

# Modélisation des déformations de la Terre Solide

**Jean-Paul Boy**

EOST/IPGS, Strasbourg, France

**9ème école d'été du GRGS, Saint-Pierre d'Oléron,  
3-7 septembre 2018**



## 1 Introduction

## 2 Théorie de la gravito-élasticité

- Système des  $y_i$
- Nombres de Love
- Remarques sur le degré 1
- Cas anélastique (principe d'équivalence)

## 3 Approche alternative : fonctions de Green

## 4 Cas d'un modèle de Terre plus réaliste

## 5 Quelques exemples

- Marées Terrestres et surcharges de marées océaniques
- Autres surcharges
- Rebond post-glaciaire
- Ensemble des effets à La Rochelle

## 6 Conclusion

La Terre est un corps déformable (de rigidité voisine de celle du fer) :

- propagation d'ondes sismiques (comportement quasi-élastique),
- ellipticité due à la rotation (comportement quasi-fluide).
- ...

La gravito-(an)élasticité permet de modéliser les déformations d'un corps sphérique auto-gravitant, à symétrie sphérique, de comportement (an)élastique, isotrope et sans rotation.

Les déformations de la Terre solide interviennent plusieurs fois dans les conventions :

- déplacements horizontaux et verticaux (stations géodésiques),
- rotation (variations du tenseur d'inertie)
- variations du potentiel gravifique de la Terre, et donc influent sur l'orbite des satellites.

Soit une particule matérielle de position initiale  $\vec{r}$ , sa position à tout instant  $t$  est :

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}, t) \quad \text{où } \vec{u} \text{ est le déplacement de } \vec{r}$$

$\vec{x}(\vec{r}, t)$  est inversible, donc on peut trouver une relation  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}, t)$

Soit une quantité physique :

- $F(\vec{x}, t)$  : description *eulérienne* (spatiale),
- $f(\vec{r}, t)$  : description *lagrangienne* (matérielle).

On passe de l'une à l'autre par  $F(\vec{x}, t) = f(\vec{r}(\vec{x}, t), t)$  et  $f(\vec{r}, t) = F(\vec{x}(\vec{r}, t), t)$ .

Si  $F$  et  $f$  évoluent au cours du temps :

$$F(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, 0) + \Delta F(\vec{x}, t)$$

$$f(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, 0) + \delta f(\vec{r}, t)$$

On a  $\Delta F(\vec{x}, t) = \Delta f(\vec{r}(\vec{x}, t), t)$  variation *eulérienne* et  $\delta f(\vec{r}, t) = \delta F(\vec{x}(\vec{r}, t), t)$  variation *lagrangienne*.

Si les déplacements et les variations sont faibles, on peut relier (linéarisation) les variations eulérienne et lagrangienne :

$$\delta f(\vec{r}, y) \approx \Delta f(\vec{r}, t) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}, 0)$$

- 1 Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$$

- 2 Conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} = \rho \vec{\nabla}(\Phi + V) + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}$$

avec  $\Phi$  auto-gravitation et  $V$  potentiel externe excitateur (ex: marées).  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est le tenseur des contraintes.

- 3 Equation de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -4\pi G \rho$$

- 4 Loi rhéologique

## 1 Élasticité (compressible)

$$\sigma_{kl} = 2\mu\epsilon_{kl} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{kl}$$

## 2 Fluide Newtonien visqueux incompressible

$$\sigma_{kl} = 2\eta\dot{\epsilon}_{kl}$$

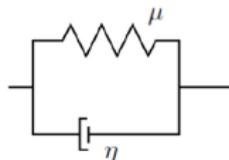
## 3 Maxwell (incompressible)

$$\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\mu}{\eta}\sigma_{kl} = 2\mu\dot{\epsilon}_{kl}$$



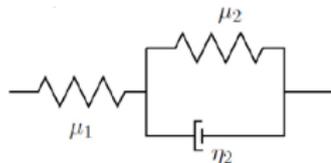
## 4 Kelvin-Voigt (incompressible)

$$\sigma_{kl} = 2\mu\epsilon_{kl} + 2\eta\dot{\epsilon}_{kl}$$



## 5 Standard linear solid (SLS)

$$\dot{\sigma}_{kl} + \frac{\mu_2}{\eta_2}\sigma_{kl} = 2(\mu_1 + \mu_2)\dot{\epsilon}_{kl} + 2\frac{\mu_1\mu_2}{\eta_2}\epsilon_{kl}$$



On pose :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_0 + \Delta \underline{\underline{\Sigma}}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Delta \Phi$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta \rho$$

avec

$$\Delta \underline{\underline{\Sigma}} = \delta \underline{\underline{\Sigma}} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \underline{\underline{\Sigma}}_0$$

$$\Delta \rho = \delta \rho - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho_0$$

Les fonctions à l'état de référence (<sub>0</sub>) ne dépendent que de  $r$  d'où :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = -P_0 \underline{\underline{I}}$$

$$\vec{\nabla} \Phi_0 = -g_0 \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\nabla} \rho_0 = \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$$

Et on remplace dans les 4 équations physiques de base, en négligeant les phénomènes inertiels ( $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0$ )...

On définit les  $y_i$  comme les développements en harmoniques sphériques du déplacement  $\vec{u}$ , des tractions  $\vec{T}$  et du potentiel  $\Phi + V$  :

