

Potentiel de marées et Marées Terrestres

Jean-Paul Boy

EOST/IPGS, Strasbourg, France

9ème école d'été du GRGS, Saint-Pierre d'Oléron,
3-7 septembre 2018

- 1 Introduction
- 2 Rappel sur les systèmes de coordonnées
- 3 Potentiel de marées
- 4 Marées Terrestres
- 5 De l'importance d'une modélisation précise des marées
- 6 Conclusion

Introduction

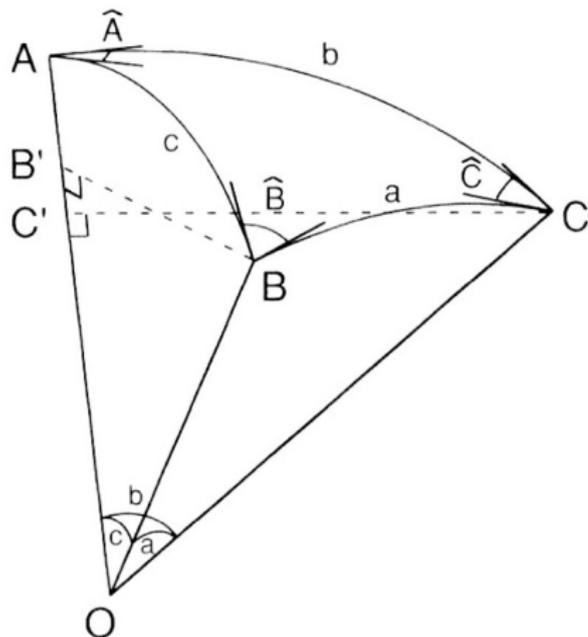
La force de marée est la force différentielle entre l'attraction d'un astre (Soleil & Lune principalement) au centre de masse et en un autre point du corps.

Les marées terrestres/solides sont la réponse de la Terre solide (corps déformable) aux forces de marées, les mêmes qui génèrent les marées océaniques.

Les marées solides doivent être prises en compte dans le calcul de géopotential (nombres de Love k_n) et des positions des stations géodésiques (nombres de Love h_n et l_n).



d'après NASA/JPL.

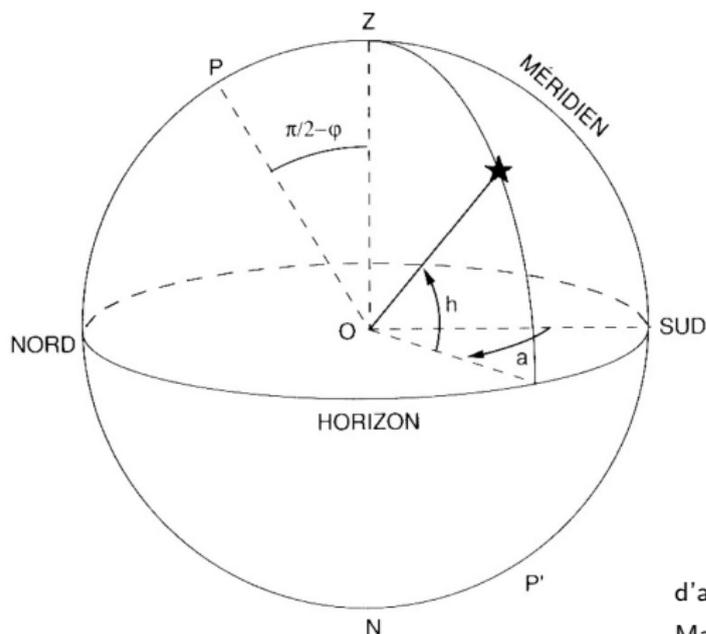


$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

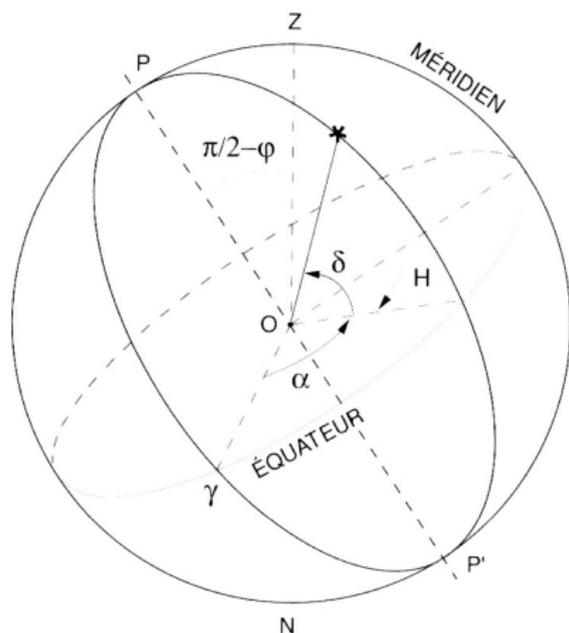
$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

d'après G. Pascoli, *Eléments de mécanique céleste*,
Masson, 1997



- Z: zénith and N: nadir
- P: pôle nord céleste
- ϕ : latitude
- a: azimuth
- h: hauteur et $z = \frac{\pi}{2} - h$: distance zénithale

d'après G. Pascoli, *Eléments de mécanique céleste*,
Masson, 1997



- H: angle horaire, δ : déclinaison
- α : ascension droite

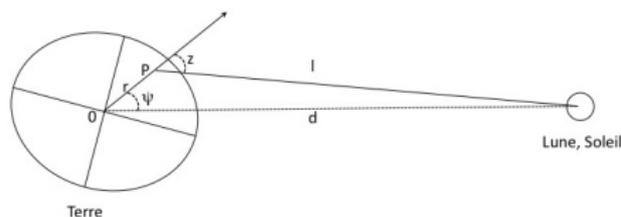
$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta$$

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \phi}$$

$$\sin a = \sin H \cos \delta$$

d'après G. Pascoli, *Éléments de mécanique céleste*,
Masson, 1997

Potentiel de marées (1/2)



avec z la distance zénitale et $\psi \approx z$.

