaux sont obtenus pour le degré 2 :

$$\mathcal{R}_{22} = 3J_{22} \left(\frac{\mu}{a} \right) \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \cos 2(\lambda - \lambda_{22})$$

Avec

$$\begin{aligned}J_{22} &= \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2} = 1.8 \cdot 10^{-6} \\ \text{tg} \lambda_{22} &= \frac{S_{22}}{C_{22}} \Rightarrow \lambda_{22} = -14.9^\circ\end{aligned}$$

On a alors

$$J(a, \lambda) = \frac{\mu}{2a} + \Theta \sqrt{\mu a} + 3J_{22} \left(\frac{\mu}{a} \right) \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \cos 2(\lambda - \lambda_{22})$$

Les points d'équilibre sont obtenus pour :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= 0\end{aligned}$$

En particulier la seconde condition implique

$$\lambda = \lambda_{22} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ entier})$$

Pour $\lambda = \lambda_{22}$ et $\lambda = \lambda_{22} + \pi$ l'équilibre est instable (maximum de J) et il est stable pour $\lambda = \lambda_{22} + \pi/2$ et $\lambda = \lambda_{22} + 3\pi/2$ (minimum de J). Ces deux dernières positions sont donc les deux seuls points vraiment géostationnaires avec les perturbations prises en compte ici. En fait elles sont légèrement remises en cause par l'introduction des perturbations lunaires.

1.3.4 L'inclinaison critique

C'est une inclinaison pour laquelle le périégée est figé. Les variations principales de l'argument du périégée sont les variations séculaires dues à l'aplatissement terrestre et sont données par la relation (1.26). Elles s'annulent pour

$$\cos I = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \implies I = 63^\circ.4 \text{ ou } 116^\circ.6$$

Comme le rapport des vitesses au périégée et à l'apogée est

$$\frac{V_p}{V_a} = \frac{1+e}{1-e}$$

le satellite passera beaucoup de temps à l'apogée pour les excentricités élevées (par exemple $V_p/V_a = 5.7$ pour $e = 0.7$).

Comme $\sin \phi = \sin I \sin(\omega + v)$, cela signifie que le satellite passera beaucoup de temps autour de la latitude (constante) $\phi = \arcsin\left(\sin I \sin(\omega + \pi)\right)$.

Si de plus le satellite a une période de 24h, il se trouvera toujours à l'apogée pour la même longitude. Ce type d'orbite a donc une fonctionnalité qui se rapproche de celle des géostationnaires et permet d'atteindre des latitudes non nulles (mais comprises entre $-63^\circ.4$ et $+63^\circ.4$).

1.4 Conclusion

Le développement de Kaula est bien adapté au calcul des effets linéaires (c'est-à-dire linéaire par rapport à la perturbation : on ne calcule pas les couplages) pour un modèle dynamique élaboré : on peut calculer, dans un temps très raisonnable les principaux effets dus à un potentiel de degré et ordre 50 par exemple ; de plus le développement de Kaula peut-être étendu sans grande difficulté aux perturbations dues à un corps extérieur (Lune, Soleil, Planètes) et à la partie non statique du potentiel terrestre (marées terrestres et marées océaniques). Le même calcul, sans utiliser des fonctions spéciales (fonctions d'excentricité et

fonctions d'inclinaison) est incomparablement plus lourd ou même à la limite du possible. Cette théorie est bien adaptée pour établir par exemple le spectre des perturbations subies par un satellite donné ou encore pour détecter (mais pas calculer précisément) les résonances.

Cette théorie a aussi des limites :

- En précision : cette théorie linéaire n'est pas très adaptée pour le calcul précis des trajectoires, surtout à long terme. Pour ce faire il faut utiliser des techniques plus sophistiquées telles que les méthodes de transformations canoniques [5] ; mais les théories sont alors bien plus lourdes. Dans le cas de prédictions prenant en compte un ensemble très large de perturbations (freinage atmosphériques, forces radiatives...), l'intégration numérique reste le moyen le plus précis du moins à court et moyen terme (quelques années).
- En généralité : la méthode n'est pas adaptée aux excentricités très faibles ($e < 10^{-3}$) ou fortes ($e > 10^{-1}$). Le problème des excentricités fortes se pose assez rarement en géodésie spatiale. Au contraire les très faibles excentricités sont courantes. Dans ce cas, soit on utilise tout de même la théorie ci-dessus en étant conscient de sa pertinence limitée, soit on utilise une simplification plus radicale en construisant une théorie spécifique (et donc limitée) aux excentricités proches de 0 ; on peut par exemple utiliser les équations dites de Hill permettant de calculer directement les variations des coordonnées rectangulaires en repère orbital.
- Qualitativement : on obtient les variations des éléments orbitaux ; or, dans certain cas il est plus pertinent de calculer les variations des coordonnées rectangulaires (position et vitesse, en particulier en repère orbital) qui sont plus simples à relier aux mesures (par exemple altitude du satellite mesurée en altimétrie). Une solution possible consiste alors à utiliser l'algèbre de base du problème des deux corps pour exprimer les coordonnées en fonction des éléments puis à linéariser pour passer aux variations. Mais si on se limite à l'ordre 0 en excentricité les équations de Hill permettent d'arriver plus rapidement au résultat.

i	m	p	$F_{imp}(i)$
2	0	0	$-3 \sin^2 i/8$
2	0	1	$3 \sin^2 i/4 - 1/2$
2	0	2	$-3 \sin^2 i/8$
2	1	0	$3 \sin i(1 + \cos i)/4$
2	1	1	$-3 \sin i \cos i/2$
2	1	2	$-3 \sin i(1 - \cos i)/4$
2	2	0	$3(1 + \cos i)^2/4$
2	2	1	$3 \sin^2 i/2$
2	2	2	$3(1 - \cos i)^2/4$
3	0	0	$-5 \sin^3 i/16$
3	0	1	$15 \sin^3 i/16 - 3 \sin i/4$
3	0	2	$-15 \sin^3 i/16 + 3 \sin i/4$
3	0	3	$5 \sin^3 i/16$
3	1	0	$-15 \sin^2 i(1 + \cos i)/16$
3	1	1	$15 \sin^2 i(1 + 3 \cos i)/16 - 3(1 + \cos i)/4$
3	1	2	$15 \sin^2 i(1 - 3 \cos i)/16 - 3(1 - \cos i)/4$
3	1	3	$-15 \sin^2 i(1 - \cos i)/16$
3	2	0	$15 \sin i(1 + \cos i)^2/8$
3	2	1	$15 \sin i(1 - 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	2	$-15 \sin i(1 + 2 \cos i - 3 \cos^2 i)/8$
3	2	3	$-15 \sin i(1 - \cos i)^2/8$
3	3	0	$15(1 + \cos i)^3/8$
3	3	1	$45 \sin^2 i(1 + \cos i)/8$
3	3	2	$45 \sin^2 i(1 - \cos i)/8$
3	3	3	$15(1 - \cos i)^3/8$
4	0	0	$35 \sin^4 i/128$
4	0	1	$-35 \sin^4 i/32 + 15 \sin^2 i/16$
4	0	2	$(105/64) \sin^4 i - (15/8) \sin^2 i + 3/8$
4	0	3	$-(35/32) \sin^4 i + (15/16) \sin^2 i$
4	0	4	$(35/128) \sin^4 i$
4	1	0	$-(35/32) \sin^3 i(1 + \cos i)$
4	1	1	$(35/16) \sin^3 i(1 + 2 \cos i) - (15/8)(1 + \cos i) \sin i$
4	1	2	$\cos i(15 \sin i/4 - 105 \sin^3 i/16)$
4	1	3	$-(35/16) \sin^3 i(1 - 2 \cos i) + (15/8) \sin i(1 - \cos i)$
4	1	4	$(35/32) \sin^3 i(1 - \cos i)$
4	2	0	$-(105/32) \sin^2 i(1 + \cos i)^2$
4	2	1	$(105/8) \sin^2 i \cos i(1 + \cos i) - (15/8)(1 + \cos i)^2$
4	2	2	$(105/16) \sin^2 i(1 - 3 \cos^2 i) - (15/4) \sin^2 i$
4	2	3	$-(105/8) \sin^2 i \cos i(1 - \cos i) - (15/8)(1 - \cos i)^2$
4	2	4	$-(105/32) \sin^2 i(1 - \cos i)^2$
4	3	0	$(105/16) \sin i(1 + \cos i)^3$
4	3	1	$(105/8) \sin i(1 - 3 \cos^2 i - 2 \cos^3 i)$
4	3	2	$-(315/8) \sin^3 i \cos i$
4	3	3	$-(105/8) \sin i(1 - 3 \cos^2 i + 2 \cos^3 i)$
4	3	4	$-(105/16) \sin i(1 - \cos i)^3$
4	4	0	$(105/16)(1 + \cos i)^4$
4	4	1	$(105/4) \sin^2 i(1 + \cos i)^2$
4	4	2	$(315/8) \sin^4 i$
4	4	3	$(105/4) \sin^2 i(1 - \cos i)^2$
4	4	4	$(105/16)(1 - \cos i)^4$