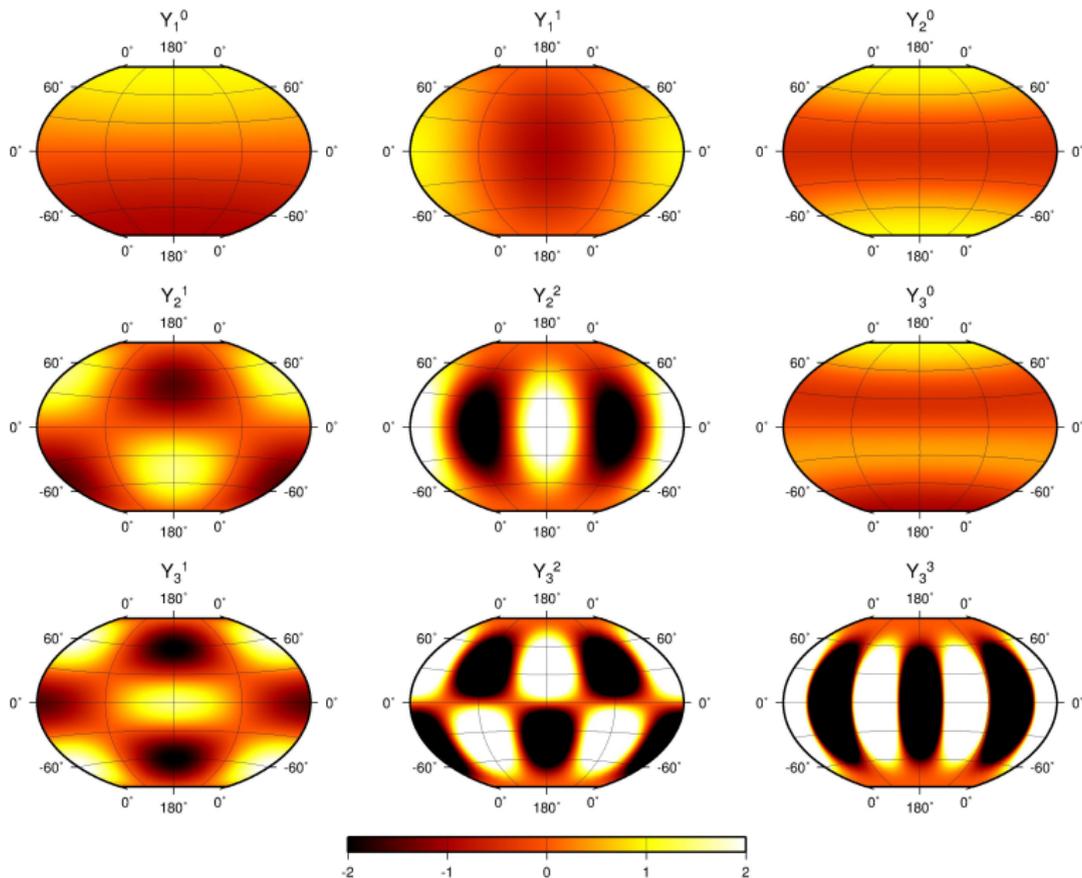
$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{1,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda) + r y_{3,n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) + y_{7,n}(r) \vec{\nabla} \wedge \vec{r} Y_n^m(\theta, \lambda)$$

$$\vec{T} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{2,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda) + r y_{4,n}(r) \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \lambda) + y_{8,n}(r) \vec{\nabla} \wedge \vec{r} Y_n^m(\theta, \lambda)$$

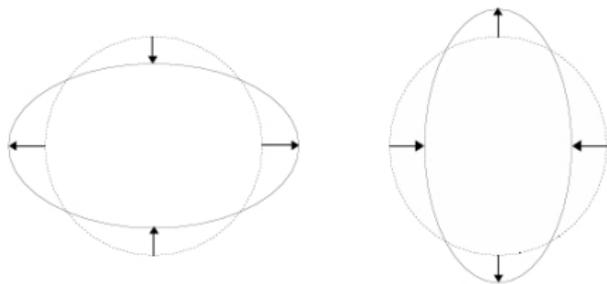
$$\Phi + V = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n y_{5,n}(r) Y_n^m(\theta, \lambda)$$

$$y_{6,n}(r) = \frac{dy_{5,n}(r)}{dr} - 4\pi G \rho_0 y_{1,n}(r)$$

# Harmoniques sphériques



déformation sphéroïdale ( $n=2, m=0$ )



déformation toroidale ( $n=2, m=0$ )



Pour les degrés  $n$  différents de 0 et 1, on obtient le système suivant:

$$\dot{y}_1 = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_1}{r} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} y_2 + \frac{\lambda n(n+1)}{\lambda + 2\mu} \frac{y_3}{r}$$

$$\dot{y}_2 = \left[ -4\rho g + \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_1}{r} - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + n(n+1) \left[ \rho g - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r} y_4 - \rho y_6$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\mu}$$

$$\dot{y}_4 = \left[ \rho g - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)r} \right] \frac{y_1}{r} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + \frac{2\mu \left[ \lambda(2n^2 + 2n - 1) + 2\mu(n^2 + n - 1) \right]}{(\lambda + 2\mu)r} \frac{y_3}{r} - \frac{3}{r} y_4 - \frac{\rho}{r} y_5$$

$$\dot{y}_5 = 4\pi G\rho y_1 + y_6$$

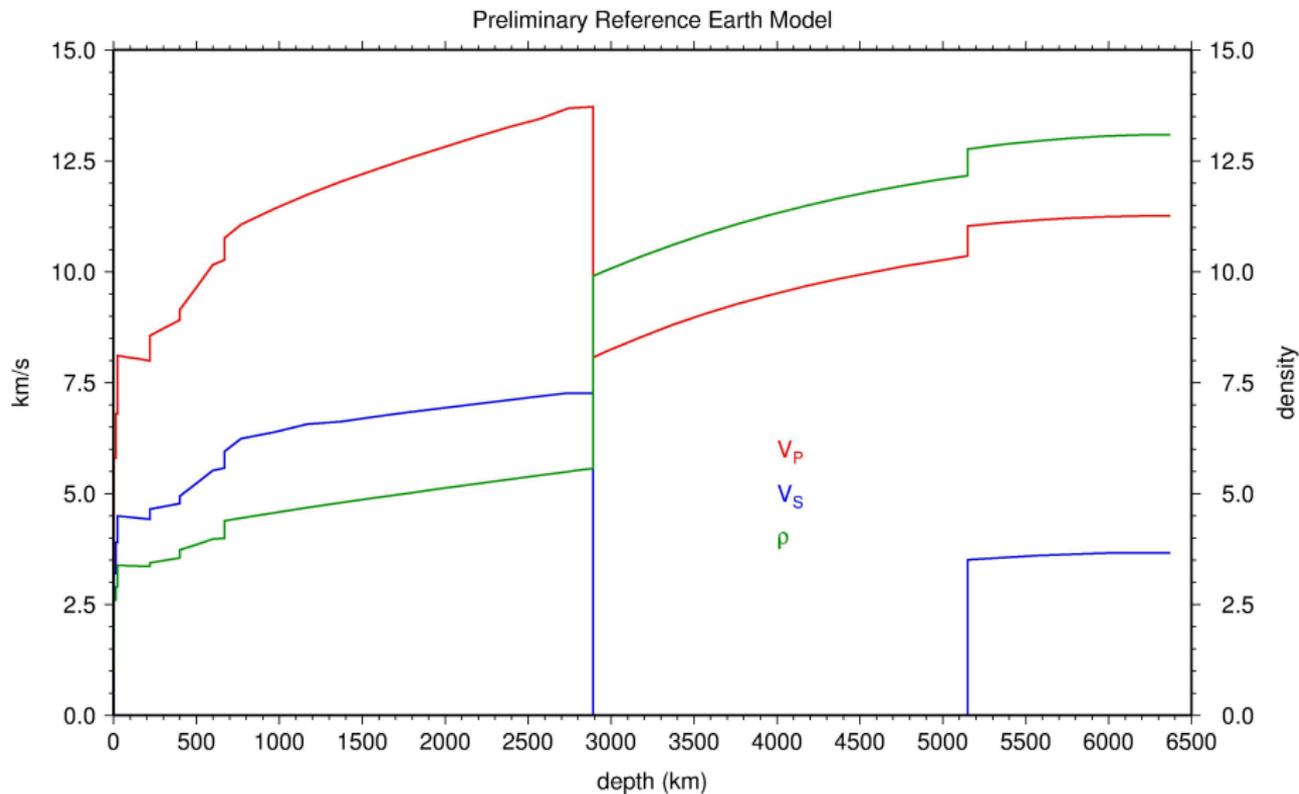
$$\dot{y}_6 = -4\pi G\rho n(n+1) \frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r} \frac{y_5}{r} - \frac{2y_6}{r}$$