La force de marées \vec{F}_M est la différence entre l'attraction par l'astre au point P et au centre de la Terre O.

$$\vec{F}_M = \frac{GM}{|AP|^3} \vec{PA} - \frac{GM}{|OA|^3} \vec{OA}$$

On peut montrer que cette force dérive du potentiel suivant :

$$W_M = \frac{GM}{|AP|} - \frac{GM}{|OA|^3} \vec{OP} \cdot \vec{OA}$$

$|AP|^{-1}$ est la fonction génératrice des polynômes de Legendre :

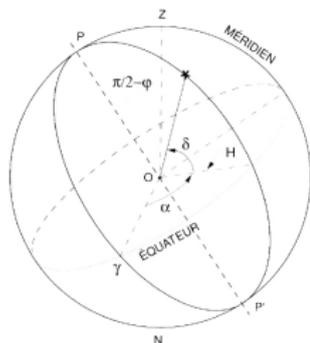
$$\frac{1}{|AP|} = \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos z)$$

$$\frac{\vec{OP} \cdot \vec{OA}}{|OA|^3} = \frac{1}{d^3} (rd \cos z) = \frac{r}{d^2} \cos z$$

On obtient donc l'expression du potentiel de marées (défini à une constante près) :

$$W_M = \frac{GM}{d} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos z)$$

La distance zénitale z dépend de la position de l'astre (déclinaison δ et angle horaire H) et de la position du point P.



d'après Pascoli, 1997.

On a la relation (trigonométrie sphérique) :

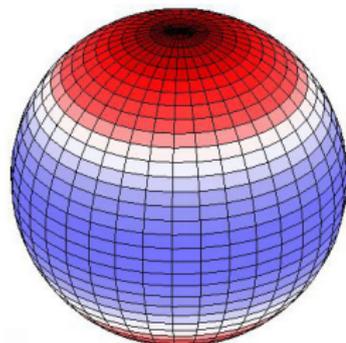
$$\cos z = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \theta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \sin \theta \cos H$$

avec l'angle $H = H_G - \lambda$ comprenant la projection du mouvement de l'astre dans le plan équatorial et la rotation propre de la Terre.

En ne retenant que le degré 2, et en supposant des trajectoires circulaires, on obtient :

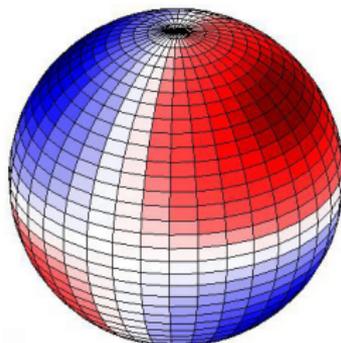
$$W_M = GM \frac{r^2}{d^3} \left(P_{20}(\cos \theta) \frac{3 \sin^2 \delta - 1}{2} + R_{21}(\theta, \lambda) \sin \delta \cos \delta \cos H_G - \right. \\ \left. S_{21}(\theta, \lambda) \sin \delta \cos \delta \sin H_G + R_{22}(\theta, \lambda) \frac{1}{4} \cos^2 \delta \cos 2H_G + S_{22}(\theta, \lambda) \frac{1}{4} \cos^2 \delta \sin 2H_G \right)$$

Harm. zonale (20)



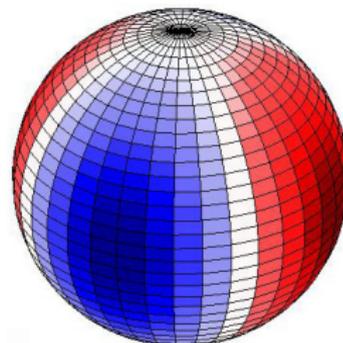
Longues périodes

Harm. tessérale (21)



