

TUTORIAL # 2

“THE EARTH’S GRAVITY FIELD AND GEOID. PRINCIPLES, PRESENT AND PROSPECTS“

Abstract

This tutorial aims at describing more precisely how we define and study the global shape of the Earth via its gravity field and an equipotential surface, which approximates the mean sea level, called the geoid.

Some historical facts are first recalled. The fundamental quantities, of geometrical or dynamical nature, are defined and one explains how they are determined : by classical terrestrial methods, by modern sparse techniques such as the analysis of orbital perturbations and the satellite altimetry over the oceans. Our present knowledge is summarized. Future projects are briefly described (as an introduction to tutorial 3).

“CHAMP DE PESANTEUR TERRESTRE ET GÉOÏDE. PRINCIPES, PROGRÈS ET CONNAISSANCE ACTUELLE.“

G. Balmino

Bureau Gravimétrique International, Toulouse, France

UN PEU D’HISTOIRE

La question de la forme de la Terre s’est posée dès les temps les plus anciens, et pendant fort longtemps, de manière indissociable des croyances religieuses et des théories philosophiques qui furent à la base des cosmologies antiques. Jusqu’à Pythagore, à qui l’on attribue d’avoir le premier émis l’idée d’une Terre ronde, l’on croyait la Terre plate, finie ou infinie, surmontée de la voûte céleste. L’idée de rotondité s’est néanmoins imposée avec une certaine force, ne serait-ce que pour des raisons d’harmonie et aussi par analogie, pour certains, à la forme constatée de la Lune et du Soleil, ne serait-ce aussi que grâce à des preuves comme celle avancée, au IV^{ème} siècle avant J.C., par Aristote sur la forme de l’ombre de la Terre sur le disque de la Lune au moment des éclipses. Eratosthène de Milet était de ces savants qui avaient adopté cette idée ; fondateur, parmi tant d’autres, de la géographie, il fut le premier - à notre connaissance, à déterminer la taille de notre sphère la Terre avec une erreur seulement de 1 %, en mesurant la longueur d’un arc de méridien terrestre (ou ce qu’il croyait être exactement un méridien) entre Syène et Alexandrie. Ainsi, au III^{ème} siècle avant notre ère, Eratosthène donnait ses premières lettres de noblesse à la géodésie ($\gamma\tilde{\eta}$: la Terre ; $\delta\alpha\iota\epsilon\iota\nu$: diviser), discipline qui était - et est encore longtemps restée confinée aux méthodes d’arpentage nécessaires tout d’abord à la délimitation des propriétés rurales, puis qui s’est étendue aux mesures de grandes distances pour la cartographie. Plus

tard, Ptolémée (Claude, l'auteur de l'Almageste) reprit ce type de travaux, trouvant une sphère de 38 500 km de tour, et les Arabes, quant à eux, "rétrécirent" encore la Terre puisqu'ils lui trouvèrent, au X^{ème} siècle, une circonférence de 32 600 km environ. Travail difficile, en effet, et que l'on ne réitéra, avec plus de précision, que relativement récemment entre 1736 et 1743, et pour une autre raison en fait. Entre temps, bien sûr, la révolution copernicienne avait fait son oeuvre, les six planètes connues avaient été, depuis Galilée, observées à la lunette et l'on avait remarqué que Jupiter était aplati. Traitant alors la septième, la Terre "*ut possi una errantium syderum existimari*" (*de sorte qu'elle puisse être considérée comme l'un des corps célestes* - Copernic), Newton, entre 1665 et 1687 (date à laquelle il publie, dans ses Principes, la théorie de la gravitation universelle) prédit que la Terre devait être aussi aplatie ; il calcula même une valeur de cet aplatissement : $1/575$, en traitant notre planète comme un fluide. Ceci était d'ailleurs corroboré par des mesures faites en Guyane par Richer en 1672, démontrant que la gravité (après correction de l'effet de force centrifuge) était moins importante à Cayenne qu'à Paris. Malheureusement à cette époque, les Cassini (père et fils) avaient mesuré un arc de méridien et les résultats, faisant de la Terre un oeuf aplati ayant pour grand axe celui des pôles, allaient à l'encontre de la théorie de Newton. Il fallut, comme on le sait, que fussent organisées les expéditions de Bouguer et LaCondamine au Pérou, et de Maupertuis et Clairaut en Laponie, pour que l'on reconnût le bien-fondé des calculs de Newton. Ces mesures, de deux arcs de méridiens à des latitudes différentes, couronnaient véritablement des méthodes dont les principes, bien qu'aujourd'hui généralisés à d'autres situations, restent ceux de la géodésie moderne. Comme l'avait écrit L'abbé Picard (1670) : "c'est en ces occasions qu'on est obligé de chercher dans le ciel la mesure de la Terre" ... mais n'était-ce pas déjà ce qu'Eratosthène avait fait en 220 avant J.C. ?

A partir du milieu du XVIII^{ème} siècle, les choses vont alors très vite. Les physiciens vont chercher à raffiner la valeur et l'explication de l'aplatissement terrestre. Colin Mac-Laurin démontre, en 1740, que l'ellipsoïde de révolution aplati est la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation ; puis Clairaut (1743) précise la valeur de l'aplatissement en fonction de la vitesse de rotation et de la pesanteur en un point (à l'équateur).

Pendant plus de deux siècles, l'on va s'acharner, les progrès dans les appareils de mesure aidant, à calculer de meilleures valeurs du demi-grand axe équatorial et de l'aplatissement de l'ellipsoïde de révolution représentant au mieux la forme de la Terre, abstraction faite bien sûr des irrégularités topographiques de sa surface qui n'ont, à cette échelle, qu'un effet très local. Il est hors de question de citer ici tous ces travaux, essentiellement effectués grâce à l'amélioration et l'extension des méthodes de la triangulation classique. Les résultats les plus marquants sont ceux obtenus par Delambre (1810), Bessel (1841), Clarke (1888), puis par F. Helmert en 1901 (essentiellement par la gravimétrie, c'est-à-dire l'étude et la mesure du champ de pesanteur), également par Hayford (1909). Le but poursuivi n'était pas seulement d'ordre métrologique, mais la mise en place d'un « meilleur ellipsoïde » était jugée nécessaire à l'établissement rigoureux des cartes topographiques de plus en plus étendues, travail lui-même fondé sur des réseaux de points complètement définis en position par rapport à une surface mathématique (l'ellipsoïde, justement) : c'est encore aujourd'hui une des fonctions de la géodésie. Un but tout aussi essentiel et nécessaire, la précision augmentant, par le premier, comme nous le verrons, est maintenant la détermination, en direction et en intensité, du *champ de pesanteur terrestre* en tous les points de la Terre. Les développements dans ce domaine s'opèrent suivant deux tendances : un intérêt pratique immédiat (par exemple à petite échelle, la reconnaissance géologique du sous-sol, l'aide à la prospection minière), un intérêt scientifique à plusieurs volets : la connaissance de la forme de la Terre et des variations de son champ de pesanteur

d'un point à l'autre est maintenant indispensable pour tout travail précis dans le domaine spatial (trajectoire des satellites artificiels, repérage d'engins, astronomie de position) ; cela permet aussi, allié à d'autres types d'informations (magnétiques, sismiques...) l'élaboration d'hypothèses géophysiques concernant l'intérieur du globe. Enfin cela permet de décrire et modéliser la circulation océanique moyenne par rapport à une équipotentielle privilégiée que nous définirons plus loin.

Mais avant de poursuivre, il nous faut préciser certaines notions fondamentales pour décrire plus correctement comment s'étudient à présent la forme et le champ gravitationnel terrestres.

FORME GÉOMÉTRIQUE ET FORME D'ÉQUILIBRE

Il est de nos jours difficile, si ce n'est en première approximation, de considérer que la Terre est un solide indéformable, les mers, supposées ramenées à leur niveau moyen, faisant partie de ce solide. On sait, par exemple, que les variations d'attraction de la Lune et du Soleil se traduisent par les marées : océaniques et d'amplitudes notables (mais difficiles à mesurer et modéliser) en ce qui concerne les mers ; terrestres et d'amplitudes plus faibles (quelques décimètres) pour ce qui est du "solide" élastique. A l'échelle de quelques décennies (à cause, surtout, des termes périodiques de 18 ans environ dus aux marées lunaires) on peut ainsi parler de forme « moyennée ». Sur des intervalles de temps beaucoup plus longs, on se heurte encore à des variations, mais beaucoup plus petites (< 1 millimètre) et dans tous les cas il existe des variations non périodiques, par exemple celles dues aux mouvements des continents portés par les plaques lithosphériques (quelques centimètres par an). Parler de la forme et du champ gravitationnel terrestres nécessite donc d'introduire le facteur temps, d'où une géodésie moderne quadri-dimensionnelle dans laquelle il faut déterminer non seulement la position de points (trois coordonnées d'espace à une époque donnée) mais aussi leurs variations temporelles. Ce domaine variationnel nous conduirait trop en dehors du sujet ici traité ; aussi nous limiterons-nous à une vue moyennée à l'échelle humaine, mais quasi instantanée à l'échelle géologique.