$$\dot{y}_7 = \frac{y_7}{r} + \frac{y_8}{\mu}$$

$$\dot{y}_8 = \frac{\mu(n^2 + n - 2)}{r} \frac{y_7}{r} - \frac{3y_8}{r}$$

$\dot{y}_i(r) = c_{i,j} y_j(r)$  avec  $i, j = 1 \dots 6$  : système sphéroïdal,

$\dot{y}_i(r) = c_{i,j} y_j(r)$  avec  $i, j = 7 \dots 8$  : système toroidal.



On considère un potentiel perturbateur :

$$V = \sum_n V_n \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \lambda)$$

Conditions aux limites :

- surface libre :  $y_2(a) = 0$  et  $y_4(a) = 0$
- $y_6(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} V_n$  (voir transparent suivant).

$$y_1(a) = h_n \frac{V_n}{g_0}$$

$$y_3(a) = l_n \frac{V_n}{g_0}$$

$$y_5(a) = (1 + k_n) V_n$$

$$\text{Condition aux limites en potentiel : } y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n$$

La déformation de la Terre peut s'interpréter comme une densité superficielle  $\rho y_1(a)$ , et donc introduit une discontinuité dans le champ gravifique :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^+) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}(a^-) = -4\pi G (\rho y_1(a))$$

Or  $\Phi_n = y_5 - V_n$ , si on prolonge le potentiel à l'extérieur, on obtient alors (expression en  $a^+$ ) :

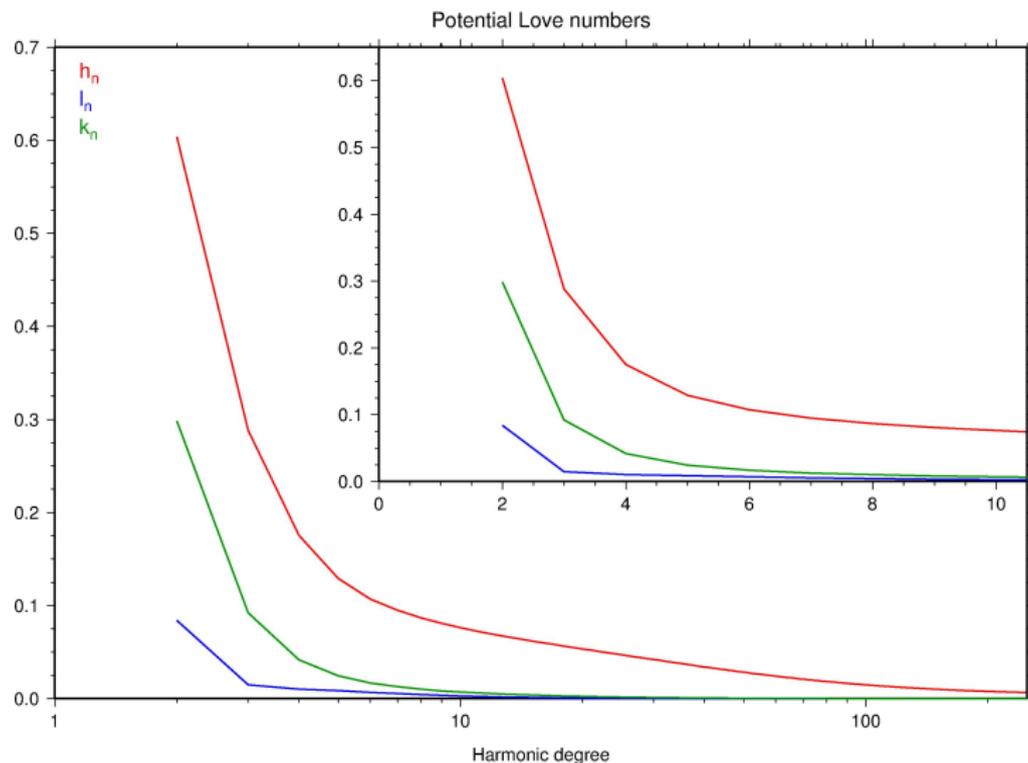
$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( (y_5(a) - V_n) \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \right)$$

La discontinuité du champ gravifique s'écrit alors :

$$-\frac{n+1}{a} (y_5(a) - V_n) - \dot{y}_5(a) + \frac{n}{a}V_n = -4\pi G (\rho y_1(a))$$

En combinant avec la 5<sup>e</sup> équation du système des  $y_i$  ( $\dot{y}_5 = 4\pi G \rho y_1 + y_6$ ), on obtient :

$$y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n$$



On considère que la Terre est soumise à un champ de pression externe  $P_n$ . Conditions aux limites :