FIG. 1.2 – Fonctions d'inclinaison

l	p	q	l	p	q	$G_{lpq}(e)$
2	0	-2	2	2	2	0
2	0	-1	2	2	1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$
2	0	0	2	2	0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$
2	0	1	2	2	-1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$
2	0	2	2	2	-2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$
2	1	-2	2	1	2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$
2	1	-1	2	1	1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$
			2	1	0	$(1 - e^2)^{-3/2}$
3	0	-2	3	3	2	$e^2/8 + e^4/48 + \dots$
3	0	-1	3	3	1	$-e + 5e^3/4 + \dots$
3	0	0	3	3	0	$1 - 6e^2 + 423e^4/64 + \dots$
3	0	1	3	3	-1	$5e - 22e^3 + \dots$
3	0	2	3	3	-2	$127e^2/8 - 3065e^4/48 + \dots$
3	1	-2	3	2	2	$11e^2/8 + 49e^4/16 + \dots$
3	1	-1	3	2	1	$e(1 - e^2)^{-5/2}$
3	1	0	3	2	0	$1 + 2e^2 + 239e^4/64 + \dots$
3	1	1	3	2	-1	$3e + 11e^3/4 + \dots$
3	1	2	3	2	-2	$53e^2/8 + 39e^4/16 + \dots$
4	0	-2	4	4	2	$e^2/2 - e^4/3 + \dots$
4	0	-1	4	4	1	$-3e/2 + 75e^3/16 + \dots$
4	0	0	4	4	0	$1 - 11e^2 + 199e^4/8 + \dots$
4	0	1	4	4	-1	$13e/2 - 765e^3/16 + \dots$
4	0	2	4	4	-2	$51e^2/2 - 321e^4/2 + \dots$
4	1	-2	4	3	2	$(3e^2/4)(1 - e^2)^{-7/2}$
4	1	-1	4	3	1	$e/2 + 33e^3/16 + \dots$
4	1	0	4	3	0	$1 + e^2 + 65e^4/16 + \dots$
4	1	1	4	3	-1	$9e/2 - 3e^3/16 + \dots$
4	1	2	4	3	-2	$53e^2/4 - 179e^4/24 + \dots$
4	2	-2	4	2	2	$5e^2 + 155e^4/12 + \dots$
4	2	-1	4	2	1	$5e/2 + 135e^3/16 + \dots$
			4	2	0	$(1 + 3e^2/2)(1 - e^2)^{-7/2}$

FIG. 1.3 – Fonctions d'excentricité

Chapitre 2

Les équations de Hill- Formulation-Intégration.

2.1 Les équations de Hill

2.1.1 Principe

Les équations dites de Hill [11] expriment les variations des coordonnées d'un satellite orbitant un corps central

- en repère tournant (repère quasi-orbital),
- par linéarisation par rapport à une orbite de référence représentant un mouvement circulaire et uniforme.

Il est important de garder en mémoire que ce ne sont pas des équations exactes mais linéarisées : si l'orbite de référence est trop éloignée de l'orbite réelle, les équations ne sont plus une bonne approximation. Nous verrons que les équations ne sont valables que pour des orbites quasi-circulaires et sur le court terme.

2.1.2 Equations du mouvement en repère inertiel et en repère tournant

L'équation dynamique en repère inertiel décrivant le mouvement d'un satellite S de position ρ est

$$\ddot{\rho} = -\mu \frac{\rho}{\rho^3} + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

où \mathbf{F} est une perturbation par rapport au terme principal relatif à la partie sphérique de la gravité.

En repère tournant avec une vitesse de rotation \mathbf{n} constante, il faut prendre en compte l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} + 2\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \\ \ddot{\mathbf{r}} + 2\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - n^2\mathbf{r} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ρ et \mathbf{r} désignent bien entendu le même vecteur mais on a utilisé des notations distinctes pour souligner que les équations sont écrites dans des repères différents.

2.1.3 Mouvement par rapport à une orbite de référence

On prend comme mouvement de référence celui d'un satellite fictif S_0 en orbite circulaire plane non perturbée ; l'équation du mouvement associée en repère inertiel est :

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_0 = -\mu \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\rho_0^3} \quad (2.3)$$

La fréquence orbitale n_0 est liée au rayon de l'orbite par la troisième loi de Kepler :

$$n_0^2 = \frac{\mu}{\rho_0^3} \quad (2.4)$$

L'équation en repère tournant est obtenue à partir de (2.2) en supprimant la perturbation :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + 2\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{r}}_0 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{n} - n^2 \mathbf{r}_0 = -\mu \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \quad (2.5)$$

On fera usage des vecteurs unitaires 2.1 ($\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0}, \mathbf{e}_{\mathbf{T}_0}, \mathbf{e}_{\mathbf{N}_0}$) tels que :

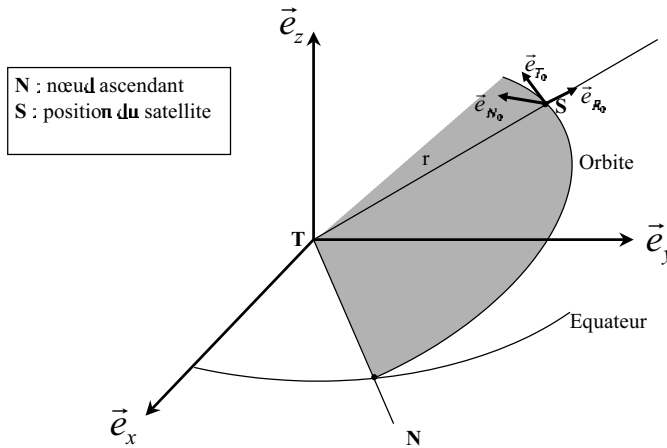


FIG. 2.1 – Repère orbital

- $\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} = \mathbf{r}_0/r_0$: vecteur radial,
 - $\mathbf{e}_{\mathbf{N}_0}$: vecteur normal à l'orbite,
 - $\mathbf{e}_{\mathbf{T}_0} = \mathbf{e}_{\mathbf{N}_0} \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{R}_0}$: vecteur transverse (ou along-track).
- Comme $r_0 = \rho_0$ la troisième loi de Kepler (2.4) devient

$$n_0^2 = \frac{\mu}{r_0^3} \quad (2.6)$$

On étudie le mouvement de S par rapport à S_0 dans le repère tournant :

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (2.7)$$

L'accélération correspondant à $\boldsymbol{\delta}$ s'obtient par différence de (2.2) et (2.5) :

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\delta}} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta})\mathbf{n} - n^2\boldsymbol{\delta} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \mathbf{F} \quad (2.8)$$

On linéarise :

$$\begin{aligned} -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mu\frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} &\simeq -\mu\frac{\boldsymbol{\delta}}{r_0^3} + 3\mu\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\delta}}{r_0^5}\mathbf{r}_0 \\ &\simeq -n_0\boldsymbol{\delta} + 3n_0(\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} \cdot \boldsymbol{\delta})\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} \end{aligned} \quad \text{d'après (2.6)} \quad (2.9)$$

L'équation du mouvement relatif s'écrit maintenant

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\delta}} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta})\mathbf{n} - n^2\boldsymbol{\delta} = -n_0\boldsymbol{\delta} + 3n_0(\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} \cdot \boldsymbol{\delta})\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} + \mathbf{F} \quad (2.10)$$

Jusqu'ici, le vecteur rotation \mathbf{n} n'a pas été fixé ; en observant l'équation (2.10), il est plus simple de choisir $n = n_0$. Par suite il est logique de choisir l'axe de rotation normal au plan de l'orbite de référence :

$$\mathbf{n} = n_0\mathbf{e}_{\mathbf{N}_0} \quad (2.11)$$

On décompose $\boldsymbol{\delta}$ et la perturbation \mathbf{F} sur la base $(\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0}, \mathbf{e}_{\mathbf{T}_0}, \mathbf{e}_{\mathbf{N}_0})$:

$$\boldsymbol{\delta} = \delta_R\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} + \delta_T\mathbf{e}_{\mathbf{T}_0} + \delta_N\mathbf{e}_{\mathbf{N}_0} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F} = F_R\mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} + F_T\mathbf{e}_{\mathbf{T}_0} + F_N\mathbf{e}_{\mathbf{N}_0} \quad (2.13)$$

Les équations du mouvement perturbé prennent la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_R &= 3n_0^2\delta_R + 2n_0\dot{\delta}_T + F_R \\ \ddot{\delta}_T &= -2n_0\dot{\delta}_R + F_T \\ \ddot{\delta}_N &= -n_0^2\delta_N + F_N \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ces équations sont souvent appelées équations de Hill car elles sont formellement identiques aux équations du problème circulaire plan utilisées par G. Hill pour sa théorie de la Lune [5]. Il faut cependant remarquer qu'elles obéissent à une logique différente : dans le cas de la Lune on intègre dans un repère tournant avec le Soleil (et non pas avec une Lune moyenne de référence) et on n'utilise pas d'orbite de référence ; des termes équivalents à ceux du membre de droite de l'équation (2.9) viennent du développement de la perturbation solaire et non de la perturbation terrestre.