La forme géométrique de cette Terre ainsi figée peut être appréhendée par les coordonnées cartésiennes de points sur la surface topographique. Mathématiquement cela ne pose pas de problème, mais c'est la concrétisation, la détermination de ces coordonnées qui se sont longtemps heurtées à des difficultés que seules les techniques spatiales ont à peu près bien résolues (des problèmes d'une autre nature sont apparus avec la prise en compte des variations dans le temps). Une fois le problème surmonté, un ellipsoïde n'a lieu d'intervenir, dans la pratique, que pour la cartographie, c'est-à-dire pour préciser la longitude, la latitude et l'altitude. Mais quelle longitude, quelle latitude, et surtout quelle altitude ? Nous verrons ci-après comment la géodésie "cartographique" a hérité, obligatoirement, d'une altitude non point comptée par rapport à un ellipsoïde de référence, mais par rapport à une surface, le géoïde, dépendant du champ réel de la pesanteur terrestre.

Ceci nous amène donc à nous préoccuper des variations spatiales de celle-ci. Rappelons tout d'abord que la *pesanteur* \vec{p} est la résultante de deux accélérations : une accélération centrifuge \vec{c} due à la rotation de la Terre, et une accélération gravitationnelle \vec{g} (newtonienne) due à l'ensemble des masses terrestres (c'est-à-dire l'accélération gravitationnelle locale qui reste après soustraction des accélérations différentielles d'attraction

de la Lune et du Soleil) ; cette dernière porte le nom de *gravité*. Les deux vecteurs dérivent de fonctions de force que, traditionnellement dans cette discipline (et contrairement à l'usage en mécanique), on qualifie de potentiels : potentiel centrifuge C , potentiel gravitationnel U , si bien que $\vec{p} = -gradW$, W désignant la somme $U + C$. Attention : les anglo-saxons utilisent en général le symbole \vec{g} à la place de \vec{p} , c'est-à-dire pour désigner la somme $\vec{g} + \vec{c}$. Dès la fin du XVIII^{ème} siècle, Laplace et Gauss reconnurent que le niveau moyen des mers devait être une équipotentielle de W , et Gauss proposa que cette surface d'équilibre (prolongée, donc, sous les terres émergées) serve d'approximation à la forme de la Terre et soit une référence pour la géodésie : le principe est que, dans la lignée des idées de Newton pour définir la forme de la Terre, il convient de l'assimiler à une surface qui, tout en épousant au mieux la planète indépendamment de ses accidents géographiques, se rapporte à une propriété intrinsèque globale. C'est à cette surface que le géodésien Allemand Listing donna le nom de *géoïde*. Dans les régions océaniques, si l'on néglige (ou si l'on soustrait) les effets perturbateurs tels que vents, vagues, courants marins, ... l'on comprend bien que le géoïde coïncide avec la surface géométrique de cette partie de la Terre. Pour le matérialiser pratiquement sous les terres, il faut faire appel aux lignes de champ (visualisé en un lieu par la verticale) qui, lui étant orthogonales, permettent de le prolonger de proche en proche ; pour en connaître la position, il faut corriger la surface topographique de l'altitude donnée par le nivellement (cette méthode n'est pas tout à fait rigoureuse et on distingue du géoïde la surface ainsi obtenue, qui en diffère de quelques centimètres au plus, en l'appelant *quasi-géoïde*).

QUELQUES GRANDEURS FONDAMENTALES DE LA GEODESIE - METHODES CLASSIQUES

Conformément à ce qui précède, nous distinguerons les grandeurs purement géométriques et celles faisant intervenir le champ de pesanteur.

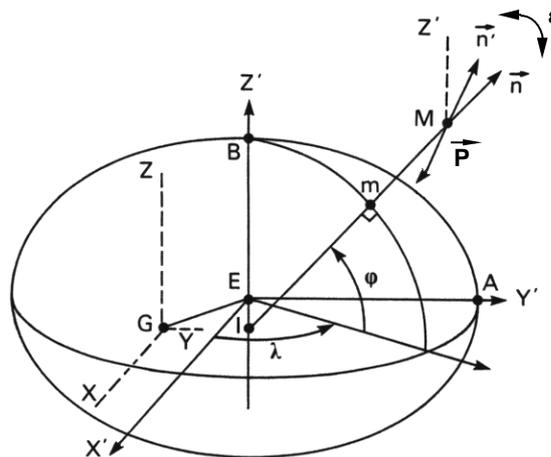


Fig. 1. Coordonnées cartésiennes (xyz) et ellipsoïdales (φ, λ, h) , $EA = a =$ demi-grand axe ; $EB = b =$ demi-petit axe ; l'aplatissement est $\alpha = (a - b)/a$; $(x' y' z')$ est déduit par translation de (xyz) ; \vec{n} : normale à l'ellipsoïde ; \vec{n}' : verticale locale définie par $\vec{p}(M)$; $\overline{mM} = h$: altitude (sur \vec{n}).

Un point M à la surface de la Terre, ou proche de celle-ci, peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (xyz) dans un système de référence, par exemple fixe par rapport à

la Terre si l'on ne s'intéresse pas à son mouvement de rotation et si l'on néglige les variations temporelles dont il a été brièvement question ci-dessus (*fig. 1*) ; en général l'axe z est parallèle à l'axe moyen de rotation, le plan xz est le méridien moyen de Greenwich (origine des longitudes λ) et l'origine du système est idéalement placée au centre de gravité de la Terre G (implicitement matérialisable par l'emploi de méthodes dynamiques spatiales - voir ci-après). On peut aussi employer des coordonnées ellipsoïdales (λ : longitude, φ : latitude, h : altitude ellipsoïdale) relatives à un ellipsoïde de référence ; celui-ci, de centre E , a une taille (demi-grand axe, aplatissement) donnée, son petit axe parallèle à Gz , et est mis en place à partir d'un point fondamental P_0 , *a priori* arbitraire, où l'on décide que sa normale en ce lieu coïncide avec la verticale locale (matérialisée par le fil à plomb, par exemple). Intervient donc déjà, et surtout pour la suite, le champ de pesanteur.

Comme nous l'avons dit, ce champ est caractérisé au point M par $\vec{p} = \vec{p}(M)$, ou encore par sa direction (Φ = latitude astronomique : angle de $\vec{n}' = -\vec{p}(M) / \|\vec{p}(M)\|$, avec le plan équatorial ; Λ = longitude astronomique : angle du plan $[\vec{n}', \vec{M}_z']$ avec le plan de référence xz) et son module, p . Ces coordonnées (Φ, Λ) se mesurent par des méthodes astronomiques classiques (déterminations méridiennes : passages supérieur et inférieur de la Polaire, culmination d'étoiles - l'heure devant être connue car donnant le temps sidéral ; les instruments mesurant les quantités géométriques sont calés sur la verticale locale). En dehors du point fondamental, les coordonnées ellipsoïdales — que l'on appelle alors géodésiques — n'ont aucune raison de coïncider avec les coordonnées astronomiques, ne serait-ce qu'à cause des variations en direction du vecteur \vec{p} , que l'on appelle *déviations de la verticale*, angle noté ε et que, l'espace à trois dimensions oblige, on représente par deux angles : ξ dans la direction Sud-Nord et η en allant de l'Ouest vers l'Est (*fig. 2*).

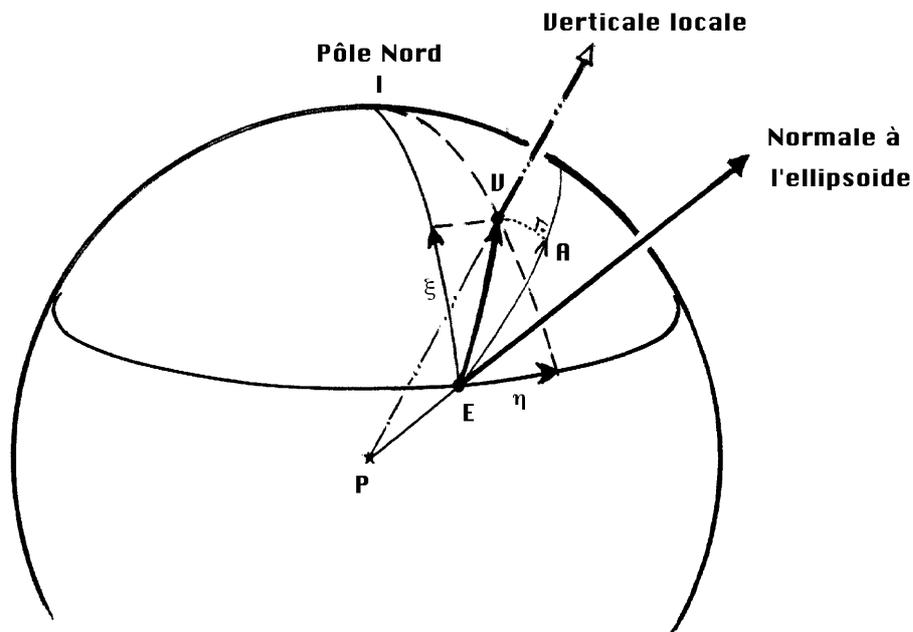


Fig. 2. Représentation de la déviation de la verticale $\varepsilon = (\overline{PE}, \overline{PV})$ en un lieu donné P, sur une sphère unité centrée en P. Les latitudes et longitudes astronomiques (Φ, Λ) et géodésiques (φ, λ) sont

liées par : $\xi = \Phi - \varphi$, $\eta = (A - \lambda) \cos \varphi$. Projetée sur une direction d'azimut quelconque $\alpha = (EI, EA)$, la déviation de la verticale a pour valeur $(PE, PA) = \varepsilon_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$.