- $y_2(a) = -P_n$  et  $y_4(a) = 0$
- $y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = 0$

$$y_1(a) = \bar{h}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0}$$

$$y_3(a) = \bar{l}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0}$$

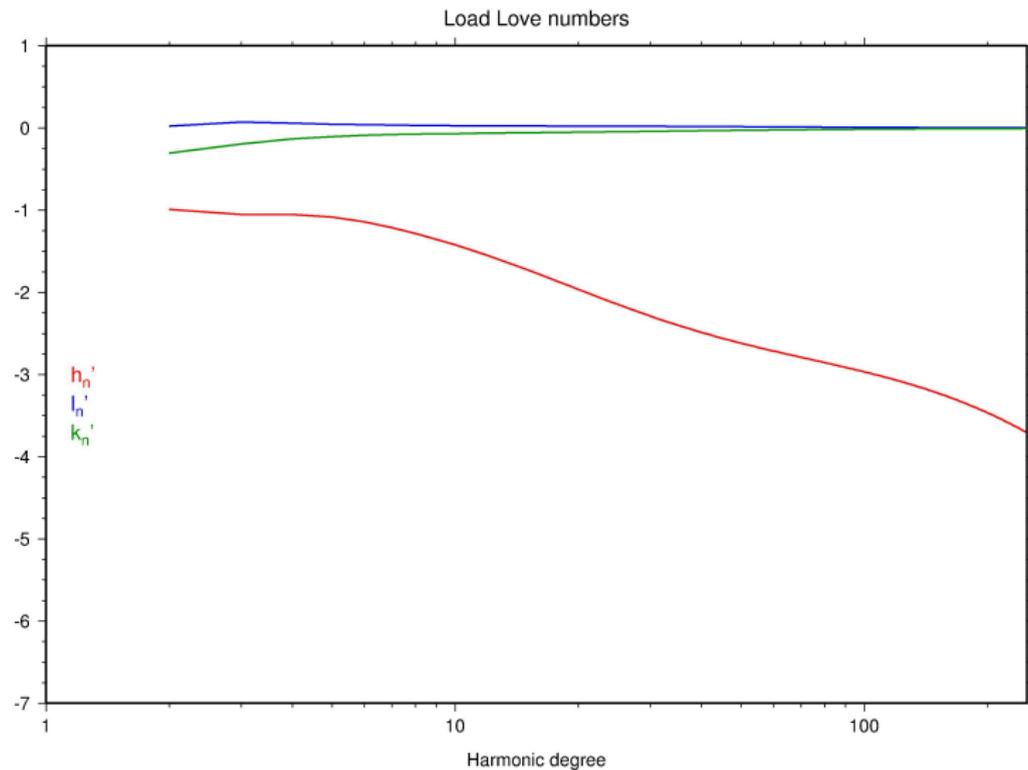
$$y_5(a) = \bar{k}_n \frac{P_n}{\rho_T}$$

Si l'effet de pression est dû à une modification de masse, il faut alors ajouter l'effet d'attraction ; on a alors la somme des deux effets précédents (potentiel et pression). Une densité superficielle en surface de la Terre  $\sigma$  exerce une pression  $P = -g_0\sigma$  ; on peut déterminer le potentiel d'attraction comme  $V'_n = \frac{3g_0}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\rho_T}$ . En faisant la somme des deux effets, on introduit alors les nombres de Love de surcharge :

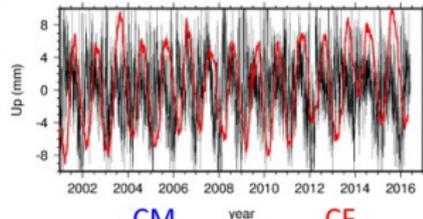
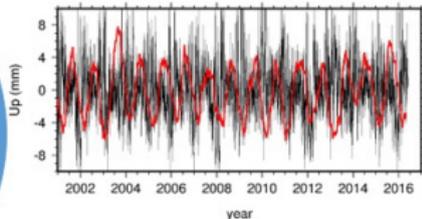
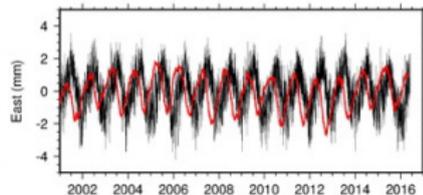
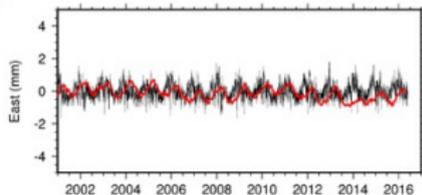
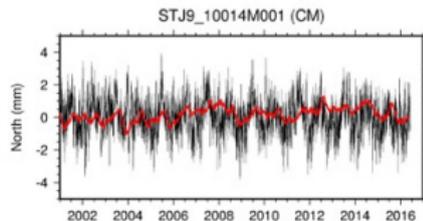
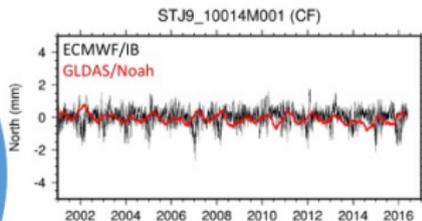
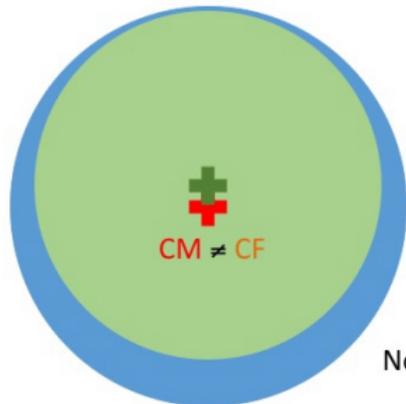
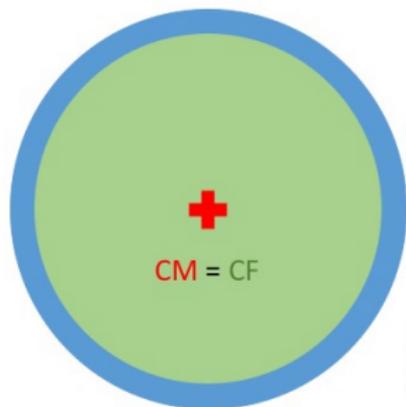
$$y_1(a) = \bar{h}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0} + h_n \frac{V'_n}{g_0} = h'_n \frac{V'_n}{g_0}$$

$$y_3(a) = \bar{l}_n \frac{P_n}{\rho_T g_0} + l_n \frac{V'_n}{g_0} = l'_n \frac{V'_n}{g_0}$$

$$y_5(a) = \bar{k}_n \frac{P_n}{\rho_T} + (1 + k_n) V'_n = (1 + k'_n) V'_n$$



# Système de référence et nombres de Love de charge



Nombre de Love (élastique) de degré 1

CM	CF
$h_1^i = -1.286$	$h_1^i = -0.286$
$l_1^i = -0.896$	$l_1^i = +0.104$

Dans le cas général d'une rhéologie linéaire, on a une relation linéaire entre  $\underline{\underline{\Sigma}}$ ,  $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$  (tenseur des contraintes),  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\dot{E}}}$  (tenseur de déformation).