Ces équations donnent les variations de position en coordonnées rectangulaires par rapport à l'orbite de référence selon les directions radiales, transverses et normales ; plus exactement ces directions se rapportent à l'orbite circulaire de référence qui doit encore une fois être assez proche de l'orbite réelle pour une interprétation correcte.

Les équations de Hill ont de nombreux avantages :

- Elles sont simples et leur intégration (sous certaines conditions) est également simple,
- Leur intégration formelle (comme nous allons le voir) éclaire bien la structure du mouvement orbital perturbé,

- Elles donnent les variations directement en repère orbital local, ce qui est souvent le plus intéressant,
- L'équation pour la direction normale est indépendante des deux autres.

Leur principal inconvénient est leur manque de généralité : elles ne s'appliquent qu'aux orbites quasi-circulaires (pour rester proche de l'orbite de référence). Mais la très grande majorité des orbites utilisées en géodésie spatiale entrent dans cette catégorie.

Le problème du rôle de la précession du plan de l'orbite ainsi que des perturbations séculaires sur le périégée et l'anomalie moyenne est un peu plus subtile. En principe, ces variations séculaires devraient faire diverger l'orbite réelle de l'orbite circulaire fixe de référence. D'un autre côté, la linéarisation (2.9) ne fait pas appel au plan orbital ou à la position du périégée. Les approximations sont ailleurs :

- Le passage en repère tournant utilise une vitesse angulaire fixe normale à l'orbite de référence (2.11) ; ceci exclu la précession et par conséquent les équations sont implicitement décomposées selon les axes d'un repère sans précession qui divergera effectivement du repère orbital effectif.
- Les équations prennent une forme aussi simple grâce à l'utilisation de la troisième loi de Kepler (2.6) qui lie le rayon de l'orbite à la fréquence. On peut toujours choisir, dans les équations finales (2.14), une fréquence orbitale tenant compte des perturbations séculaires mais ceci induira implicitement une projection dans le repère orbital képlérien circulaire de rayon correspondant.

En résumé les équations de Hill ne donnent pas des résultats valables sur des périodes durant lesquelles les perturbations séculaires deviennent sensibles.

2.2 Intégration des équations de Hill

2.2.1 Solution du système homogène

Le système homogène décrit l'évolution de la position relative δ en l'absence de perturbation ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), à partir de conditions initiales $\delta(0), \dot{\delta}0$:

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_R &= 3n_0^2\delta_R + 2n_0\dot{\delta}_T \\ \ddot{\delta}_T &= -2n_0\dot{\delta}_R \\ \ddot{\delta}_N &= -n_0^2\delta_N\end{aligned}\tag{2.15}$$

On obtient la solution :

$$\begin{aligned}\delta_R(t) &= \frac{\dot{\delta}_R(0)}{n_0} \sin n_0 t - \left(2 \frac{\dot{\delta}_T(0)}{n_0} + 3\delta_R(0) \right) \cos n_0 t \\ &\quad + \left(2 \frac{\dot{\delta}_T(0)}{n_0} + 4\delta_R(0) \right) \\ \delta_T(t) &= 2 \frac{\dot{\delta}_R(0)}{n_0} \cos n_0 t + \left(4 \frac{\dot{\delta}_T(0)}{n_0} + 6\delta_R(0) \right) \sin n_0 t \\ &\quad + \left(-2 \frac{\dot{\delta}_R(0)}{n_0} + \delta_T(0) \right) - \left(3\dot{\delta}_T(0) + 6n_0\delta_R(0) \right) t \\ \delta_N(t) &= \delta_N(0) \cos n_0 t + \frac{\dot{\delta}_N(0)}{n_0} \sin n_0 t\end{aligned}\tag{2.16}$$

On note que, en plus d'oscillations à la fréquence orbitale, on trouve une dérive séculaire de la composante transverse dès que la distance radiale ou la vitesse tangentielle de départ n'est pas nulle. Ceci n'est qu'une conséquence de la divergence de deux satellites placés sur des orbites d'énergies différentes.

2.2.2 Réponse à une perturbation périodique

Comme le montre le développement de Kaula, la perturbation due au potentiel de gravité terrestre peut être représentée par une somme de termes périodiques ; cela est également vrai pour les autres perturbations d'origine gravitationnelle (marées, corps extérieur), et partiellement vrai pour les perturbations d'origine non gravitationnelle (freinage atmosphérique, pression de radiation...). La solution du système (2.14) pour une perturbation périodique joue donc un rôle fondamental. On considère une perturbation de la forme

$$\begin{aligned} F_R &= A_R \cos ft + B_R \sin ft \\ F_T &= A_T \cos ft + B_T \sin ft \\ F_N &= A_N \cos ft + B_N \sin ft \end{aligned} \quad (2.17)$$

où les amplitudes A_α et B_α et la fréquence f sont constantes. Nous nous intéressons à la solution du système à conditions initiales nulles. La solution (2.16) du système homogène pourra être ajoutée si nécessaire. La solution a la structure suivante :

$$\begin{aligned} \delta_R(t) &= \frac{n_0}{f(n_0^2 - f^2)} \left(R_0 + R_{Cf} \cos ft + R_{Sf} \sin ft \right. \\ &\quad \left. + R_{Cn_0} \cos n_0t + R_{Sn_0} \sin n_0t \right) \\ \delta_T(t) &= \frac{n_0^2}{f^2(n_0^2 - f^2)} \left(T_0 + T_t t + T_{Cf} \cos ft + T_{Sf} \sin ft \right. \\ &\quad \left. + T_{Cn_0} \cos n_0t + T_{Sn_0} \sin n_0t \right) \\ \delta_N(t) &= \frac{1}{n_0^2 - f^2} (N_{Cf} \cos ft + N_{Sf} \sin ft + N_{Cn_0} \cos n_0t + N_{Sn_0} \sin n_0t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

où les coefficients sont liés aux amplitudes d'excitation par :

$$\begin{aligned}
R_0 &= 2 \left(1 - \frac{f^2}{n_0^2} \right) B_T \\
R_{Cf} &= \frac{f}{n_0} A_R - 2B_T \\
R_{Sf} &= \frac{f}{n_0} B_R + 2A_T \\
R_{Cn_0} &= 2 \frac{f^2}{n_0^2} B_T - \frac{f}{n_0} A_R \\
R_{Sn_0} &= -\frac{f^2}{n_0^2} B_R - 2 \frac{f}{n_0} A_T \\
T_0 &= \left(\frac{f^2}{n_0^2} - 1 \right) \left(3A_T + 2 \frac{f}{n_0} B_R \right) \\
T_t &= 3f \left(\frac{f^2}{n_0^2} - 1 \right) B_T \\
T_{Cf} &= \left(3 + \frac{f^2}{n_0^2} \right) A_T + 2 \frac{f}{n_0} B_R \\
T_{Sf} &= \left(3 + \frac{f^2}{n_0^2} \right) B_T - 2 \frac{f}{n_0} A_R \\
T_{Cn_0} &= -2 \frac{f^3}{n_0^3} B_R - 4 \frac{f^2}{n_0^2} A_T \\
T_{Sn_0} &= -4 \frac{f^3}{n_0^3} B_T + 2 \frac{f^2}{n_0^2} A_R \\
N_{Cf} &= A_N \\
N_{Sf} &= B_N \\
N_{Cn_0} &= -A_N \\
N_{Sn_0} &= -\frac{f}{n_0} B_N
\end{aligned} \tag{2.19}$$