L'équivalent de h , l'altitude ellipsoïdale, est « simplement » la hauteur H par rapport au géoïde, mesurable en théorie par cheminement à partir d'un point de référence qui peut être le point fondamental P_0 ou tout autre point. Dans la pratique, les géodésiens partent d'un point matérialisé Z_0 au niveau (moyen) de la mer ; en France, ce repère, situé au marégraphe de Marseille est comparé au niveau moyen de la Méditerranée ; par ce repère passe le géoïde par convention. En fait, la grandeur rigoureuse en nivellement ne peut être H , car cette cote n'est pas accessible à la mesure à cause de la déviation de la verticale, variable d'un point à un autre. Il n'est pour s'en convaincre que de considérer le cheminement de Z_0 en A sur la figure 3, en passant par un point B . La mesure dépend du point B considéré du fait de la courbure des lignes de champ. Il a donc fallu trouver une quantité qui soit indépendante du chemin choisi ; c'est la *cote géopotentielle*, Γ , égale à la variation de potentiel de pesanteur, telle que $\Gamma(A) = W(Z_0) - W(A)$. L'altitude conventionnelle en A , ou *orthométrique*, est alors obtenue en divisant $\Gamma(A)$ par la pesanteur moyenne entre Z_0 et A , et représente la longueur de l'arc de ligne de champ entre A et A_0 (sur le géoïde - fig. 3.b). Sa détermination nécessite donc la mesure des dénivelées dH de point en point entre Z_0 et A , ainsi que la mesure de la pesanteur p en chacun de ces points ; cette dernière s'effectue à l'aide de gravimètres. Les appareils utilisés pour ce type d'opération — ainsi que pour la prospection géophysique et les mesures systématiques de la pesanteur qui contribuent, nous en reparlerons, à la connaissance globale du champ — sont des gravimètres relatifs, sorte de balances que l'on doit bien sûr calibrer en des points de référence. Certains de ces points sont en principe des sites où des mesures absolues de la pesanteur ont été effectuées, autrefois à l'aide de pendules, de nos jours en mesurant avec une très haute précision, suivant le principe de Galilée, des intervalles de temps très courts séparant les différents passages d'un mobile, lâché dans le champ de pesanteur, à des niveaux fixés dans un appareil ; la précision atteinte à ce jour (grâce aux gravimètres absolus, dérivés de l'instrument de Sakuma construit par le *Bureau International des Poids et Mesures* à la fin des années soixante) est de l'ordre de quelques 10^{-8} ms^{-2} , ce que l'on appelle couramment 1 microgal (le gal, dénommé ainsi en l'honneur de Galilée, vaut 1 cm/s^2 ; la pesanteur moyenne sur Terre vaut 980 gals environ ; les variations usuelles de pesanteur au niveau de la mer, dues aux fluctuations internes de densité, sont de quelques dizaines à centaines de milligals au plus (le géoïde n'est pas une surface d'équi-pesanteur, bien entendu).

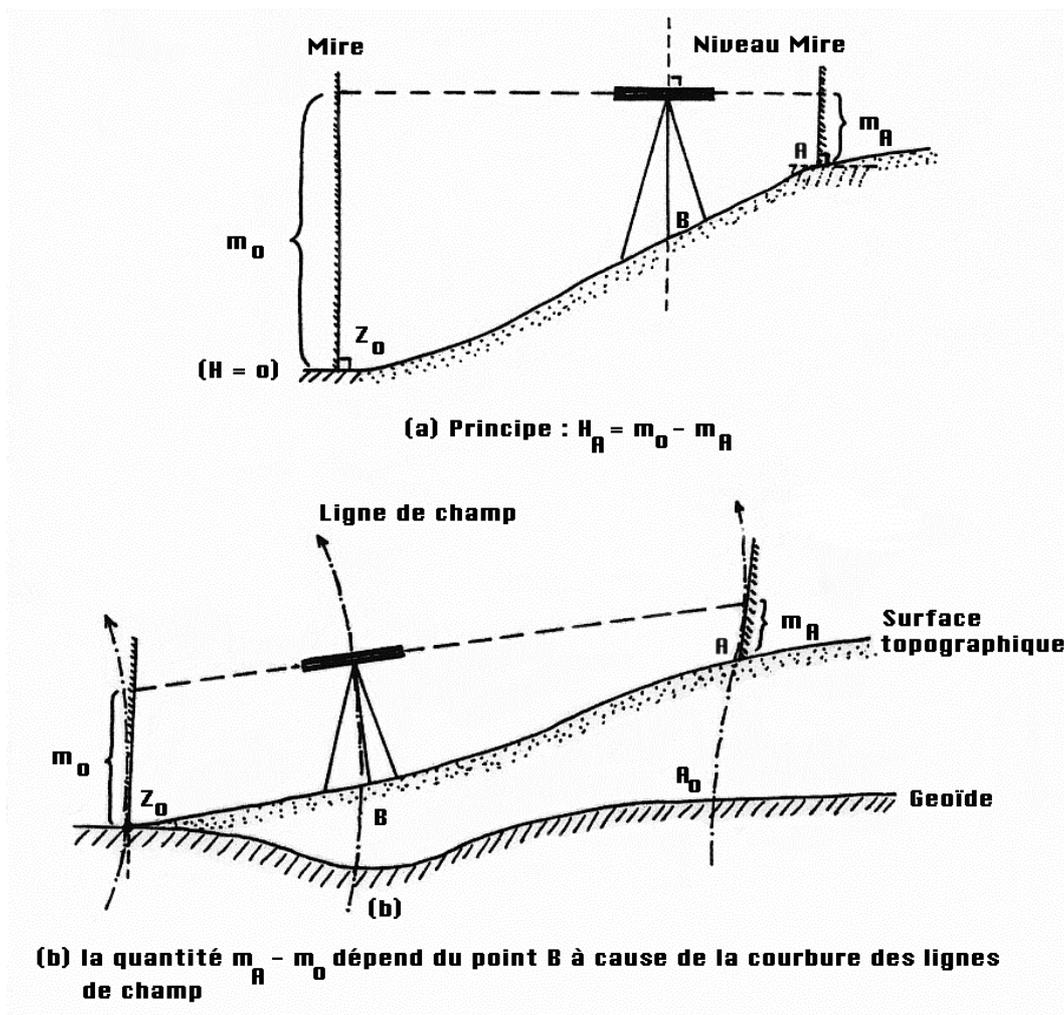


Fig. 3. L'impossibilité de mesurer l'altitude géométrique h par rapport au géoïde. L'altitude

conventionnelle est $H_A = \frac{1}{\bar{p}} \int_{Z_0}^A p dH$, \bar{p} étant la pesanteur moyenne entre Z_0 et A .

Se pose enfin le problème de relier complètement les deux jeux de coordonnées (φ, λ, h) et (Φ, Λ, H) c'est-à-dire de cartographier le géoïde ; ceci nécessite la connaissance des composantes (ξ, η) de la déviation de verticale, ainsi que la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde : N (voir fig. 4).

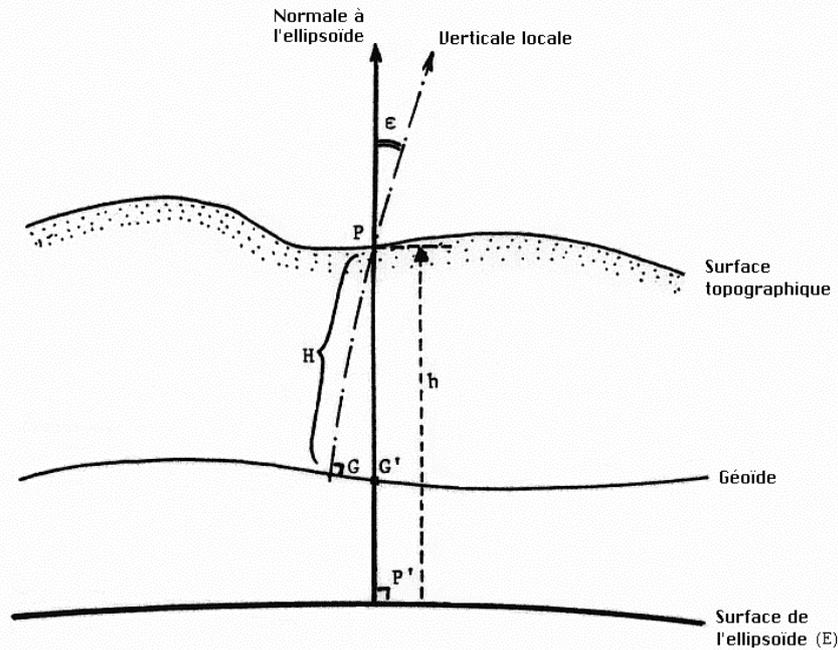


Fig. 4. Pour positionner le géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence, on peut négliger l'écart GG' et écrire : $h = H + N$, où $N = \overline{P'G'}$. L'anomalie de gravité à l'air libre, au niveau du géoïde, est : $\Delta g = p(G') - p_E(P')$, si (E) est un ellipsoïde dynamique, avec : $p(G') \approx p(P) \left[1 + 2h/\overline{R} \right]$, \overline{R} : rayon moyen terrestre. p_E est la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde qui dépend des caractéristiques de celui-ci ; par exemple :

$$p_E = 978,03267 (1 + 0,0052789 \sin^2 \varphi + 0,000023295 \sin^4 \varphi \dots)$$

(en gal), pour l'ellipsoïde de référence GRS80 ($GM = 398\,600,5 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, $a = 6\,378\,137$ mètres, $\alpha = 1/298,2572$, $\omega = 7,291\,115 \cdot 10^{-5}$ radians par seconde = vitesse angulaire moyenne de rotation sidérale de la Terre).