En prenant la transformée de Fourier, on a une relation linéaire entre  $\underline{\underline{\Sigma}}(\omega)$  et  $\underline{\underline{E}}(\omega)$ . Dans le domaine des fréquences, les équations et les conditions aux limites sont les mêmes (principe de correspondance).

On introduit les nombres de Love visco-élastiques :

$$y_{1,n} = h_n(\omega) \frac{V_n(\omega)}{g_0} + \bar{h}_n(\omega) \frac{P_n(\omega)}{\rho g_0} + h'_n(\omega) \frac{V'_n(\omega)}{g_0}$$

Dans le domaine temporel, on obtient alors :

$$y_{1,n} = h_n(t) * \frac{V_n(t)}{g_0} + \bar{h}_n(t) * \frac{P_n(t)}{\rho g_0} + h'_n(t) * \frac{V'_n(t)}{g_0}$$

où "\*" dénote la convolution temporelle, c'est-à-dire la mémoire visqueuse de la planète.

## 1 Introduction

## 2 Théorie de la gravito-élasticité

- Système des  $y_i$
- Nombres de Love
- Remarques sur le degré 1
- Cas anélastique (principe d'équivalence)

## 3 Approche alternative : fonctions de Green

## 4 Cas d'un modèle de Terre plus réaliste

## 5 Quelques exemples

- Marées Terrestres et surcharges de marées océaniques
- Autres surcharges
- Rebond post-glaciaire
- Ensemble des effets à La Rochelle

## 6 Conclusion

Les déformations induites par une densité superficielle en surface  $\sigma(\theta', \lambda', t)$  peuvent s'écrire sous la forme (Farrell, 1972) :

$$u_V(\theta, \lambda, t) = \int \int_{\text{surface}} G_V(\psi) \sigma(\theta', \lambda', t) ds'$$

$$u_N(\theta, \lambda, t) = \int \int_{\text{surface}} G_H(\psi) \cos \alpha \sigma(\theta', \lambda', t) ds'$$

$$u_E(\theta, \lambda, t) = \int \int_{\text{surface}} G_H(\psi) \sin \alpha \sigma(\theta', \lambda', t) ds'$$

avec  $\psi$  et  $\alpha$ , distance angulaire et azimuth entre  $(\theta, \lambda)$  et  $(\theta', \lambda')$ .

$$G_V(\psi) = \frac{a}{M_T} \sum_{n=0}^{+\infty} h'_n P_n(\cos \psi)$$

$$G_H(\psi) = \frac{a}{M_T} \sum_{n=0}^{+\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \psi}$$

avec  $a$  et  $M_T$  respectivement le rayon moyen et la masse de la Terre.  $ds' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\lambda'$

## 1 Introduction

## 2 Théorie de la gravito-élasticité

- Système des  $y_i$
- Nombres de Love
- Remarques sur le degré 1
- Cas anélastique (principe d'équivalence)

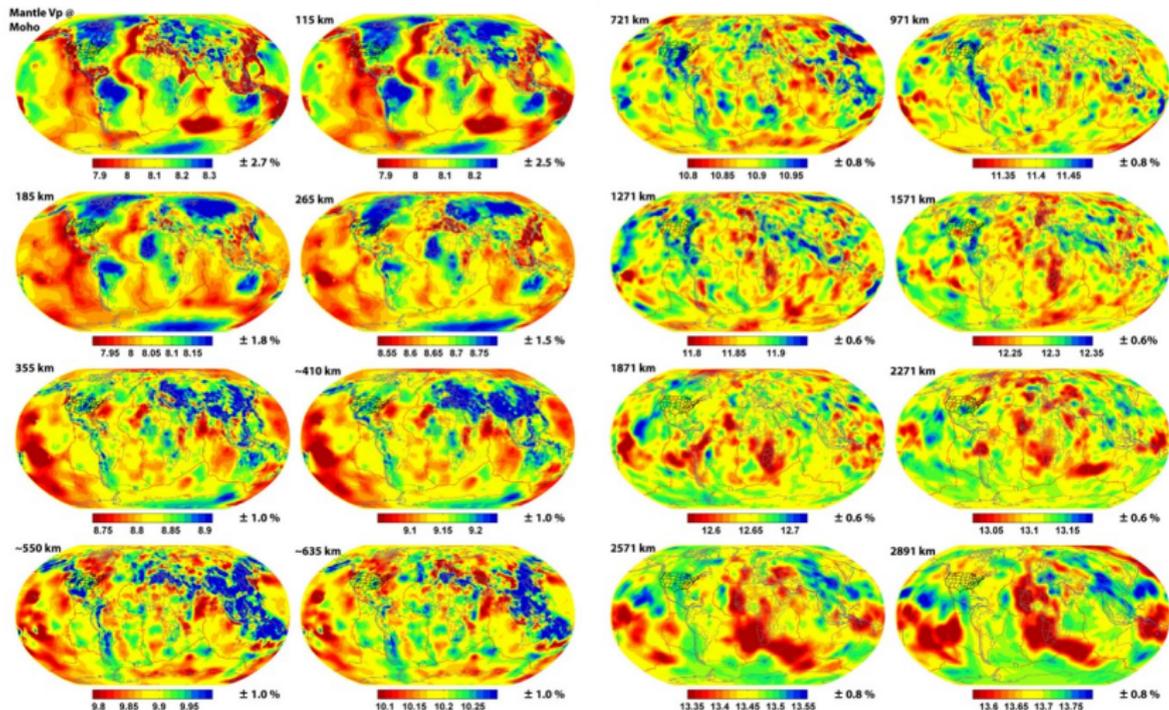
## 3 Approche alternative : fonctions de Green