La solution (2.18) montre que la réponse à une perturbation périodique inclut non seulement une variation périodique de même période mais aussi une variation périodique à la fréquence fondamentale n_0 . Cette seconde variation, commune à toutes les perturbations ne permet pas de décorréler différentes perturbations (en particulier différents termes du potentiel). En fait

il existe un choix de conditions initiales permettant d'éliminer tous les termes autres que les termes périodiques de fréquence f . Les variations non "absorbées" par les conditions initiales seront donc :

$$\begin{aligned}
\delta_R(t) &= \frac{1}{n_0^2 \varepsilon_f (1 - \varepsilon_f^2)} \left[(\varepsilon_f A_R - 2B_T) \cos ft + (\varepsilon_f B_R + 2A_T) \sin ft \right] \\
\delta_T(t) &= \frac{1}{n_0^2 \varepsilon_f^2 (1 - \varepsilon_f^2)} \left[\left((3 + \varepsilon_f^2) A_T + 2\varepsilon_f B_R \right) \cos ft + \left((3 + \varepsilon_f^2) B_T - 2\varepsilon_f A_R \right) \sin ft \right] \\
\delta_N(t) &= \frac{1}{n_0^2 (1 - \varepsilon_f^2)} \left[A_N \cos ft + B_N \sin ft \right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où on a posé

$$\varepsilon_f = \frac{f}{n_0} \tag{2.21}$$

La solution (2.18) n'est pas valide lorsque la fréquence excitatrice f est nulle ou bien égale à la fréquence fondamentale n_0 .

Pour une perturbation de fréquence nulle, donc constante

$$\mathbf{F} = C_R \mathbf{e}_{\mathbf{R}_0} + C_T \mathbf{e}_{\mathbf{T}_0} + C_N \mathbf{e}_{\mathbf{N}_0} \tag{2.22}$$

où C_R , C_T et C_N sont constants, la réponse est :

$$\begin{aligned}
\delta_R(t) &= \frac{1}{n_0^2} \left(C_R (1 - \cos n_0 t) + 2C_T (n_0 t - \sin n_0 t) \right) \\
\delta_T(t) &= \frac{1}{n_0^2} \left(2C_R \sin n_0 t + 4C_T (1 - \cos n_0 t) \right) - 2 \frac{C_R}{n_0} t - \frac{3}{2} C_T t^2 \\
\delta_N(t) &= \frac{C_N}{n_0^2} (1 - \cos n_0 t)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

On voit apparaître en particulier des variations quadratiques par rapport au temps sur la composante transverse. Ici encore, les conditions initiales peuvent "absorber" certains termes pour ne laisser visibles que les effets suivants :

$$\begin{aligned}
\delta_R(t) &= \frac{1}{n_0^2} \left(C_R + 2C_T n_0 t \right) \\
\delta_T(t) &= -\frac{3}{2} \frac{1}{n_0^2} C_T t^2 \\
\delta_N(t) &= \frac{C_N}{n_0^2}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour une perturbation à la fréquence fondamentale $f = n_0$ (cas de résonance), on a :

$$\begin{aligned}
\delta_R(t) &= \frac{1}{2n_0} \left((A_R - 2B_T)t \sin n_0 t - (2A_T + 2B_R)t \cos n_0 t \right) \\
&\quad + \frac{1}{2n_0^2} \left(4B_T(1 - \cos n_0 t) + (2A_T + B_R) \sin n_0 t \right) \\
\delta_T(t) &= \frac{1}{n_0} \left((2A_T + B_R)t \sin n_0 t + (A_R - 2B_T)t \cos n_0 t \right) \\
&\quad + \frac{1}{n_0^2} \left((3A_T + 2B_R)(\cos n_0 t - 1) + (5B_T - A_R) \sin n_0 t \right) \\
&\quad - \frac{3B_T}{n_0} t \\
\delta_N(t) &= \frac{A_N}{2n_0} t \sin n_0 t + \frac{B_N}{2n_0^2} (\sin n_0 t - n_0 t \cos n_0 t)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Certains termes périodiques ont une amplitude croissant linéairement avec le temps. Ce type de terme est parfois appelé terme de Poisson en mécanique céleste. Ils impliquent généralement la divergence de la solution à long terme.

Le choix de conditions initiales particulières permet de simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}
\delta_R(t) &= -\frac{t}{2n_0} \left((B_R + 2A_T) \cos n_0 t - (A_R - 2B_T) \sin n_0 t \right) \\
\delta_T(t) &= \frac{t}{n_0} \left((A_R - 2B_T) \cos n_0 t + (B_R + 2A_T) \sin n_0 t \right) \\
&\quad + \frac{1}{n_0^2} \left((A_T + B_R) \cos n_0 t + (B_T - A_R) \sin n_0 t \right) \\
\delta_N(t) &= \frac{t}{2n_0} \left(A_N \sin n_0 t - B_N \cos n_0 t \right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.2.3 Forme complexe

En introduisant les variables complexes

$$\delta_P = \delta_R + i\delta_T \tag{2.27}$$

$$F_P = F_R + iF_T \tag{2.28}$$

les équations de Hill (2.14) prennent la forme :

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta}_P &= \frac{3}{2}n_0^2(\delta_P + \delta_P^*) - 2n_0i\dot{\delta}_P + F_P \\
\ddot{\delta}_N &= -n_0^2\delta_N + F_N
\end{aligned} \tag{2.29}$$

La réponse visible (c'est-à-dire non absorbée par les conditions initiales) à une perturbation périodique

$$F_P = A_P \exp(ift) \tag{2.30}$$

$$F_N = A_N \exp(ift) \tag{2.31}$$

est la suivante :

$$\delta_P = \frac{1}{n_0^2 \varepsilon_f^2 (1 - \varepsilon_f^2)} \left[\varepsilon_f (\varepsilon_f - 2) A_P + \frac{3}{2} (A_P - A_P^*) \right] \exp(ift) \quad (2.32)$$

$$\delta_N = \frac{1}{n_0^2 (1 - \varepsilon_f^2)} A_N \exp(ift) \quad (2.33)$$

où ε_f est la fréquence excitatrice exprimée en fondamentale :

$$\varepsilon_f = \frac{f}{n_0} \quad (2.34)$$

Chapitre 3

Application des équations de Hill au calcul des effets du potentiel de gravité.

3.1 Perturbation due au potentiel terrestre

L'accélération perturbatrice est obtenue en prenant le gradient du potentiel perturbateur V par rapport aux coordonnées en repère orbital. Si l'axe x' est dans la direction radiale, l'axe y' dans la direction transverse et l'axe z' dans la direction normale :

$$F_R = \frac{\partial V}{\partial x'} \quad (3.1)$$

$$F_T = \frac{\partial V}{\partial y'} \quad (3.2)$$

$$F_N = \frac{\partial V}{\partial z'} \quad (3.3)$$

Pour calculer ces expressions il faut :

- Exprimer le potentiel terrestre en fonction des coordonnées en repère orbital,
- Exprimer les dérivées du potentiel par rapport aux coordonnées rectangulaires.

3.1.1 Expression du potentiel en repère terrestre

L'expression classique du potentiel perturbateur (c'est-à-dire sans le terme sphérique de degré 0)

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{l,m}(\sin \phi) [C_{l,m} \cos m\lambda + S_{l,m} \sin m\lambda] \quad (3.4)$$

peut-être écrite avantageusement en utilisant des variables complexes

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \bar{K}_{l,m} \bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda) \quad (3.5)$$

où $\bar{Y}_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques normalisés :

$$\bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda) = N_{l,m} P_{l,m}(\sin \phi) \exp im\lambda \quad (3.6)$$

$N_{l,m}$ étant un facteur de normalisation défini par

$$N_{l,m} = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Noter que $N_{l,m}$ est différent du facteur de normalisation $\beta_{l,m}$ utilisé pour les fonctions de Legendre $P_{l,m}$:

$$\beta_{l,m} = \left[\frac{(2-\delta_{0m})(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

On a, comme conséquence des propriétés des fonctions associées de Legendre et de la définition des coefficients $N_{l,m}$:

$$\bar{Y}_{l,-m}(\phi, \lambda) = (-1)^m \bar{Y}_{l,m}^*(\phi, \lambda) \quad (3.9)$$

Les coefficients complexes $\bar{K}_{l,m}$ sont définis à partir des coefficients (dénormés) du potentiel par :

$$\bar{K}_{l,m} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\delta_{0,m}) \frac{C_{l,m} - iS_{l,m}}{N_{l,m}} & , m \geq 0 \\ (-1)^m \bar{K}_{l,-m}^* & , m < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