Le procédé, appelé *nivellement astrogéodésique*, est illustré sur la figure 5 : à partir du point fondamental P_0 , on établit un réseau de points P_1, P_2, \dots , et leurs images P'_1, P'_2, \dots au pied de leur normale à l'ellipsoïde sur celui-ci. La mesure de la distance horizontale d_0 entre P_0 et la verticale à P_1 (c'est-à-dire dans un plan orthogonal à la normale-verticale en P_0), de l'azimut astronomique $\alpha_{0,a}$, et de la dénivelée en P_1 permet géométriquement de localiser P'_1 c'est-à-dire de calculer (φ_1, λ_1) . On mesure alors astronomiquement (Φ_1, Λ_1) d'où les composantes (ξ_1, η_1) de déviation de verticale en ce lieu. La hauteur du géoïde $N_1 = \overline{P'_1G'_1}$ s'obtient par intégration de la relation $dN = -\theta ds$ le long du chemin P'_0P_1 , avec $\theta = \xi \cos \alpha_{0,a} + \eta \sin \alpha_{0,a}$ (déviations de la verticale dans la direction $\alpha_{0,a}$ — cf. fig. 2) et où ds est l'élément d'abscisse curviligne entre P'_0 et P'_1 . Finalement $h_1 = H_1 + N_1$ (H_1 étant l'altitude conventionnelle calculée d'après les mesures de nivellement). On procède de même à partir de P_2 mais cette fois il faut corriger l'azimut astronomique pour localiser P'_2 car $\alpha_{1,a} \neq \alpha_{1,g}$, etc... On détermine donc un réseau de points de base P_i , à partir desquels une cartographie plus dense peut être éventuellement dressée (par triangulation). Rigoureusement, la réduction

des mesures horizontales d_i et $\alpha_{i,a}$ sur l'ellipsoïde nécessite une préconnaissance de ξ , η et N ; on peut se satisfaire de valeurs approchées (par exemple obtenues par gravimétrie) ou résoudre le problème par approximations successives. Le résultat important pour nous, ici, est l'obtention de la forme du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence choisi. Des générations de géodésiens ont travaillé à raffiner le procédé, jusqu'à ce que la facilité d'emploi des gravimètres, qui a conduit à mesurer le module de la pesanteur, p , en des centaines de milliers, et même aujourd'hui des millions de points (la banque mondiale de ces données est à Toulouse, au Bureau Gravimétrique International), permette une autre approche du problème grâce à la formule établie par Stokes en 1849, laquelle était restée bien théorique pendant longtemps, faute de mesures en nombre suffisant. Cette formule donne, sous forme intégrale étendue à toute la Terre, le paramètre N en fonction des anomalies de gravité à l'air libre, Δg , que nous allons définir.

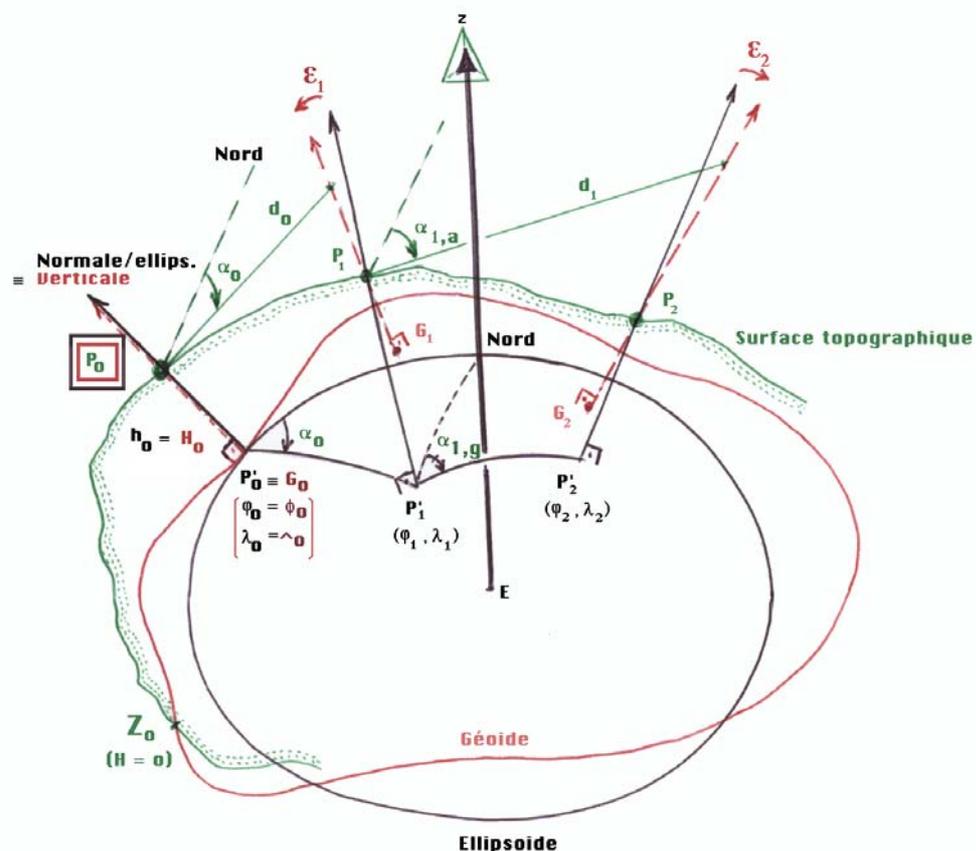


Fig. 5. Principe du nivellement astrogéodésique : établissement d'un réseau de points $P_0, P_1, P_2...$ à partir du point fondamental P_0 en lequel latitude et longitude géodésiques sont respectivement égales à leurs homologues astronomiques (mesurées) : en P_0 , verticale et normale à l'ellipsoïde coïncident. Les altitudes conventionnelles $H_i (= G_i P_i)$ sont mesurées par nivellement horizontal, ainsi que les distances d_i et les azimuts astronomiques $\alpha_{i,a}$. Les azimuts géodésiques $\alpha_{i,g}$ en sont différents (ils vérifient $\alpha_{i,a} - \alpha_{i,g} = \eta_i \operatorname{tg} \varphi_i$), sauf au point fondamental ($\alpha_{0,a} = \alpha_{0,g} = \alpha_0$). La connaissance de $d_i, \alpha_{i,g}, \alpha_{i,a}$ et H_i permet de positionner P_i' à partir de P_i et P_{i-1}' . On mesure Φ_i, Λ_i en P_i ; on en déduit (ξ_i, η_i) : les composantes de la déviation de verticale en ce point (voir fig. 2), puis la hauteur du géoïde $N_i = P_i' G_i$ par intégration depuis le point de départ.

En très bonne approximation, Δg en un lieu donné (*fig. 4*) est la différence entre la pesanteur mesurée en P réduite au point G' , ou G (grâce à H obtenu par nivellement) et une pesanteur théorique p_E calculable, et calculée, au point P' , accélération due à l'attraction gravitationnelle d'un ellipsoïde de référence particulier en rotation, et à l'accélération centrifuge causée par cette rotation. Cet ellipsoïde, que l'on qualifie de « dynamique », n'a pas grand chose à voir avec un des multiples ellipsoïde de référence que l'on peut mettre en place, nous l'avons vu, à partir d'un point fondamental ; par définition, son centre coïncide avec le centre de masse du globe réel, sa masse est donnée (égale à celle de la Terre), il tourne bien sûr autour de son petit axe le long de l'axe des pôles moyens avec la même vitesse angulaire moyenne que la Terre réelle et, de plus, sa surface est une équipotentielle de son propre potentiel de pesanteur $W_E = U_E + C$ (U_E est la partie purement gravitationnelle). De même que précédemment, $\vec{\nabla} n$ a donc $\vec{\nabla} p_E = -grad W_E$. Ainsi : $\Delta g = p(G') - p_E(P')$. En fait on utilise de nos jours une anomalie de gravité légèrement différente qui évite la réduction de p au géoïde — qui en principe requiert la connaissance du gradient vertical exact de cette quantité et donc de la masse volumique de la topographie. Le choix de l'ellipsoïde *dynamique* se fait par l'adoption de quatre paramètres : son demi-grand axe a , son aplatissement α_D , sa vitesse angulaire moyenne ω , sa masse (ou plutôt le produit GM de sa masse M par la constante de la gravitation G). Par dérivation de la formule de Stokes, on obtient une autre formule intégrale (dite de Vening Meinesz) qui permet de calculer les composantes de la déviation de verticale à partir du champ Δg seul. Enfin, il existe une équation intégrale inverse de celle de Stokes, appelée première équation de Molodensky — du nom du mathématicien soviétique qui l'établit vers 1960 — qui permet de restituer les anomalies de gravité, et donc la pesanteur en tout point, à partir de l'observation de la hauteur du géoïde N . En principe toutes ces formules intégrales requièrent la connaissance partout de la quantité physique utilisée dans l'intégrande ; dans la pratique, et grâce maintenant aux modèles globaux de *géopotential* (le potentiel gravitationnel terrestre), une connaissance régionale peut suffire pour des études locales par application d'une technique de retrait-restauration, en tenant en outre compte, pour les détails les plus fins, de modèles numériques du terrain (auquel il faut assigner une certaine masse volumique...).