## 4 Cas d'un modèle de Terre plus réaliste

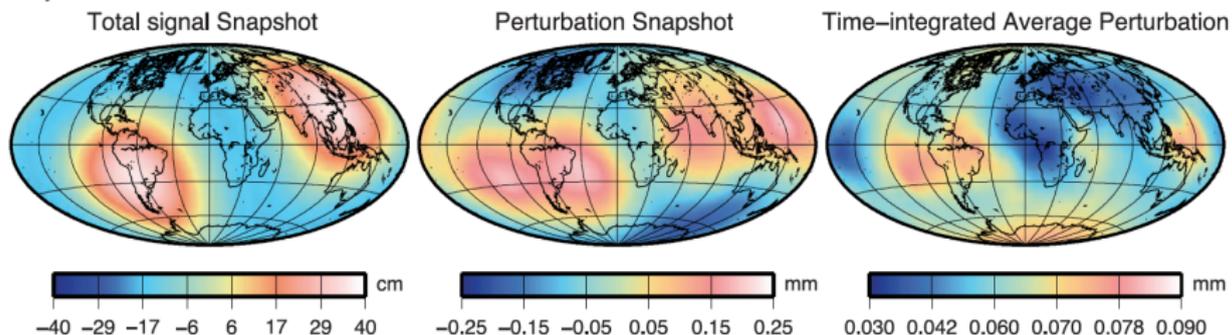
## 5 Quelques exemples

- Marées Terrestres et surcharges de marées océaniques
- Autres surcharges
- Rebond post-glaciaire
- Ensemble des effets à La Rochelle

## 6 Conclusion



Vitesses (km/s) des ondes P dans le manteau et ordre de grandeur des perturbations relatives (d'après Simmons et al., 2012).



Déplacements verticaux en surface dûs aux marées solides (23 nov. 2007, 18:00) pour le modèle PREM et perturbations dûs aux hétérogénéités de masse du manteau (d'après Métivier et Conrad, 2008).

## 1 Introduction

## 2 Théorie de la gravito-élasticité

- Système des  $y_i$
- Nombres de Love
- Remarques sur le degré 1
- Cas anélastique (principe d'équivalence)

## 3 Approche alternative : fonctions de Green

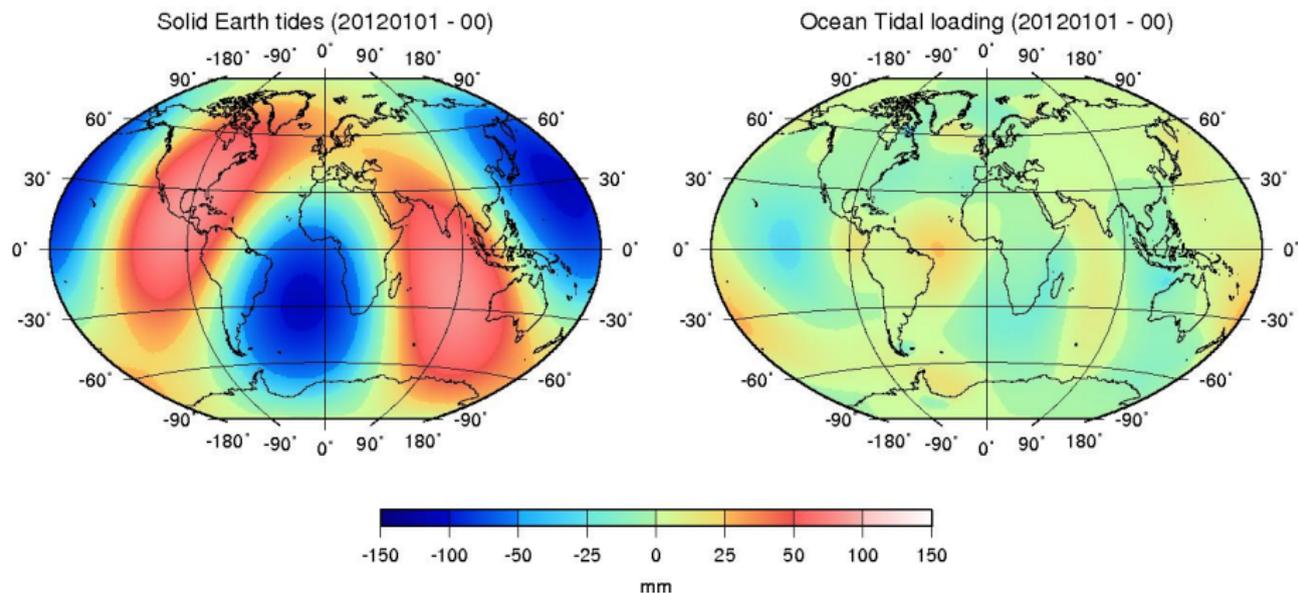
## 4 Cas d'un modèle de Terre plus réaliste

## 5 Quelques exemples

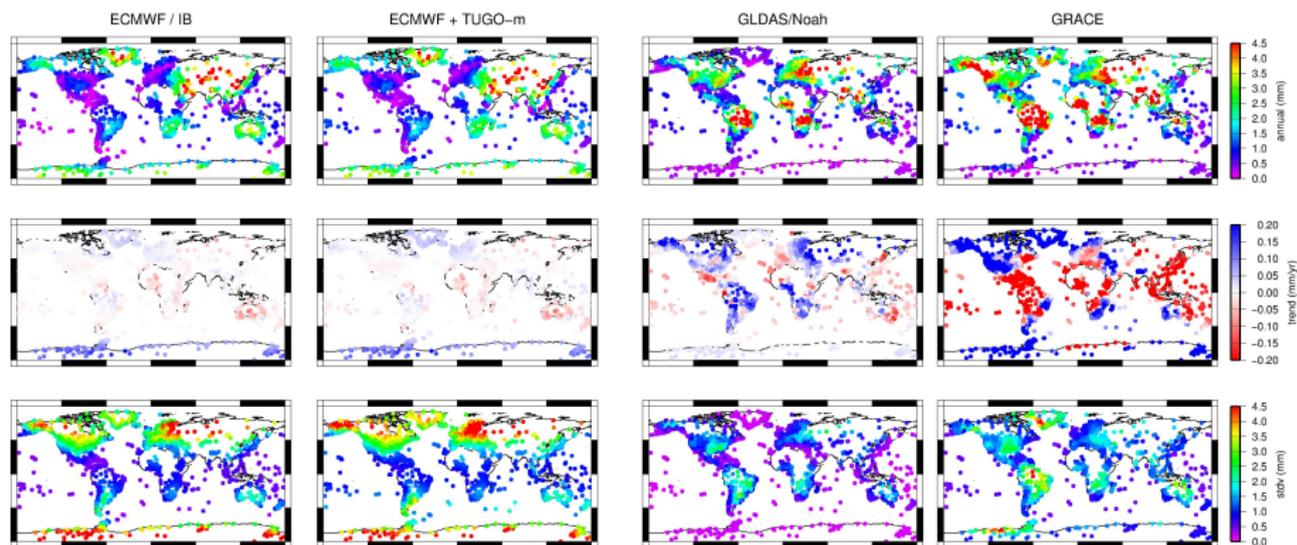
- Marées Terrestres et surcharges de marées océaniques
- Autres surcharges
- Rebond post-glaciaire
- Ensemble des effets à La Rochelle