3.1.2 Dérivées du potentiel

Les dérivées, par rapport aux coordonnées rectangulaires, du potentiel donné sous la forme (3.5) s'expriment de manière très simple ([15], [14]) :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\mu}{ra_e} \sum_{l=2}^{L+1} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \bar{K}_{l,k}^x \bar{Y}_{l,k}(\phi, \lambda) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\mu}{ra_e} \sum_{l=2}^{L+1} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \bar{K}_{l,k}^y \bar{Y}_{l,k}(\phi, \lambda) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\mu}{ra_e} \sum_{l=2}^{L+1} \sum_{m=-l+1}^{l-1} \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \bar{K}_{l,k}^z \bar{Y}_{l,k}(\phi, \lambda) \quad (3.13)$$

Avec les nouveaux coefficients¹ :

$$\bar{K}_{l,k}^x = \frac{1}{2}(a_{l,-k}K_{l-1,k-1} - a_{l,k}K_{l-1,k+1}) \quad (3.14)$$

$$\bar{K}_{l,k}^y = -\frac{I}{2}(a_{l,-k}K_{l-1,k-1} + a_{l,k}K_{l-1,k+1}) \quad (3.15)$$

$$\bar{K}_{l,k}^z = -b_{l,k}K_{l-1,k} \quad (3.16)$$

où $a_{l,k}$ et $b_{l,k}$ sont des facteurs numériques définis par :

$$a_{l,k} = \sqrt{\frac{(2l-1)(l-k)(l-k-1)}{2l+1}} \quad (3.17)$$

$$b_{l,k}^{(1)} = \sqrt{\frac{(2l-1)(l+k)(l-k)}{2l+1}} \quad (3.18)$$

¹On a ici une différence de signe par rapport à [14] due à un facteur $(-1)^k$ dans la définition des coefficients utilisés

Ainsi les dérivées ont une forme similaire à celle du potentiel lui-même, hormis des limites de sommation un peu différentes : la sommation sur l commence à 2 au lieu de 1 et, pour la dérivé par rapport à z , on a $|k| \leq l - 1$ au lieu de $|k| \leq l$.

3.1.3 Expression du potentiel en repère orbital

On passe du repère terrestre au repère lié au satellite au moyen de 3 rotations successives :

1. Une rotation d'angle $\omega_e = \Omega - \theta$ autour de z , Ω étant l'ascension droite du nœud ascendant et θ le temps sidéral.
2. Une rotation d'angle I autour de x , I étant l'inclinaison de l'orbite.
3. Une rotation d'angle $\omega_0 = \omega + f$, ω étant l'argument du périégée et f l'anomalie vraie.

Il existe une relation linéaire entre les harmoniques sphériques en repère terrestre et les harmoniques sphériques en repère orbital obtenus par compositions de ces trois rotations [17] :

$$\bar{Y}_{l,m}(\phi, \lambda) = \sum_{k=-l}^l w_{l,m,k}(I) \exp i(k\omega_0 + m\omega_e) \bar{Y}_{l,k}(\phi', \lambda') \quad (3.19)$$

où ϕ' et λ' sont les coordonnées sphériques en repère orbital : ϕ' est la latitude comptée à partir du plan orbital et λ' la longitude mesurée le long de l'orbite à partir du méridien passant par la position courante du satellite. Bien entendu, pour le satellite lui-même on a $\phi' = \lambda' = 0$, mais cette particularité ne sera exploitée que plus loin.

Le potentiel a pour expression dans le nouveau repère :

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{l=1}^L \sum_{k=-l}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \bar{K}'_{l,k} \bar{Y}_{l,k}(\phi', \lambda') \quad (3.20)$$

avec les nouveaux coefficients

$$\bar{K}'_{l,k} = \sum_{m=-l}^l w_{l,m,k}(I) \exp i\psi_{k,m} \bar{K}_{l,m} \quad (3.21)$$

où on a posé

$$\psi_{k,m} = k\omega_0 + m\omega_e + (k - m)\frac{\pi}{2} \quad (3.22)$$

Noter la phase $(k - m)\frac{\pi}{2}$ ² que beaucoup d'auteurs, après Kaula, convertissent en un facteur multiplicatif i^{k-m} de l'amplitude. Cette conversion nécessite de distinguer deux cas selon la parité de $(k - m)$ lors du passage en réel ; c'est pourquoi nous préférons garder la phase sous forme angulaire.

²Cette phase est due au fait que les formules de rotation des harmoniques sphériques dues à Wigner s'appliquent à une séquence d'Euler 3-2-3. Comme nous sommes en présence d'une séquence 3-1-3, nous la transformons en séquence 3-2-3 en retranchant $\pi/2$ à la première rotation et en ajoutant $\pi/2$ à la troisième rotation.

Les coefficients $w_{l,m,k}(I)$ ont pour expression [17] :

$$\begin{aligned}
w_{l,m,k}(I) &= \left[\frac{(l+k)!(l-k)!}{(l+m)!(l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \sum_{t=t_1}^{t_2} (-1)^t \binom{l+m}{t} \binom{l-m}{l-k-t} c^{2l-k+m-2t} s^{k-m+2t} \\
c &= \cos \frac{I}{2} \\
s &= \sin \frac{I}{2} \\
t_1 &= \max(0, m-k) \\
t_2 &= \min(l-k, l+m)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

On a la propriété utile :

$$w_{l,-m,-k}(I) = (-1)^{m-k} w_{l,m,k}(I) \tag{3.24}$$

Les relations (3.6), (3.9), (3.10) et (3.24) permettent encore d'écrire, en utilisant $\phi' = \lambda' = 0$:

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \sum_{m=-l}^l \sum_{k=-l}^l \mathcal{F}_{l,m}^k(I) \left[C_{l,m} \cos \psi_{k,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k,m} \right] \tag{3.25}$$

Où on a introduit les fonctions de l'inclinaison :

$$\mathcal{F}_{l,m}^k(I) = \frac{N_{l,k}}{N_{l,m}} w_{l,m,k}(I) P_{l,k}(0) \tag{3.26}$$

Avec

$$P_{l,k}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{l-k}{2}}}{2^l} \frac{(l-k)!}{\binom{l-k}{2} \binom{l+k}{2}}, & l-k \text{ pair} \\ 0, & l-k \text{ impair} \end{cases} \tag{3.27}$$

On peut utiliser le fait que $P_{l,k}(0)$ n'est non nul que pour $(l-k)$ pair ; pour $(l-k)$ pair on effectue le changement d'indice $l-k = 2p$ pour obtenir :

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \sum_{m=-l}^l \sum_{p=0}^l \mathcal{F}_{l,m,p}(I) \left[C_{l,m} \cos \psi_{l-2p,m} + S_{l,m} \sin \psi_{l-2p,m} \right] \tag{3.28}$$

Avec

$$\mathcal{F}_{l,m,p}(I) = \mathcal{F}_{l,m}^{l-2p}(I) \tag{3.29}$$

Les fonctions $\mathcal{F}_{l,m,p}(I)$ diffèrent des fonctions (non normalisées) $F_{l,m,p}(I)$ de Kaula par un facteur $(-1)^{p+E[\frac{l-m+1}{2}]}$ dû au fait que nous avons inclu la phase $(l-m-2p)\frac{\pi}{2}$ dans l'angle $\psi_{l-2p,m}$.

3.1.4 Accélération perturbatrice en repère orbital

D'après (3.1) il s'agit d'exprimer les dérivées de V par rapport aux coordonnées rectangulaires x' , y' et z' . On reprend les formules (3.11) en faisant le changement d'indice $(l-1) \rightarrow l$:

$$F_R = \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \sum_{k=-l-1}^{l+1} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \bar{K}_{l+1,k}^R \bar{Y}_{l+1,k}(\phi', \lambda') \quad (3.30)$$

$$F_T = \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \sum_{k=-l-1}^{l+1} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \bar{K}_{l+1,k}^T \bar{Y}_{l+1,k}(\phi', \lambda') \quad (3.31)$$

$$F_N = \frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \sum_{k=-l}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \bar{K}_{l+1,k}^N \bar{Y}_{l+1,k}(\phi', \lambda') \quad (3.32)$$

Les nouveaux coefficients $\bar{K}_{l,k}^R, \bar{K}_{l,k}^T, \bar{K}_{l,k}^N$ sont reliés aux coefficients $K'_{l,k}$ en utilisant la formule (3.14).