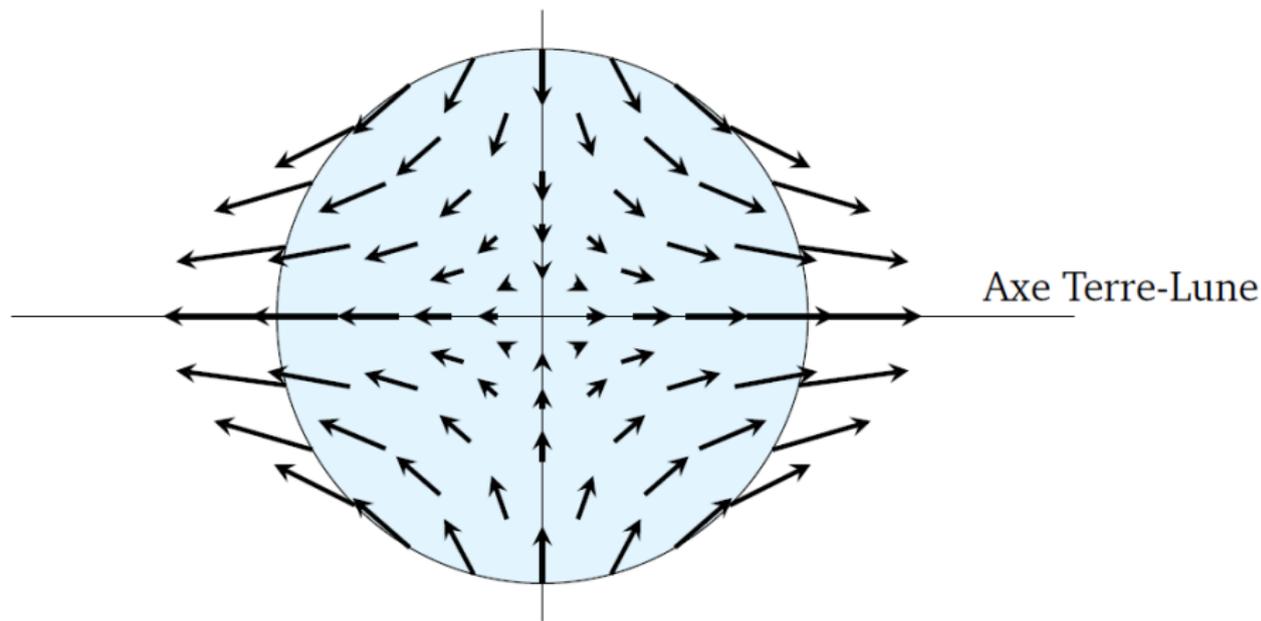
Diurnes

Harm. sectorielle (22)



Semi-Diurnes

Accélération de marées à l'intérieur de la Terre



d'après F. Chambat (<http://planet-terre.ens-lyon.fr/>)

Périodes astronomiques

Position moyenne du Soleil	T	≈ 24 heures
Longitude moyenne du Soleil	h	≈ 1 an
Longitude du périégée solaire	p_1	≈ 209 siècles
Longitude moyenne de la Lune	s	≈ 27 jours
Longitude du périégée lunaire	p	≈ 8.85 ans
Longitude du noeud lunaire	N	≈ 18.5 ans

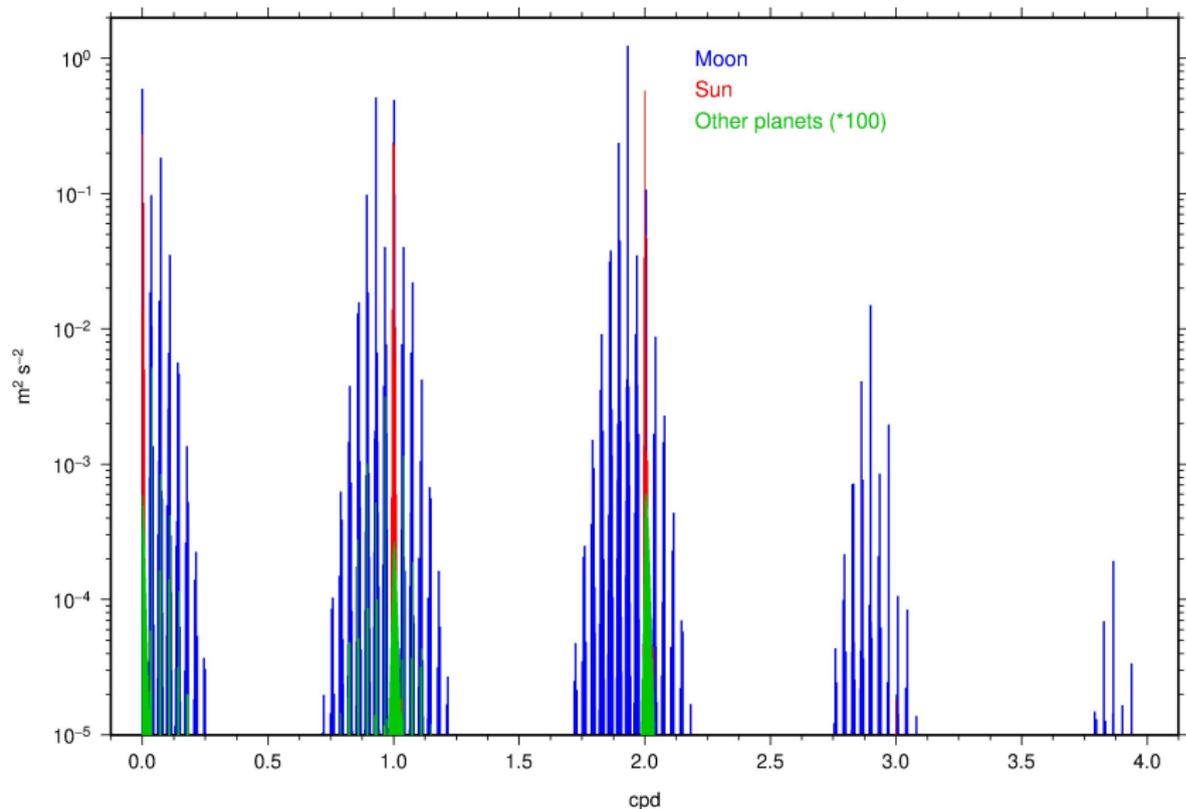
La fréquence de toutes les ondes de marées (luni-solaires) est une combinaison de ces fréquences fondamentales :

- M2: $2T - 2s + 2h$ (12h 25'),
- S2: $2T$ (12 h),
- K1: $T + h - \pi/2$ (23h 55'),
- O1: $T - 2s + h + \pi/2$ (25h 50'),
- Mf: $2s$ (13j 15h).