## 6 Conclusion

# Déplacement vertical dû aux marées solides et océaniques

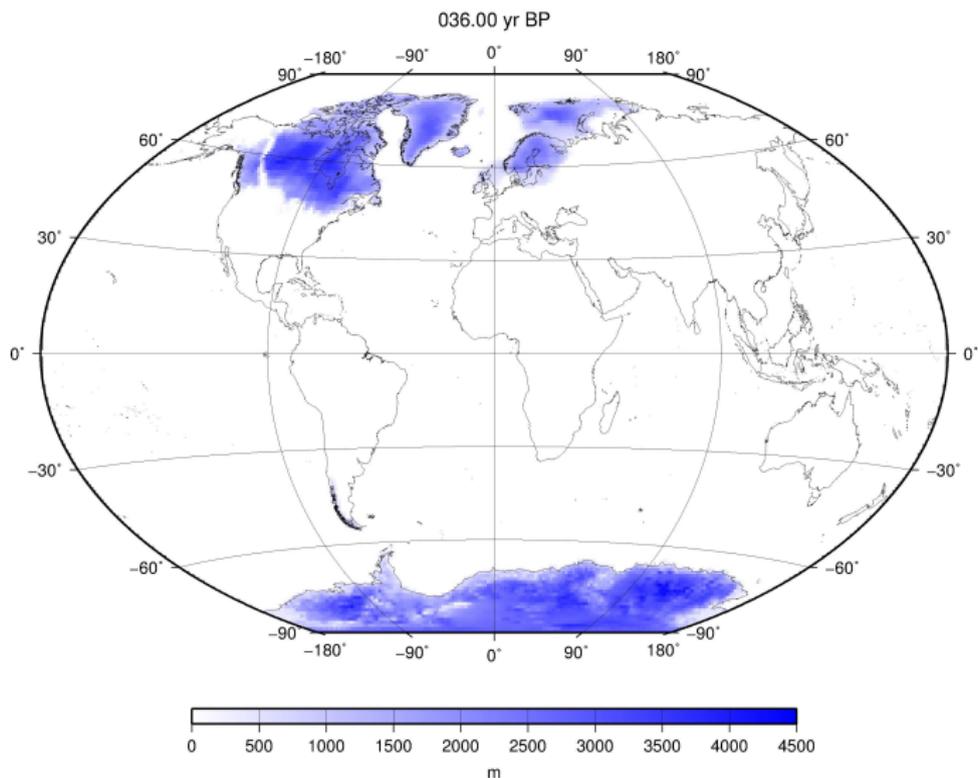


# Surcharges environnementales (atmosphère, océan, hydrologie)



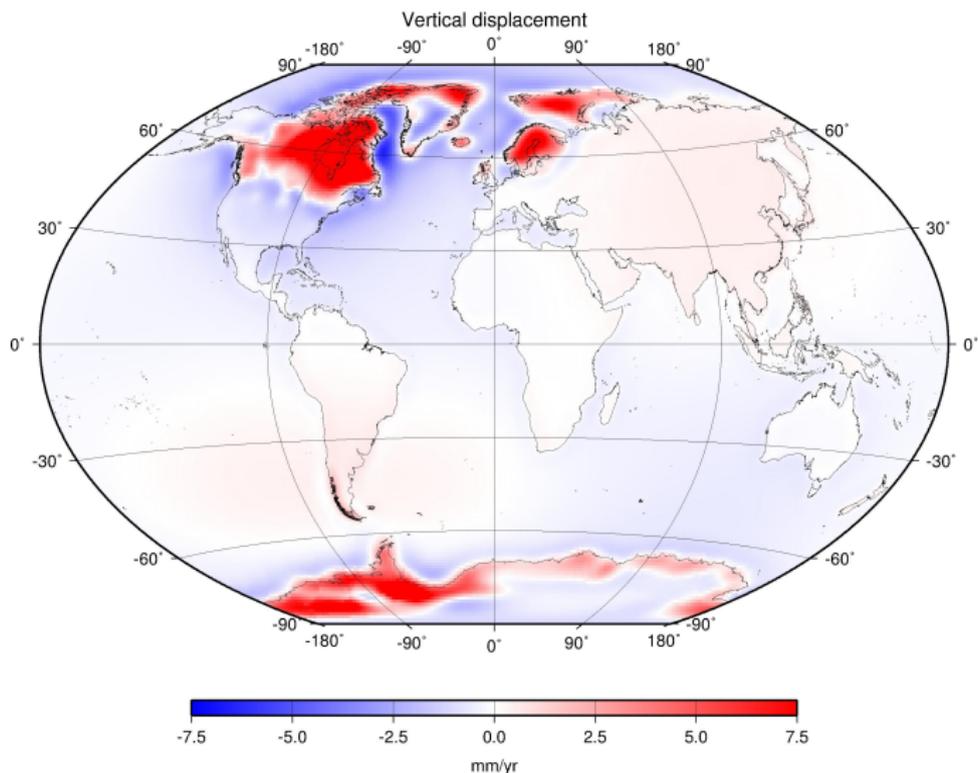
d'après <http://loading.u-strasbg.fr>.