En exprimant les coefficients $K'_{l,k}$ selon (3.21) et en utilisant les propriétés (3.10), (3.9) et (3.24), on obtient :

$$\begin{aligned} F_R &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{k=-l-1}^{l+1} \sum_{m=0}^l \\ &\quad \left(\frac{a_{l+1,-k} w_{l,m,k-1}(I) N_{l+1,k} P_{l+1,k}(0)}{2N_{l,m}} [C_{l,m} \cos \psi_{k-1,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k-1,m}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{l+1,k} w_{l,m,k+1}(I) N_{l+1,k} P_{l+1,k}(0)}{2N_{l,m}} [C_{l,m} \cos \psi_{k+1,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k+1,m}] \right) \\ F_T &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{k=-l-1}^{l+1} \sum_{m=0}^l \\ &\quad \left(\frac{a_{l+1,-k} w_{l,m,k-1}(I) N_{l+1,k} P_{l+1,k}(0)}{2N_{l,m}} [S_{l,m} \cos \psi_{k-1,m} - C_{l,m} \sin \psi_{k-1,m}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{l+1,k} w_{l,m,k+1}(I) N_{l+1,k} P_{l+1,k}(0)}{2N_{l,m}} [S_{l,m} \cos \psi_{k+1,m} - C_{l,m} \sin \psi_{k+1,m}] \right) \\ F_N &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{k=-l}^l \sum_{m=0}^l \\ &\quad \left(\frac{-b_{l+1,k} w_{l,m,k}(I) N_{l+1,k} P_{l+1,k}(0)}{N_{l,m}} [C_{l,m} \cos \psi_{k,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k,m}] \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Les changements d'indices $k = k - 1$ dans les premières sommes en k pour F_R et F_T et les changements d'indices $k = k + 1$ dans les deuxièmes sommes permettent d'unifier ces sommes. Il faut pour cela étendre les définitions de $a_{l,k}$, $Y_{l,k}$ et $w_{l,m,k}$ en posant :

$$a_{l,k} = Y_{l,k} = w_{l,m,k} = 0 \quad \text{pour } |k| > l \quad (3.34)$$

On introduit de nouvelles fonctions de l'inclinaison :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l,m}^k(I) &= \frac{w_{l,m,k}(I)}{2N_{l,m}} [a_{l+1,k+1}N_{l+1,-k-1}P_{l+1,k+1}(0) - a_{l+1,k-1}N_{l+1,k-1}P_{l+1,k-1}(0)] \\
\mathcal{T}_{l,m}^k(I) &= \frac{w_{l,m,k}(I)}{2N_{l,m}} [a_{l+1,-k-1}N_{l+1,k+1}P_{l+1,k+1}(0) + a_{l+1,k-1}N_{l+1,k-1}P_{l+1,k-1}(0)] \\
\mathcal{N}_{l,m}^k(I) &= -\frac{w_{l,m,k}(I)}{N_{l,m}} b_{l+1,k}N_{l+1,k}P_{l+1,k}(0)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Tout comme $\mathcal{F}_{l,m}^k$, $\mathcal{R}_{l,m}^k$ et $\mathcal{T}_{l,m}^k$ sont nulles pour $(l-k)$ impair tandis que $\mathcal{N}_{l,m}^k$ est nulle pour $(l-k)$ pair.

On peut revenir à des coefficients normalisés $\bar{C}_{l,m} = C_{l,m}/\beta_{l,m}$, $\bar{S}_{l,m} = S_{l,m}/\beta_{l,m}$ en utilisant les fonctions $\bar{\mathcal{R}}_{l,m}^k(I) = \beta_{l,m}\mathcal{R}_{l,m}^k(I)$, $\bar{\mathcal{T}}_{l,m}^k(I) = \beta_{l,m}\mathcal{T}_{l,m}^k(I)$ et $\bar{\mathcal{N}}_{l,m}^k(I) = \beta_{l,m}\mathcal{N}_{l,m}^k(I)$.

En utilisant les expressions de $a_{l,k}$, $b_{l,k}$ et $P_{lk}(0)$ on montre que les fonctions (3.35) sont reliées aux fonctions $\mathcal{F}_{l,m}^k(I)$ définies en (3.26) par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l,m}^k(I) &= -(l+1)\mathcal{F}_{l,m}^k(I) \\
\mathcal{T}_{l,m}^k(I) &= k\mathcal{F}_{l,m}^k(I) \\
\mathcal{N}_{l,m}^k(I) &= -\sqrt{(l+k)(l+k1)}\frac{w_{l,m,k}(I)}{w_{l+1,m,k}(I)}\mathcal{F}_{l+1,m}^k(I) \\
&= -\sqrt{(l-k)(l+k1)}\frac{w_{l,m,k}(I)}{w_{l,m,k+1}(I)}\mathcal{F}_{l,m}^{k+1}(I)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

On obtient finalement :

$$\begin{bmatrix} F_R \\ F_T \\ F_N \end{bmatrix} = \frac{\mu}{r^2} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l \begin{bmatrix} \sum_{k=-l-2}^{l+2} \mathcal{R}_{l,m}^k(I) [C_{l,m} \cos \psi_{k,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k,m}] \\ \sum_{k=-l-2}^{l+2} \mathcal{T}_{l,m}^k(I) [S_{l,m} \cos \psi_{k,m} - C_{l,m} \sin \psi_{k,m}] \\ \sum_{k=-l}^l \mathcal{N}_{l,m}^k(I) [C_{l,m} \cos \psi_{k,m} + S_{l,m} \sin \psi_{k,m}] \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Ces équations, avec une priorité sur les indices l et m permettent d'obtenir l'effet dû à chaque coefficient du potentiel. On note qu'un terme donné d'indice (l, m) induit de multiples fréquences correspondant aux angles $\psi_{k,m}$. Si on veut calculer les amplitudes correspondant à chaque fréquence (k, m) , il faut réordonner les sommes. On obtient :

$$\begin{aligned}
F_R &= \sum_{k=-L-2}^{L+2} \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(R)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(R)} \cos \psi_{k,m}] \\
F_T &= \sum_{k=-L-2}^{L+2} \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(T)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(T)} \cos \psi_{k,m}] \\
F_N &= \sum_{k=-L}^l \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(N)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(N)} \cos \psi_{k,m}]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Avec les amplitudes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_{k,m}^R \\ B_{k,m}^R \end{bmatrix} &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{\substack{l=\max(1,m,|k-2|) \\ l-k \text{ pair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \mathcal{R}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} C_{l,m} \\ S_{l,m} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{k,m}^T \\ B_{k,m}^T \end{bmatrix} &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{\substack{l=\max(1,m,|k-2|) \\ l-k \text{ pair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \mathcal{T}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} S_{l,m} \\ -C_{l,m} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{k,m}^N \\ B_{k,m}^N \end{bmatrix} &= \frac{\mu}{r^2} \sum_{\substack{l=\max(m,|k|) \\ l-k \text{ impair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \mathcal{N}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} C_{l,m} \\ S_{l,m} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Il faut remarquer que des coefficients d'ordres m différents produisent des fréquences différentes ; les différents ordres seront donc en principe bien décorrélés à partir d'observations du mouvement orbital. On ne peut pas tirer une conclusion équivalente en ce qui concerne les différents degrés l .

3.1.5 Déplacements dus au potentiel en fonction des éléments orbitaux

La perturbation (3.38) due au potentiel est une somme de termes périodiques de fréquences :

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{k,m} &= k\dot{\omega}_0 + m\dot{\omega}_e \\
&\simeq kn_0 + m\dot{\omega}_e
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$= \varepsilon_{km}n_0 \tag{3.41}$$

avec

$$\varepsilon_{km} = k + m \frac{\dot{\omega}_e}{n_0} \tag{3.42}$$

Suivant (2.17) et (2.20), la réponse aux termes non résonnants ($(k, m) \neq (0, 0)$ et $(k, m) \neq (1, 0)$) sera également une somme de termes périodiques :

$$\begin{aligned}
\Delta_R &= \sum_{k=-L-2}^{L+2} \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(\Delta_R)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(\Delta_R)} \sin \psi_{k,m}] \\
\Delta_T &= \sum_{k=-L-2}^{L+2} \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(\Delta_T)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(\Delta_T)} \sin \psi_{k,m}] \\
\Delta_N &= \sum_{k=-L}^l \sum_{m=0}^L [A_{k,m}^{(\Delta_N)} \cos \psi_{k,m} + B_{k,m}^{(\Delta_N)} \sin \psi_{k,m}]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

avec les amplitudes calculées selon (2.20). En substituant $\mu = n_0^2 r^3$ (troisième loi de Kepler) et en utilisant l'expression (3.39) des amplitudes perturbatrices, on obtient :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_{k,m}^{(\Delta_R)} \\ B_{k,m}^{(\Delta_R)} \end{bmatrix} &= r \sum_{\substack{l=\max(1,m,|k-2|) \\ l-k \text{ pair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \frac{(l+1)\varepsilon_{km} - 2k}{\varepsilon_{km}(\varepsilon_{km}^2 - 1)} \mathcal{F}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} C_{l,m} \\ S_{l,m} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{k,m}^{(\Delta_T)} \\ B_{k,m}^{(\Delta_T)} \end{bmatrix} &= r \sum_{\substack{l=\max(1,m,|k-2|) \\ l-k \text{ pair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \frac{2(l+1)\varepsilon_{km} - k(3 + \varepsilon_{km}^2)}{\varepsilon_{km}^2(\varepsilon_{km}^2 - 1)} \mathcal{F}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} S_{l,m} \\ -C_{l,m} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} A_{k,m}^{(\Delta_N)} \\ B_{k,m}^{(\Delta_N)} \end{bmatrix} &= r \sum_{\substack{l=\max(m,|k|) \\ l-k \text{ impair}}}^L \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \frac{1}{1 - \varepsilon_{km}^2} \mathcal{N}_{l,m}^k(I) \begin{bmatrix} C_{l,m} \\ S_{l,m} \end{bmatrix} \tag{3.44}
\end{aligned}$$

On a exprimé $\mathcal{R}_{l,m}^k(I)$ et $\mathcal{T}_{l,m}^k(I)$ en fonction de $\mathcal{F}_{l,m}^k(I)$ selon (3.36).