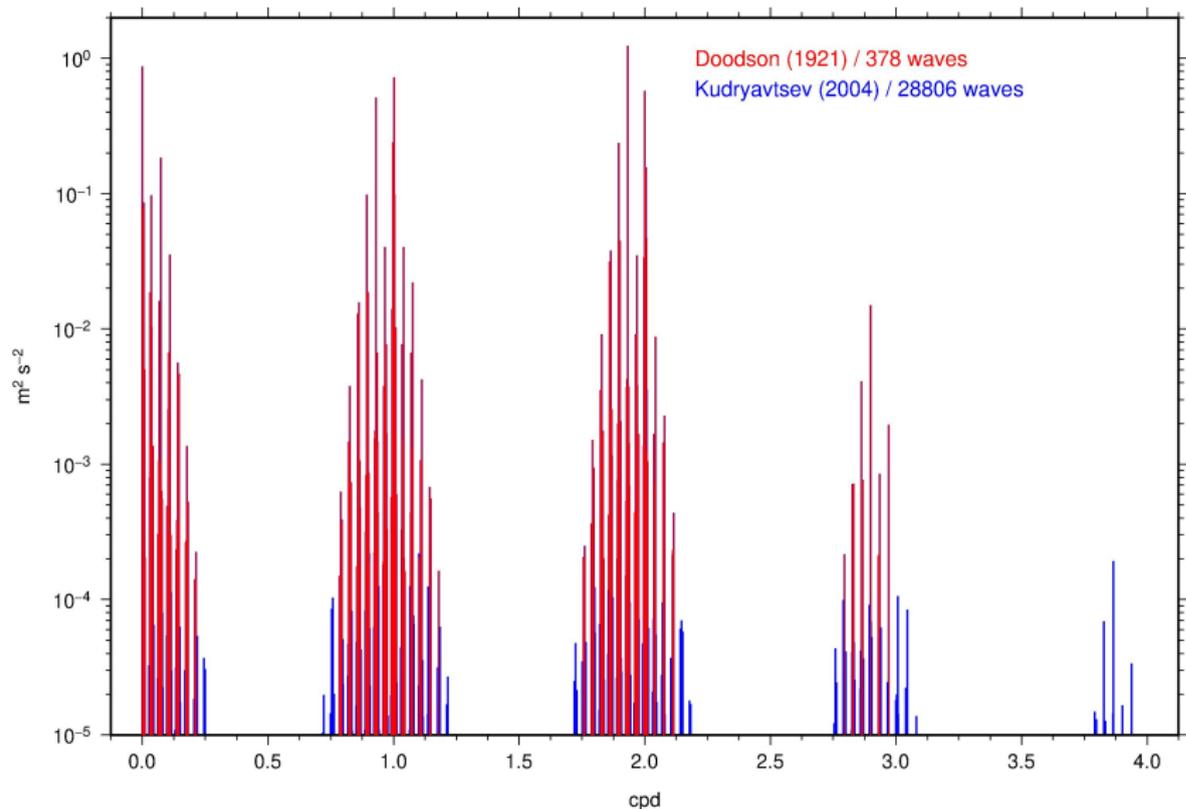
Potentiel de marées: Hartmann and Wenzel (1995)

number	l	m	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	frequency (deg/hour)	C0	S0		
			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11					
C*****																	
1	MO	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-5944286666.	0.	-1935360.	0.
2	SU	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-2751200919.	0.	-890704.	0.
3	ME	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-686.	0.	0.	0.
4	VE	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-33359.	0.	0.	0.
5	MA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-888.	0.	0.	0.
6	JU	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-20482.	0.	0.	0.
7	SA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	-953.	0.	0.	0.
8	MO	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00000000	375384.	0.	706.	0.
9	MO	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00001196	0.	-4489.	0.	0.
10	SU	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00001196	0.	-2080.	0.	0.
11	VE	2	0	0	-13	0	0	0	8	0	0	0	0.00016393	-3.	50.	0.	0.
12	MO	3	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0.00022900	0.	-2842.	0.	0.
13	MO	2	0	0	-1	0	-1	0	0	2	0	0	0.00039754	-32.	-668.	0.	0.
14	MO	2	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0.00102832	165.	704.	0.	0.
15	MO	2	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0.00117809	543.	-734.	0.	0.
16	MO	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.00139575	906.	48.	0.	0.
17	SU	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.00139575	183.	355.	0.	0.
18	SA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.00139575	5.	-158.	0.	0.
19	MO	2	0	0	-18	1	1	0	11	0	0	0	0.00194004	-424.	-303.	0.	0.
20	MO	2	0	1	16	-1	1	0	0	-18	0	0	0.00205280	1527.	183.	0.	0.
21	MO	3	0	0	0	0	1	-4	0	0	0	0	0.00219856	0.	-636.	0.	0.
22	MO	2	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0.00220248	-31226.	0.	-617.	0.
23	MO	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00220641	771788513.	0.	-325040.	0.
24	SU	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00220641	175967.	0.	-93.	0.
25	MO	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00220641	-285381.	0.	6.	0.
26	MO	2	0	-1	-16	1	1	0	18	0	0	0	0.00236001	1166.	293.	0.	0.
27	MO	3	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0.00243541	0.	292143.	0.	-175.
28	FM	3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0.00243541	0.	1450.	0.	0.
29	MO	5	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0.00243541	0.	-342.	0.	0.
30	MO	2	0	0	18	-1	1	0	0	-11	0	0	0.00247278	2854.	2223.	0.	0.
31	MO	2	0	0	-1	0	0	0	0	2	0	0	0.00260395	-1213.	131.	0.	0.
32	SU	2	0	0	-1	0	0	0	0	2	0	0	0.00260395	2659.	-2408.	0.	0.
33	MA	2	0	0	-1	0	0	0	0	2	0	0	0.00260395	558.	-290.	0.	0.
34	MO	2	0	0	-2	-1	1	0	0	4	0	0	0.00277249	-809.	786.	0.	0.
35	SU	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.00279149	221.	-580.	0.	0.
36	SA	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.00279149	-246.	-52.	0.	0.
37	MO	2	0	0	5	0	-1	0	0	-3	0	0	0.00286570	486.	-603.	0.	0.
38	MO	2	0	0	-2	0	-1	0	0	4	0	0	0.00300149	-1332.	2600.	0.	0.
39	MO	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.00346373	-459.	902.	0.	0.
40	SU	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.00346373	4081.	1993.	0.	0.