# Rebond post-glaciaire : histoire de la glace



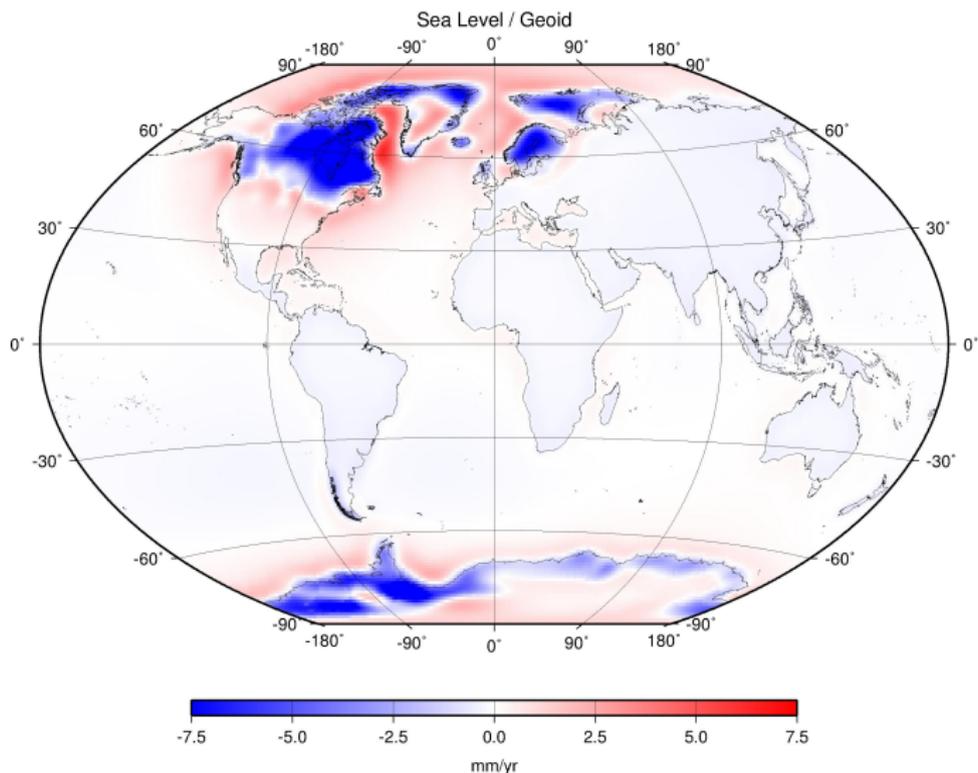
d'après Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015.

# Rebond post-glaciaire : déplacement vertical



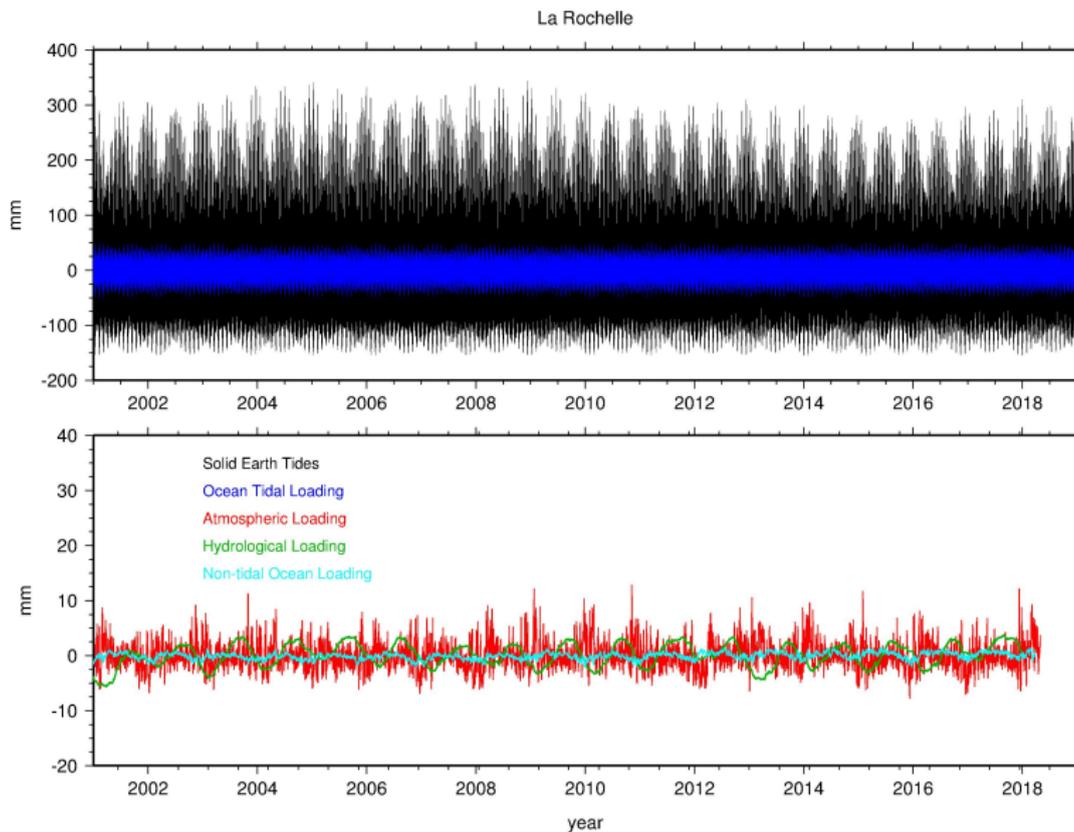
d'après Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015.

# Rebond post-glaciaire : géoïde



d'après Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015.

# Déplacement vertical à La Rochelle



## 1 Introduction

## 2 Théorie de la gravito-élasticité

- Système des  $y_i$
- Nombres de Love
- Remarques sur le degré 1
- Cas anélastique (principe d'équivalence)

## 3 Approche alternative : fonctions de Green

## 4 Cas d'un modèle de Terre plus réaliste

## 5 Quelques exemples

- Marées Terrestres et surcharges de marées océaniques
- Autres surcharges
- Rebond post-glaciaire
- Ensemble des effets à La Rochelle

## 6 Conclusion

- Les équations de la gravito-(an)élasticité permettent de modéliser les déformations de la Terre Solide, pour des modèles de corps à symétrie sphérique, auto-gravitant, isotrope, sans rotation et de rhéologie (an)élastique linéaire.
- Aux échelles de temps de quelques heures à quelques années, un modèle élastique est suffisant ; pour les longues périodes (rebond post-glaciaire), une rhéologie visco-élastique est généralement adoptée ; la viscosité du manteau est toutefois assez mal contrainte.
- La prise en compte de la géométrie plus complexe de la Terre, on peut utiliser un formalisme de perturbation (cas de l'ellipticité) ; pour la structure 3-D complète (anomalies de masse dans le manteau), il faut passer par des résolutions numériques (éléments finis, ...). Ces effets sont négligeables, hormis pour les marées solides.

- L'ordre de grandeur des déplacements verticaux en surface est de plusieurs dizaines de centimètres pour les marées solides, quelques centimètres pour les surcharges de marées océaniques (décroissent avec la distance aux côtes) et la marée polaire. Ces contributions sont prises en compte dans tous les traitements opérationnels géodésiques.
- Pour les autres charges (atmosphère, hydrologie, ...), les amplitudes sont centimétriques, mais observables (GPS notamment). Les déplacements horizontaux sont, en gros, 5 fois plus faibles que les déplacements verticaux. Ces effets ne sont pas pris en compte dans le traitement des données géodésiques (Conventions IERS).