LES METHODES SPATIALES

La possibilité de s'élever en ballon, puis en avion, jusqu'à plusieurs kilomètres d'altitude, a d'abord permis de relier des points de plus en plus distants les uns des autres tout en étendant les principes de la géodésie classique, de tels points d'altitude très élevée constituant des cibles bien meilleures pour la triangulation et surtout permettant des mesures bien moins sensibles à la réfraction atmosphérique si gênante en nivellement quasi-horizontale. Les satellites artificiels — et même la Lune qui sert de cible géodésique depuis plus de vingt cinq ans — ont ouvert des possibilités tout à fait différentes. D'une part ils constituent des cibles encore plus élevées, visibles simultanément de points très éloignés (parfois de milliers de kilomètres), d'autre part, obéissant aux lois de la mécanique céleste, ils apportent des informations fondamentales sur le champ de gravité, ou encore sur le potentiel U , en supposant que la partie centrifuge C ne pose aucun problème.

Plusieurs techniques ont été utilisées depuis le tout début de l'ère spatiale, qui diffèrent essentiellement par les types de mesures effectuées entre le sol (une station A) et un satellite (point P). La photographie sur fond d'étoiles (avec mesure du temps) donne la direction du vecteur AP dans un système cartésien terrestre. C'est cette technique qui fut la

plus employée, jusque vers 1970, pour la localisation purement géométrique de stations par utilisation d'observations simultanées (ou rendu telles) de direction, une connaissance approximative de la trajectoire du satellite étant suffisante. La figure 6 en donne le principe : deux observations de S_1 effectuées en même temps depuis A et B définissent le plan $S_1 AB$; en répétant cela pour une autre position S_2 (ce peut être un autre satellite) on trouve AB à l'intersection de deux plans. Un polyèdre de directions est obtenu en répétant ces observations d'autres stations. La connaissance d'au moins un côté du polyèdre soit par nivellement terrestre, soit par mesures de distances satellitaires, permet de connaître l'échelle. Ce sont surtout ces dernières qui ont fleuri depuis plus de trois décennies grâce à la télémétrie laser, née en France : en utilisant une station laser au sol et des satellites munis de prismes cataphotes réfléchissants, on effectue des mesures de distance avec une précision (quasi indépendante de l'éloignement du satellite) qui, de 1 à 2 mètres vers 1967, est à présent de quelques millimètres, pour les instruments les plus performants ! Un autre procédé qui, lui, utilise l'effet Doppler, permet en principe de mesurer la vitesse radiale d'un satellite (muni d'un émetteur stable) le long de la direction d'observation, et permet aussi, à travers l'information (équivalente) de différence de distances qu'il fournit, de procéder à des localisations quasi-géométriques de stations. Le principe peut être inversé, la station émettant vers le satellite : c'est le cas du système français DORIS. Dans le cas de mesures de distance seules, des observations simultanées depuis quatre stations permettent, trois d'entre elles étant connues, de positionner la quatrième par intersection de sphères ; dans le cas de mesures Doppler, ce sont des hyperboloïdes qui, dans le principe tout au moins, conduisent à cette localisation par intersections...

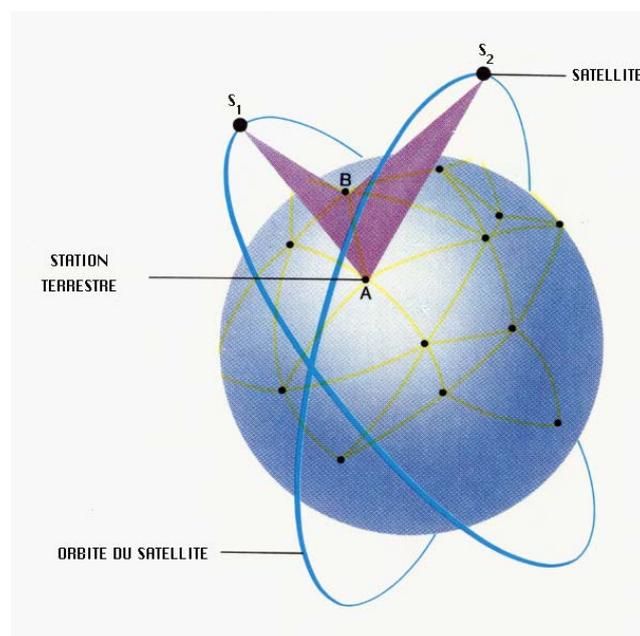


Fig. 6. Principe de la triangulation par satellite avec mesures de direction (méthode géométrique simultanée). A , B observant S_1 en même temps, puis S_2 , définissent les plans ABS_1 et ABS_2 : AB se trouve à leur intersection. La détermination est affinée par un grand nombre d'observations pour s'affranchir au mieux des erreurs de mesure.

Ces procédés géométriques qui fournissent, en un certain nombre de points, des informations sur la forme extérieure de la Terre (non sur le géoïde) ont pour avantage de se satisfaire de trajectoires de satellites mal connues (autrement dit de modèles de forces, en

particulier du potentiel de gravitation U , très approximatifs) mais pour inconvénient une lourdeur due à la programmation des événements en simultanéité d'où le petit nombre de stations qui furent ainsi localisées — mais avec une précision, il est vrai, bien supérieure, sur de grandes distances, à ce que peut offrir la géodésie classique. D'où l'avènement très tôt (dès 1965) de *méthodes dynamiques* dans lesquelles on traite simultanément « toutes » les inconnues : des paramètres décrivant le géopotential ; les coordonnées de stations de mesure ; des éléments “initiaux” (coordonnées et vitesse) des satellites observés à des instants choisis comme origine sur chaque arc de trajectoire traité (arc au sens large — d'une fraction à plusieurs centaines de révolutions moyennes). Les calculs sont alors très complexes mais ils permettent d'exploiter toutes les mesures effectuées.

Cependant il existe une limitation intrinsèque à la détermination de certaines inconnues, en particulier celles permettant de représenter le géopotential global, qui est fonction de la couverture observationnelle des orbites de satellites artificiels pris en compte. On comprend aisément que plus l'altitude moyenne (les orbites utilisées sont en majorité très faiblement excentriques) est basse, plus il faut de stations d'observation bien réparties pour observer le satellite, jusqu'à une résolution spatio-temporelle qui dépend de la finesse avec laquelle on veut calculer un modèle (qui dépend aussi, bien entendu, de la précision des mesures). Pour les applications de type positionnement, on a également besoin de trajectoires de plus en plus précises, dont la qualité dépend elle-même de la densité des observations. La présence d'océans sur Terre constitue une barrière infranchissable à l'obtention d'une couverture totale pour les orbites très basses. Aussi l'idée est-elle apparue de remplacer des stations au sol par des satellites d'altitude très élevée dont les trajectoires seraient faciles à reconstruire du fait de la petitesse des perturbations subies (à cause de la grande distance à la Terre). Le système de radio-positionnement par satellite NAVSTAR-GPS (NAVigation Satellite Timing And Ranging - Global Positioning System) a ainsi été conçu et développé par le Département de la Défense Américain en coopération avec le Département des Transports, pour des applications militaires et civiles de navigation. Ce système est officiellement opérationnel depuis 1994 bien que le premier satellite expérimental ait été lancé en 1978 et que les premiers travaux scientifiques issus du traitement de mesures GPS aient été entrepris dès le début des années 1980. Le NAVSTAR-GPS est constitué :

- *d'un segment spatial* composé d'une constellation de 24 satellites qui assure une couverture géographique globale. Chacun de ces satellites émet en permanence un signal constitué des composantes “mesure” et “message de navigation”. La composante “mesure” permet d'extraire une information de pseudo-distance (en fait un temps de propagation) ainsi que de phases des deux porteuses des signaux émis (aux fréquences, L1 et L2, de valeurs respectives 1 575, 42 MHz et 1 227,60 MHz).
- *d'un segment utilisateur* constitué par l'ensemble des récepteurs capables d'interpréter le signal des satellites pour calculer en temps réel et de façon autonome leur position.
- *d'un segment de contrôle* qui, génère et transmet aux satellites le “message de navigation” (éphémérides et corrections de synchronisation d'horloges des satellites) et définit l'échelle de temps GPS.

Les technologies développées aujourd'hui permettent aux récepteurs GPS sols et embarqués d'accéder à une précision décimétrique pour les mesures de pseudo-distance et

sub-centimétrique pour les mesures de phase, soit des performances au moins équivalentes à celles des systèmes terrestres.