Contributions respectives



Modèles de potentiel de marées



Cas du déplacement (Chapitre 7, page 100)

For a long-period tide of frequency f :

$$\Delta \vec{r}_f = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} H_f \left\{ \begin{aligned} & \left[h(\phi) \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{24\pi}{5}} l' \right] \cos \theta_f \hat{r} \\ & + 3l(\phi) \sin \phi \cos \phi \cos \theta_f \hat{n} \\ & + \cos \phi \left[3l^{(1)} \sin^2 \phi - \sqrt{\frac{24\pi}{5}} l' \right] \sin \theta_f \hat{e} \end{aligned} \right\}. \quad (7.1a)$$

In the above expressions,

$$h(\phi) = h^{(0)} + h^{(2)}(3 \sin^2 \phi - 1)/2,$$

$$l(\phi) = l^{(0)} + l^{(2)}(3 \sin^2 \phi - 1)/2,$$

For a diurnal tide of frequency f :

$$\Delta \vec{r}_f = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} H_f \left\{ \begin{aligned} & h(\phi) 3 \sin \phi \cos \phi \sin(\theta_f + \lambda) \hat{r} \\ & + \left[3l(\phi) \cos 2\phi - 3l^{(1)} \sin^2 \phi + \sqrt{\frac{24\pi}{5}} l' \right] \sin(\theta_f + \lambda) \hat{n} \\ & + \left[\left(3l(\phi) - \sqrt{\frac{24\pi}{5}} l' \right) \sin \phi - 3l^{(1)} \sin \phi \cos 2\phi \right] \cos(\theta_f + \lambda) \hat{e} \end{aligned} \right\}. \quad (7.1b)$$

For a semidiurnal tide of frequency f :

$$\Delta \vec{r}_f = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} H_f \left\{ \begin{aligned} & h(\phi) 3 \cos^2 \phi \cos(\theta_f + 2\lambda) \hat{r} \\ & - 6 \sin \phi \cos \phi \left[l(\phi) + l^{(1)} \right] \cos(\theta_f + 2\lambda) \hat{n} \\ & - 6 \cos \phi \left[l(\phi) + l^{(1)} \sin^2 \phi \right] \sin(\theta_f + 2\lambda) \hat{e} \end{aligned} \right\}. \quad (7.1c)$$

H_f = amplitude (m) of the tidal term of frequency f ,

ϕ = geocentric latitude of station,

λ = east longitude of station,

θ_f = tide argument for tidal constituent with frequency f ,

\hat{r} = unit vector in radial direction,

\hat{e} = unit vector in east direction,

\hat{n} = unit vector perpendicular to \hat{r} in the northward direction.

d'après Mathews et al., 1995.

Cas du potentiel (Chapitre, page 82)

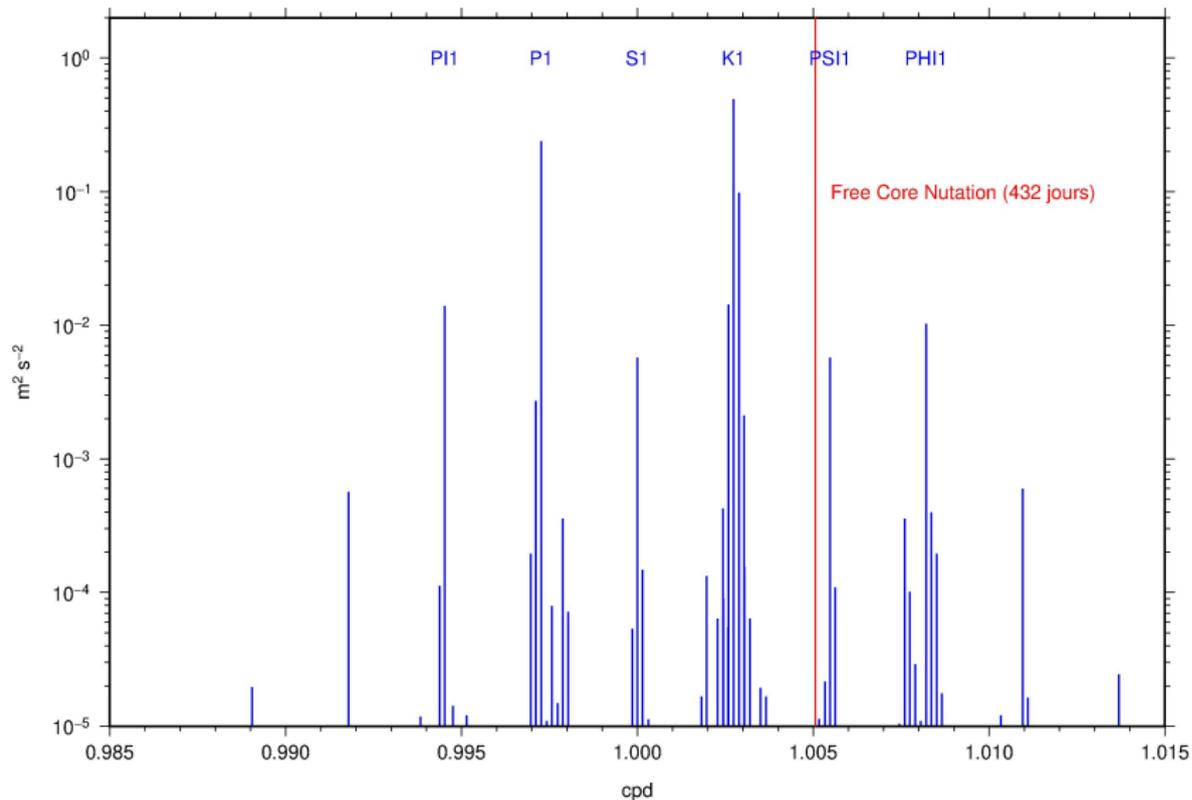
$$\Delta \bar{C}_{nm} - i \Delta \bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \frac{GM_{Astre}}{GM_{Terre}} \left(\frac{r_{equa}}{r_{Astre}} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi_{Astre}) e^{-im\lambda_{Astre}}$$