Balmino ([2]) et Rosborough([16]) ont exprimé la perturbation radiale en incluant les termes d'ordre 1 en excentricité (en repartant de l'intégration des équations de Lagrange). Nos résultats (limités à l'ordre 0 par construction des équations de Hill) sont équivalents. De la même manière, notre résultat pour le déplacement transverse est identique à celui de [3]. Enfin notre résultat pour la composante normale prend une forme différente de ceux trouvés dans [3] ou [4], mais est équivalente.

3.1.6 Déplacements dus au potentiel en fonctions des coordonnées géographiques

Le développement de Kaula (ou de manière équivalente la rotation des harmoniques sphériques) permet de transformer le potentiel, initialement exprimé en coordonnées sphériques terrestres, en une fonction des éléments orbitaux. Ayant calculé les déplacements dus au potentiel en fonction des éléments orbitaux (3.43), on s'intéresse à leur calcul en fonction des coordonnées géographiques (ϕ, λ) . Historiquement, cette question émane de l'altimétrie, le but étant de cartographier en repère terrestre l'impact sur la mesure altimétrique des incertitudes sur les coefficients du potentiel via l'erreur radiale d'orbite.

Au regard de la relation (3.43), pour une orbite d'inclinaison moyenne I et de fréquence orbitale n_0 fixées, il suffit d'exprimer $\cos \psi_{k,m}$ et $\sin \psi_{k,m}$ en fonction des coordonnées sphériques (ϕ, λ) . Pour cela on dispose des relations déjà utilisées pour le développement de Kaula (1.5)-(1.9) :

$$\lambda = \alpha - \theta = \Lambda + \omega_e \tag{3.45}$$

$$\sin \phi = \sin I \sin \omega_0 \tag{3.46}$$

$$\cos \phi \cos \Lambda = \cos \omega_0 \tag{3.47}$$

$$\cos \phi \sin \Lambda = \sin \omega_0 \cos I \tag{3.48}$$

avec :

$$\Lambda = \alpha - \Omega \tag{3.49}$$

$$\omega_e = \Omega - \theta \tag{3.50}$$

$$\omega_0 = \omega + v \tag{3.51}$$

Développement de Rosborough

Rosborough [16], utilise une méthode complètement similaire à celle développée par Kaula. Le développement de Rosborough est d'ailleurs parfois présenté comme le développement inverse de Kaula mais nous verrons en (3.1.7) que ce n'est pas exactement le cas.

La relation (3.45) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\psi_{k,m} &= k\omega_0 + m\omega_e \\ &= k\omega_0 + m\lambda - m\Lambda\end{aligned}\quad (3.52)$$

Ainsi

$$\exp(i\psi_{k,m}) = \exp(im\lambda) \exp i(k\omega_0 - m\Lambda) \quad (3.53)$$

Il reste à exprimer la deuxième exponentielle. Les relations (3.47) et (3.48) permettent d'écrire

$$\exp(-i\Lambda) = \frac{\cos \omega_0 - i \sin \omega_0 \cos I}{\cos \phi} \quad (3.54)$$

On déduit de (3.53) et (3.54) :

$$\exp(i\psi_{k,m}) = \exp(im\lambda) \frac{(\cos \omega_0 + i \sin \omega_0)^k (\cos \omega_0 - i \sin \omega_0 \cos I)^m}{\cos \phi^m} \quad (3.55)$$

En développant, on obtient une fonction des puissances de $\sin \lambda$, $\cos \lambda$, $\cos I$, $\cos \phi$ mais aussi de $\sin \omega_0$ et $\cos \omega_0$.

La relation (3.46) permet de substituer

$$\sin \omega_0 = \frac{\sin \phi}{\sin I} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0} \\ &= \pm \frac{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}}{\sin I}\end{aligned}\quad (3.57)$$

Il reste une ambiguïté de signe qui ne peut être levée par les relations mentionnées jusqu'ici. On doit utiliser une autre information. En dérivant (3.46), on obtient

$$\dot{\phi} \cos \phi = n_0 \sin I \cos \omega_0 \quad (3.58)$$

(on a négligé les variations de I). Comme $\cos \phi$, $\sin I$ et n_0 sont positifs, $\cos \omega_0$ a le signe de $\dot{\phi}$:

$$\cos \omega_0 = \begin{cases} + \frac{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}}{\sin I} & \text{si } \dot{\phi} \geq 0 \text{ (trace montante)} \\ - \frac{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}}{\sin I} & \text{si } \dot{\phi} < 0 \text{ (trace descendante)} \end{cases} \quad (3.59)$$

L'ambiguïté relevée plus haut correspond au fait qu'une position géographique donnée peut être atteinte par deux positions différentes sur l'orbite. Ceci est bien entendu lié à la rotation de la Terre. Ainsi, pour une position terrestre donnée du satellite, les perturbations dues au potentiel ne prennent pas la même valeur selon que la trace est montante ou descendante. C'est un point très important en altimétrie car cela signifie que la moyenne d'une mesure altimétrique prise sur une trace montante et d'une mesure prise (au même lieu géographique)

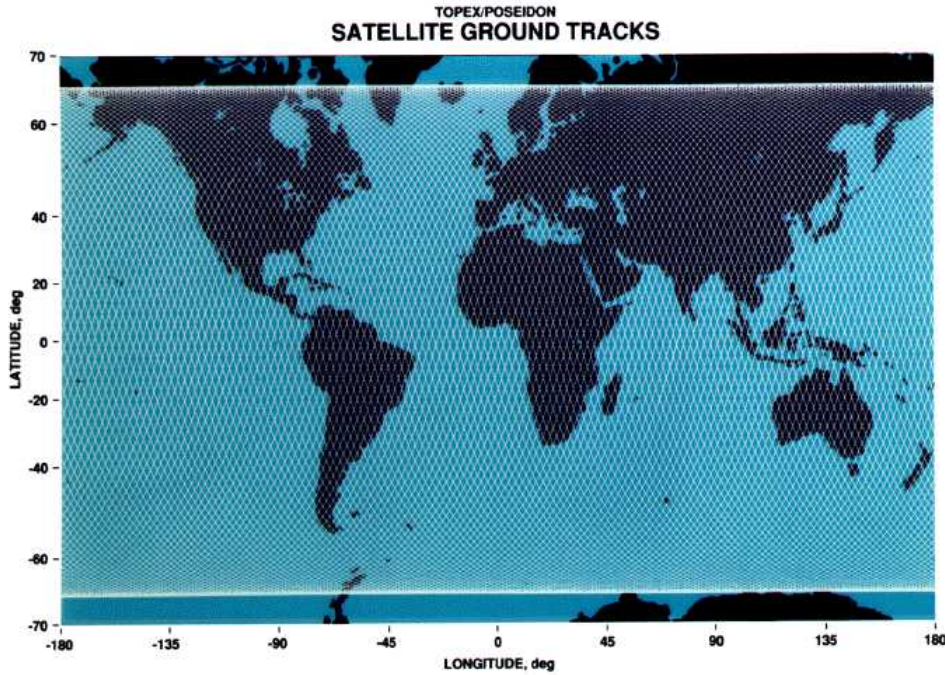


FIG. 3.1 – *Traces montantes et descendantes*

sur une trace descendante n'est affranchie que d'une partie des erreurs d'orbites dues aux erreurs sur le potentiel de gravité : dans la formule (3.55), les termes contenant une puissance impaire de $\cos\omega_0$ ont des signes opposés pour les traces montantes et descendantes et s'élimineront par moyenne; les termes contenant une puissance paire seront au contraire identiques et non éliminés dans la moyenne. Rosborough nomme *erreurs géographiquement corrélées* les erreurs qui sont les mêmes pour les deux types de trace et ne peuvent être mises en évidence aux points de croisement.