Pour étudier le géopotential, on adopte une représentation mathématique, généralement en série d'harmoniques sphériques dans un système de coordonnées (sphériques) lié à la Terre - *fig. 7*, qui fait intervenir des coefficients dépendant, sous forme intégrée, de la forme et de la structure interne de notre planète. Ces paramètres se scindent en deux catégories : les harmoniques zonaux J_l (dits de degré $l...$ et d'ordre 0) qui caractérisent des variations de forme et de densité moyennées en longitude (d'où une dépendance en latitude, seulement, pour cette partie), et les harmoniques tesséraux : C_{lm}, S_{lm} (de degré l et d'ordre m) qui permettent de décrire aussi des variations en longitude. Connaître U , c'est calculer les harmoniques de cette représentation. Pratiquement la série est tronquée à un degré (et ordre) maximum L , déterminé par la sensibilité (et la couverture) des observations effectuées ce qui, du point de vue de l'information représentée, correspond à une résolution minimum de 20 000 km/ L (résolution théorique à l'équateur).

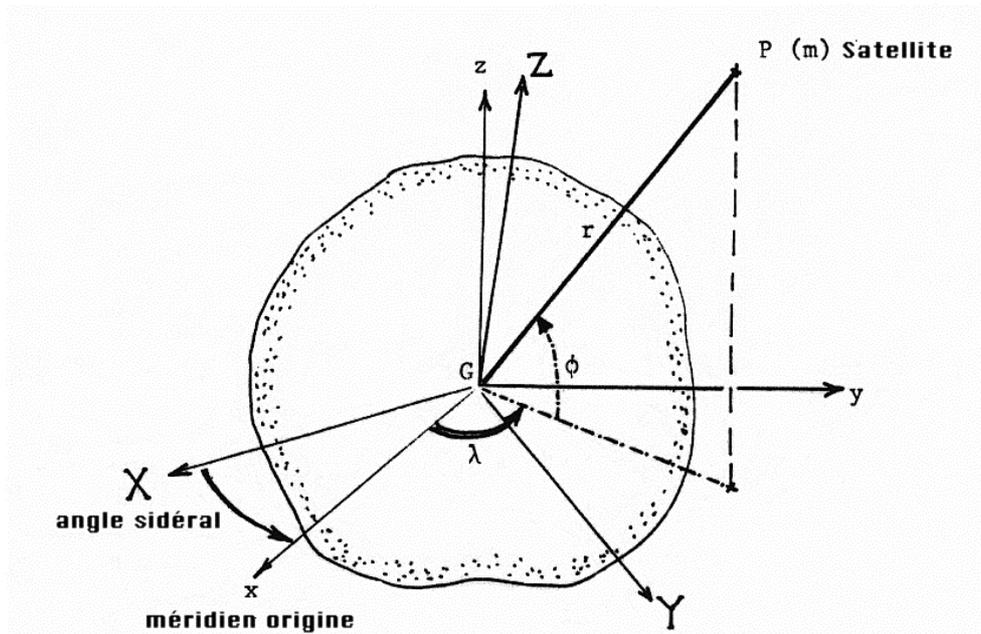


Fig. 7. Expression du potentiel de gravitation terrestre, U , dans le système terrestre (x, y, z)

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left[\frac{R}{r} \right]^l \left[-J_l P_l(\sin \varphi) + \sum_{m=1}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_m(\sin \varphi) \right]$$

G : constante de la gravitation, M : masse de la Terre, R : rayon d'une sphère contenant le globe. J_l : harmoniques zonaux ; C_{lm}, S_{lm} : harmoniques tesséraux, P_l, P_{lm} : polynômes et fonctions associées de Legendre. L'équation fondamentale de la dynamique, sous la forme

$md^2 \vec{GP} / dt^2 = \sum \vec{\text{forces sur } P}$, est écrite dans un repère galiléen (XYZ) ou lentement mobile et de mouvement bien connu (en introduisant des accélérations complémentaires).

Tout satellite (proche) est donc considéré comme un corps d'épreuve placé dans le champ gravitationnel de notre planète et les lois de la mécanique nous permettent de relier les forces qu'il subit à son mouvement (et aux conditions initiales), et parmi celles-ci les forces de gravitation. Si le potentiel était central (en GM/r , r étant la distance au centre des masses) on sait depuis Kepler et Newton que toute trajectoire à distance finie serait une ellipse de

caractéristiques connues. En fait, la partie complémentaire du géopotentiel (cf. légende de la figure 7) est cause de déformations continues de cette ellipse (fig. 8). L'analyse des perturbations orbitales est un problème de mécanique céleste inverse (qui se résoud par approximations successives) qui conduit au calcul des paramètres des forces à partir de l'observation du mouvement. Ces observations sont de types décrits précédemment et l'on voit comment interviennent toutes les inconnues : harmoniques, stations, conditions initiales de trajectoires, à travers la relation qui transcrit la physique et la géométrie de chaque mesure. La résolution se trouve compliquée du fait que :

(i) d'autres forces perturbatrices doivent être prises en compte et suffisamment bien modélisées : forces d'attraction de la Lune et du Soleil, forces dues aux marées créées par ces corps, frottement atmosphérique (un des plus gros problèmes, et la limitation de la méthode car l'on est contraint de rester au-delà d'une certaine altitude), pression de radiation solaire-directe et rediffusée par la Terre. Des paramètres physiques entrant dans la description des modèles de ces forces doivent aussi être déterminés ;

(ii) il faut utiliser de nombreux satellites (plusieurs dizaines) pour bien séparer les différents harmoniques par cette technique. Pratiquement, on est obligé de déterminer séparément certains groupes d'inconnues (par exemple les conditions initiales, les coordonnées de certaines stations). La précision croissante des mesures a aussi fait préférer l'intégration numérique des équations différentielles du mouvement et de celles permettant de calculer les inconnues dynamiques, aux méthodes analytiques qui restent néanmoins nécessaires à la compréhension des perturbations rencontrées et pour définir les limites de la méthode [par exemple pour définir le degré maximum L sus-nommé, qui implique un nombre d'harmoniques à déterminer égal à $(L+1)^2$...]. Il va sans dire que cette approche n'a pu vraiment se développer que grâce aux progrès des calculateurs ; le géodésien spatial est un client non négligeable des grands centres de calcul scientifique.

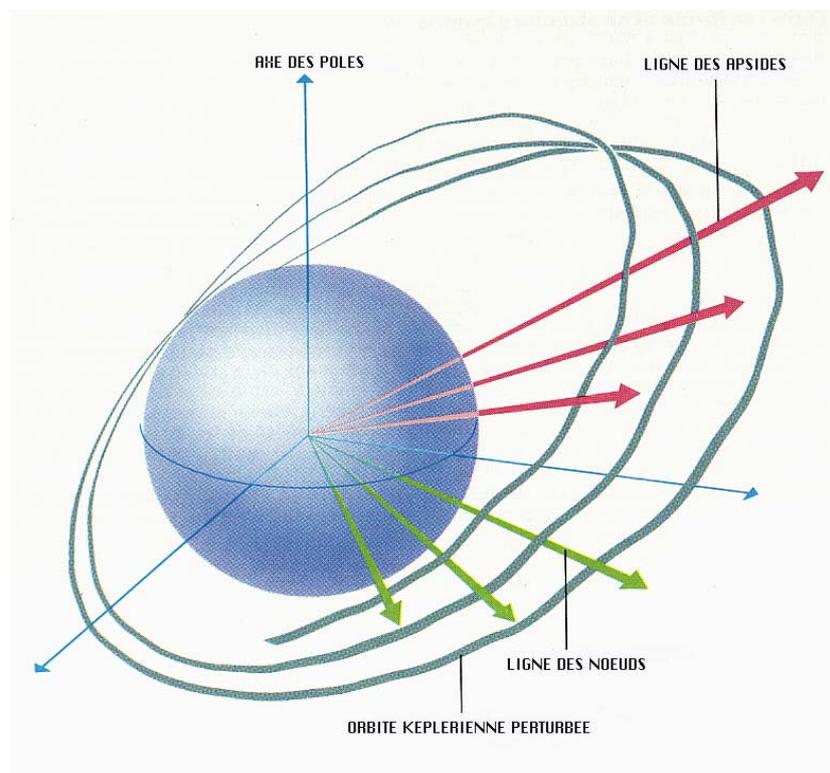


Fig. 8. Orbite képlérienne perturbée : la trajectoire moyenne est une ellipse animée de mouvements de précession autour de l'axe des pôles terrestres et de rotation dans le plan moyen ; à cela se superposent des perturbations périodiques : à courtes périodes (jusqu'à la période orbitale), à moyennes périodes (un à quelques jours) et à longues périodes (plusieurs dizaines à centaines de jours, couramment).

Il est évident que cette approche globale se devait aussi de prendre en compte les informations classiques, en particulier sur le champ de gravitation, recueillies à la surface terrestre, non seulement à titre de vérification (le plus souvent régionale) mais en les intégrant pour le calcul des inconnues. C'est ainsi que les anomalies de gravité Δg déduites des mesures de pesanteur et de nivellement servent à établir des équations supplémentaires reliant les harmoniques du géopotential. On passe pour cela par l'intermédiaire du potentiel perturbateur $T = U - U_E$ auquel Δg est facilement relié, le potentiel U_E de l'ellipsoïde dynamique de référence n'ayant que des harmoniques zonaux de degré pair non nuls, $J_{2n}(E)$, aisément calculables d'après sa définition.