avec r_{Astre} , Φ_{Astre} et λ_{Astre} distance du géocentre à l'astre (Soleil, Lune), latitude géocentrique de l'astre et longitude.

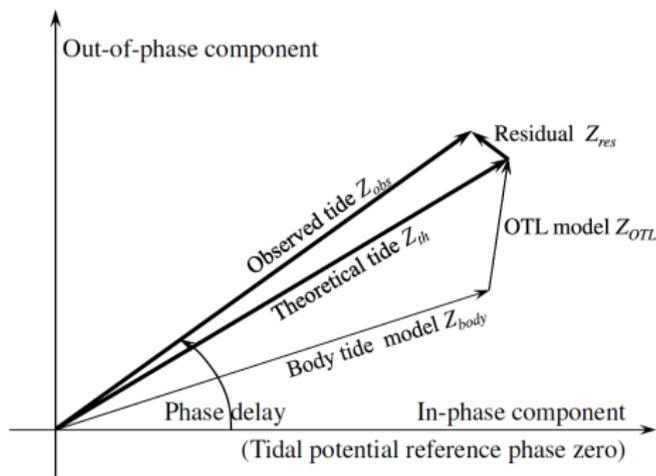
Explications :

Dans les conventions IERS sont prises en compte la structure 3D de la Terre (nombres de Love dépendants du degré et de l'ordre) et la résonance du noyau presque diurne (FCN), avec un modèle semi-théorique et semi-empirique (données VLBI).

FCN (Free Core Nutation) et Marées solides

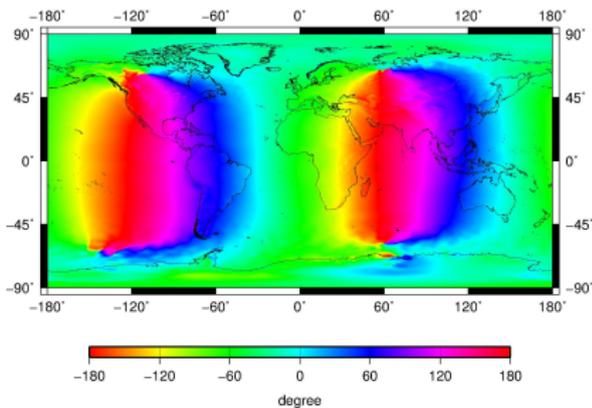
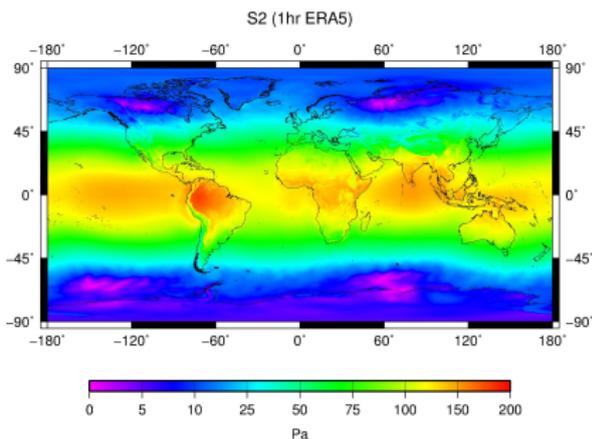
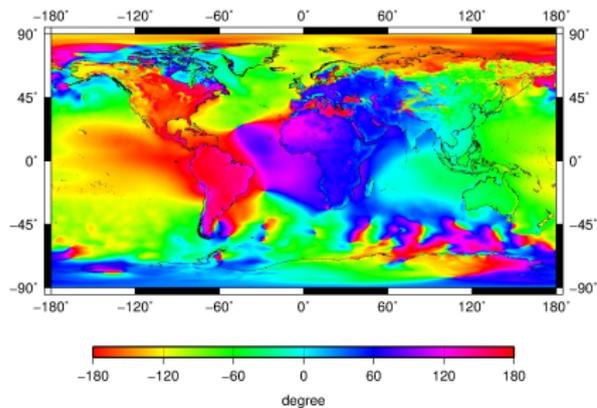
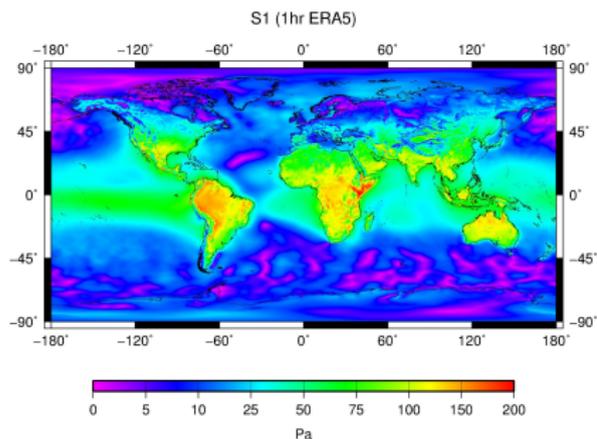


Hormis pour les ondes océaniques non-linéaires, les contributions des marées océaniques et atmosphériques (S1, S2 et modulations annuelles et semi-annuelles) s'ajoutent aux marées solides.