Il est remarquable que, malgré la mise en jeu d'une dynamique complexe, les perturbations soient (à une ambiguïté près!) uniquement dépendantes de la position et indépendantes du temps. Il faut cependant garder en mémoire que ces développements reposent sur un certains nombres d'approximations : en particulier, cette propriété ne subsiste pas si on considère des développements au-delà de l'ordre 0 en excentricité (ce qui n'est pas possible en utilisant les équations de Hill).

Pour terminer le développement il faudrait substituer (3.56) dans l'équation (3.55) et développer ([16], [2]). Mais cela offre peu d'intérêt pratique : on obtiendrait une formule très lourde et délicate à évaluer. Contrairement au développement de Kaula qui nécessite de formuler le potentiel explicitement en fonction des éléments orbitaux afin d'en dériver les équations de Lagrange puis de les intégrer, le but est ici de pouvoir évaluer numériquement les perturbations en fonction des coordonnées géographiques. Pour cela il existe une méthode plus directe.

Méthode de Balmino

Balmino [1], propose d'utiliser (3.56) pour en déduire :

$$\operatorname{tg}\omega_0 = \sigma \frac{\sin \phi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}} \quad (3.60)$$

σ valant 1 pour une trace montante et -1 pour une trace descendante. Puis, à partir de (3.47) et (3.48)

$$\operatorname{tg}\Lambda = \sigma \frac{\cos I \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}} \quad (3.61)$$

ω_0 et Λ sont ainsi définis à π près et là encore, le signe des cosinus permet de lever l'ambiguïté. Comme $\cos \phi$ est toujours positif, la relation (3.47) nous apprend que $\cos \Lambda$ a le même signe que $\cos \omega_0$. Ainsi, si on pose suivant Balmino :

$$\omega_0^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \phi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}} \right) \quad (3.62)$$

$$\Lambda^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos I \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \phi}} \right) \quad (3.63)$$

on a

$$\begin{array}{lll} \omega_0 = \omega_0^*, & \Lambda = \Lambda^*, & \text{si } \sigma = 1 \text{ (trace montante)} \\ \omega_0 = \pi - \omega_0^*, & \Lambda = \pi - \Lambda^*, & \text{si } \sigma = -1 \text{ (trace descendante)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\exp(i\omega_0) = \sigma \exp(i\sigma\omega_0^*) \quad (3.64)$$

$$\exp(i\Lambda) = \sigma \exp(i\sigma\Lambda^*) \quad (3.65)$$

$$\exp(i\psi_{k,m}) = \sigma^{k-m} \exp(\sigma i[k\omega_0^* - m\Lambda^*]) \exp(im\lambda) \quad (3.66)$$

Les formules (3.62) et (3.63) sont singulières pour $\sin \phi = \pm \sin I$ mais dans ce cas ω_0 et Λ valent 0 ou π et sont déterminés sans ambiguïté en repartant des équations (3.46)–(3.48).

Une alternative possible à (3.62) consiste à utiliser la fonction arcsinus à partir de

$$\sin \omega_0 = \frac{\sin \phi}{\sin I} \quad (3.67)$$

$$\sin \Lambda = \frac{\operatorname{tg}\phi}{\operatorname{tg}I} \quad (3.68)$$

3.1.7 Relation entre développement de Rosborough et développement de Kaula

On pourrait penser que le développement de Rosborough est l'inverse du développement de Kaula. Si cela est assez vrai dans l'esprit, ce n'est pas le cas mathématiquement, ce qui fait que le premier exhibe une ambiguïté dont est dépourvu le second.

Les relations (3.46)–(3.48) permettent un passage bijectif entre (ϕ, Λ) et (I, ω_0) en tenant compte du fait que $\cos \phi \geq 0$ et $\sin I \geq 0$:

$$\phi = \phi(I, \omega_0) \qquad I = I(\phi, \Lambda) \qquad (3.69)$$

$$\Lambda = \Lambda(I, \omega_0) \qquad \omega_0 = \omega_0(\phi, \Lambda) \qquad (3.70)$$

La relation (3.45) permet d’exprimer λ en fonction de Λ et ω_e , ce qui autorise la transformation de Kaula :

$$\phi = \phi(I, \omega_0) \qquad (3.71)$$

$$\lambda = \Lambda(I, \omega_0) + \omega_e \qquad (3.72)$$

On passe donc de (ϕ, λ) à (I, ω_0) en utilisant le paramètre ω_e .

La transformation symétrique non ambiguë (“transformation de Kaula inverse”) consisterait à passer de (I, ω_0) à (ϕ, λ) , toujours en utilisant le paramètre ω_e :

$$I = I(\phi, \lambda - \omega_e) \qquad (3.73)$$

$$\omega_0 = \omega_0(\phi, \lambda - \omega_e) \qquad (3.74)$$

Cette transformation est peu intéressante car elle ne permet pas d’éliminer l’élément orbital Ω et le temps sidéral θ qui apparaissent dans ω_e . Nous voulons plutôt passer de (ω_0, ω_e) à (ϕ, λ) en utilisant le paramètre I (qui varie peu). La différence fondamentale avec la transformation de Kaula inverse est que maintenant les deux angles de départ ω_0 et ω_e prennent des valeurs entre 0 et 2π : nous ne bénéficions plus de la contrainte $\sin I \geq 0$ qui rend la transformation de Kaula inverse non ambiguë.

Bibliographie

- [1] G. Balmino. A note on Rosborough transformation. Note. [3.1.6](#)
- [2] G. Balmino. *Satellite altimetry in geodesy and oceanography*, chapter Orbit choice and the theory of radial orbit error for altimetry, pages 243–315. Lecture notes in Earth sciences. Springer-Verlag, 1992. [3.1.5](#), [3.1.6](#)
- [3] G. Balmino and F. Perosanz. Comparison of geopotential recovery capabilities of some future satellite missions. In H. Sünkel and I. Marson, editors, *Gravity an Geoid*, pages 403–412, Graz, Austria, Sep 1994. Joint symposium of the international gravity commission and the international geoid commission, Springer. [3.1.5](#)
- [4] G. Balmino, E. Schrama, and N. Sneeuw. Compatibility of first-order circular orbit perturbations theories; consequences for cross-track inclination functions. *Journal of Geodesy*, 70 :554–561, 1996. [3.1.5](#)
- [5] D. Brouwer and G.M. Clemence. *Methods of celestial mechanics*. Academic Press, 1961. [1.4](#), [2.1.3](#)
- [6] G.E. Cook. Perturbations of near-circular orbits by the earth’s gravitational potential. *Planet. Space Sci.*, 14 :433–444, 1966. [1.2](#)
- [7] F. Deleflie, G. Métris, and P. Exertier. An analytical solution of the lagrange planetary equations valid also for very low eccentricities : Influence of a central potential. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2003. en préparation. [1.2](#)
- [8] F. Deleflie, G. Métris, and P. Exertier. Circular orbits : How defining a variation of the perigee really secular. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2003. en préparation. [1.2](#)
- [9] N.V. Emeljanov and A.A. Kanter. A method to compute inclination functions and their derivatives. *Manuscripta Geod.*, (14) :77–83, 1989. [1.1](#)
- [10] Giacaglia G.E.O. A note on hansen’s coefficients in satellite theory. *Celest. Mech.*, (14) :515–523, 1976. [1.1](#)
- [11] M.H. Kaplan. *Modern spacecraft dynamics and control*. John Wiley & Sons, New York, 1976. [2.1.1](#)
- [12] W.M. Kaula. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, 1966. [1.1](#)
- [13] J. Kovalevsky. *Introduction à la mécanique céleste*. Armand Colin, 1963. [1.2](#)
- [14] G. Métris. Dérivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. Technical report, *OCA/CERGA*, 2002. [3.1.2](#), [1](#)
- [15] G. Métris, J. Xu, and I. Wytrzyszczak. Derivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. *Celest. Mech.*, 71 :137–151, 1999. [3.1.2](#)
- [16] G.W. Rosborough. *Satellite orbite perturbations due to the geopotential*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1986. Report CSR 86-1. [3.1.5](#), [3.1.6](#), [3.1.6](#)

- [17] N.J. Sneeuw. Representation coefficients and their use in satellite geodesy. *Manuscripta Geod.*, 17 :117–123, 1992. [3.1.3](#), [2](#)