Il y a vingt ans une nouvelle technique de mesure fit son apparition : l'altimétrie par satellite au-dessus des océans, dont le principe est décrit sur la figure 9. L'information sur le géoïde que l'on en déduit, N , est directement liée au potentiel perturbateur par $N = T/p_E$ et chaque mesure (ou groupe de mesures moyennées) fournit donc une équation supplémentaire pour les harmoniques de U . Ainsi, un altimètre à bord du satellite *Geos-3* permit pour la première fois, en 1975, de couvrir presque tous les océans entre les latitudes 65°N et 65°S et de restituer la surface moyenne océanique avec une précision de l'ordre de 0,60 mètre, un record pour l'époque. De même, en 1978, le satellite *Seasat*, qui avait embarqué un altimètre de précision 0,10 mètre, a permis de reconstituer cette surface de 72°N à 72°S cette fois avec une précision moyenne de 0,30 mètre environ. Le passage à la surface du géoïde se fait en soustrayant la topographie de la surface océanique moyenne. De nos jours, la précision des altimètres et des trajectoires des satellites qui les portent (GEOSAT, ERS1, ERS2, TOPEX-POSEIDON) permet d'obtenir la surface océanique avec une précision décimétrique, voire un peu mieux parfois ; ceci conduit à utiliser cette technique pour étudier la variabilité de cette surface. Dans l'avenir et si le géoïde peut être déterminé indépendamment avec une précision bien meilleure (centimétrique), l'altimétrie permettra également d'obtenir la circulation moyenne (absolue) dont la bonne connaissance est indispensable aux études d'évolution du climat. Nous reviendrons sur cette possibilité dans la dernière partie.

La partie gravitationnelle du modèle définit évidemment la forme de la Terre, du géoïde en fait. Le rayon vecteur r en tout point de latitude φ et longitude λ données sur cette surface est calculable à partir de $U(r, \varphi, \lambda) + C(r, \varphi) = \text{Cte}$ (dépendant de valeurs conventionnelles) ou, de manière équivalente, et pour un ellipsoïde choisi, par $N(\varphi, \lambda) = T[r(\varphi), \varphi, \lambda] / p_E$ (formule de Bruns — déjà rencontrée) en tout point de la surface (on peut utiliser la latitude géodésique ou la latitude géocentrique correspondante). Cela est conceptuellement bien plus simple que, par exemple, la détermination astrogéodésique du géoïde que nous avons exposée, mais cache, le lecteur l'a compris, une multitude de problèmes pratiques, physiques et numériques qu'il a fallu résoudre.

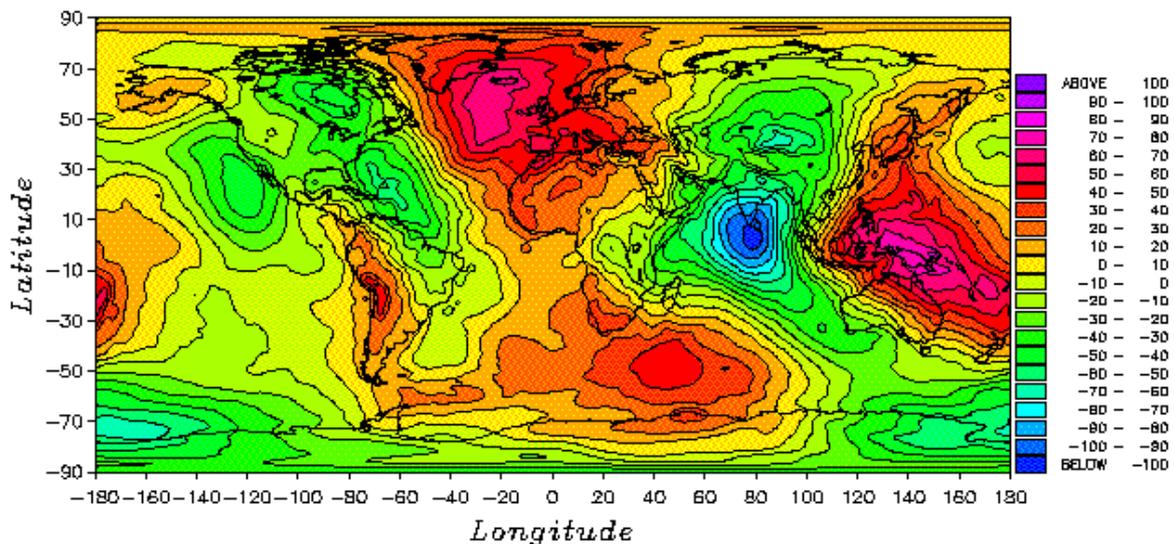


Fig. 10. La forme du géoïde, représentée par son altitude comptée à partir de la surface d'un ellipsoïde dynamique de demi-grand axe $a = 6367137$ mètres d'aplatissement $\alpha_D = 1/298,257$, suivant le modèle franco-allemand GRIM4-C4. Le pas entre les courbes de niveau est de 2 mètres.

La figure 10 représente, en courbes de niveau, les variations de $N(\varphi, \lambda)$ sur une carte mondiale, telles qu'elles sont restituées par le modèle. Bien que la forme soit indépendante de l'ellipsoïde choisi (c'est l'homme qui a introduit cette figure de référence...) une telle carte peut induire le géophysicien en erreur lors de l'interprétation des trous et bosses de la surface, dans le domaine des grandes longueurs d'onde surtout (la longueur d'onde est ici le double de la résolution associée à un développement partiel de U ne comprenant que les termes de degré donné l ; c'est donc $w_1 = 2\pi \bar{R}/l, \bar{R}$: rayon moyen terrestre). Par exemple, l'aplatissement (degré 2) est critique pour faire apparaître ou disparaître certains de ces grands accidents. En géodésie spatiale il est calculé à partir du coefficient zonal J_2 du modèle ($\approx 1,0826 \cdot 10^{-3}$ pour la Terre, tous les autres coefficients décroissant approximativement comme $10^{-5}/l^2$ — sous forme normalisée) ; cette valeur est attribuée à $J_2(E)$; ayant fixé les trois autres paramètres de l'ellipsoïde (GM, a, ω) la théorie de Clairaut permet de calculer α_D ainsi que tous les $J_{2n}(E)$. On a donc dans ce cas un ellipsoïde dynamique qui représente au mieux le champ gravitationnel terrestre avec les hypothèses formulées. Par ailleurs, utilisant les termes de

degré 2 calculés dans le modèle, plus la constante de la précession terrestre qui provient d'observations astronomiques, on peut restituer complètement le tenseur d'inertie ; si l'on fait alors l'hypothèse que la forme de la Terre est celle de la surface libre d'un fluide en rotation (qui se serait figée), les moments d'inertie, la masse et la vitesse angulaire permettent de calculer un aplatissement α_H dit *hydrostatique*, que l'on trouve différent ($\alpha_H \approx 1/299,80$) de α_D voisin, lui, de $1/298,25$. La Terre ne serait donc pas en équilibre hydrostatique, encore faudrait-il savoir bien faire la part des choses, sur l'état du fluide, les mouvements internes de convection ...

Ce dont il faut bien se rendre compte aujourd'hui, c'est de la précision des modèles de géoïde. Les plus grandes longueurs d'onde, associées aux harmoniques de degré 2 à 20 (environ, pour fixer les idées) sont connues avec une précision de quelques centimètres à quelques décimètres et cette précision provient surtout de l'analyse des perturbations orbitales de satellites, notables dans cette tranche de coefficients eu égard à la précision des mesures. Au-delà, l'apport de l'information est plus divisé, et l'imprécision, de nos jours, a pour responsable un manque d'observations gravimétriques sur les terres émergées, dû à des difficultés d'accès sur le terrain, (ou, jusqu'à une époque récente, à une classification exercée par certains pays sur leur territoire pour des raisons diverses), également une mauvaise connaissance de la circulation océanique lorsque l'on utilise les mesures altimétriques en confondant la surface de la mer avec le géoïde (ou en effectuant des corrections insuffisantes). Des méthodes spatiales très différentes de celles que l'on vient de décrire, telles que l'embarquement sur un satellite en orbite polaire basse (≈ 250 km) d'un gradiomètre pour mesurer le tenseur des dérivées secondes de U , permettront dans l'avenir de mieux connaître les fonctionnelles du champ dans ces régions. Pour l'instant, le géoïde dans les zones arctiques et antarctiques, les régions très montagneuses, une partie de l'Afrique, de l'Asie, et de l'Amérique du Sud, est mal connu pour ce qui est des longueurs d'onde inférieures à 2 000 km, les erreurs pouvant atteindre plusieurs mètres. *A contrario*, le géopotential sur les océans est le mieux connu grâce à l'altimétrie spatiale, que ce soit à grande et moyenne longueur d'onde, grâce aux modèles globaux ou à haute résolution (20 à 100 km) lorsque l'on exploite directement l'altimétrie pour cartographier la surface moyenne océanique et de là celle du géoïde, très proche — en supposant le passage de l'une à l'autre faisable, par la connaissance des courants (*fig.* 11) ; on peut en déduire, par l'équation intégrale de Molodensky (souvent traitée en approximation plane - grâce à un modèle global qui en permet la régionalisation, et par l'emploi des transformées de Fourier) les anomalies de gravité Δg , informations plus locales que N (c'est pratiquement une dérivée) : c'est ce qui a été fait récemment par plusieurs auteurs.