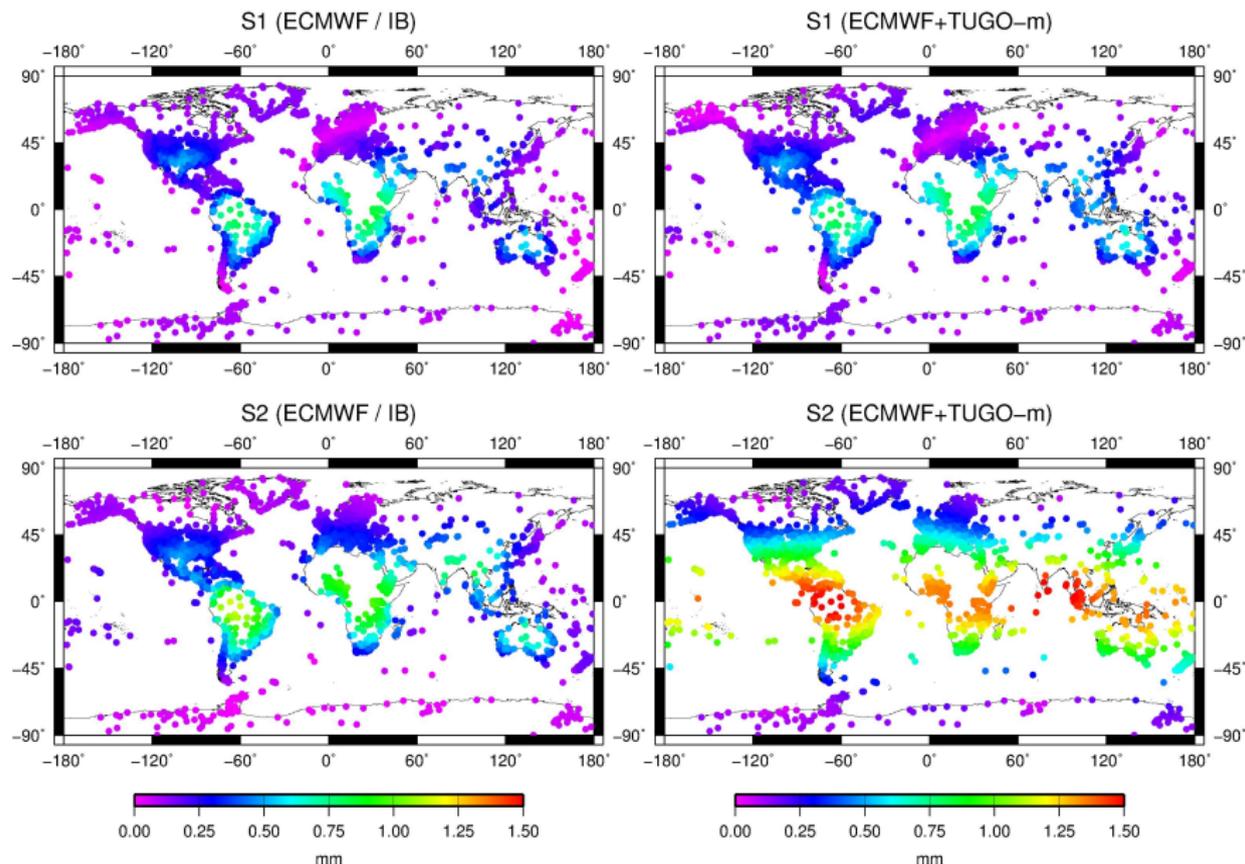


d'après Yuan et al., 2013.

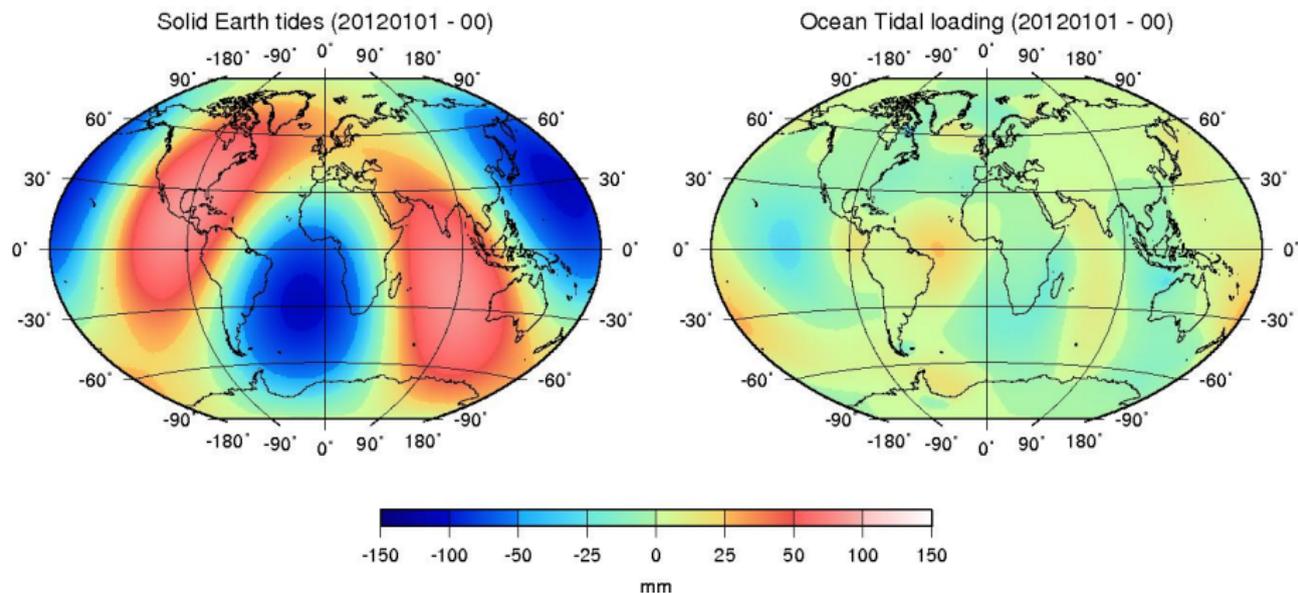
Marées atmosphériques (ERA5)