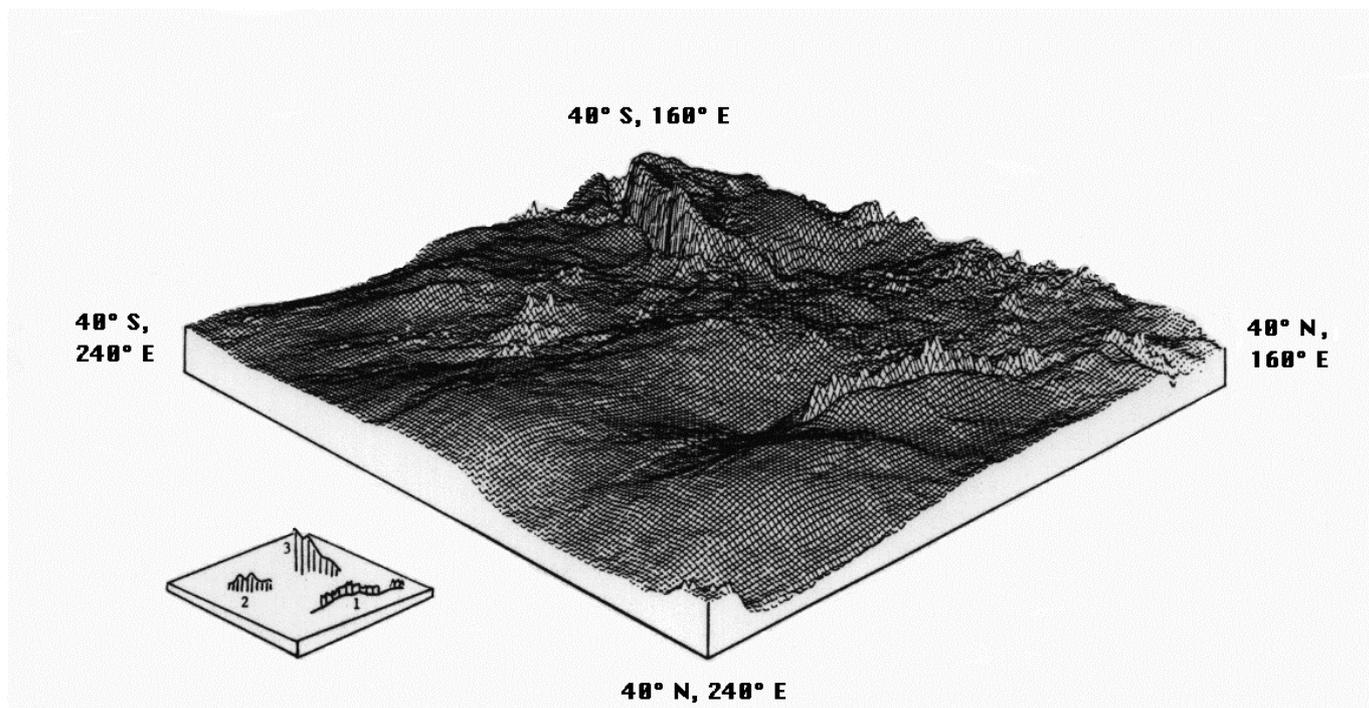


Fig. 11. Un résultat spectaculaire des débuts de l'altimétrie spatiale : la surface du géoïde dans le Pacifique central d'après les mesures altimétriques du satellite *Seasat* (Cazenave et al., GRGS, France, 1984). 1 = Chaîne de Hawaï, 2 = Iles Marquises, 3 = Fosses de Tonga-Kermadec.

La fig. 12 est un exemple d'un tel calcul ; le résultat démontre une corrélation impressionnante avec la topographie sous-marine, en faisant apparaître une technique nouvelle de vérification, voire de prédiction de la bathymétrie.

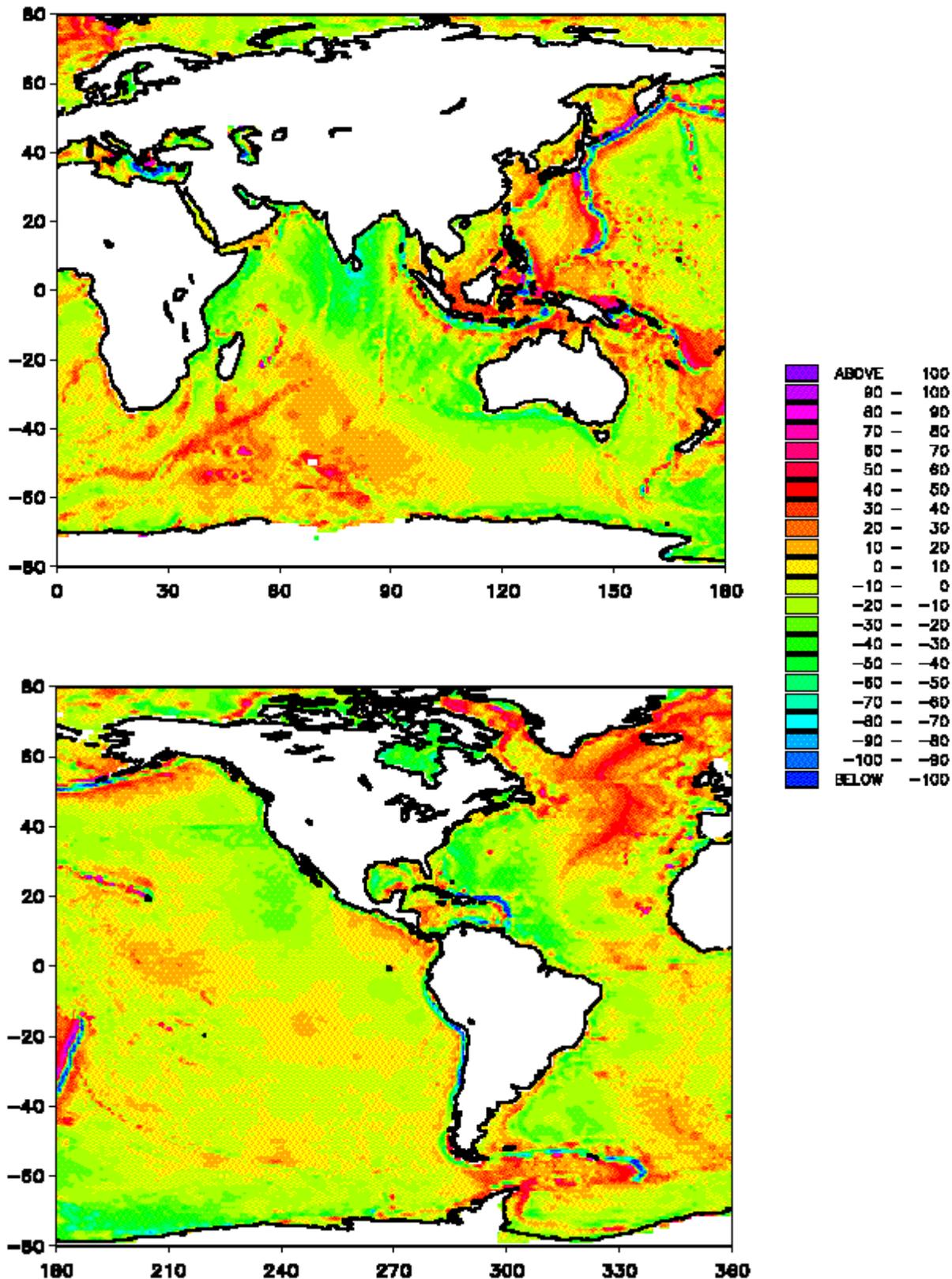


Fig. 12. Les variations d'anomalies de gravité à la surface des océans, restituées à partir des mesures altimétriques des satellites *Geosat* et *ERS1* (d'après P. Knudsen et al., KMS, Danemark, 1996).

C'est ici, par delà la technique, les difficultés résolues et le résultat métrologique, que le géophysicien commence son travail d'interprétation, tout d'abord visuelle, puis l'élaboration de modèles de structure interne et d'évolution.

LES PERSPECTIVES

Les techniques spatiales classiques, bien qu'alliées aux informations recueillies au niveau du sol, s'essoufflent, ne serait-ce qu'à cause de l'atmosphère terrestre qui impose une altitude minimale aux satellites géodésiques (à moins d'embarquer un accéléromètre suffisamment précis pour bien mesurer les forces de surface), également du fait de la couverture gravimétrique, mauvaise ou de qualité insuffisante, sur les continents. De nouvelles méthodes, dont certaines directes par opposition à l'inversion classique des perturbations orbitales, sont en ce moment étudiées, principalement la poursuite de satellite par satellite et la gradiométrie spatiale qui devraient, dans la prochaine décennie, conduire à une connaissance globale du champ de gravité avec une résolution de 100 à 200 km et une précision de quelques milligals. Ce sujet est traité dans le cours numéro (3) intitulé : "concepts modernes, objectifs et projets satellitaires pour la détermination et l'utilisation du champ de gravité terrestre".