Déplacements verticaux induits par les marées atmosphériques



Déplacement vertical dû aux marées solides et océaniques



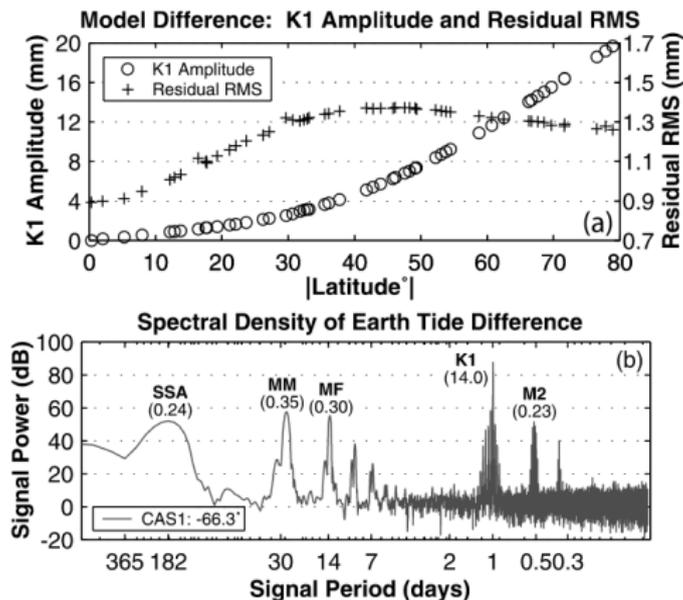


Figure 1. (a) K1 amplitude and residual RMS of the solid Earth tide model differences (IERS 2003 - IERS 1992), in the vertical component as a function of the absolute value of site latitude. (b) PSD of the vertical component of the model differences at the CAS1 site (note the signal amplitudes in mm within brackets).

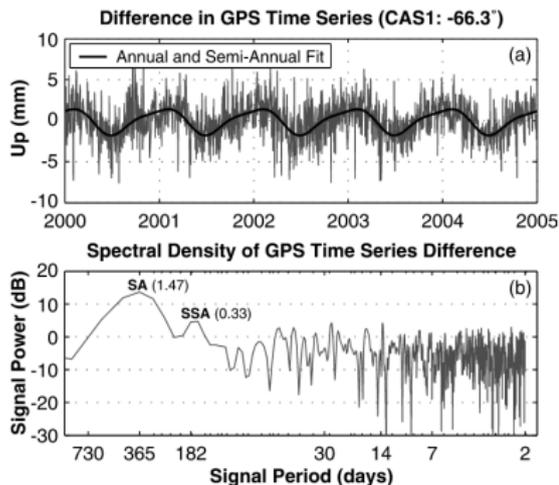


Figure 2. (a) Difference in the vertical component of the GPS time series (IERS 2003 - IERS 1992 solution) at CAS1. (b) PSD of the difference time series at CAS1.

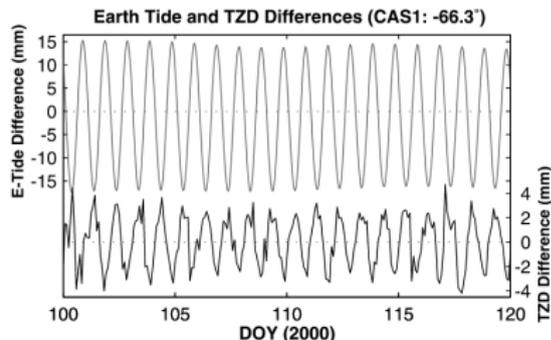


Figure 4. Earth tide model and differences in ZTD estimates for an arbitrary 20 day period at the CAS1 site.

d'après Watson et al., 2006.

- Le potentiel de marées peut être calculé avec une extrême précision à partir des éphémérides.
- Les modélisation des marées terrestres (champ et déplacement) tiennent compte de la structure 3D (ellipticité) de la Terre (nombres de Love dépendant du degré et de l'ordre) et de la résonance presque diurne (FCN).
- Cette modélisation est semi-théorique et semi-empirique (Mathews et al., 1995). Elle est basée sur d'anciennes séries VLBI, avec donc d'anciens modèles de marées océaniques, et pas de marées atmosphériques.
- Les expressions écrites (potentiel et déplacement) dans les conventions ne sont pas cohérentes.
- Le dernier terme de *marée* est la **marée polaire** (solide et océanique), réponse de la Terre aux mouvements du pôle. Les 2 principales périodes sont 1 an et 435 jours environ (période de Chandler).